311

గణితశాస్త్రము

(ప్రమేయాలు మరియు త్రికోణమితి ప్రమేయాలు, కలనగణితం, సంభావ్యత మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం)

2

గౌరవ సలహాదారులు

శ్రీమతి వాకాటి కరుణ, IAS,
ప్రభుత్వ కార్యదర్శి, విద్యాశాఖ, ప్రభుత్వం తెలంగాణ,
హైదరాబాద్.

సంపాదకులు

డాక్టర్ కె. శ్రీరామ్ రెడ్డి
అసోసియేట్ ప్రొఫెసర్ ఆఫ్ మ్యాథమెటిక్స్, డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ మ్యాథమెటిక్స్,
UCS, ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాద్

పాఠ్యపుస్తకాల ప్రింటింగ్ కౌన్సిల్

శ్రీమతి ఎ. శ్రీదేవసేన, IAS,
డైరెక్టర్, స్కూల్ ఎడ్యుకేషన్, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ పి.వి. శ్రీహరి, డైరెక్టర్,
TOSS, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ ఎస్. శ్రీనివాసా చారి
డైరెక్టర్, టెక్స్‌బుక్ ప్రెస్, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

ముఖ్య సమన్వయకర్త

శ్రీ ఎం. సోమిరెడ్డి
జాయింట్ డైరెక్టర్, TOSS, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

ప్రచురణ

తెలంగాణ ఓపెన్ స్కూల్ సొసైటీ (TOSS), హైదరాబాద్.

© Telangana Open School Society

First Published : 2023

All Rights Reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means without the prior permission, in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover.

Printed in India
at the **Telangana Govt.Text Book Press,**
Mint Compound, Khairathabad, Hyderabad, Telangana.

ముందుమాట

విద్యను పొందడం పిల్లల ప్రాథమిక హక్కు, సమాజ సమగ్రాభివృద్ధికి ఇది ఎంతగానో అవసరం. అటువంటి విద్యను ప్రజలందరికి అందించాలనే దృఢసంకల్పంతో తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం ఉంది. అనేక కారణకాలతో అధికారిక విద్యను పొందలేని పిల్లల కోసం, వారిని విద్యాపరంగా తీర్చిదిద్దడం కోసం 'తెలంగాణ ఓపెన్ స్కూల్ సొసైటీ' (TOSS) వంటి సంస్థలు ఏర్పాటు అయ్యాయి. ఇందులో విద్యను పొందే అభ్యాసకులకు - 2023 - 2024 విద్యా సంవత్సరానికి గాను మారుతున్న సామాజిక పరిస్థితులకు అనుగుణంగా, జాతీయ విద్యావిధానం - 2020 యొక్క ప్రాథమిక సూత్రాలను పొందుపరుస్తూ పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించబడ్డాయి. ఈ విధానం మొత్తం - అభ్యాసకులకు విభిన్న అవసరాలను, వారి అభ్యాస అనుభవాన్ని మెరుగుపరచడంపై దృష్టి సారించింది. ఇంతకు పూర్వం, ఈ సంస్థల పాఠ్యపుస్తకాలు ప్రశ్నలు, సమాధానాలతో కూడిన మార్గదర్శకాలుగా ఉండేవి. TOSS ఈసారి విద్యార్థి కేంద్రంగా పాఠ్యపుస్తక రూపకల్పన చేయడం ఒక మైలురాయి. అభ్యాస ప్రక్రియలో ఈ విధానం క్రియాశీల నిమగ్నతనే కాక భాగస్వామ్యాన్ని కూడ ప్రోత్సహిస్తుంది. ఈ పాఠ్యపుస్తకాలు విద్యార్థులకు సమర్థవంతం మరియు ఆకర్షణీయము అయిన పాఠాలను అందిస్తూనే అధ్యాపకులకు అనుబంధ బోధన సామగ్రిని కూడ అందిస్తుందని చెప్పడానికి మేము సంతోషిస్తున్నాము.

ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఆరు మాడ్యుల్స్‌గా విభజించాము. బీజగణితం, నిరూపక జ్యామితి, త్రిపరిమాణ జ్యామితి, ప్రమేయాలు, కలనగణితం మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం. రెండవ పాఠ్యపుస్తకంలో నాల్గవ మాడ్యుల్ ప్రమేయాలలో ప్రమేయాలు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను గురించి మీరు నేర్చుకుంటారు. ఐదవ మాడ్యుల్ కలనగణితం, అవధులు, అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనం, అవకలనం అనువర్తనాలు మరియు సమాకలనం గురించి మీకు పరిచయం చేస్తుంది. ఆరవ మాడ్యుల్ సంభావ్యత మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రంలో విస్తరణ కొలతలు, యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు, సంభావ్యత మరియు విభాజనాలను గురించి తెలుసుకుంటాము. విషయాన్ని సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ అధ్యాయాలన్ని చాలా అవసరం.

తెలంగాణ ప్రభుత్వానికి మరియు తెలంగాణ స్టేట్ బోర్డు ఆఫ్ ఇంటర్మీడియట్ ఎడ్యుకేషన్‌నకు కృతజ్ఞతలు, అవిశ్రాంతంగా ఈ పాఠ్యపుస్తకాన్ని రాయడానికి కోఆర్డినేటర్స్, ఉపాధ్యాయులు, అధ్యాపకులు మరియు డిటిపి ఆపరేటర్లు తమ తమ సేవలను అందించబడినందుకు మా ప్రత్యేక ధన్యవాదాలు.

తేది :

డైరెక్టర్

హైదరాబాదు.

పాఠ్యపుస్తకాల అభివృద్ధి కమిటీ

డా. D. పుష్ప, M.Sc., M.Phil, Ph.D
అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వం మహిళల డిగ్రీ కళాశాల(A),
బేగంపేట్, హైదరాబాద్

డా. C. శ్రీనివాస్ రెడ్డి, MSc, Ph.D
అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వం సిటీ కాలేజ్(A), నయాపూల్, హైదరాబాద్.

శ్రీ M. విజయ్ శేఖర్, M.Sc., M.Phil, B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, BHEL, రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీ K. కృష్ణ రెడ్డి, M.Sc., B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, చేవెళ్ల, రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీమతి K. పద్మ, M.Sc., B.Ed
అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రం
భోజ్ రెడ్డి ఇంజినీరింగ్ కళాశాల, హైదరాబాద్.

శ్రీ కావలి రంగ స్వామి, M.Sc., M.Phil, M.Ed,
రిటైర్డ్ ప్రిన్సిపాల్
ఇబ్రహీంపట్నం, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ K. శ్రీనివాస్, M.Sc., M.Phil., B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, శంషాబాద్,
రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీ M. హరి ప్రసాద్, M.Sc, M.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, మేడ్చల్,
మేడ్చల్ మల్కాజిగిరి జిల్లా.

శ్రీమతి అరుంధతి దాచేపల్లి, M.Sc.,B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, భూదాన్ పోచంపల్లి,
యాదాద్రి భువనగిరి జిల్లా

శ్రీమతి వీరస్తు అరుణ కుమారి, M.Sc., M.Ed,
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వం జూనియర్ కళాశాల, కూకట్‌పల్లి,
మేడ్చల్ మల్కాజిగిరి జిల్లా

శ్రీ కిషోర్ కొమ్మిని, M.Sc., B.Ed.
PGT గణితం, TSWR స్కూల్/
జూనియర్ కళాశాల (B), కోహెడ, సిద్దిపేట జిల్లా.

శ్రీమతి K. మాధవి, S.A.(Maths),
M.Sc., (Maths), M.Sc.,(Applied Statistics)
and M.A., (Socialogy), B.Ed.,
ZPHS, పోచన్నపేట్, బచ్చన్నపేట్ (M), జనగాం.

సమన్వయకర్తలు

శ్రీ B. వెంకటేశ్వరరావు
రాష్ట్ర సమన్వయకర్త, TOSS, తెలంగాణ,
హైదరాబాద్.

శ్రీమతి K. మాధవి
రాష్ట్ర సమన్వయకర్త, TOSS, తెలంగాణ,
హైదరాబాద్.

కవర్ డిజైన్ : **శ్రీ K. సుధాకర్ చారి,** S.G.T.,
యుపిపిఎస్ మైలారం, రాయపర్తి (ఎం), వరంగల్ రూరల్.

DTP, పేజీ లేఅవుట్ & డిజైన్ :
M/s **పవన్ గ్రాఫిక్స్** (సుంకర కోటేశ్వరరావు, సునీత)
D. No. 2-2-1130/24/2, ఫ్లాట్ 302, 3వ అంతస్తు, బాలభద్ర రెసిడెన్సీ,
యాక్సిస్ బ్యాంక్ వెనుక, శివం రోడ్, న్యూ నల్లకుంట, హైదరాబాద్

మీతో ఒక మాట

ప్రియమైన అభ్యాసకులారా!

మీరు చదవబోయే సీనియర్ సెకండరీ కోర్సుకు హృదయపూర్వక స్వాగతం మీ అధ్యయన విషయాలలో గణితాన్ని ఒక అంశంగా ఎన్నుకున్నందుకు మాకు ఆనందంగా ఉంది. మనం గణితాన్ని ఎందుకు చదువుతాము అన్న విషయాన్ని ఎప్పుడైనా ఆలోచించారా? కొన్ని విషయాలను లెక్కించని లేదా గణితాన్ని ఉపయోగించని రోజు ఏదైనా ఉంటుందా అసలు? బహుశా! ఉండదనే చెప్పాలి.

గణితం మానవ సమాజానికి పునాది వంటిది. కూరగాయలు కోయడం దగ్గర నుండి అరలలో పుస్తకాలను అమర్చడం వరకు, బట్టల తయారీకి అవసరమయ్యే కలల నుండి గ్రహాల గమనం వరకు – మన దిన చర్య నుండి దినకరుని సమూహం వరకు గణిత శాస్త్రం నిక్షిప్తమై ఉంటుంది. గణితం అంటే సంఖ్యలు మరియు చిహ్నాల ద్వారా వ్యక్తీకరింపబడి, వాటి మధ్య ఉన్న కార్యకారణ సంబంధాలను, కొలతలతో కూడిన పరిమాణాలను శాస్త్రీయంగాను, విస్తృతంగాను అధ్యయనం చేయడమేనని, గణిత శాస్త్రజ్ఞులు పేర్కొంటారు. నిజానికి గణితం నేర్చుకోవడం చాలా సరదగా ఉంటుంది. కావలసిందల్లా గణితంపై ప్రేమ, పూర్తి ఏకాగ్రత. ఈ రెండు ఉంటే గణితశాస్త్రానికి ఉన్న ఎల్లలు చూడవచ్చు.

ప్రస్తుత పాఠ్యప్రణాళికలో ఆరు మాడ్యుల్స్ ఉన్నాయి. అవి బీజగణితం, నిరూపక జ్యామితి, త్రిపరిమాణ జ్యామితి, ప్రమేయాలు, కలనగణితం మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం. వీటి గురించి తెలుసుకోవడానికి రెండు పుస్తకాలు సిద్ధంగా ఉన్నాయి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకం 2లో మూడు మాడ్యుల్స్ ఉంటాయి. నాల్గవ మాడ్యుల్ – ప్రమేయాలు, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు మరియు త్రిభుజ ధర్మాలను గురించి వివరిస్తుంది.

ఐదవ మాడ్యుల్ కలనగణితంలో అవధులు, అవిచ్ఛిన్నత, వివిధ ప్రమేయాల యొక్క అవకలజాలను, అవకలనాల అనువర్తనాలు, సమాకలనం, నిశ్చిత సమాకలనం మరియు అవకలన సమీకరణాల సాధనలు మొదలైనవి విపులీకరించబడతాయి.

ఆరవ మాడ్యుల్ సంభావ్యత మరియు సాంఖ్యాక శాస్త్రంలో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు, సంభావ్యత, యాదృచ్ఛిక చలరాశులు మరియు సంభావ్యత విభాజనాలను మీకు పరిచయం జేస్తుంది.

ఇందులో ఉన్న పరిష్కరింపబడిన ఉదాహరణలన్నింటిని మీరు శ్రద్ధగా చదివి అభ్యాసంతో ఇచ్చిన అన్ని ప్రశ్నలను స్వతంత్రంగా పరిష్కరించడానికి ప్రయత్నించడం మీ నుండి మేము కోరుకుంటున్నాము. అంతేకాదు ఏ పాఠంలోనైనా ఏ అభ్యసంలోనైనా మీకు ఇబ్బంది ఎదురైతే మీ సమస్యను మాకు వ్రాయవచ్చు. సమస్యను నివృత్తిని చేసుకోవచ్చు. మీ నుండి తగిన సహాలను సూచనలను కూడ మేము స్వాగతిస్తున్నాము.

మీ

అకడమిక్ ఆఫీసర్

(గణితం)

(311)

గణితశాస్త్రము

విభాగం - I

మాడ్యుల్ - I

బీజ గణితము

1. గణితాను గమనం
2. సంకీర్ణ సంఖ్యలు
3. వర్గ సమీకరణములు
4. మాత్రికలు
5. నిర్ధారకాలు, వాటి అనువర్తనాలు
6. మాత్రికల విలోమాలు అనువర్తనాలు
7. ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు
8. ద్విపద సిద్ధాంతము

మాడ్యుల్ - II

నిరూపక జ్యామితి

9. కార్టీసియన్ నిరూపక వ్యవస్థ
10. సరళరేఖలు
11. వృత్తాలు
12. శాంకవ ఛేదములు

మాడ్యుల్ - III

త్రిపరిమాణపు జ్యామితి

13. త్రిపరిమాణ జ్యామితి పరిచయములు
14. తలము
15. సదిశలు

(311)

గణితశాస్త్రము

విభాగం – II

మాడ్యుల్ - IV

ప్రమేయాలు మరియు త్రికోణమితి ప్రమేయాలు

16. సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయాలు
17. త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు
18. విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు
19. త్రిభుజ ధర్మాలు

మాడ్యుల్ - V

కలనగణితం

20. అవధులు, అవిచ్ఛిన్నాలు
21. అవకలనం
22. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనాలు
23. ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాల అవకలనాలు
24. స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు
25. మహిష్ఠము మరియు అల్పిష్ఠము (గరిష్ఠ – కనిష్ఠ విలువలు)
26. సమాకలనం
27. నిశ్చిత సమాకలనం
28. అవకలన సమీకరణాలు

మాడ్యుల్ - VI

సంభావ్యత మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం

29. విస్తరణ కొలతలు
30. సంభావ్యత
31. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు ఘటనలు

విషయసూచిక

మాడ్యుల్స్	పాఠం సంఖ్య	పాఠం పేరు	పుటసంఖ్య
మాడ్యుల్ - IV		**ప్రమేయాలు మరియు త్రికోణమితి ప్రమేయాలు**	
	16.	సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయాలు	1-48
	17.	త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు	49-142
	18.	విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు	143-166
	19.	త్రిభుజ ధర్మాలు	167-182
మాడ్యుల్ - V		**కలనగణితం**	
	20.	అవధులు, అవిచ్ఛిన్నాలు	183-234
	21.	అవకలనం	235-272
	22.	త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనాలు	273-320
	23.	ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాల అవకలనాలు	321-362
	24.	స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు	363-386
	25.	మహిష్ఠము మరియు అల్పిష్ఠము (గరిష్ఠ - కనిష్ఠ విలువలు)	387-428
	26.	సమాకలనం	429-508
	27.	నిశ్చిత సమాకలనం	509-560
	28.	అవకలన సమీకరణాలు	561-600
మాడ్యుల్ - VI		**సంభావ్యత మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం**	
	29.	విస్తరణ కొలతలు	601-632
	30.	సంభావ్యత	633-696
	31.	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు ఘటనలు	697-710
		మాదిరి ప్రశ్నాపత్రము	711-714

అధ్యాయం

16

సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశం ద్వారా ఈ క్రింది విషయాలు తెలుసుకోగలవు.

- సమితిని నిర్వచించడం – వివిధ రూపాలలో గుర్తించడం
- క్రమయుగ్మం నిర్వచనము
- రెండు సమితుల మధ్య కార్టీజియన్ లబ్ధాన్ని నిర్వచించడం.
- సంబంధం, ప్రమేయాలను ఉదాహరణలతో నిర్వచించడం.
- ప్రమేయ ప్రదేశాన్ని, వ్యాప్తిని కనుక్కోవడం
- వివిధ రకాల ప్రమేయాలను (అన్వేక, సంగ్రస్త, స్థిర, ద్విగుణ ప్రమేయాలు) ఉదాహరణలతో నిర్వచించడం.
- ఒక ప్రమేయం అన్వేకమా, సంగ్రస్తమా, స్థిరమా నిర్ధారించడం.
- ప్రమేయాలకు రేఖా చిత్రాలు గీయడం.
- బేసి మరియు సరి ప్రమేయాలను ఉదాహరణలతో నిర్వచించడం
- ఇచ్చిన ప్రమేయము సరి ప్రమేయమా, బేసి ప్రమేయమా నిర్ధారించడం

- $|x|, [x]$ గరిష్ఠ పూర్ణ సంఖ్యా ప్రమేయం, బహుపది ప్రమేయమా, సంవర్గమాన ప్రమేయం, ఘాత ప్రమేయాలకు ఉదాహరణలతో నిర్వచించడం.
- రెండు సమితుల యొక్క సంయుక్త ప్రమేయాన్ని నిర్వచించడం
- విలోమ ప్రమేయాన్ని నిర్వచించడం, మరియు
- ఎలాంటి సంధర్భంలో విలోమం ఉంటుందో చెప్పగలగడం.

పూర్వాకాంక్షితలు

సమితిని గుర్తించడానికి కొన్ని ప్రామాణిక సంకేతాలు.

N : సహజ సంఖ్యల సమితి

W : పూర్ణాంకాల సమితి

Z లేక I : పూర్ణసంఖ్యల సమితి

Z^+ : ధన పూర్ణ సంఖ్యలు సమితి

Z^- : ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల సమితి

Q : అకరణీయ సంఖ్యల సమితి

R : వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

C : సంకీర్ణ సంఖ్యల సమితి

సాధారణంగా ఉపయోగించే గుర్తులు

$\in$: చెందును

$\notin$: చెందదు

$\exists$: వ్యవస్థితము

$\nexists$: వ్యవస్థితము కాదు.

$a, b \in \mathbf{R}, a \leq b$ అయితే

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$

పరిచయం

సునిర్వచితమైన వస్తువుల సముదాయాన్ని సమితి అందురు. సముదాయము సమితి కావలనంటే అది తప్పకుండా సునిర్వచితమై ఉండవలెను.

'సునిర్వచితం' అనే పదాన్ని జర్మనీ గణిత శాస్త్రవేత్త జార్జి కాంటర్ (1845-1918) ఉపయోగించాడు. అతడు సమితి వాదానికి తండ్రి లాంటి వారు. ప్రస్తుత కాలంలో సమితి వాదం అనునది ఎక్కువగా గణిత భావనలకు పునాదిగా ఉపయోగపడుతున్నది.

మన నిజజీవితంలో వస్తువుల మధ్య వివిధ రకాల సంబంధాల గురించి మాట్లాడతాం. సంబంధం అనే భావన గణితరూపం అభివృద్ధి చెందింది.

అందరు శాస్త్రజ్ఞులు సంబంధాలు చదవడానికి తప్పకుండా గణితశాస్త్రమును ఉపయోగించెదరు. భౌతిక, రసాయన శాస్త్రవేత్తలు, ఇంజనీర్లు, జీవశాస్త్ర వేత్తలు, సాంఘీక శాస్త్రవేత్తలు అందరూ వాళ్ళ విషయములకు సంబంధించిన వాటి గురించి అధ్యయనం చేయడం మరియు అవి ఏవిధంగా ఒకదానికొకటి సంబంధం కలిగి ఉంటాయో ఒక సంపూర్ణ అవగాహన పొందెదరు. ప్రమేయం అనేది సంబంధాలలో ఒక ప్రత్యేక సందర్భం.

1694 లో Leibnitz చే ప్రమేయం అనే పదం ఆవిష్కరించబడింది. ప్రతి ప్రమేయం ఒక సంబంధం కాని ప్రతి సంబంధం ప్రమేయం కాదు.

ఈ అధ్యాయంలో సమితులు, క్రమయుగ్మాలు, కార్టీజియన్ లబ్ధం, రెండు సమితుల మధ్య సంబంధం, ప్రమేయం నిర్వచనం, ప్రమేయాల రకాలు, వాటి ధర్మాలు మొదలగు అంశముల గురించి చర్చించెదరు. ప్రమేయాలకు సంబంధించి వివిధ ముఖ్య అనువర్తనముల కోసం వీటిని గ్రహించవలెను.

16.1 క్రమయుగ్మం

A, B లు రెండు సమితులు. $a \in A$, $b \in B$ అయితే (a, b) ను క్రమయుగ్మం అందురు. a ను ప్రథమ నిరూపకం అనియు bను ద్వితీయ నిరూపకం అని అందురు.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ మరియు } b = d$$

16.2 రెండు సమితుల కార్టీజియన్ లబ్ధం

$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$ ఏవేని రెండు సమితులైతే A మరియు B లోని మూలకాలతో ఏర్పడే క్రమయుగ్మాల సమితి $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ అగును.

ఈ సమితిని $A \times B$ గా సూచిస్తూ దీనిని సమితులు A, B ల యొక్క కార్టీజియన్ లబ్ధంగా పేర్కొందురు.

i.e, $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

పై ఉదాహరణలో $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

కావున $A \times B \neq B \times A$ అని స్పష్టంగా తెలుస్తుంది.

సమితి నిర్మాణ రూపంలో కార్టీజియన్ లబ్ధం :

$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ మరియు } b \in B\}$

$B \times A = \{(b, a) : b \in B \text{ మరియు } a \in A\}$

సూచన: ఒకవేళ $A = \phi$, లేదా $B = \phi$ లేదా $A, B = \phi$ అయితే అప్పుడు $A \times B = B \times A = \phi$

16.3 సంబంధాలు

A, B లు రెండు సమితులైతే A నుండి B కి సంబంధం R అనేది $A \times B$ కి ఉపసమితి అగును. $R \subseteq A \times B$.

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 4\}$

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$.

$f = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

$g = \{(2, 2), (3, 3)\}$ లు A నుండి Bకి సంబంధాలు.

(i) $R = \phi$ అయితే R ను శూన్య సంబంధం అందురు.

(ii) $R = A \times B$ అయితే R ను సార్వత్రిక సంబంధం అని అందురు.

(iii) ఒకవేళ సంబంధం Rను సమితి నుండి A కి నిర్వచిస్తే దానిని A లో సంబందం అని అందరు.

(iv) $R = \{(a, a) \forall a \in A\}$ అయితే సంబంధం R ను తత్సమ సంబందం అని అందురు.

16.4 సంబంధం యొక్క ప్రదేశం మరియు వ్యాప్తి

రెండు సమితుల మధ్య R ఒక సంబందం అయితే ఆ సంబందంలోని క్రమయుగ్మాలలోని ప్రథమ నిరూపకాలచే ఏర్పడే సమితి ఆ సంబందం R ప్రదేశం అని, ద్వితీయ నిరూపకాలచే ఏర్పడు సమితిని R యొక్క వ్యాప్తి అని అందురు.

$f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

ప్రదేశం = $\{1, 2, 3\}$

వ్యాప్తి = $\{a, b, c\}$

ఉదాహరణ: 16.1 $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3\}$

సంబందం R ను A నుండి B కి

$R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ మరియు a ను b భాగిస్తుంది$\}$ గా నిర్వచిస్తే

(i) ను జాబితా రూపంలో వ్రాయండి

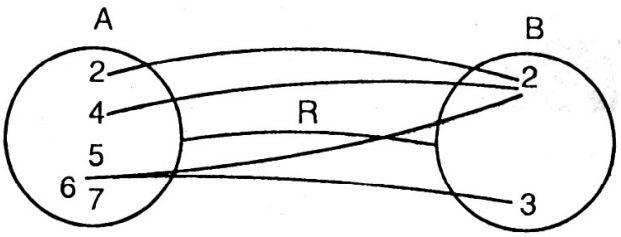
(ii) R యొక్క వ్యాప్తి

(iii) R యొక్క ప్రదేశం (iv) R ను చిత్రాల ద్వారా తెల్పండి.

సాధన : (i) $R = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$ (ii) R వ్యాప్తి $= \{2, 3\}$

(iii) R ప్రదేశం = $\{2, 4, 6\}$

(iv)



పటం 16.1

ఉదాహరణ 16.2 : A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 2, 6} అవుతూ A నుండి B కి R సంబంధాన్ని "ఎక్కువగా వుంది"గా నిర్వచిస్తే

(i) R ను రోష్టర్ రూపంలో వ్రాయండి.

(ii) R కు ప్రదేశాన్ని వ్రాయండి.

(iii) R కు వ్యాప్తిని వ్రాయండి.

సాధన : (i) R = {(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)}

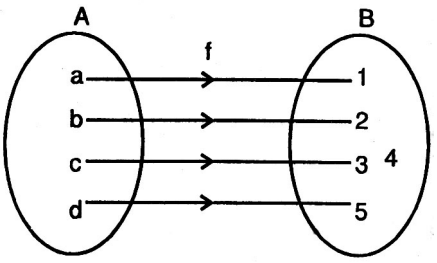
(ii) R ప్రదేశం = {3, 4, 5}

(iii) R వ్యాప్తి = {1, 2}.

16.5 ప్రమేయం నిర్వచనం

f : {$(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 5)$}

అనే సంబంధం నుండి A లోని ప్రతి మూలకానికి B లో ఒకే ఒక ప్రతిబింబం కలదు. సమితి A నుండి B కి సంబంధం A లోని ప్రతి మూలకానికి B లో ఒకే ఒక ప్రతిబింబం ఉంటే అట్టి సంబంధం f ను A నుండి B కి ప్రమేయం అని నిర్వచిస్తాము. దీనిని బట్టి ప్రమేయంలోని క్రమయుగ్మాలలో ఏ రెండు ప్రథమ నిరూపకాలు సమానం కాదు. మరొక విషయం ఏమంటే B లోని 4 అనుమూలకానికి సమితి A లో బింబం లేదు. కావున



పటం 16.2

(i) సమితిని B ని సహ ప్రదేశంగా వ్రాయవచ్చు.

(ii) {1, 2, 3, 5} సమితిని వ్యాప్తిగా నిర్వచించవచ్చు.

పై దానిని బట్టి వ్యాప్తి అనేది సహప్రదేశం B కి ఉపసమితి అని తెలుస్తుంది. ఈ ప్రమేయాన్ని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$f : A \to B$ లేదా $A \xrightarrow{f} B$.

ఉదాహరణ 16.3 క్రింది వాటిలో ఏవి Aనుండి Bకి ప్రమేయాలు అగును? వాటి ప్రదేశాలను, వ్యాప్తిలను వ్రాయండి. ఒకవేళ ప్రమేయం కాకపోతే కారణం తెల్పండి.

(a) $\{(1, -2), (3, 7), (4, -6), (8, 1)\}$, $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 1, 2\}$

(b) $\{(1, 0), (1, -1), (2, 3), (4, 10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a, b), (b, c), (c, b), (d, c)\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c\}$

(d) $\{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$
$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 9, 16, 25, 36\}$

సాధన : (a) ఇది ప్రమేయం అగును.
ప్రదేశం = $\{1, 3, 4, 8\}$, వ్యాప్తి = $\{-2, 7, -6, 1\}$

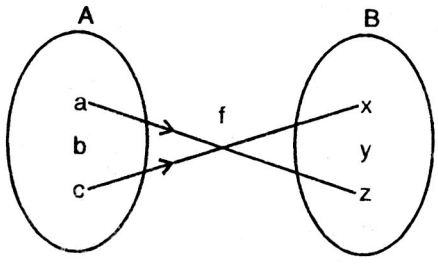
(b) ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకంటే మొదటి రెండు క్రమయుగ్మాలు ఒకే ప్రథమ రూపం 1ని కల్గివున్నవి.

(c) ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకంటే సమితి Aలోని అన్ని మూలకాలు Bతో సంబంధాన్ని కల్గిలేవు.
ఇక్కడ ప్రదేశం = $\{a, b, c, d\} \neq A$, వ్యాప్తి = $\{b, c\}$

(d) ఇది ప్రమేయం అగును.
ప్రదేశం = $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, వ్యాప్తి = $\{4, 9, 16, 25, 36\}$.

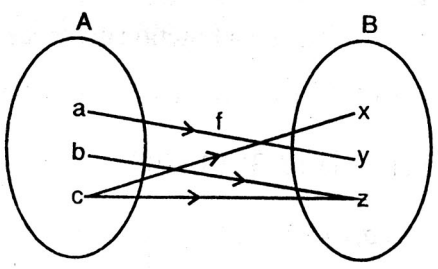
ఉదాహరణ 16.4 క్రింది సంబంధాలలో ఏవి ప్రమేయాలు ? ఏవికావు ? గుర్తించండి.

(a)



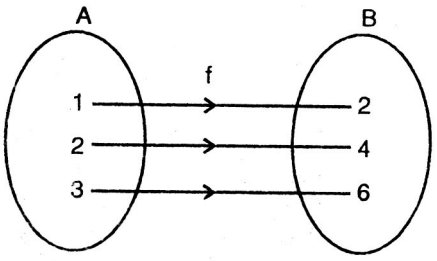
పటం 16.3

(b)



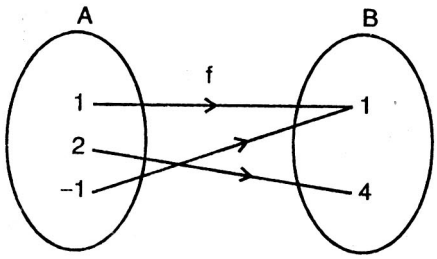
పటం 16.4

(c)



పటం 16.5

(d)



పటం 16.6

సాధన : (a) f ప్రమేయం కాదు ఎందుకంటే A లోని b అను మూలకాలనికి B లో ప్రతిబింబం లేదు.

(b) f ప్రమేయం కాదు ఎందుకంటే A లోని c అను మూలకానికి ఒకే ప్రతిబింబం B లో లేదు (రెండు ప్రతిబింబాలు కలవు).

(c) f ప్రమేయం అగును.

(d) f ప్రమేయం అగును.

అభ్యాసం 16.1

1. క్రింది వానిలో ఏవి A నుండి B కి ప్రమేయాలు ?

(a) $\{(1, -2), (3, 7), (4, -6), (8, 11)\}$, $A = \{1, 3, 4, 8\}, B = \{-2, 7, -6, 11\}$

(b) $\{(1, 0), (1, -1), (2, 3), (4, 10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 3)\}$, $A = \{a, b, c, d\}, B = \{2, 3\}$

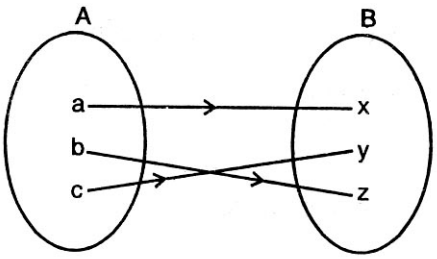
(d) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (-3, 4)\}$, $A = \{1, 2, -3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$

(e) $\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \ldots\ldots \left(10, \frac{1}{10}\right)$, $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{11}\right\}$

(f) $\{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}$, $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $B = \{1, 4\}$.

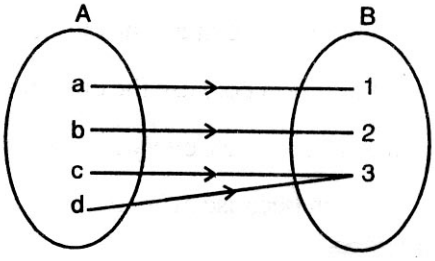
2. క్రింది వానిలో వేటిని ప్రమేయాలుగా గుర్తిస్తారు ?

(a)



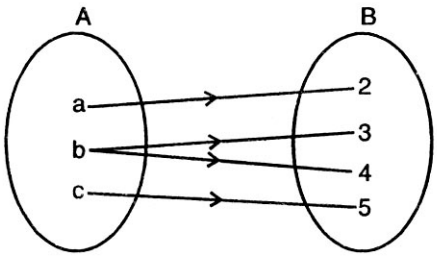
పటం 16.7

(b)



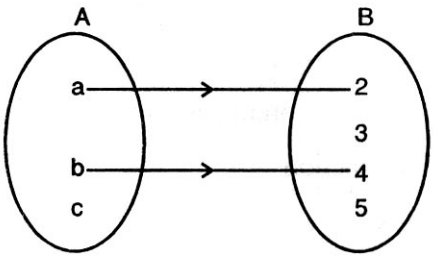
పటం 16.8

(c)



పటం 16.9

(d)



పటం 16.10

3. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశం, వ్యాప్తిలను వ్రాయండి.

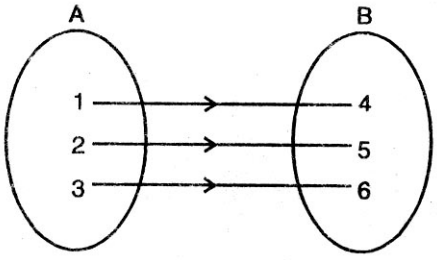
(a) $\left\{\left(\sqrt{2}, 2\right), \left(\sqrt{5}, -1\right), \left(\sqrt{3}, 5\right)\right\}$

(b) $\left\{\left(-3, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

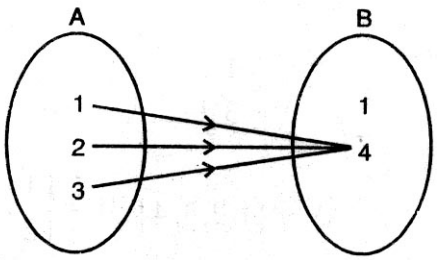
(c) $\{(1, 1), (0, 0), (2, 2), (-1, -1)$

(d) {(దీపక్, 16), (సందీప్, 28), (రాజన్ 24)}

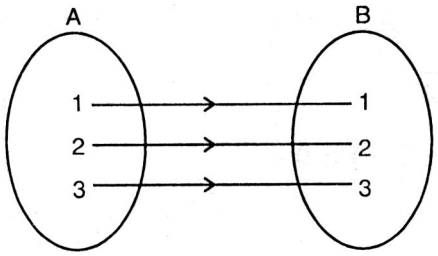
4. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశం, వ్యాప్తులను వ్రాయండి.



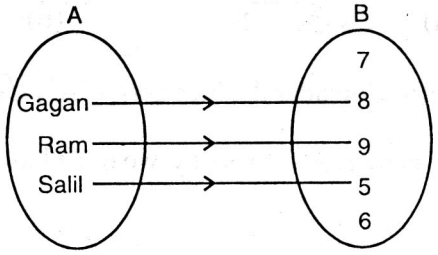
పటం 16.11



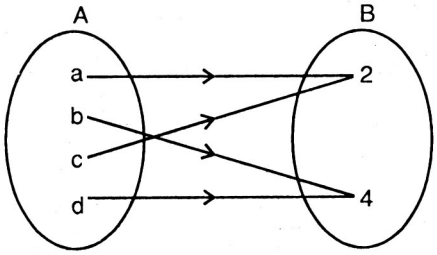
పటం 16.12



పటం 16.13



పటం 16.14



పటం 16.15

16.5.1 ప్రదేశం, వ్యాప్తిలపై మరికొన్ని ఉదాహరణలు

క్రింది ప్రమేయాలను పరిశీలించండి. ఇవి వాస్తవ సంఖ్యా సమితులకు ఉపసమితులపై నిర్వచించబడినాయి

ఉదాహరణ 16.5 : క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

(a) $y = \frac{1}{x}$ (ii) $y = \frac{1}{x-2}$ (iii) $y = \frac{1}{(x+2)(y-3)}$

సాధన : $y = \frac{1}{x}$ ప్రమేయాన్ని క్రింది క్రమయుగ్మాల సమితిగా వ్రాయవచ్చు

$$\left\{.....\left(-2, -\frac{1}{2}\right), (-1,-1), (1,1), \left(2, \frac{1}{2}\right)...\right\}$$

ఇక్కడ x అనునది ఒక్క '0' తప్ప అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు తీసుకుంటుంది. ఇందులో '0' కు ప్రతిబింబం 1/0 ను నిర్వచించలేము.

$\therefore$ ప్రదేశం = R – {0} {'0' తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువల సమితి

సూచన : ఇక్కడ వ్యాప్తి = R – {0}

(b) x అనునది 2ను తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువలను తీసుకుంటుంది. ఎందుకనగా 2కు ప్రతిబింబం i.e., $\frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ ను నిర్వచింపలేము. $\therefore$ ప్రదేశం = R – {2}.

(c) $x = -2$ మరియు $x = 3$ అయినప్పుడు y విలువను నిర్వచించలేము. $\therefore$ ప్రదేశం = R $- \{-2, 3\}$.

ఉదాహరణ 16.6 : క్రింది ప్రమేయాల ప్రదేశాలను వ్రాయండి.

(a) $y = +\sqrt{x-2}$ (b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

సాధన : $y = \sqrt{(x-2)}$ ప్రమేయాన్ని పరిశలిస్తే,

y యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు $(x - 2) \geq 0$ కావాలి.

i.e., $x \geq 2$.

$\therefore x \geq 2$ అగునట్లు అన్ని వాస్తవ విలువలు. ప్రమేయ ప్రదేశం అగును.

(b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

y అన్ని వాస్తవ విలువలకు $(2 - x)(4 + x) \geq 0$ కావాలి

అందుకు ఈక్రింది రెండు సందర్భాలు గమనిస్తే

సందర్భం I : $(2 - x) \geq 0$ మరియు $(4 + x) \geq 0$ అయితే

$\Rightarrow x \leq 0$ మరియు $x \geq -4$ కావున

ప్రదేశము $-4 \leq x \leq 2$ అగునట్లు వాస్తవ సంఖ్యలు వుండును.

సందర్భం II : $2 - x \geq 0$ మరియు $4 + x \leq 0$ అయితే

$2 \leq x$ మరియు $x \leq -4$ అగును.

కాని x అనేది 2 కంటె ఎక్కువ లేదా సమానంగా మరియు −4 కంటే తక్కువ లేదా సమానంగా తీసుకోదు, కనుక ఈ రెండు సందర్భాల నుండి ప్రదేశం $-4 \leq x \leq 2 \ \forall \in$ R.

ఉదాహరణ 16.7: $f(x) = y = 2x + 1$ ప్రమేయానికి

ప్రదేశం = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ అయితే దాని వ్యాప్తి కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన x విలువలకు

$f(-3) = 2(-3) + 1 = -6 + 1 = -5$

$f(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$

$f(-1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$

$f(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

$f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$

$f(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$

కావున ప్రమేయ వ్యాప్తి = $\{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$

ఉదాహరణ 16.8 : $f(x) = x^2, -3 \le x \le 3$ అయితే $f(x)$ వ్యాప్తి కనుక్కోండి.

సాధన : $-3 \le x \le 3$ కావున

$0 \le x^2 \le 9$ లేదా $0 \le f(x) \le 9$

$\therefore$ వ్యాప్తి $\{f(x) : 0 \le f(x) \le 9\}$.

అభ్యాసం 16.2

1. $x \in R$ కు క్రింది ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

(a) (i) $y = 2x$ (ii) $y = 9x + 3$ (iii) $y = x^2 + 5$

(b) (i) $y = \frac{1}{3x-1}$ (ii) $y = \frac{1}{(4x+1)(x-5)}$

(iii) $y = \frac{1}{(x-3)(x-5)}$ (iv) $y = \frac{1}{(3-x)(x-5)}$

(c) (i) $y = \sqrt{6-x}$ (ii) $y = \sqrt{7+x}$

(iii) $y = \sqrt{3x+5}$

(d) (i) $y = \sqrt{(3-x)(x-5)}$ (ii) $y = \sqrt{(x-3)(x+5)}$

(iii) $y = \frac{1}{\sqrt{(3+x)(7+x)}}$ (iv) $y = \frac{1}{\sqrt{(x-3)(7+x)}}$

2. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు ఇవ్వబడినవి. వ్యాప్తి కనుక్కోండి.

(a) (i) $f(x) = 3x + 10$, $x \in \{1, 5, 7, -1, -2\}$

(ii) $f(x) = 2x^2 + 1, \quad x \in \{-3, 2, 4, 0\}$

(iii) $f(x) = x^2 - x + 2, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) (i) $f(x) = x - 2, 0 \le x \le 4$ (ii) $f(x) = 3x + 4, -1 \le x \le 2$

(c) (i) $f(x) = x^2, -5 \le x \le 5$ (ii) $f(x) = 2x, \ -3 \le x \le 3$

(iii) $f(x) = x^2+1, \ -2 \le x \le 2$ (iv) $f(x) = \sqrt{x}, \ 0 \le x \le 25$

(d) (i) $f(x) = x + 5, x \in R$ (ii) $f(x) = 2x - 3, x \in R$

(iii) $f(x) = x^3, \ x \in R$ (iv) $f(x) = 1/x, \{x : x < 0\}$

(v) $f(x) = \frac{1}{x-2}, \ \{x : x \le 1\}$ (vi) $f(x) = \frac{1}{3x-2}, \ \{x : x < 0\}$

(vii) $f(x) = \frac{2}{x}, \ \{x : x > 0\}$ (viii) $f(x) = \frac{x}{x+5}, \ \{x : x \ne -5\}$

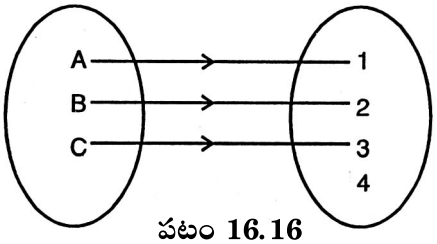
16.6 ప్రమేయాల వర్గీకరణ

అన్వేక ప్రమేయం (ఏక ఏక ప్రమేయం)

$f : A \to B$ ప్రమేయంలో A లోని ప్రతి మూలకం B లోని విభిన్న మూలకాలతో సంబంధం కల్గి వుంటే అట్టి ప్రమేయాన్ని 'అన్వేక ప్రమేయం' అందురు.

$f : A \to B$ అన్వేకం $\Leftrightarrow a_1 \ a_2 \in A$ మరియు $a_1 \ne a_2 \ f(a_1) \ne f(a_2)$

$\Leftrightarrow a_1 \ a_2 \in A$ మరియు $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



పటం 16.16

ప్రదేశం = {A, B, C}

సహ ప్రదేశం = {1, 2, 3, 4}

వ్యాప్తి = {1, 2, 3}

ఉదా. $f : A \to B$, $f(x) = 2x + 1$. ఐతే f అన్వేకం.

$a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ మరియు $f(a_1) = f(a_2)$

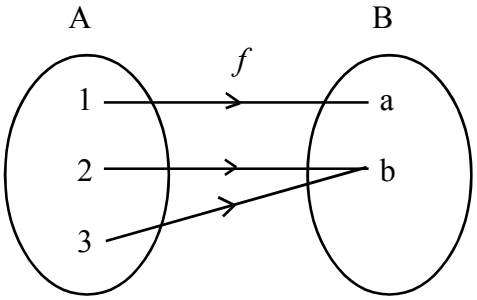
$\Rightarrow 2a_1 + 1 = 2a_2 + 1$

$\Rightarrow a_1 = a_2$.

సంగ్రస్త ప్రమేయం

$f : A \to B$ ప్రమేయంలో f యొక్క వ్యాప్తి f సహప్రదేశానికి సమానం అయితే f ను సంగ్రస్త ప్రమేయం అందురు.

$f : A \to B$ ప్రమేయంలో ప్రతి $b \in B$ కి అనుగుణంగా కనీసం ఒక $a \in A$ వ్యవస్థితం అయితే f ను సంగ్రస్త ప్రమేయం అందురు. $f(a) = b$.

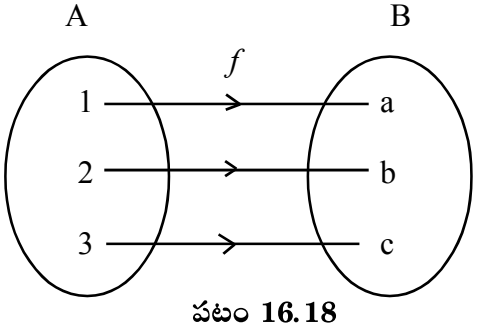


పటం 16.17

f సంగ్రస్తం.

ద్విగుణ ప్రమేయం

$f : A \to B$ ప్రమేయం అన్వేయం మరియు సంగ్రస్తం అయితే f ను A నుండి B కి ద్విగుణ ప్రమేయం అందురు.



పటం 16.18

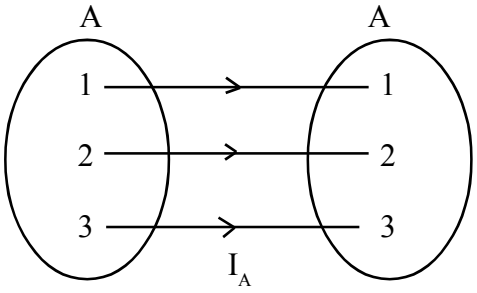
f ద్విగుణం.

తత్సమ ప్రమేయం :

A ఒక శూన్యేతర సమితి అనుకొనుము $f : A \to A$ ప్రమేయంలో ప్రతి $x \in A$కు $f(x) = x$ ఐతే f ను తత్సమ ప్రమేయం అందురు.

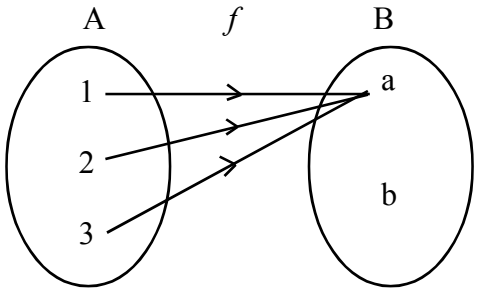
తత్సమ ప్రమేయంను I_A చే సూచించెదరు.

$A = \{1, 2, 3\}$ ఐతే $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$



పటం 16.19

స్థిరప్రమేయం : $f : A \to B$ ప్రమేయంలో ప్రతి $x \in A$ కు $f(x) = c, c \in B$ ఐతే f ను స్థిరప్రమేయం అందురు. యొక్క వ్యాప్తిలో ఒకే ఒక మూలకం ఉంటుంది.



పటం 16.20

f స్థిర ప్రమేయం.

ఉదాహరణ 16.9 : పటం ఉపయోగించకుండా

$f : R \to R$ గా నిర్వచితమైన $f(x) = 4 + 3x$ అను ప్రమేయం అన్వేకం అని చూపండి.

సాధన : అన్వేక ప్రమేయం నిర్వచనం నుండి

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \forall \ x_1, x_2 \in$ ప్రదేశం

ఇప్పుడు $f(x_1) = f(x_2)$ నుండి

$4 + 3x_1 = 4 + 3x_2$ లేదా $x_1 = x_2$

$\therefore f$ అనేది అన్వేక ప్రమేయం అగును.

ఉదాహరణ 16.10 : f: $R \to R$ ప్రమేయాన్ని $f(x) = 4x^3 - 5$ గా నిర్వచిస్తే f ద్విగుణ ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన : $f(x_1) = f(x_2) \forall x_1\ x_2 \in$ ప్రదేశం

$$4x_1^3 - 5 = 4x_2^2 - 5$$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)\ (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ లేదా $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ ఇది నిర్వచితం

కాదు ఎందుకనగా x_1 మరియు x_2లకు ఇది వాస్తవం కాదు.

$\therefore f$ ఒక అన్వేక ప్రమేయం.

ఇంతేకాక $y = (x)$ ఇక్కడ $y \in$ సహప్రదేశం $x \in$ ప్రదేశం

$$y = 4x^3 - 5 \quad \text{లేదా} \quad x = \left(\frac{y+5}{4}\right)^{1/3} \text{ కావున}$$

ప్రతి $y \in$ సహప్రదేశంలోని ప్రతి y కు $f(x) = y$ అగునట్లు ప్రదేశంలో x వుంటుంది.

కావున f అనేది సంగ్రస్తము.

f సంగ్రస్తము మరియు అన్వేకం కావున f: ద్విగుణం అగును.

ఉదాహరణ 16.11 : f : $R \to R$ అను ప్రమేయాన్ని $f(x) = x^3 + 3$ గా నిర్వచిస్తే f అనునది అన్వేకం కాదు మరియు సంగ్రస్తం కాదని చూపండి.

సాధన : $f(x_1) = f(x_1)$ అని తెలుసు $\forall x_1, x_2 \in$ ప్రదేశం

$$x_1^2 + 3 = x_2^2 + 3 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

లేదా $x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (or) $x_1 = -x_2$

కావున F అనేది అన్వేకం కాదు.

మరియు $y = f(x)$ ఇక్కడ $y \in$ సహ ప్రదేశం, $x \in$ ప్రదేశం

$\Rightarrow y = x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-3}$

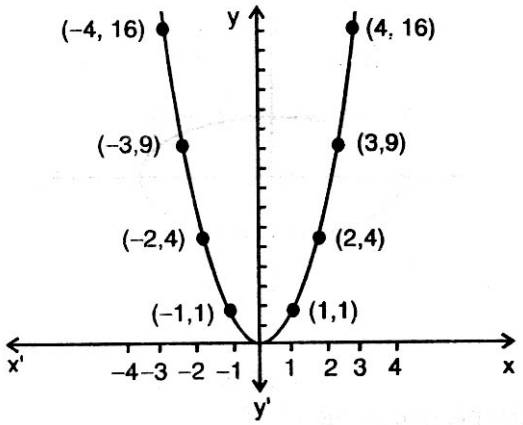
$\Rightarrow \forall y < 3$ కి ప్రదేశంలో x కు వాస్తవ విలువలు వుండవు.

$\therefore f$ అనునది సంగ్రస్తం కాదు.

16.7 ప్రమేయాలకు రేఖా చిత్రాలు

ఏదేని ప్రమేయాన్ని క్రమయుగ్మాల సమితిగా గుర్తించడం వలన ప్రమేయాన్ని రేఖా చిత్రాల ద్వారా కూడా గుర్తించడం సాధ్యమగును. ఉదాహరణకు $y = x^2$ ను పరిశీలిస్తే $y = x^2$

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16



పటం 16.21

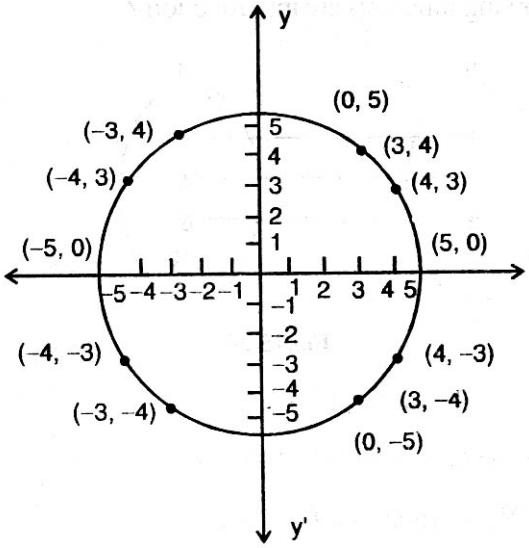
ఇది ప్రమేయం అగునా ?

ఇది ప్రమేయం అగును ఎందుకనగా ప్రతి x విలువకు y విలువ ఏకైకం.

ఇప్పుడు $x^2 + y^2 = 25$ ను పరిశీలిస్తే

$x^2 + y^2 = 25$

x	0	0	3	3	4	4	5	−5	−3	−3	−4	−4
y	5	−5	4	−4	3	−3	0	0	4	−4	3	−3



పటం 16.22

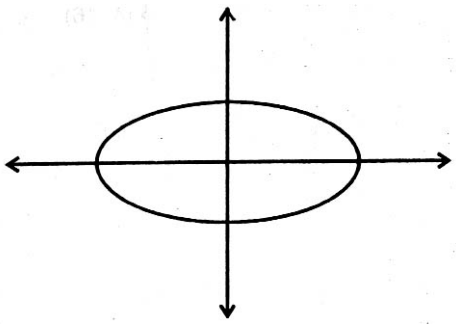
ఈ గ్రాఫ్ ఒక వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

ఇది ఒక ప్రమేయం అగునా ?

ఇది ప్రమేయం కాదు ఎందుకనగా ప్రతి x విలువకు అనుగుణంగా y లో విలువలు ఏకైకం కాదు.

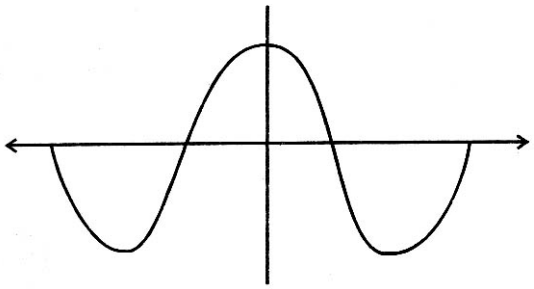
అభ్యాసం 16.3

1. ఈ గ్రాఫ్ ప్రమేయం అగునా ?



పటం 16.23

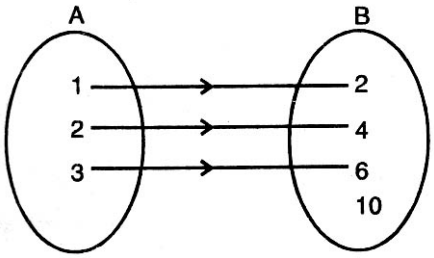
(ii) ఈ క్రింది గ్రాఫ్ ప్రమేయం అగునా?



పటం 16.24

2. క్రింది వానిలో ఏవి

(a)



పటం 16.25

(b) $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ ను $f(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే

ఇక్కడ N అనేది సహజ సంఖ్యల సమితి

(c) $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ ను $f(x) = x$ గా నిర్వచిస్తే

3. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ గా నిర్వచిస్తే క్రింది వాటిలో ఏవి సంగ్రస్త ప్రమేయాలు ?

(a) $f(x) = 115x + 49$ (b) $f(x) = |x|$

4. క్రింది వానిలో ఏవి అన్వేక ప్రమేయాలు ?

(a) $f : \{20, 21, 22\} \to \{40, 42, 44\}$ $f(x) = 2x$ గా నిర్వచిస్తే

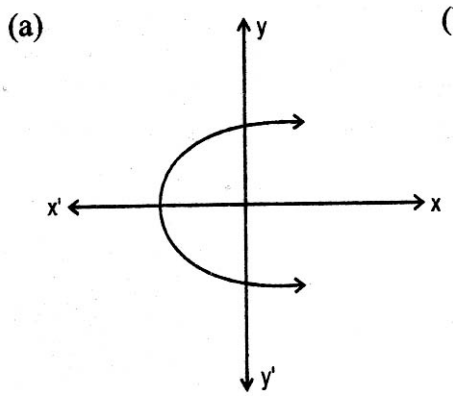
(b) $f(x) = 10$ గా నిర్వచిస్తే $f : \{7, 8, 9\} \to \{10\}$

(c) $f(x) = x^3$ గా నిర్వచిస్తే $f : 1 \to \mathrm{R}$

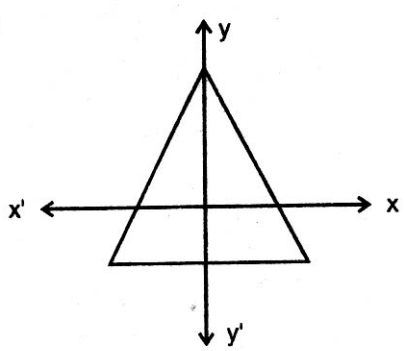
(d) $f(x) = 2 + x^4$ గా నిర్వచిస్తే $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

(e) $f(x) = x^4 + 2x$ గా నిర్వచిస్తే $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$.

5. క్రింది చిత్రాలలో ఏవి ప్రమేయాలు ?



పటం 16.26



పటం 16.27

కొన్ని ప్రత్యేక ప్రమేయాలు

16.7.1 సరి ప్రమేయం

ప్రదేశంలోని ప్రతి x కు

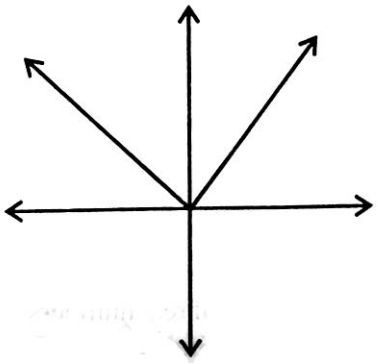
$f(-x) = f(x)$ అయితే f ను సరిప్రమేయం అందురు.

ఈ క్రింద సూచించవినవి సరి ప్రమేయాలు.

(i) $F(x) = x^2$ అయితే $F(-x) = (-x)^2 = x^2 = F(x)$

(ii) $F(x) = \cos x$ అయితే $F(-x) = \cos(-x) = \cos x = F(x)$

(iii) $F(x) = (x)$ అయితే $F(-x) = |-x| = |x| = F(x)$



పటం 16.28

ఈ సరి ప్రమేయాన్ని గ్రాఫ్ ద్వారా చూడవచ్చు.

గ్రాఫ్ Y – అక్షానికి పై వైపు కలదు.

16.7.2 బేసి ప్రమేయం

ప్రతి విలువ x కు $f(-x) = -f(x)$ అయితే f ను బేసి ప్రమేయం అందురు.

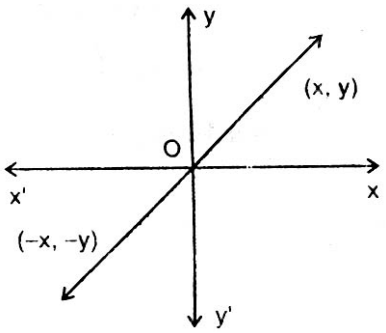
ఉదాహరణకు

(i) $f(x) = x^3$ అయితే

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

(ii) $f(x) = \sin x$ అయితే

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$



పటం 16.29

$y = x$ బేసి ప్రమేయానికి గ్రాఫ్‌పటం 15.46.

16.7.3 గరిష్ట పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయం

$f(x) = [x]$ x కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన గరిష్ట పూర్ణ సంఖ్య. అయితే $f(x)$ ను గరిష్ట పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయము అని అందురు. దీని యొక్క గ్రాఫ్ క్రింది పటంలో మాదిరి మెట్ల రూపంలో వుంటుంది.

$y = [x],\ x \in \mathrm{R}$ కు గ్రాఫ్‌ను గీద్దాం.

$[x] = 1,\ 1 \le x \le 2$

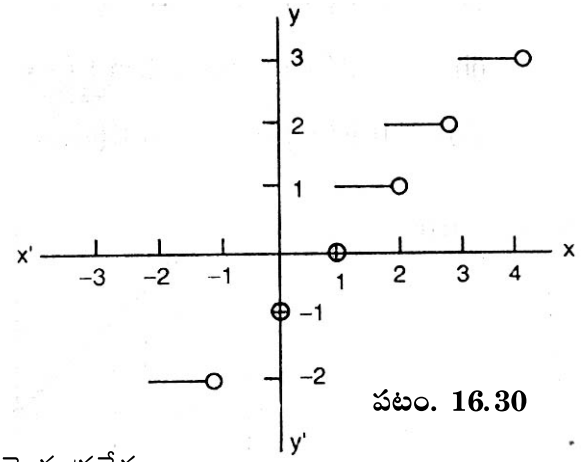
$[x] = 2,\ 2 \le x \le 3$

$[x] = 3,\ 3 \le x \le 4$

$[x] = 0,\ 0 \le x \le 1$

$[x] = -1,\ -1 \le x \le 0$

$[x] = -2,\ -2 \le x \le -1$



పటం. 16.30

గరిష్ట పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశం

వాస్తవ సంఖ్యల సమితి. వ్యాప్తి పూర్ణ సంఖ్యల సమితి.

16.7.4 బహుపది ప్రమేయం

బహుపది రూపంలో నిర్వచించే ఏ ప్రమేయాన్నైన బహుపది ప్రమేయం అని అందురు.

ఉదాహరణకు

(i) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$

(ii) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

(iii) $f(x) = 3$ అన్నియు బహుపది ప్రమేయాలు

సూచన : $f(x) = k$, k ఒక స్థిరాంకం అగునట్లు ఉండే ప్రమేయాలను స్థిర ప్రమేయం అందురు.

16.7.5 అకరణీయ ప్రమేయం

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. ఇక్కడ $h(x) \neq 0$ మరియు $g(x)$ మరియు $h(x)$ లు బహుపది ప్రమేయాలైతే $f(x)$ ను అకరణీయ ప్రమేయం అందురు.

ఉదాహరణకు : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1},\ x \neq -1$ ఒక అకరణీయ ప్రమేయం

16.7.6 వ్యుత్క్రమ ప్రమేయం

$y = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ రూపంలోని ప్రమేయాలను వ్యుత్క్రమ ప్రమేయాలు అని అందురు.

16.7.7 ఘాత ప్రమేయాలు

Leonhard Euler అను swiss గణితవేత్త e విలువను అనంత శ్రేఢి రూపంలో పరిచయం చేశాడు. వాస్తవానికి

$$e = 1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+.....+\frac{1}{\lfloor n}+..... \qquad ...(1)$$

ఈ అనంతశ్రేఢి మొత్తం విలువ ఒక పరిమిత అవధిని సమీపిస్తుంది. (i.e., ఈ శ్రేఢి అభిసరిస్తుంది) కావున ఇది ఒక ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అగును. దీనిని e చే సూచిస్తారు. ఈ సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య విలువ 2 మరియు 3ల మధ్య వుండును.

ఇప్పుడు ఈ అనంత శ్రేఢిని గమనించండి.

$$1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+.....+\frac{x^n}{\lfloor n}+.....$$

ఈ అనంత శ్రేఢి మొత్తం విలువ కూడా పరిమిత అవధి అగును. దీనిని e^x చే సూచిస్తారు. కావున

$$e^x = 1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+.....+\frac{x^n}{\lfloor n}+..... \qquad ...(2)$$

దీనిని ఘాత సిద్ధాంతం అని, ఈ శ్రేఢిని ఘాత శ్రేఢి అని అందురు.

(2) లో $x = 1$ ని వ్రాస్తే (1) వస్తుంది.

$f(x) = e^x$ ప్రమేయం, x వాస్తవ సంఖ్యను ఘాత ప్రమేయం అని అందురు.

$y = e^x$ కు గ్రాఫ్‌ను క్రింది ముఖ్యమైన సూచనల ద్వారా గీయవచ్చు.

(i) x విలువలు పెరిగే కొద్ది y విలువలు చాలా ఎక్కువగా పెరుగుతుంది. కాని x విలువ తగ్గితే y విలువ '0'కు దగ్గరగా వస్తుంది.

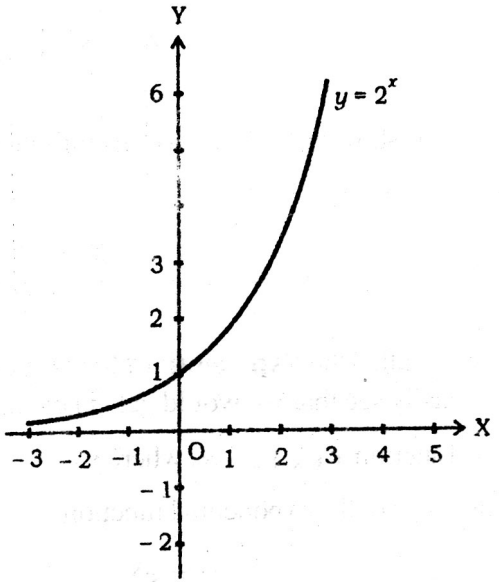
(ii) $e^x \neq 0$ (అన్ని వాస్తవ విలువలకు) X- అంతరఖండం ఉండదు.

(iii) Y- అంతరఖండం 1, ఎందుకంటే $e^0 = 1$ మరియు $e \neq 0$.

(iv) పటం 16.41 లో లాగా e^x గ్రాఫ్‌ను గీయడానికి పట్టికలోని విలువలు ఉపయోగపడతాయి.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.04	0.13	0.36	1.00	2.71	7.38	20.08

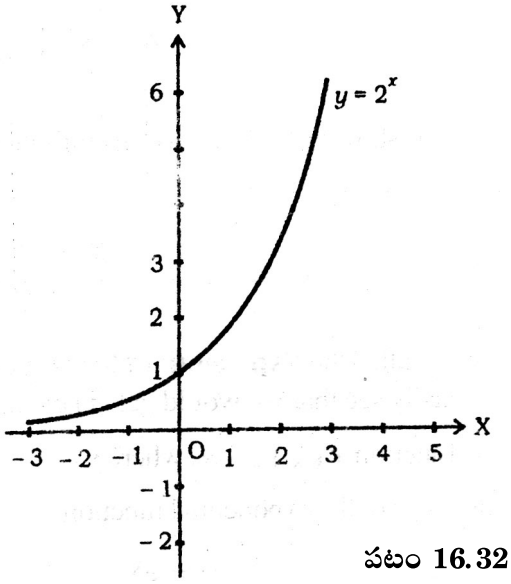
ఒక వేళ ఆధారం e కి బదులు a తీసుకుంటే మనకు ఘాత ప్రమేయం వస్తుంది.



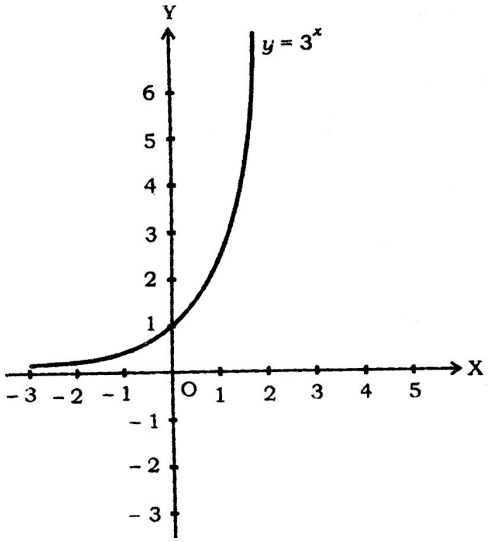
పటం **16.31**

(i) $y = 2x$ (పటం 16.42)

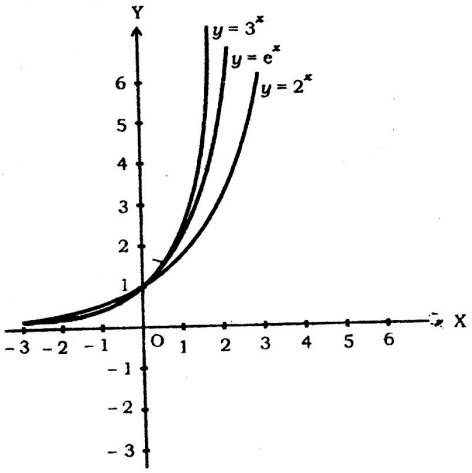
(ii) $y = 3^x$ (పటం 16.42)



పటం **16.32**



పటం 16.33



పటం 16.34

(iii) $y = e^x$ ల పటం (16.44)

$y = 2^x$

$y = 3^x$

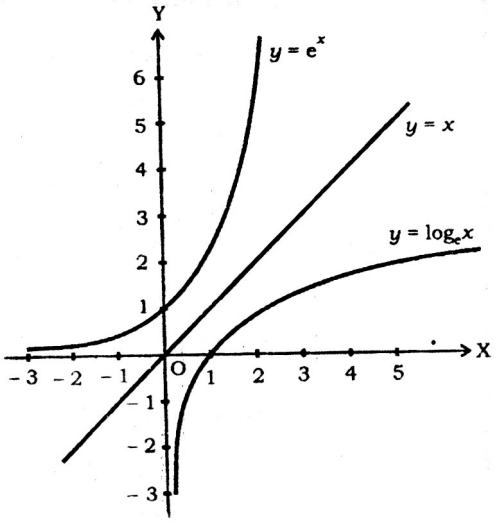
16.7.8 సంవర్గమాన ప్రమేయం

$y = e^x$ ప్రమేయాన్ని గమనిస్తే

దీనిని $x = \log_e y$ ఈ విధంగా $y = \log_e x$ అనునది $y = e^x$ కు విలోమ ప్రమేయం అగును. ఆధారం e అయినపుడు ఆధారాన్ని వ్రాయడం అవసరం లేదు. కావున $x = \log_e x$ ను $x = \log x$ గా వ్రాస్తారు.

$y = e^x$ మరియు $y = \log x$ లు ఒకదానికొకటి విలోమాలు అగును.

$y = x$ రేఖకు సౌష్టవంగా ఈ గ్రాఫ్‌లు వుండును.



పటం 16.35

$y = x$ రేఖ దృష్ట్యా $y = e^x$ గ్రాఫ్‌కు ప్రతిబింబంగా $y = \log x$ గ్రాఫ్‌ను పొందవచ్చు

సూచన: (i) విద్యార్థి మాధ్యమిక గణితంలో నేర్చుకున్న ఘాతాంకాల ధర్మాలను గుర్తు చేసుకొనవలెను.

$a > 0$ మరియు m, n లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ అగును.

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$a^0 = 1$.

(ii) సంవర్గమాన ప్రమేయాల ధర్మాలు :

$$\log_a(mn) = \log_a^m + \log_a^n$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a^m - \log_a^n$$

$$\log_a(m)^n = n\log_a^m$$

$\log_b^m = \dfrac{\log_a^m}{\log_a^b}$ లేదా $\log_b^m = \log_a^m \cdot \log_b^a$ ఇక్కడ $\log a, b > 0 \;\; a \neq 1, \; b \neq 1.$

అభ్యాసం 16.4

I. సరియైన వాక్యాన్ని ✓ తో గుర్తించండి.

(i) $f(x) = 2x^4 + 7x^2 + 9x$ అనేది సరి ప్రమేయం.

(ii) బేసి ప్రమేయం Y- అక్షానికి సౌష్టవంగా ఉంటుంది.

(iii) $f(x) = x^{1/2} - x^3 + x^5$ అనేది ఒక బహుపది ప్రమేయం

(iv) $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ అనేది $\forall x \in \mathrm{R}$ కు అకరణీయ ప్రమేయం

(v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ అనేది ఒక స్థిర ప్రమేయం

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ప్రమేయానికి '0' తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువలు ప్రదేశం అగును.

(vii) గరిష్ట పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయం సరి ప్రమేయం కాదు, బేసి ప్రమేయం కాదు.

2. క్రింది ప్రమేయాలలో బహుపది, అకరణీయ, వ్యుత్క్రమ, లేదా స్థిర ప్రమేయాలుగా విడదీయండి.

(a) $y = 3x^8 - 5x^7 + 8x^5$ (b) $y = \frac{x^2+2x}{x^3-2x+3},\ x^3-2x+3 \neq 3$

(c) $y = \frac{3}{x^2},\ x \neq 0$ (d) $y = 3 + \frac{2x+1}{x},\ x \neq 0$

(e) $y = 1 - \frac{1}{x},\ x \neq 0$ (f) $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2},\ x \neq 2$

(g) $y = \frac{1}{9}$

16.8 సంయుక్త ప్రమేయాలు

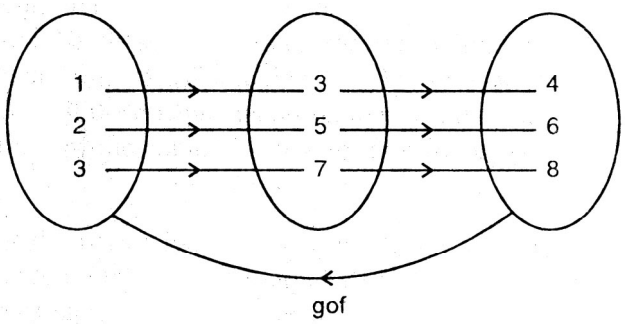
క్రింది రెండు ప్రమేయాల నుండి

$y = 2x + 1, \quad x \in \{1, 2\ 3\}$

$z = y + 1, \quad y \in \{3, 5\ 7\}$

z అనేది x మరియు y ప్రమేయాల యొక్క సంయుక్త ప్రమేయం. ఎందుకనగా z ను y పదాలలో, y ని x పదాలలో నిర్వచించారు. దీనిని క్రింది గ్రాఫ్ పటం ద్వారా గుర్తించవచ్చు.

$f(x) = y = 2x + 1$ $g(y) = z = y + 1$



పటం 16.36

సంయుక్త ప్రమేయాన్ని gof చే సూచిస్తారు. ఇది f, g ల సంయుక్త ప్రమేయం.

$f: A \to B$ మరియు $g: B \to C$ అయితే $gof: A \to C$ అగును.

$f(x) : 3x + 1$ మరియు $g(x) : x^2 + 2$ అయితే $gof(x) = g[f(x)]$

$fog(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 2) = 3[x^2 + 2] + 1 = 3x^2 + 7$

మరియు $(gof)(x) = g[f(x)] = g(3x + 1) = (3x + 2)^2 + 2 = 9x^2 + 6x + 3$

(i) మరియు (ii) ల నుండి $fog = gof$ సాధారణంగా $fog \neq gof$

ఇదేవిధంగా, $(fof)(x) = f[f(x)] = f(3x + 1)$ f, f ల సంయుక్తం

$= 3(3x + 1) + 1 = 9x + 3 + 1 = 9x + 4$

$(gog)(x) = g[g(x)] = g[x^2 + 2]$ (g, g ల సంయుక్తం)

$= (x^2 + 2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 4 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6.$

ఉదాహరణ 16.12 : $f(x) = \sqrt{x+1}$ మరియు $g(x) = x^2 + 2$ అయితే (fog) మరియు (gof) విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $fog(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2 + 1} = \sqrt{x^2 + 3}$

$(gof)(x) = g[f(x)]$

$= g\left(\sqrt{x+1}\right)$

$= \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2$

$= x + 1 + 2 = x + 3$

ఇక్కడ $(fog) \neq (gof)$ అని తెలుస్తుంది.

ఉదాహరణ 16.13 : $f(x) = x^3$, $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $g(x) = \frac{1}{x}$, $g : \mathrm{R} - \{0\} \to \mathrm{R} \to \{0\}$ అయితే fog మరియు gof.

సాధన : $(fog)(x) = f[g(x)]$

$= f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{x^3}$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^3) = \frac{1}{x^3}$

ఇక్కడ $gof = fog$ అని తెలుస్తుంది.

సూచన : 15.31 మరియు 15.32 ఉదాహరణల ద్వారా gof మరియు fog లు సమానం కావచ్చు. కాకపోవచ్చు అని గమనించండి.

అభ్యాసం 16.5

1. క్రింది ప్రమేయాలకు $fog,\ gof,\ fof$ మరియు gog లు వ్రాయండి.

   (a) $f(x) = x^2 - 4,\ g(x) = 2x + 5$

   (b) $f(x) = x^2,\ g(x) = 3$

   (c) $f(x) = 3x - 7,\ g(x) = \frac{2}{x},\ x \neq 0$

2. $f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = x - 2$ అయితే

   $fog \neq gof$ మరియు $f\left[f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = g\left[f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

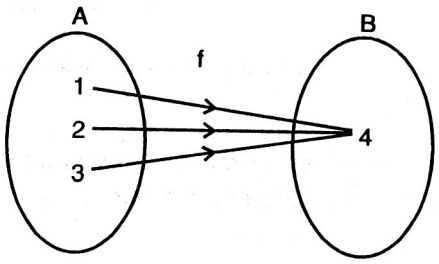
3. $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$ అయితే $fog = gof$.

16.9 విలోమ ప్రమేయం

A, B లు రెండు సమితులు $a \in A, b \in B$

f: A $\rightarrow$ B ద్విగుణ ప్రమేయం అయితే f^{-1}: B $\rightarrow$ A ను f యొక్క విలోమ ప్రమేయం అందురు.

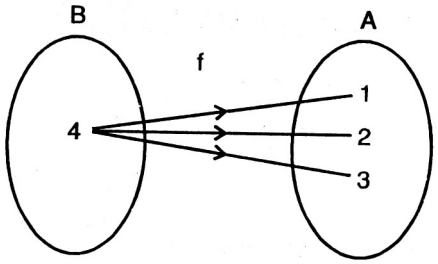
(A) క్రింది సంబంధాన్ని పరిశీలించండి.



పటం 16.37

ఇది బహు-ఏక ప్రమేయం

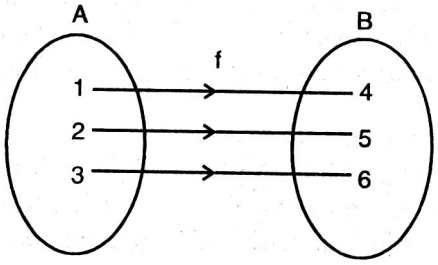
ఈ సంబంధానికి విలోమాన్ని కనుక్కొందాము. పటం ద్వారా దీనిని ఈ క్రింది విధంగా గుర్తించవచ్చు.



పటం 16.38

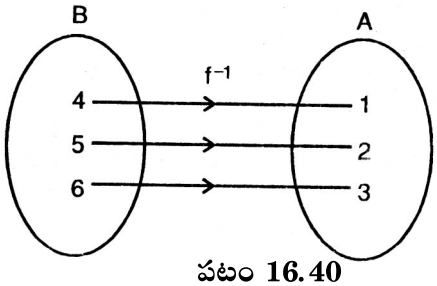
ఈ సంబందం ప్రమేయం కాదు (ఎందుకు?)

(B) ఇంకోసంబందాన్ని తీసుకుందాం.



పటం 16.39

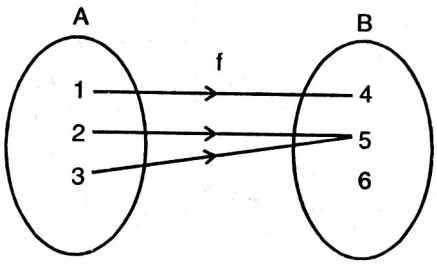
ఇది ద్విగుణప్రమేయం. ఈ సంబంధానికి విలోమాన్ని కనుక్కొందాం. దీనిని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.



ఇది ప్రమేయం అగును.

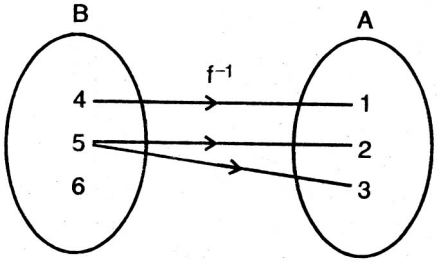
పటం 16.40

(C) ఈ సంబంధాన్ని పరిశీలించండి.



పటం 16.41

ఇది బహు-ఏక ప్రమేయం. ఇప్పుడు దీనికి విలోమాన్ని కనుక్కోందాం. దీనిని ఈ విధంగా గుర్తించవచ్చు.

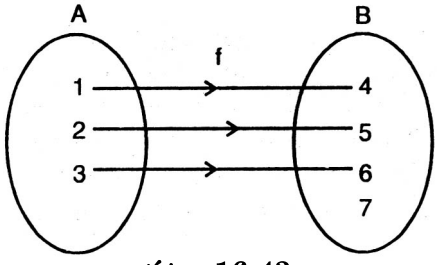


ఇది ప్రమేయం కాదు

పటం 16.42

ఎందుకంటే B లోని 6 అనే మూలకం A లోని ఏ మూలకంతోనూ జతపరచ బడలేదు. అంతేకాక B లోని మూలకాలకు ప్రతిబింబం ఏకైకం కాదు.

(D) ఈ క్రింది సంబంధాన్ని తీసుకుంటే

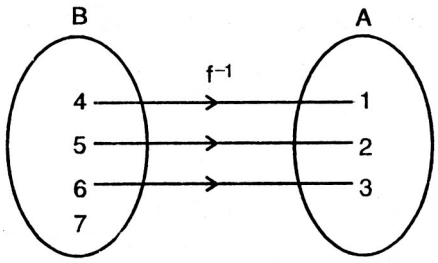


పటం 16.43

ఇది అన్వేక ప్రమేయం.

దీనికి విలోమాన్ని ఆలోచిద్దాం.

ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకంటే B లోని 7 అనే మూలకం A లోని ఏ మూలకంతోనూ సంబంధాన్ని కల్గి యుండలేదు.



పటం 16.44

పై సంబంధాల నుండి అన్ని సంబంధాలకు విలోమాలు ఉండవచ్చు. ఉండకపోవచ్చు.

మరియు ద్విగుణ ప్రమేయానికి మాత్రమే విలోమం వుంటుంది అని మనకు స్పష్టంగా తెలుస్తుంది.

అభ్యాసం 16.6

1. (i) $y = 4x - 7$ ప్రమేయానికి విలోమం వుంటుందని చూపండి.

   (ii) f అనేది A ప్రదేశం గాను, B ని వ్యాప్తిగాను గల ఒక ప్రమేయం అనుకొనిన f విలోమానికి ప్రదేశం వ్యాప్తిని వ్రాయండి.

2. క్రింది ప్రమేయాలకు, విలోమాలు వుంటే కనుక్కోండి.

   (a) $f(x) = x + 3 \ \forall \ x \in R$

   (b) $f(x) = 1 - 3x \ \forall \ x \in R$

   (c) $f(x) = x^2 \ \forall \ x \in R$

   (d) $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \neq 0, \ x \in R$

16.10 వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం

1. $A \subseteq R$ అయితే, ప్రమేయము $f : A \to B$ ను వాస్తవ చలరాశి ప్రమేయము (real variable function) అని అంటాము.

2. $B \subseteq R$ అయితే, ప్రమేయము $f : A \to B$ ను వాస్తవ విలువ ప్రమేయము (real valued function) అని అంటాము.

3. $A \subseteq R$, $B \subseteq R$ అయితే, ప్రమేయము $f : A \to B$ ను వాస్తవ ప్రమేయము (real function) అని అంటాము.

ఉదా: $a^x\ (a > 0)$, $\sin x$, $\log x$ లు అన్నియూ వాస్తవ ప్రమేయాలు లేదా ఒకే చలరాశి యొక్క వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలు

16.10.1 రుణేతర వాస్తవ సంఖ్యకు n వ మూలకం

x ఒక రుణేతర వాస్తవ సంఖ్య, n ఒక ధనపూర్ణంకం అనుకొనుము. అపుడు $y^n = x$ అయ్యేటట్లు రుణేతర వాస్తవ సంఖ్య y వ్యవస్థితం. ఈ సంఖ్య y ని x కు n వ మూలం అంటాం. దీనిని $x^{\frac{1}{n}}$ లేదా $\sqrt[n]{x}$ అని రాస్తాం.

ఉదాహరణ 16.14: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\ (a > 0)$ వాస్తవ మూల్యప్రదేశం $[-a, a]$

$[\because \sqrt{a^2 - x^2} \in R \quad (a > 0)$

$\Leftrightarrow a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$

$\Leftrightarrow |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a\ ]$

16.10.2 వాస్తవమూల్య ప్రమేయాల బీజీయ ధర్మాలు

f, g లు వాస్తవ ప్రమేయాలు. f, g ల ప్రదేశములు వరుసగా A, B సమితులైతే f, g లు రెండు $A \cap B$ పై నిర్వచింపబడతాయి.

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ – ప్రదేశము $= A \cap B$

ii) $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$ - ప్రదేశము $= A \cap B$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ - ప్రదేశము $= \{x / x \in A \cap B, g(x) \neq 0\}$

iv) $f: A \to R$, $n \in N$ అనుకొనుం. A మీద $|f|, f^n$ లను

$|f|(x) = |f(x)|$ $f^n(x) = (f(x))^n \; \forall x \in A$ గా నిర్వచిస్తాం.

v) $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ - ప్రదేశం = A యొక్క ఉపసమితి లేక

$A \cap [x / f(x) \geq 0]$

ఉదాహరణ 16.15 : క్రింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

$$f(x) = \frac{1}{6x - x^2 - 5}$$

సాధన: $f(x) = \frac{1}{6x - x^2 - 5} = \frac{1}{(x-1)(5-x)} \in R$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1, 5$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - \{1, 5\}$.

ఉదాహరణ 16.16: $f(x) = \sqrt{(x+2)(x-3)}$

సాధన : $\sqrt{(x+2)(x-3)} \in R$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -2$ లేదా $x \geq 3$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$

$= R - (-2, 3)$.

ఉదాహరణ 16.17: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

సాధన : $\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \in R$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0, x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) \geq 0,\ (x-1)(x-2) > 0$

$\Leftrightarrow x \in R - (-1, 1) \cap R - (1, 2)$

f ప్రదేశం = $R - (-1, 2)$.

ఉదాహరణ 16.18 : $f = \{(4, 5)(5, 6), (6, -4)\}$, $g = \{(4, -4), (6, 5), (8, 5)\}$ అయితే $(f - g)$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $f - g = \{(4, 5 + 5), (6, -4 - 5)\}$

$= \{(4, 9), (6, -9)\}$.

ఉదాహరణ 16.19 : $2f + 4g$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $2f$ ప్రదేశం = $\{4, 5, 6\}$ $4g$ ప్రదేశం = $\{4, 6, 8\}$

కావున $2f = \{(4, 10)(5, 12)\ (6, -8)\}$

$4g = \{(4, -16)(6, 20)\ (8, 20)\}$

$2f + 4g$ ప్రదేశం = $\{4, 6\}$

$2f + 4g = \{(4, 10 - 16), (6, -8 + 20)\}$

$= \{(4, -6), (6, 12)\}$.

ఉదాహరణ 16.20 : fg విలువను కనుగొనుము.

సాధన : fg ప్రదేశం $A \cap B = \{4, 6\}$

$fg = \{(4, (5)\ (-4)), (6, (-4)(-5)\}$

$= \{(4, -20), (6, 20)\}$.

ఉదాహరణ 16.21 : $\frac{f}{g}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{f}{g}$ ప్రదేశం = $\{4, 6\}$

$\therefore \frac{f}{g} = \left\{\left(4, \frac{-5}{4}\right), \left(6, \frac{-4}{5}\right)\right\}$

ఉదాహరణ 16.22 : f^2 విలువను కనుగొనుము.

సాధన : ప్రదేశం f^2 = A = {4, 5, 6}

$$f^2 = \{(4, 25), (5, 36), (6, 16)\}.$$

క్రింది వాటి వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు, వ్యాప్తులు కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 16.23 : $f(x)=\frac{2+x}{2-x}$

సాధన : $f(x)=\frac{2+x}{2-x} \in \mathrm{R} \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{R} - \{2\}$

కావున f ప్రదేశం R – {2}

$f(x) = y$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow \frac{2+x}{2-x} = y \Rightarrow x = \frac{2(y-1)}{y+1}$

$y + 1 = 0 \Rightarrow (y = -1)$ కి x విలువ నిర్వచితం కాదు.

కావున f వ్యాప్తి = R – { –1}.

ఉదాహరణ 16.24 : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

సాధన : $\sqrt{9-x^2} \in \mathrm{R} \Leftrightarrow 9-x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3+x)\ (3-x)\ \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in [-3, 3]$

కావున f ప్రదేశం [–3, 3]

$y = f(x)$ అనుకొనుము $\Rightarrow x = \sqrt{9-y^2} \in \mathrm{R}$

$\Leftrightarrow 9 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3+y)(3-y) \geq 0$

$-3 \leq y \leq 3$, కానీ $f(x)$ ధనవాస్తవ సంఖ్యలను మాత్రమే తీసుకొంటాయి.

$\therefore$ f వ్యాప్తి [0, 3].

16.11 ప్రమేయాలలో రకాలు

1. అంతర్లీన ప్రమేయములు

16.11.1 $y = g(x)$ ను సూచించే g అనే ప్రమేయము, $f(x, y) = 0$ అనే సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరిస్తే, $f(x, y) = 0$ ను g అనే అంతర్లీన ప్రమేయాన్ని నిర్వచిస్తుందని అంటాము.

ఉదా: $x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$

అభ్యాసం 16.7

1. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ కు వాస్తవ మూల్యప్రదేశంను కనుగొనుము.

2. $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ కు వాస్తవ మూల్యప్రదేశంను కనుగొనుము.

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ కు వాస్తవ మూల్యప్రదేశంను కనుగొనుము.

4. క్రింది ప్రమేయాలకు వ్యాప్తులు కనుగొనుము.

   i) $\dfrac{\sin \pi[x]}{1 + [x]^2}$

   ii) $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

5. $f(x) = 2x - 1, g(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే కింది వాటిని కనుగొనుము.

   i) $\left[\dfrac{\sqrt{f}}{g}\right](x)$

   ii) $(f + g + 2)(x)$ లను కనుగొనుము.

6. $f = \{(1, 2)(2, -3), (3, -1)\}$ అయితే

   i) $2f$ ii) f^2 iii) $\sqrt{f}$ లను కనుగొనుము.

కీలకపదాలు

- నిర్దిష్ట ధర్మాన్ని కల్గివున్న వస్తువుల సముదాయం సమితి
- రోష్టర్ రూపంలో మూలకాలన్నింటిని వ్రాస్తాము. కాని సమితి నిర్మాణ రూపంలో మూలకాల ధర్మాన్ని సూచిస్తూ వ్రాస్తాము.
- ఏదేని సమితిలో మూలకాలను లెక్కించగల్గితే దానిని పరిమిత సమితి అని, లెక్కించడానికి వీలుకానట్టి సమితిని అపరిమిత సమితి అని అందురు.
- రెండు సమితులలోని మూలకాలచే ఏర్పడిన సమితిని వాటి సమ్మేళనము అందురు.
- A, B లలోని మూలకాలచే ఏర్పడిన క్రమయుగ్మాల సమితిని A, B ల కార్టీజియన్ లబ్దం అందురు. దీనిని $A \times B$ చే సూచిస్తారు.

  i.e., $A \times B = \{(a, b) : a \in A,$ మరియు $b \in B\}$.
- సంబంధం అనేది $A \times B$ కి ఉపసమితి, ఇక్కడ A,B లు సమితులు

  i.e., $R \subseteq A \times B$ $\{(a, b) : a \in A$ మరియు $b \in B$ మరియు $a\, R\, b\}$
- ప్రమేయం అనునది ఒక ప్రత్యేక రకమైన సంబంధం
- $f : A \to B$ ప్రమేయం అనేది Aనుండి Bకి సంబంధం ఇక్కడ Aలోని ప్రతి మూలకానికి Bలో మూలకాలు ఏకైకంగా వుంటాయి.
- ప్రమేయాన్ని క్రమయుగ్మాల సమితిగా పేర్కొనవచ్చు.
- fఅనేది Aనుండి Bకి ప్రమేయం అయితే

  ప్రదేశం : f లోని క్రమయుగ్మాల యొక్క ప్రథమ నిరూపకాల సమితి.

  వ్యాప్తి : fలోని క్రమయుగ్మాల యొక్క ద్వితీయ నిరూపకాల సమితి
- ప్రమేయాలను $y = f(x)$ సమీకరణ రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

  ఇక్కడ x అనేది స్వతంత్ర చలరాశి, y అనేది అస్వతంత్ర చలరాశి.

  ప్రదేశం : స్వతంత్ర చలరాశుల సమితి.

వ్యాప్తి : అస్వతంత్ర చలరాశుల సమితి.

ప్రతి సమీకరణం ప్రమేయం కాదు.

నిలువు రేఖ పరీక్ష : ఇచ్చిన గ్రాఫ్ ప్రమేయమా కాదా అని తెలుసు కొనుటకు Y- అక్షానికి సమాంతరంగా రేఖను గీస్తాము. ఈ రేఖ గ్రాఫ్‌ను ఒకటి కంటే ఎక్కువ బిందువులలో కలిస్తే, ఇచ్చినది ప్రమేయం కాదు అని అంటాము.

- సమితి Aనుండి సమితి Bకి fఒక ప్రమేయం అయితే దానిని $f: A \to B$ గా గుర్తిస్తాము.

  (i) Bలోని అన్ని మూలకాలు, A లోని మూలకాలకు ప్రతిబింబాలు కాకపోతే f అనేది ఒక ప్రమేయం ఇక్కడ వ్యాప్తి C సహప్రదేశం

  (ii) వ్యాప్తి = సహ ప్రదేశం అయితే fను సంగ్రస్త ప్రమేయం అందురు.

  (iii) A లోని విభిన్న మూలకాలకు Bలోని ప్రతిబింబాలు విభిన్నాలైతే fను అన్వేక ప్రమేయం అని అందురు.

  (iv) A లోని (ప్రదేశం) మూలకాలకు వ్యాప్తిలో ఒకే మూలకం వుంటే fను బహు-ఏక ప్రమేయం అందురు.

- క్షితిజరేఖ పరీక్ష : ఒక ప్రమేయం అన్వేకమా కాదా?

  పరీక్షించుటకు X- అక్షానికి సమాంతరంగా రేఖను గీస్తే అది గ్రాఫ్‌ను ఒకే బిందువు వద్ద కలిస్తే దానిని అన్వేక ప్రమేయం అందురు.

- ఒక ప్రమేయం అది ఇచ్చిన అంతరంలో ఆరోహణ లేదా అవరోహణ అయితే దానిని ఏకదిష్ట ప్రమేయం అందురు.

- $f(-x) = f(x)$ అయితే fను సరి ప్రమేయం అని అందరు.

- $f(-x) = -f(x)$ అయితే fను బేసి ప్రమేయం అందురు, $x, -x \in D$

- ఒక ప్రమేయం అన్వేకం మరియు సంగ్రస్తం అయితేనే దానికి విలోమం ఉంటుంది.

- $A \subseteq R$, $B \subseteq R$ అయితే ప్రమేయం $f : A \to B$ ను వాస్తవ మూల్యప్రమేయం అంటాము.

- $y^n = x$ అయ్యేటట్లు, y ని x కు nవ మూలం అంటాం దీనిని $x^{\frac{1}{n}}$ లేదా $\sqrt[n]{x}$ అని రాస్తాం.
- f, g లు వాస్తవ ప్రమేయాలు, వీటి ప్రదేశాలు వరసగా A, B సమితిలైతే f, g లు $A \cap B$ రెండు పై నిర్వచింపబడుతాయి.
- $(f \pm g)x = f(x) \pm g(x)$ ప్రదేశం - $A \cap B$
- $(f\ g)x = f(x)\ g(x)$ - ప్రదేశం = $A \cap B$
- $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}$ - ప్రదేశం = $\{x/x \in A \cap B,\ g(x) \neq 0\}$
- $f(x)$ క్షేత్రంలోని $\forall x$ కు $f(-x) = -f(x)$ లో $f(x)$ను x లో బేసి ప్రమేయం అని $f(-x) = f(x)$ అయితే $f(x)$ను సరిప్రమేయం అంటాం.
- $f(x) = a^x\ (a > 0)$ అనే ప్రమేయాన్ని ఘాత ప్రమేయం అని అంటాం.
- $f(x) = \log_a x\ (a \neq 1,\ x$ ధనసంఖ్యలు అయినపుడు) ప్రమేయాన్ని సంవర్గమాన ప్రమేయం అంటాం.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. క్రింది వాటిలో ఏవి సత్యాలు ? ఏవి అసత్యాలు.

   (i) $\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$ (ii) $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

   (iii) $\{a, e, o\} = \{a, b, c\}$ (iv) $\{\phi\} = \{\}$

2. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు, వ్యాప్తిలు వ్రాయండి.

   $f_1 : \{(0, 1), (2, 3), (4, 5), (6, 7), \ldots (100, 101)\}$

f_2 : {(–2, 4), (–4, 16), (–6, 36), ...}

f_3 : {(1, 1), (1/2, –1), (1/3, 1), (1/4,–1) .....}

f_4 : {.....(3, 0), (–1, 2), (4, –1)}

f_5 : {.....(–3, 3), (–2, 2), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), ...}

3. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు వ్రాయండి.

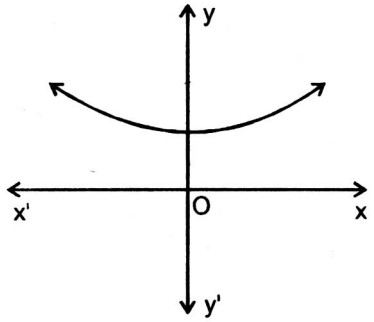
(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x-5)}}$

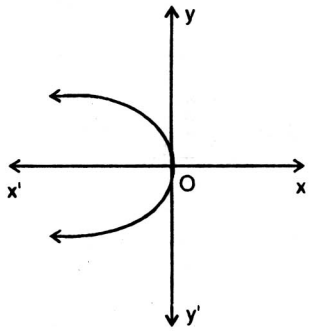
4. క్రింది రేఖాచిత్రాలలో ఏవి ప్రమేయాలు ?

(a)



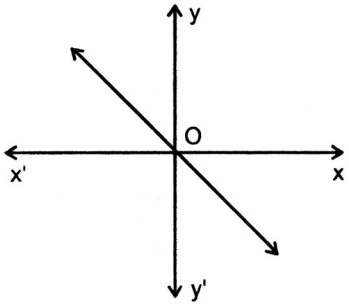
పటం 16.45

(b)



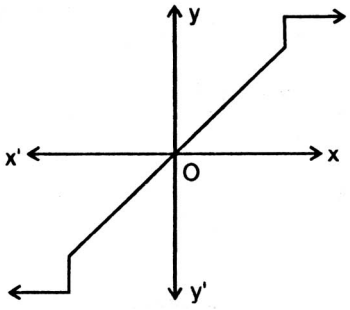
పటం 16.46

(c)



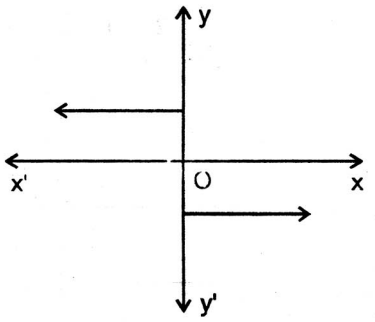
పటం 16.47

(d)



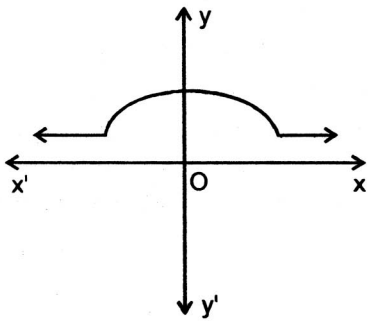
పటం 16.48

(e)



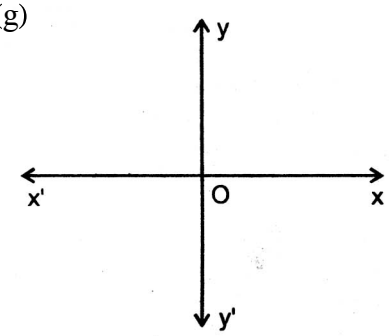
పటం 16.49

(f)



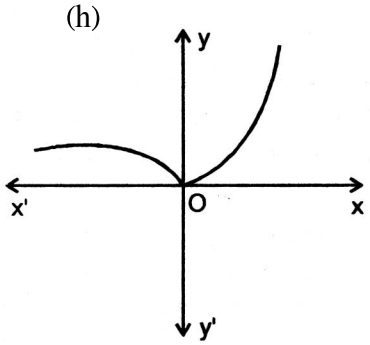
పటం 16.50

(g)



పటం 16.51

(h)



పటం 16.52

5. క్రింది ప్రమేయాలలో అన్వేక ప్రమేయాలేవి ? బహు-ఏక ప్రమేయాలేవి ?

(a) $y = 3x + 5,\ x \in \mathrm{R}$

(b) $y = 1 - 2x^2,\ x \in \mathrm{R}$

(c) f: {(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)}

(d) f: { 1, 2, 3} $\rightarrow$ {4, 5, 6, 8} కావున $f(1) = 4,\ f(2) = 6, f(3) = 8.$

6. క్రింది వాటిలో ఏవి అకరణీయ ప్రమేయాలు ?

(a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2},\ x \in \mathrm{R} - \{-2\}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}},\ x \in \mathrm{R}^{-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+4},\ x \in \mathrm{R} - \{-2\}$

(d) $y = x,\ x \in \mathrm{R}$

7. క్రింది వాటిలో బహుపది ప్రమేయాలేవి ?

(a) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}x + 2$

(b) $f(x) = (x+2)^2$

(c) $f(x) = 3 - x + 2x^3 - x^4$

(d) $f(x) = \sqrt{x} + x - 5,\ x \geq 0.$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4},\ x \notin (-2, 2)$

8. క్రింది వాటిలో ఏవి సరి ప్రమేయాలు? ఏవి బేసి ప్రమేయాలు?

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2},\ x \in [-3, 3]$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(c) $f(x) = |x|$

(d) $f(x) = x - x^5$

9. క్రింది వాటికి $fog,\ gof,\ fof, gof$ ప్రమేయాలను కనుక్కోండి.

(a) $f(x) = x^3\ \ g(x) = 4x - 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x \neq 0\ \ g|x| = x^2 - 2x + 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x-4},\ x \geq 4\ \ g(x) = x - 4$

(d) $f(x) = x^2 - 1\ \ g(x) = x^2 + 1$

10. (a) $f(x) = |x|,\ \ g(x) = 1/x,\ \ x \neq 0,\ \ h(x) = x^{1/3}$ అయితే, $fogoh$ విలువ కనుక్కోండి.

(b) $f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = 2x^2 + 1$ అయితే, $fog\ (3)$ మరియు $gof\ (3)$ విలువ కనుక్కోండి.

జవాబులు

అభ్యాసం 16.1

1. (a), (c). (f) 2. (a), (b)

3. (a) ప్రదేశం = $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$, వ్యాప్తి = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(b) ప్రదేశం = $\{-3,-2,-1\}$, వ్యాప్తి = $\{2,-1,5\}$

(c) ప్రదేశం = $\{1,0,2,-1\}$, వ్యాప్తి = $\{1, 0, 2, -1\}$

(d) ప్రదేశం = {దీపక్, సందీప్, రాజన్}, వ్యాప్తి = {16, 28, 24}

4. (a) ప్రదేశం = {1, 2, 3}, వ్యాప్తి = {4, 5, 6}

(b) ప్రదేశం = {1, 2, 3} వ్యాప్తి = {4}

(c) ప్రదేశం = {1, 2, 3}, వ్యాప్తి = {1, 2, 3}

(d) ప్రదేశం = గగన్, రామ్, సోహెల్}, వ్యాప్తి = {8, 9, 5}

(e) ప్రదేశం = {a, b, c, d}, వ్యాప్తి = {2, 4}

అభ్యాసం 16.2

1. (a) (i) ప్రదేశం = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి (ii) ప్రదేశం = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

(iii) ప్రదేశం = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

(b)(i) ప్రదేశం = $R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ (ii) ప్రదేశం = $R - \left\{-\frac{1}{4}, 5\right\}$

(iii) ప్రదేశం = R – {3, 5} (iv) ప్రదేశం = R – {3, 5}

(c) (i) ప్రదేశం = $\{x \in R;\ x \leq 6\}$ (ii) ప్రదేశం = $\{x \in R;\ x \geq -7\}$

(iii) ప్రదేశం = $\{x : x \in R;\ x \geq -5/3\}$

(d) (i) ప్రదేశం = $\{x : x \in R$ మరియు $3 \leq x \leq 5\}$

(ii) ప్రదేశం = $\{x : x \in R,\ x \geq 3, x \leq -5\}$

(iii) ప్రదేశం = $\{x : x \in R,\ x \geq -3, x \leq -7\}$

(iv) ప్రదేశం = $\{x : x \in R,\ x \geq 3, x \leq -7\}$

2. (a) (i) వ్యాప్తి = $\{13, 25, 31, 7, 4\}$ (ii) వ్యాప్తి = $\{19, 9, 33, 1\}$

(iii) వ్యాప్తి = $\{2, 4, 8, 14, 22\}$

(b) (i) వ్యాప్తి = $\{f(x) : -2 \leq f(x) \leq 2\}$

(ii) వ్యాప్తి = $\{f(x) : 1 \leq f(x) \leq 10\}$

(c) (i) వ్యాప్తి = $\{f(x) : 1 \leq f(x) \leq 25\}$ (ii) వ్యాప్తి = $\{f(x) : -6 \leq f(x) \leq 6\}$

(iii) వ్యాప్తి = $\{f(x) : 1 \leq f(x) \leq 5\}$ (iv) వ్యాప్తి = $\{f(x) : 0 \leq f(x) \leq 5\}$

(d) (i) వ్యాప్తి = R (ii) వ్యాప్తి = R (iii) వ్యాప్తి = R

(iv) వ్యాప్తి = $\{f(x) : f(x) < 0\}$

(v) వ్యాప్తి = $\{f(x) : -1 \leq f(x) \leq 0\}$

(vi) వ్యాప్తి = $\{f(x) : 0.5 \leq f(x) < 0\}$ (vii) వ్యాప్తి = $\{f(x) : f(x) > 0\}$

(viii) వ్యాప్తి : $x = -5$ అయినప్పుడు తప్ప $f(x)$ యొక్క అన్ని విలువలు.

అభ్యాసం 16.3

1. (i) కాదు (ii) అవును
2. (a), (b)
3. (a)
4. (a), (c), (e)
5. (c), (d) మరియు (e)

అభ్యాసం 16.4

1. v, vi, vii సత్యప్రవచనాలు

   (i), (ii), (iii), (iv) అసత్యప్రవచనాలు

4. (a) బహుపది ప్రమేయం (b) అకరణీయ ప్రమేయం

   (c) అకరణీయ ప్రమేయం (d) అకరణీయ ప్రమేయం

   (e) అకరణీయ ప్రమేయం (f) అకరణీయ ప్రమేయం

   (g) స్థిర ప్రమేయం

అభ్యాసం 16.5

1. (a) $fog = 4x^2 + 20x + 21$, $gof = 2x^2 - 3$, $fof = x^4 - 8x^2 + 12$
   $gog = 4x + 15$

   (b) $fog = 9$, $gof = 3$, $fof = x^4$, $gog = 3$.

   (c) $fog = \frac{6-7x}{x}$, $gof = \frac{2}{3x-7}$, $fof = 9x - 28$, $gog = x$.

అభ్యాసం 16.6

1. (ii) ప్రదేశం B వ్యాప్తి A

2. (a) $f^{-1} = x - 3$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$

   (c) విలోమం ఉండదు (d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$

అభ్యాసం 16.7

1. $R - \{1, 2, 3\}$ 2. $[0, 4]$ 3. $R - (-5, 5)$

4. i) $\{0\}$ ii) $R - \{4\}$

5. i) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2}$ ii) $(x+1)^2$

6. i) $\{(1, 4), (2, -6), (3, -2)\}$ ii) $\{(1, 4)\ (2, 9), (3, 1)\}$

iii) $\left\{(1, \sqrt{2})\right\}$

సాధనా అభ్యాసం

1. (i) అసత్యం (ii) సత్యం

(iii) అసత్యం (iv) అసత్యం

2. f_1 ప్రదేశం = {0, 2, 4, 6, ... 100}

వ్యాప్తి = {1, 3, 5, 7, ... 101}

f_2 ప్రదేశం = {–2, –4, –6, ... }

వ్యాప్తి = {4, 16, 3, 6, ...}

f_3 ప్రదేశం = {1, 1/2, 1/3, 1/4, ...}, వ్యాప్తి = {1, –1}

f_4 ప్రదేశం = {3, –1, 4}, వ్యాప్తి = {0, 1, 2, 3, ...}

f_5 ప్రదేశం = {.....–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

వ్యాప్తి = {0, 1, 2, 3, ...}

3. (a) ప్రదేశం = R (b) ప్రదేశం = R – {–1, 1}

(c) ప్రదేశం = $x \geq -\frac{1}{3}\ \forall x \in R$ (d) ప్రదేశం = $x \geq -1, x \leq -6$

(e) ప్రదేశం = $x \geq 5/2, x \leq 1$

4. (a), (c), (e), (f), (h)ల సాధనకు విజ్ఞానాన్ని పరీక్షించుకో 15.7లోని ప్ర.నెం. 7లోని సూచన ద్వారా చేయండి.

5. (a), (d) లు అన్వేక ప్రమేయాలు : (b), (c) లు బహు-ఏక ప్రమేయాలు.

6. (a), (c)

7. (a), (b), (c)

8. (a), (b), (c) సరి ప్రమేయాలు

(d), బేసి ప్రమేయాలు.

9. (a) $fog = (4x-1)^3$, $(gof) = 4x^3 - 1$, $(fof) = x^9$ $(gog) = 16x - 5$

(b) $fog = \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}$, $(gof) = \frac{3x^4-2x^2+1}{x^4}$

$fof = x^4$, $gog : x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(c) $fog = \sqrt{x-8}$, $gof = \sqrt{x-4}-4$

$fof = \sqrt{\sqrt{x-4}-4}$, $gog = x-8$

(d) $fog = x^4 + 2x^2$, $gof = x^4 - 2x^2 + 2$

$fof = x^4 - 2x^2$, $gog = x^4 + 2x^2 + 2$

10. $a = \left|\frac{1}{x^{1/3}}\right|$

(b) $(fog)(3) = 364$; $(gof)(3) = 289$

అధ్యాయం

17

త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ అధ్యాయం చదివిన తర్వాత నీవు

- ధన మరియు ఋణ కోణాలను నిర్వచించగలవు.
- కోణానికి డిగ్రీ మరియు రేడియన్‌మానాలను నిర్వచించగలవు.
- కోణాలను డిగ్రీ నుండి రేడియన్ మానానికి, రేడియన్ మానం నుండి డిగ్రీలకు మార్చడం చేయగలవు.
- $l = r\,\theta$ సూత్రాన్ని నిర్వచించగలవు.
- $l = r\,\theta$ సంబంధాన్ని ఉపయోగించి సమస్యల సాధన.
- వాస్తవ సంఖ్యలపై త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల నిర్వచనం.
- త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల గ్రాఫ్‌లను గీయగలగడం
- త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల గ్రాఫ్‌లను వివరించడం.
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

  $\sin(A \pm B) = \sin A \sin B \pm \cos A \cos B$ and $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

  సూత్రాలు
- సంకలన, వ్యవకలన సూత్రాలను ఉపయోగించి సమస్యల సాధన.
- గుణిజ, ఉపగుణిజ కోణాలు $\cos 2A$, $\sin 2A$, $\tan 2A$, $\cos 3A$, $\sin 3A$, $\tan 3A$, $\sin \dfrac{A}{2}$, $\cos \dfrac{A}{2}$, $\tan \dfrac{A}{2}$ మొదలగునవి.

పూర్వాకాంక్షితాలు

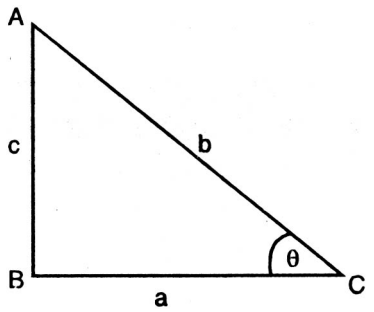
- కోణం యొక్క నిర్వచనం
- త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల నిర్వచనాలు
- పూరక, సంపూరక కోణాల త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు
- త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు

పరిచయం

త్రికోణమితి అనునది trigonometry అను గ్రీకు పదం నుండి వచ్చినది. త్రికోణమితి అనగా మూడు కోణాల కొలత. త్రికోణమితిని వైశాల్యములు, ఎత్తులు, దూరములు మొదలగు వాటికి సంబంధించిన శాస్త్రములో ఎక్కువగా ఉపయోగించెదరు. త్రికోణమితిని సాధారణంగా అన్ని సామాన్యశాస్త్రమునకు సంబంధించిన అంశములలో, భౌతిక, ఇంజనీరింగ్ విభాగములో ఎక్కువగా ఉపయోగించెదము. క్రింది తరగతులలో మనం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల గురించి చదివాము. లంబకోణ త్రిభుజ భుజాల మధ్య నిష్పత్తులను ఈ విధంగా నిర్వచించామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

$$\sin\theta = \frac{c}{b},\ \cos\theta = \frac{a}{b},\ \tan\theta = \frac{c}{a}$$

$$\text{cosec}\ \theta = \frac{b}{c},\ \sec\theta = \frac{b}{a},\ \cot\theta = \frac{a}{c}$$



పటం 17.1

ఈ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య ఈ క్రింది సంబంధాలను కూడా మనం నేర్చుకున్నాము.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,\ 1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

ఈ అధ్యాయంలో ప్రమేయాలను ఉపయోగించి త్రికోణమితికి చెందిన జ్ఞానాన్ని అభివృద్ధి చెప్తాము. ఒక యూనిట్ వృత్తాన్ని ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల భావనను పెంపొందిస్తాం. అంతేకాక కోణానికి రేడియన్ మానాన్ని చర్చిస్తూ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలైన $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \text{cosec}\ x$, $y = a \sin x$, $y = b \cos x$ మొదలైన వాటిని నిర్వచిస్తాం. ఇక్కడ x, y లు వాస్తవ సంఖ్య

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, మరియు $y = \text{cosec}\ x$, $y = a \sin x$, $y = b \cos x$ ల గ్రాఫ్‌లను గీస్తాం.

17.1 వర్తుల మానం

ఒక ఉమ్మడి అంత్యబిందువు కలిగిన రెండు కిరణాల సమ్మేళనమే కోణం. అంతిమభుజం సవ్యదిశలో భ్రమణం చేస్తూ చేసిన కోణాన్ని సాంప్రదాయ ప్రకారం ధనాత్మక కోణంగా, భ్రమణం అపసవ్యదిశలో చేసే కోణాన్ని సాంప్రదాయం ప్రకారం ఋణాత్మక కోణంగా తీసుకుంటాం.

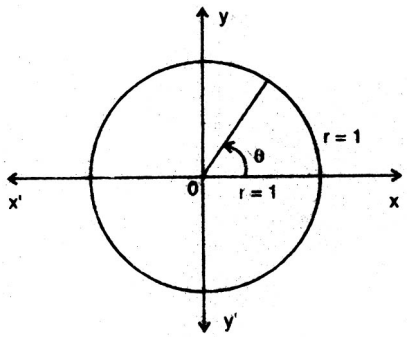
17.1.1 ఒక యూనిట్ వృత్తం

ఏదేని రేఖాఖండం ఒక సంపూర్ణ భ్రమణం చేస్తే దాని చివరి బిందువు ఒక వృత్తాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. భ్రమణం చేసే రేఖ పొడవు ఒక యూనిట్ అయితే అప్పుడు అక్కడ ఏర్పడేది ఒక యూనిట్ వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తం. ఇటువంటి వృత్తాన్ని 'యూనిట్ వృత్తం' అని అందురు.

17.1.2 రేడియన్

కోణాన్ని డిగ్రీలో కాకుండా కొలచే మరొక ప్రమాణం రేడియన్. రేడియన్ ఒక కోణ ప్రమాణం.

వృత్త వ్యాసార్ధం (r)తో సమానమైన చాపాన్ని (arc) వృత్త పరిధిపై తీసుకుంటే, ఆ చాపం అదే వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాన్ని ఒక రేడియన్ అంటారు. ఒక యూనిట్ (ప్రమాణ) వృత్తంలో ఒక యూనిట్ పొడవు గల చాపం ఆ వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాన్ని ఒక రేడియన్ అందురు.



పటం 17.2

సూచన : రేడియన్ ఒక స్థిరమైన కోణం. వృత్త వ్యాసార్ధంతో సమానమైన చాపం అదే వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం.

17.1.3 డిగ్రీలకు మరియు రేడియన్లకు మధ్యగల సంబంధం

ఒక యూనిట్ పొడవు గల చాపం ఒక రేడియన్ కోణాన్ని చేస్తుంది. వృత్తపరిధి కేంద్రం వద్ద 2π ($r = 1$) రేడియన్‌ల కోణాన్ని ఏర్పరుచును.

కావున $2\pi = 360^0$

π రేడియన్లు $= 180^0$

$\pi/2$ రేడియన్‌లు $= 90^0$

$\pi/4$ రేడియన్‌లు $= 45^0$

1 రేడియన్ $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^0 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

or $1^0 = \frac{2\pi}{360}$ రేడియన్‌లు $= \frac{\pi}{180}$ రేడియన్‌లు

ఉదాహరణ 17.1 (a) క్రింది వాటిని రేడియన్ (వర్తుల) మానంలోకి మార్చండి. (i)90^0 (ii) 15^0.

సాధన : $1^0 = \frac{2\pi}{360}$ రేడియన్‌లు

$\Rightarrow 90^0 = \frac{2\pi}{360} \times 90$ రేడియన్‌లు (లేదా) $90^0 = \pi/2$ రేడియన్‌లు

(ii) $15^0 = \frac{2\pi}{360} \times 15$ రేడియన్‌లు (లేదా) $15^0 = \frac{\pi}{12}$ రేడియన్‌లు.

(b) క్రింది వాటిని డిగ్రీలకు మార్చండి.

(iii) $\frac{\pi}{6}$ రేడియన్లు (iv) $\frac{\pi}{10}$ రేడియన్లు.

సాధన : (iii)1 రేడియన్ $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^0$

$\therefore \frac{\pi}{6}$ రేడియన్లు $= \frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30^0$

(iv) $\frac{\pi}{10}$ రేడియన్‌లు $= \frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{10} = 18^0$.

అభ్యాసం 17.1

1. క్రింది కోణాలను డిగ్రీలనుండి రేడియన్లకు మార్చండి.
   (i) 60^0 (ii) 15^0 (iii) 75^0
   (iv) 105^0 (v) 270^0.

2. క్రింది కోణాలను రేడియన్ల నుండి డిగ్రీలకు మార్చండి.

(i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{\pi}{20}$

(iv) $\frac{\pi}{60}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$

3. ఒక త్రిభుజ కోణాలు 45^0, 65^0 మరియు 70^0 అయితే వీటిని రేడియన్లలో తెల్పండి.

4. ఒక చతుర్భుజంలోని మూడు కోణాలు $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ అయితే దాని నాలుగో కోణాన్ని రేడియన్లలో తెల్పండి.

5. $\frac{\pi}{6}$ కోణానికి పూరక కోణం కనుగొనుము.

17.1.4 వృత్తంలో చాపమునకు, వ్యాసార్ధానికి మధ్య సంబంధం

వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానమైన చాపం వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం 1 రేడియన్. వ్యాసార్ధానికి రెట్టింపు గా గల చాపం కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం 2 రేడియన్‌లకు సమానం. ఇదేవిధంగా వ్యాసార్ధానికి $2\frac{1}{2}$ రెట్లు గల చాపం కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం $2\frac{1}{2}$ రెట్లు గల చాపం కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం $2\frac{1}{2}$ రేడియన్‌లకు సమానం.

దీనిని ఈ క్రింది పట్టిక ద్వారా చూడవచ్చు.

చాపం పొడవు	వృత్తకేంద్రం వద్ద చేసే కోణం θ రేడియన్లలో
r	1
$2r$	2
$\left(2\frac{1}{2}\right)r$	$2\frac{1}{2}$
$4r$	4

కావున $\theta = \frac{l}{r}$ లేదా $l = r\,\theta$.

ఇక్కడ r = వృత్త వ్యాసార్ధం

θ = వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం రేడియన్లలో

మరియు l = చాపం పొడవు

చాపం వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం వృత్తంలో చాపానికి, వృత్త వ్యాసార్ధానికి గల నిష్పత్తి.

సూచన : ముందు, ముందు కోణాలను రేడియన్లలోనే కొలుస్తాం. డిగ్రీలలో కాదు. కావున $\theta = \frac{l}{r}$ సంబంధం అనేది కోణాన్ని రేడియన్లలో కొలిస్తేనే వర్తిస్తుంది.

ఉదాహరణ 17.2: 10సెం.మీ. పొడవు గల చాపం, 35 సెం.మీ గల వ్యాసార్ధం వృత్త కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాన్ని రేడియన్‌లలో తెల్పండి.

సాధన : l = 10 సెం.మీ మరియు r = 35 సెం.మీ

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{10}{35} \text{ రేడియన్‌లు}$$

లేదా $\theta = \frac{2}{7}$ రేడియన్‌లు.

ఉదాహరణ 17.3: D మరియు C లు డిగ్రీలు మరియు రేడియన్లలో కోణాలైతే $\frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$ అని చూపండి.

సాధన : 1 రేడియన్ = $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^0$ లేదా $\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

$$\therefore \text{ C రేడియన్‌లు } = \left(C \times \frac{180}{\pi}\right)^0$$

కాని ఇదే కోణం D డిగ్రీలకు సమానం కావున

$$D = C \times \frac{180}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}.$$

ఉదాహరణ 17.4: ఒక వృత్తంపై వక్రంగా వుండే రైలు మార్గాన్ని వేయాలి. 500మీ, దూరం గల రైలు మార్గం వృత్తాకారంతో 45^0 కోణం చేస్తూ పోతే దాని వ్యాసార్ధం కనుక్కోండి.

సాధన : θ కోణాన్ని డిగ్రీలలో ఇచ్చారు. $l = r\theta$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించుటకు θ ను రేడియన్లకు మార్చాలి.

$$\theta = 45^0 = 45 \times \frac{\pi}{180} \text{ రేడియన్‌లు } = \frac{\pi}{4} \text{ రేడియన్లు} \qquad \ldots(1)$$

l = 500 మీ.

$\because\ l = r\theta$ నుండి $r = \frac{l}{\theta}$

$r = \frac{500}{\pi/4} m$ (1), (2) లనుండి

$= 500 \times \frac{4}{\pi}$ మీ

$= 2000 \times 0.32 m \quad \left[\frac{1}{\pi} = 0.32\right]$

$\therefore r = 640$ m.

ఉదాహరణ 17.5: ఒక రైలు గం॥కు 60 కి.మీ వేగంతో ఒక వృత్తాకారం మార్గం గుండా ప్రయాణిస్తుంది. 15 సెకన్‌ల కాలంలో ఆ మార్గం యొక్క వ్యాసార్ధం $\frac{5}{6}$ కి.మీ అయితే అది ఏర్పరచే కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : రైలు వేగం గం॥ 60 కి.మీ. కావున 15 సెకన్‌లలో

అది పోయే దూరం $\frac{60 \times 15}{60 \times 60}$ km $= \frac{1}{4}$km

$\therefore\ l = \frac{1}{4}$km మరియు $r = \frac{5}{6}$km అని మనకు తెలుసు.

కావున $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}$ రేడియన్లు $= \frac{3}{10}$ రేడియన్‌లు.

అభ్యాసం 17.2

1. క్రింది కోణాలను రేడియన్లలో తెల్పండి.
   (a) 30^0 (b) 60^0 (c) 150^0
2. క్రింది కోణాలను డిగ్రీలలో తెల్పండి.
   (a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{9}$

3. 15 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల వృత్త కేంద్రం వద్ద 2.5 సెం.మీ పొడవు గల చాపం చేసే కోణాన్ని రేడియన్ మరియు డిగ్రీలలో తెల్పండి.

4. ఒక రైలు వృత్తాకార మార్గంలో గం॥కు 20 కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. ఆ వృత్తం వ్యాసార్ధం 1/12 కి.మీ. అయితే ఆ రైలు 3 సెకండ్లలో చేసే కోణాన్ని కనుక్కోండి.

5. ఒక వృత్తంపై రైలు మార్గాన్ని నిర్మించాలి. 100 మీ. దూరం గల వృత్తాకార మార్గం ఆ వృత్తంలో 60^0 కోణం చేస్తుంటే దాని వ్యాసార్ధం తెల్పండి.

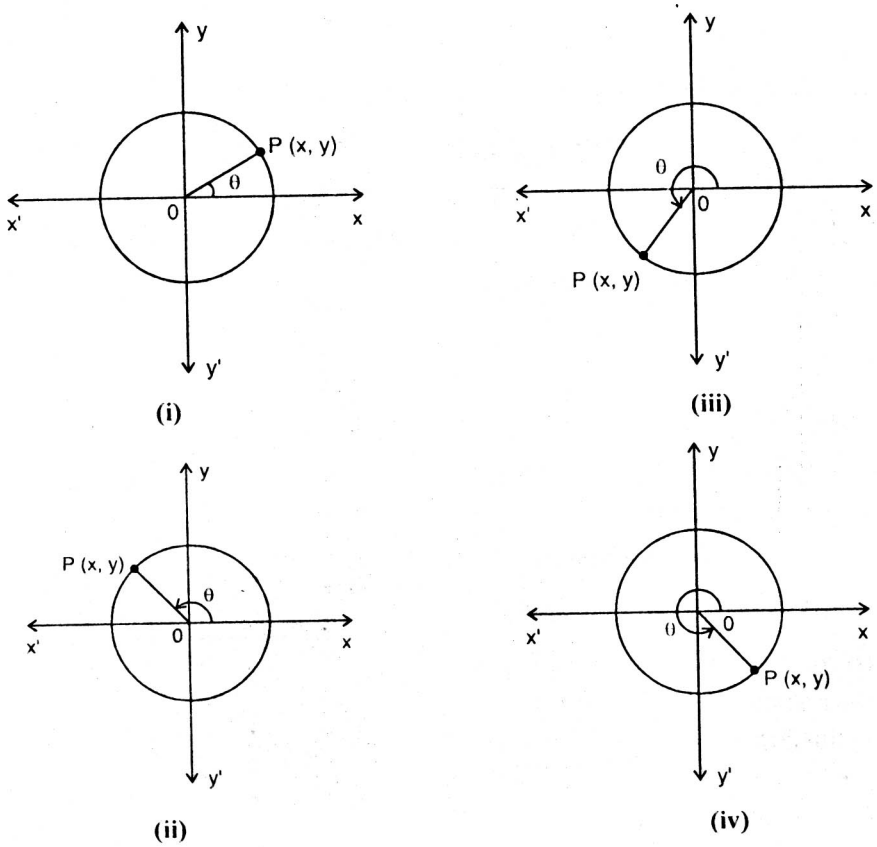
6. క్రింది పట్టికలో l, r, θ విలువలను సాధారణ రూపంలో పూరించండి.

పట్టిక

	l	r	θ
a)	1.25m	.....	135^0
b)	30 cm	.....	$\pi/4$
c)	0.5 cm	2.5m	.....
d)	.....	6m	120^0
e)	....	150 cm	$\pi/15$
f)	150 cm	40 m	.....
g)	.....	12m	$\pi/6$
h)	1.5m	0.75m	.....
i)	25m	.....	75^0.

17.2 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

ఒక యూనిట్ వృత్తాన్ని పరిశీలిస్తే 0 మరియు 2π మధ్యలో ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు x మరియు yల క్రమయుగ్మం ఉంటుందని గమనిస్తాం. ఈ క్రమయుగ్మం (x, y) ను బిందువు P యొక్క నిరూపకాలు గా గుర్తిస్తాం.



పటం 17.3

ఒకవేళ వృత్తంపై $\theta = 0$ ను తీసుకొనిన బిందువు యొక్క నిరూపకాలను (1, 0)గా పొందవచ్చును.

ఒకవేళ $\theta = \frac{\pi}{2}$ అయిన వృత్తంపై బిందువు నిరూపకాలు (0, 1) అగును. θ యొక్క ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు అనుగుణంగా బిందువు స్థానం ఏదైనప్పటికి (x, y) నిరూపకాలు ఏకైకం అని మనం తెలుసుకుంటాము. x మరియు y విలువలు ధనాత్మక లేదా ఋణాత్మకం కావచ్చు. ఇవి మనం తీసుకునే బిందువు వుండే పాదంపై ఆధారపడును. p ఏదేని బిందువు (యూనిట్ వృత్తంపై) మరియు దాని నిరూపకాలు (x, y) అనుకొనిన, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను మనం ఈ విధంగా నిర్వచిస్తాం.

$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0 \text{ కు})$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \ (y \neq 0 \text{ కు}), \quad \sec\theta = \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y} \ (y \neq 0)$$

ఇప్పుడు p బిందువు దాని పూర్వస్థానం నుండి అపసవ్యదిశలో కదులుతుంది అనుకొనిన నాలుగు పాదాలలో ఈ బిందువు యొక్క వివిధ స్థానాలకు θ యొక్క వివిధ వాస్తవ సంఖ్యలు ఉత్పన్నమగును.

పై చర్చకు అనుగుణం θ యొక్క విలువలను ఈ క్రింది విధంగా సమీకరిస్తాం.

I పాదం, x మరియు y లు రెండూ ధనాత్మకం.

II పాదం, x ఋణాత్మకం మరియు y ధనాత్మకం

III పాదం x ఋణాత్మక మరియు y ఋణాత్మకం

IV పాదం x ధనాత్మకం మరియు y ఋణాత్మకం

లేదా

I పాదం	II పాదం	III పాదం	IV పాదం
అన్ని ధనాత్మకాలు	sin ధనాత్మకం	tan ధనాత్మకం	cos ధనాత్మకం
	cosec ధనాత్మకం	cot ధనాత్మకం	sec ధనాత్మకం

అన్ని ధనాత్మకాలను ఈ విధంగా గుర్తించుకోగలం

	All	sin	tan	cos
పాదం	I	II	III	IV

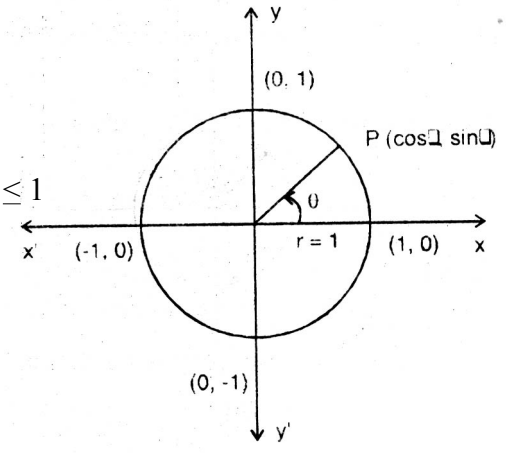
యూనిట్ వృత్తంపై ఒక బిందువు p యొక్క నిరూపకాలు (x, y) మరియు θ అనేది ఈ బిందువు యొక్క స్థాన విలువను బట్టి ఉత్పన్నమయ్యే వాస్తవ సంఖ్య అయిన అప్పుడు $\sin\theta = y$ మరియు $\cos\theta = x$. దీని నుండి p యొక్క నిరూపకాలను $(\cos\theta, \sin\theta)$ గా కూడా వ్రాయగలము. 22.5 పటం నుండి వృత్తంపై p చలిస్తున్న విధంగా x విలువలు −1 మరియు +1 కి మధ్యలో వుండును. y కి కూడా ఇది నిజమగును. ఈ విధంగా p అన్ని విలువలకు

$-1 \le x \le 1$ మరియు $-1 \le y \le 1$

కావున θ అన్ని వాస్తవ విలువలకు

$-1 \le \cos\theta \le 1$ మరియు $-1 \le \sin\theta \le 1$

అన్ని చెప్పగలము. ఇంకోవిధంగా $\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ విలువలు సంఖ్యాత్మకంగా 1ని మించవు.



పటం 17.4

పాదకోణాలు: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ కోణాలు వాటి అంతిమ భుజాలు X లేదా Y అక్షాల వెంబడి ఉంటాయి. కాబట్టి వీటిని పాదకోణాలు అందురు.

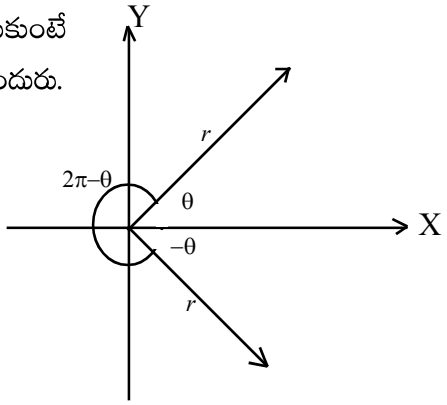
రుణకోణం :

కోణం $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ను అపసవ్యదిశల తీసుకుంటే ధనకోణం అని సవ్యదిశలో తీసుకుంటే రుణకోణం అందురు.

$$\sin(-\theta) = \sin(2\pi - \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta, \ \theta \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$



పటం 17.5

ఉదాహరణ 17.6: క్రింది వాటి గుర్తులు కనుక్కోండి.

(i) $\sin\frac{7\pi}{18}$ (ii) $\cos\frac{4\pi}{9}$ (iii) $\tan\frac{5\pi}{9}$

సాధన : (i) $\frac{7\pi}{18}$ మొదటి పాదంలోని కోణం కావున $\sin\frac{7\pi}{18}$ ధనాత్మకం అగును.

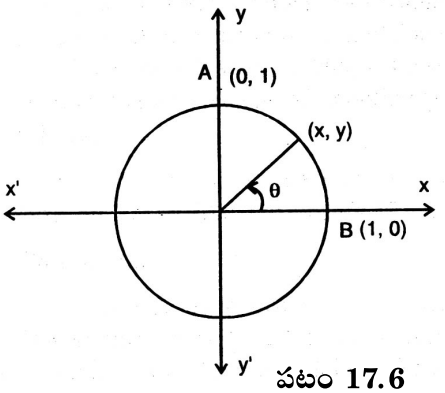
(ii) $\frac{4\pi}{9}$ మొదటి పాదంలోని కోణం కావున $\cos\frac{4\pi}{9}$ ధనాత్మకం అగును.

(iii) $\frac{5\pi}{9}$ మొదటి పాదంలోని కోణం కావున $\tan\frac{5\pi}{9}$ ఋణాత్మకం అగును.

ఉదాహరణ 17.7 : (i) $\sin\frac{\pi}{2}$ (ii) $\cos 0$

(iii) $\tan\frac{\pi}{2}$ విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన: (i) 17.6 పటం నుండి బిందువు A నిరూపకాలు (0, 1) అని మనకు తెలుసు. కావున $\sin\frac{\pi}{2}$ ఎందుకంటే $\sin\theta = y$.



పటం 17.6

(ii) B బిందువు నిరూపకాలు (1, 0) కావున $\cos 0 = 1$, ఇక్కడ $\cos\theta = x$.

(iii) $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$ నిర్వచించలేము.

కావున $\tan\frac{\pi}{2}$ ను నిర్వచించలేము.

ఉదాహరణ 17.8 : $\cos\theta$ యొక్క కనిష్ట మరియు గరిష్ట విలవలు వ్రాయండి.

సాధన : $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \cos\theta$ యొక్క గరిష్ట విలువ 1 మరియు కనిష్ట విలువ -1 అగును.

అభ్యాసం 17.3

1. క్రింది వాటి గుర్తులను వ్రాయండి.

(i) $\cos^2\frac{\pi}{3}$ (ii) $\tan\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\sec\frac{2\pi}{3}$ (iv) $\sec\frac{35\pi}{18}$

(v) $\tan\frac{25}{18}$ (vi) $\cot\frac{3\pi}{4}$ (vii) $\operatorname{cosec}\frac{8\pi}{3}$ (viii) $\cot\frac{7\pi}{8}$

2. క్రింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $\cos\frac{\pi}{2}$ (ii) $\sin 0$ (iii) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (iv) $\tan\frac{3\pi}{4}$

(v) $\sec 0$ (vi) $\tan\frac{\pi}{2}$ (vii) $\tan\frac{3\pi}{2}$ (viii) $\cos 2\pi$

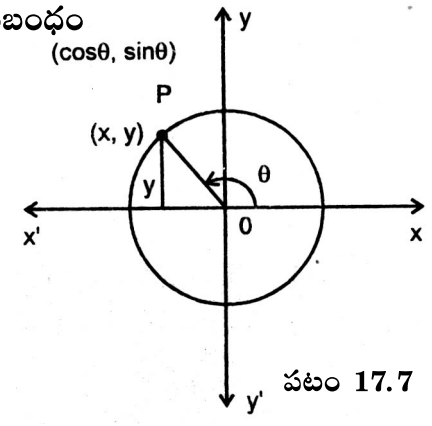
17.2.1 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల మధ్య సంబంధం

నిర్వచనం నుండి $x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$, $(x \neq 0)$ నుండి

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \frac{n\pi}{2}$



పటం 17.7

మరియు $\cot\theta = \frac{x}{y}, (y \neq 0)$

i.e., $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} (\theta \neq n\pi)$

ఇదేవిధంగా $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \left(\theta \neq \frac{n\pi}{2}\right)$

మరియు $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \left(\theta \neq n\pi\right)$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి, $x^2 + y^2 = 1$ అని మనకు తెలుసు.

i.e., $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$

లేదా $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

సూచన : $(\cos\theta)^2$ ను $\cos^2\theta$ గా మరియు $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఇంకా $x^2 + y^2 = 1$

లేదా $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2, (x \neq 0)$ లేదా $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

i.e., $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

ఇదేవిధంగా $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

ఉదాహరణ 17.9: $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ అని నిరూపించండి.

సాధన : LHS $= \sin^4\theta + \cos^4\theta$

$= \sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = \text{RHS}$ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

ఉదాహరణ 17.10: $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ అని చూపండి.

సాధన : LHS $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)} \times \frac{(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta = \text{R.H.S.}$$

ఉదాహరణ 17.11: $\sin\theta = \frac{21}{29}$ అయితే $\sec\theta + \tan\theta = 2\frac{1}{2}$ (θ మొదటి పాదంలోని కోణం) అని నిరూపించండి.

సాధన: $\sec\theta = \frac{21}{29}$, ఇంకా $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841} = \left(\frac{20}{29}\right)^2$$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{20}{29}$ (θ మొదటి పాదంలోని కోణం కావున $\cos\theta$ ధనాత్మకం)

$\therefore \tan\theta = \frac{21}{29}$

$$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{29}{20} + \frac{21}{20} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = \text{R.H.S}$$

అభ్యాసం 17.4

1. $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$ అని నిరూపించండి.

2. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ అయితే, మిగతా అయిదు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను కనుక్కోండి.

3. $\text{cosec}\,\theta = \frac{b}{a}$ అయితే, (θ మొదటి పాదంలోని కోణం) మిగతా అయిదు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను కనుక్కోండి.

4. $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$ అని నిరూపించండి.

5. $\cot\theta + \text{cosec}\,\theta = 1.5$ అయితే $\cos\theta = \frac{5}{13}$ అని నిరూపించండి.

6. $\tan\theta + \sec\theta = m$ అయితే $\cos\theta$ విలువ కనుక్కోండి.

7. $(\tan A + 2)(2\tan A + 1) = 5\tan A + \sec^2 A$ అని చూపండి.

8. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$ అని నిరూపించండి.

9. $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$ అని నిరూపించండి.

10. $\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta.\sec\theta$ అని నిరూపించండి

17.3 కొన్నిప్రత్యేక వాస్తవ సంఖ్యలకు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ మరియు $\frac{\pi}{2}$ ల యొక్క త్రికోణమితీ ప్రమేయాల విలువలను క్రింది పట్టికలో పొందుపర్చాము.

వాస్తవ సంఖ్యలు ప్రమేయం	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచింపలేం

పైన తెల్పిన విషయాలను sin ప్రమేయానికి చెందిన విలువను ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\sqrt{\frac{0}{4}}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{4}{4}}$$

వీటిని సులభంగా పై పట్టికలో పొందవచ్చు. మిగతా విలువలను వీటికి విలోమంగా తీసుకోవచ్చు.

పూరక సంపూరక కోణాలు : θ ఒక కోణం ఐతే $\frac{\pi}{2} - \theta$ ను పూరక కోణం అని $\pi - \theta$ ను సంపూరక కోణం అందురు.

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ లు పూరక కోణాలు

$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ లు సంపూరకాలు

ఉదాహరణ. 17.12: క్రింది వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

(a) $\sin\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{3}$

(b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

సాధన : (a) $\sin\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{3}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

$$=4(1)^2-(2)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=4-4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

ఉదాహరణ. 17.13: $A=\frac{\pi}{3}$ మరియు $B=\frac{\pi}{6}$ అయితే

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ సరి చూడండి

సాధన: LHS $=\cos(A+B)$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

$$\text{R.H.S.}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

L.H.S. = 0 = R.H.S.

$\therefore$ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

అభ్యాసం 17.5

1. (i) $\sin^2\frac{\pi}{6} + \tan^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3}$

   (ii) $\sin^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6} + \sec^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3}$

   (iii) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$

   (iv) $4\cot^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{3}.\tan^2\frac{\pi}{4}$

   (v) $\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}$ విలువ కనుక్కోండి.

2. $\left(1 + \tan\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}\right) + \left(\tan\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3}\right) = \sec^2\frac{\pi}{6}.\sec^2\frac{\pi}{3}$ అని చూపండి.

3. $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}$ గా తీసుకొని

   (i) $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

   (ii) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ లను సరిచూడండి.

4. $\theta = \frac{\pi}{4}$ అయితే

   (i) $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

   (ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

   $= 2\cos^2\theta - 1$

   $= 1 - 2\sin^2\theta$ లను సరిచూపండి.

5. $A = \frac{\pi}{6}$ అయితే

(i) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ (ii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

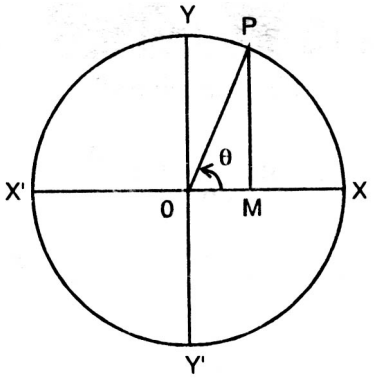
(iii) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

17.4 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు రేఖాచిత్రాలు

ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని పటం ద్వారా లేదా గ్రాఫ్ ద్వారా గుర్తించడం వలన అది అభ్యాసకుల మనస్సుకు హత్తుకు పోతుంది. ప్రమేయాల గ్రాఫ్‌ల యొక్క ప్రాముఖ్యత అనేది ఆ ప్రమేయాల యొక్క ఎక్కువ ధర్మాలను తెల్పడానికి వీలుగా వుంటుందనేది వాస్తవము. ఈ గ్రాఫ్‌లను గమనిస్తే మనకు ప్రమేయ ధర్మాలైన (i) ఆవర్తనం (ii) అది ఆరోహణ లేదా అవరోహణం అగు అంతరాలు (iii) అక్షాల యొక్క సౌష్టవం (iv) ఇచ్చిన అంతరంలో గ్రాఫ్ యొక్క గరిష్ట మరియు కనిష్ట బిందువులు మొదలైన వాటిని పరీక్షించవచ్చు. ఇంతేకాక గ్రాఫ్ యొక్క వక్రాల మధ్య ప్రాంత వైశాల్యాలను కూడా కనుక్కోవచ్చు.

17.4.1 Sin θ విచరణ

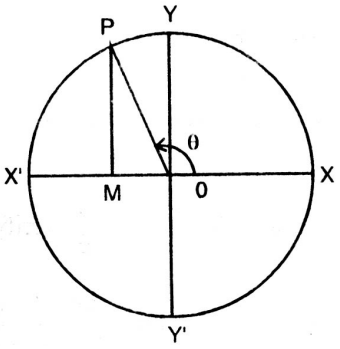
X'OX మరియు Y'OY లను నిరూపక అక్షాలు అనుకొనుము. 'O' కేంద్రంగా మరియు OP = 1 యూనిట్ వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తం గీయండి. OP అనేది OX నుండి మొదలై X-అక్షంతో θ కోణం చేస్తూ అపసవ్యదిశలో చలిస్తుంది అనుకొనుము. i.e., $\angle XOP = \theta$. X'OX పైకి PM లంబాన్ని గీయగా అప్పుడు $\sin\theta = MP$ ఇక్కడ OP = 1 కావున OP విచరణకు సమానంగా విచరణ వుంటుంది.



పటం 17.7

మొదటి పాదం : 0 నుండి $\frac{\pi}{2}$ వరకు నిరంతరంగా పెరుగుతుండడం వలన PM విలువ ధనాత్మకం మరియు 0 నుండి 1 కి పెరుగుతుంది

$\therefore$ $\sin\theta$ ధనాత్మకం అగును.



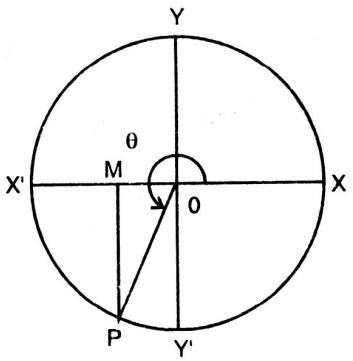
పటం 17.8

రెండవ పాదం : $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

ఈ అంతరంలో θ రెండో పాదంలో వుండును. కావున P బిందువు రెండోపాదంలో వుంటుంది. ఇక్కడ $PM = y$ ధనాత్మకం కాని ఇది 1 నుండి 0కు తగ్గుతుంది.

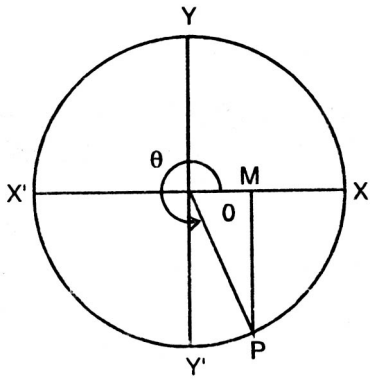
అనగా θ విలువ $\pi/2$ నుండి కి పెరుగుతుంటే $\sin\theta$ విలువ 1 నుండి 0 కు తగ్గుతుంది. కనుక $\sin\theta$ ధనాత్మకం.

మూడవ పాదం : $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ఈ అంతరంలో θ మూడవ పాదంలో వుంటుంది. కావున P బిందువు మూడవ పాదంలో మాత్రమే చలిస్తుంది. కావున $PM = y$ అనేది ఋణాత్మకం మరియు 0 నుండి -1కి తగ్గుతుంది. π నుండి $\pi/2$ కు పెరుగుతుంది. ఈ అంతరంలో $\sin\theta$ విలువ నుండి -1కి తగ్గుతుంది. ఈ అంతరంలో $\sin\theta$ విలువ ఋణాత్మకం.



పటం 17.9

నాల్గవ పాదం : $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ఈ అంతరంలో θ నాల్గవ పాదంలో వుంటుంది. కావున బిందువు P నాల్గవ పాదంలో మాత్రమే చలిస్తుంది. ఇక్కడ కూడా $PM = y$ ఋణాత్మకం కాని θ విచరణ $3\pi/2$ నుండి 2π కి వుండడం వలన $PM = y$ ఋణాత్మకం అవుతుంది కాని ఇది -1 నుండి 0కు పెరుగుతుంది. కావున ఈ అంతరంలో $\sin\theta$ విలువ ఋణాత్మకం అగును.



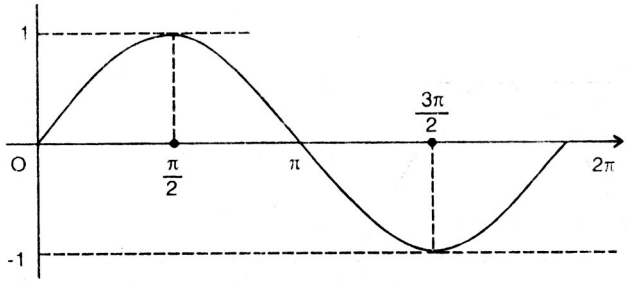
పటం **17.10**

17.4.2 $\sin\theta$ యొక్క గ్రాఫ్ (θ విచరణ 0 నుండి 2π వరకు)

X'OX మరియు Y'OY రెండు నిరూపకాక్షాలు. X– అక్షంపై θ విలువలు మరియు $\sin\theta$ విలువలు Y – అక్షంపై కొలిచాము.

($\sqrt{2}$ యొక్క రమారమి విలువ $\sqrt{2} = 1.41, \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−0.1	−0.87	−0.5	0



పటం. **17.11**

కొన్ని పరిశీలనలు

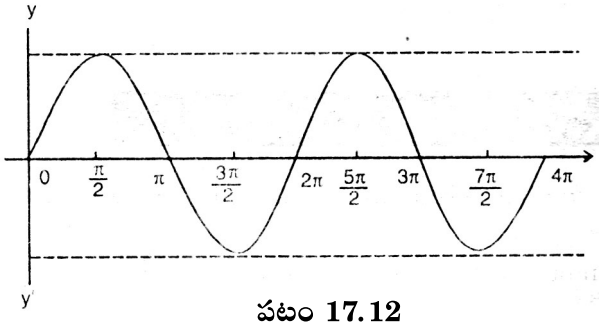
(i) $\sin\theta$ యొక్క గరిష్ట విలువ = 1

(ii) $\sin\theta$ యొక్క కనిష్ట విలువ = -1

(iii) ఇది ఎక్కడైనా అవిచ్ఛిన్నము.

(iv) ఇది 0 నుండి $\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{3\pi}{2}$ నుండి 2π వరకు ఆరోహణం. $\frac{\pi}{2}$ నుండి $\frac{3\pi}{2}$ వరకు అవరోహణం

17.12లో గీసిన పటం సహాయంతో $[2\pi, 4\pi]$ అంతరంలో $y = \sin\theta$ గ్రాఫ్ కూడా గీయగలం.



పటం 17.12

నీవేమి గమనించావు ?

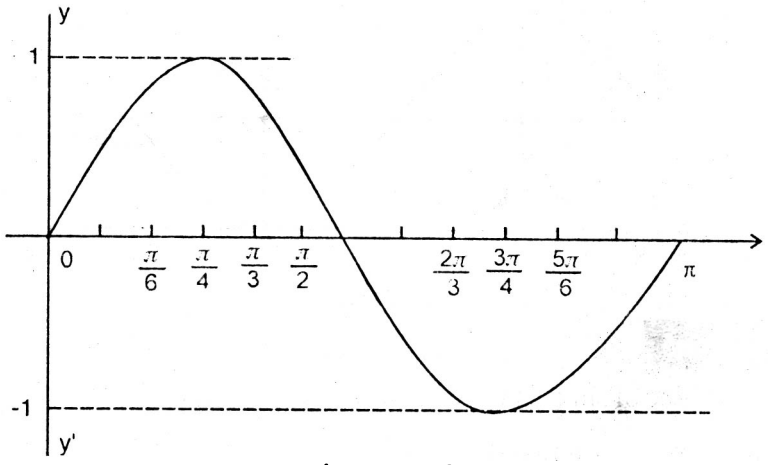
$[2\pi, 4\pi]$ అంతరంలో గీసిన $y = \sin\theta$ గ్రాఫ్, 0 నుండి 2π అంతరంలో గీసిన గ్రాఫ్ ఒకటే. కావున గ్రాఫ్‌ను $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి గీయవచ్చును. ఈవిధంగా θ విలువ 2π కి పెరిగిన తర్వాత $\sin\theta$ విలువ దానికి అదే పునరావృతం అవుతుంది. దీనినే $\sin\theta$ యొక్క ఆవర్తనం అందురు.

ఆవర్తనం గురించి తర్వాత అధ్యాయంలో చర్చిస్తాం.

ఉదాహరణ 17.14: $y = \sin 2\theta$ కు గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin2\theta$	0	0.87	1	0.87	0	-0.87	-1	-0.87	0



పటం 17.13

గ్రాఫ్ $y = \sin\theta$ మాదిరిగా వున్నది

గమనించిన కొన్ని విషయాలు

1. $\sin\theta$ కు ఇతర గ్రాఫ్‌లు $a\sin\theta$, $3\sin 2\theta$ మొదలగునవి ఇదే పద్ధతిని అనుసరించి గీయవచ్చు.
2. $\sin\theta$ గ్రాఫ్‌ను $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ లను కూడా సులభంగా గీయవచ్చు.

$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$ లాంటి కోణ ధర్మాల సహాయంతో ఈ గ్రాఫ్‌లను గీయవచ్చు. కావున θ విలువ 2π కి పెరిగినా లేదా తగ్గినా పునరావృతం అవుతుంది.

అభ్యాసం 17.6

1. $[0, 2\pi]$ అంతరంలో $\sin\theta$ యొక్క గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువలు ఏవి ?
2. $[0, 2\pi]$ లో $\sin\theta$ గ్రాఫ్ యొక్క సౌష్టవాన్ని విశదీకరించండి.
3. $[0, 2\pi]$ అంతరంలో $y = 2\sin\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.
4. $[\pi, 2\pi]$ అంతరంలో θ యొక్క ఏ విలువలకు $\sin\theta$ విలువ

   (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ అవుతుంది.

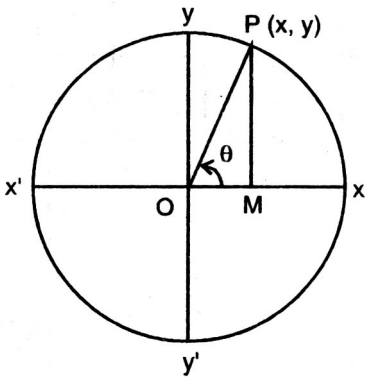
5. $[-\pi, \pi]$ అంతరంలో $y = \sin x$ గ్రాఫ్ గీయండి.

17.4.3 $\cos\theta$ యొక్క గ్రాఫ్ (0 నుండి 2π θ విచరణలో)

$\sin\theta$ మాదిరిగానే $\cos\theta$ యొక్క విలువలలోని మార్పులను కూడా $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ మరియు $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ అంతరాలలో θ విలువలను తీసుకుని చర్చిస్తాము.

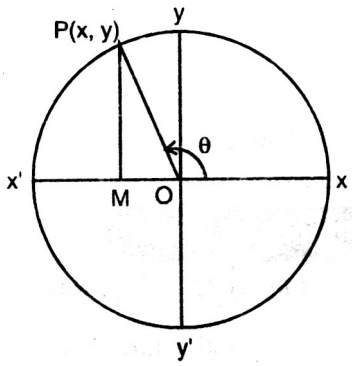
మొదటి పాదం: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ అంతరంలో P బిందువు మొదటి పాదంలో వుంటుంది. కావున OM $= x$ ధనాత్మకం కాని θ విలువ 0 నుండి $\pi/2$ కు పెరిగితే x విలువ 1 నుండి 0కు తగ్గుతుంది. కావున ఈ అంతరంలో $\cos\theta$ విలువ 1 నుండి 0కు తగ్గుతుంది.

$\therefore \cos\theta$ ఈ పాదంలో ధనాత్మకం.



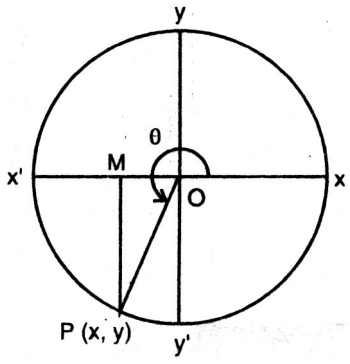
పటం 17.14

రెండవ పాదం : $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ అంతరంలో P బిందువు రెండో పాదంలో వుంటుంది. కావున బిందువు M ఋణాత్మక X- అక్షంపై వుంటుంది. ఈ సందర్భంలో OM $= x$ అనేది ఋణాత్మకం మరియు ఇది 0 నుండి −1కి తగ్గుతుంది. ఎందుకనగా θ అనేది $\pi/2$ నుండి π కి పెరుగుతుంది. కావున ఈ అంతరంలో $\cos\theta$ విలువ 0 నుండి −1కి తగ్గుతుంది. $\therefore \cos\theta$ ఋణాత్మకం.



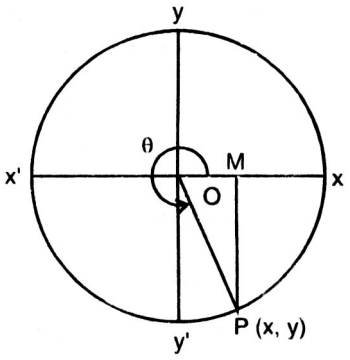
పటం 17.15

మూడవ పాదం : $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ అంతరంలో, బిందువు P మూడవ పాదంలో వుంటుంది. కావున $OM = x$ ఋణాత్మక X–అక్షం వైపే వుండడం వలన ఇది ఋణాత్మకంగానే వుంటుంది. $\therefore OM = x$ ఋణాత్మకం కాని ఇది -1 నుండి వరకు పెరుగుతుంది. విలువ π నుండి $3\pi/2$ కు పెరుగుతుంది కావున ఈ అంతరంలో $\cos\theta$ విలువ -1 నుండి 0కు పెరుగుతుంది. $\therefore \cos\theta$ ఈ పాదంలో ఋణాత్మకం.



పటం **17.16**

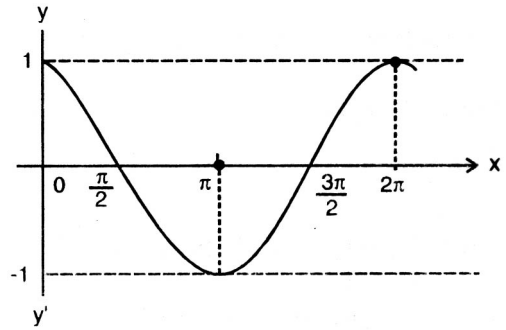
నాల్గవపాదం : $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ అంతరంలో P బిందువు 4వ పాదంలో వుంటుంది. కావున M బిందువు ధనాత్మక X–అక్షంవైపు చలిస్తుంది. కావున $OM = x$ ధనాత్మకం. అంతేకాక θ విలువ $3\pi/2$ నుండి 2π కి పెరగడం వలన $OM = x$ విలువ 0 నుండి 1కి పెరుగుతుంది. ఈ విధంగా $\cos\theta$ విలువ ఈ అంతరంలో ధనాత్మకం అవుతుంది.



పటం **17.17**

ఇప్పుడు θ యొక్క కొన్ని ముఖ్య విలువలకు కొసైన్ (cosine) విలువలను ఈ పట్టిక ద్వారా తెలుసుకుందాం.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$	1	0.87	0.5	0	0.5	-0.87	-1	-0.87	-.5	0	0.5	0.87	1



పటం 17.18

X'OX మరియు Y'OY లను అక్షాలు అనుకొనుము. θ విలువలను X–అక్షంపై మరియు cos θ విలువలను Y– అక్షంపై కొలువబడ్డాయి.

కొన్ని గమనించిన విషయాలు

(i) cos θ యొక్క గరిష్ట విలువ 1.

(ii) cos θ యొక్క కనిష్ట విలువ −1.

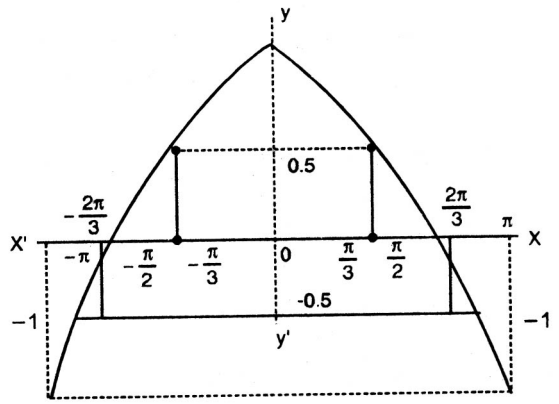
(iii) అన్ని వేళలా ఇది అవిచ్ఛిన్నం.

(iv) cos (θ + 2π) = cos θ, అంతేకాక cos (θ – 2π) = cos θ కావున θ విలువ 2π కి పెరిగినా లేదా తగ్గినా cos θ విలువ పునరావృతం అవుతుంది.

(v) [2π, 4π] , [4π, 6π], [–2π, 0] అంతరాలలో cos θ గ్రాఫ్‌లు కూడా (θ, 2π) లోని cos θ గ్రాఫ్ మాదిరిగానే వుంటాయి.

ఉదాహరణ 22.15: −π నుండి π యొక్క θ విచరణలో cos θ గ్రాఫ్ గీయండి. ఈ గ్రాఫ్ నుండి cos θ = ±0.5 అయిన θ విలువలు వ్రాయండి.

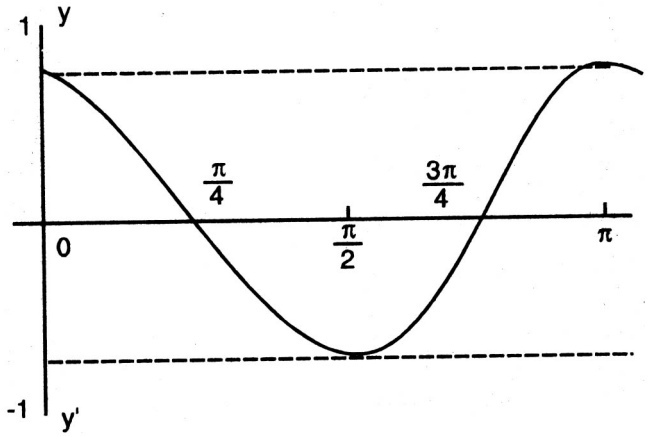
θ	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cosθ	–1.0	–0.87	–0.5	0	0.50	–0.87	1.0	0.87	0.5	0	–0.5	–0.87	–1



పటం. 17.19

ఉదాహరణ 17.16 : 0 నుండి π అంతరంలో cos θ గ్రాఫ్ గీయాలి.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
cos2θ	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1



పటం 17.20

అభ్యాసం 17.7

I. (a) $-\frac{\pi}{4}$ నుండి $\frac{\pi}{4}$ విచరణలో $y = \cos\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.

(b) 0 నుండి 2π విచరణలో $y = 3\cos\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.

(c) $-\pi$ నుండి π అంతరంలో $y = \cos 3\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.

మరియు $\cos\theta = 0.87$ మరియు $y\cos\theta = -0.87$ అయినపుడు θ విలువలు వ్రాయండి.

(d) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ అంతరంలో $y = \cos\theta$ గ్రాఫ్ X-అక్షానికి పైన వుంటుందా? X - అక్షానికి క్రిందివైపు వుంటుందా ?

(e) $[2\pi, 4\pi]$ లో $y = \cos\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.

17.4.4 0 నుండి 2π విచరణలో Tan θ యొక్క గ్రాఫ్

ఒకటవ పాదంలో : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ గా వ్రాయవచ్చు.

$\tan\theta$ విలువ $\sin\theta$ మరియు $\frac{1}{\cos\theta}$ విలువలపై ఆధారపడును. మొదటిపాదంలో $\sin\theta$ విలువ 0 నుండి 1కి పెరుగుతుంది. $\cos\theta$ విలువ 1 నుండి 0కి తగ్గుతుంది. కాని $\frac{1}{\cos\theta}$ విలువ 1 నుండి అనంతరం వరకు (దీనినే 1 నుండి ∞ వరకు అని వ్రాస్తారు) పెరుగుతుంది.

$\tan\theta > 0$ $\therefore$ $\tan\theta$ విలువ 0 నుండి ∞ కి పెరుగుతుంది.

($\tan\theta$ యొక్క పట్టిక, మరియు గ్రాఫ్‌లను చూడండి)

రెండవపాదంలో : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta$ విలువ 1 నుండి 0 కు తగ్గుతుంది.

$\cos\theta$ విలువ 0 నుండి -1కి తగ్గుతుంది.

$\tan\theta$ విలువ ఋణాత్మకం మరియు $-\infty$ నుండి 0 వరకు పెరుగుతుంది.

మూడవ పాదంలో : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin\theta$ విలువ 0 నుండి -1కి తగ్గుతుంది.

$\cos\theta$ విలువ -1 నుండి 0కు పెరుగుతుంది.

$\therefore$ $\tan\theta$ విలువ ధనాత్మకం మరియు 0 నుండి ∞ వరకు పెరుగును.

నాల్గవ పాదంలో : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

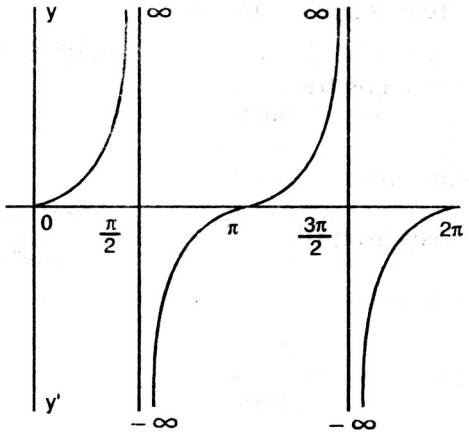
$\sin\theta$ విలువ -1 నుండి 0 కు పెరుగుతుంది.

$\cos\theta$ విలువ 0 నుండి 1 కి పెరుగుతుంది.

$\therefore$ $\tan\theta$ విలువ ఋణాత్మకం మరియు $\tan\theta$ విలువ $-\infty$ నుండి 0 వరకు పెరుగుతుంది.

$\tan\theta$ యొక్క గ్రాఫ్:-

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0^0$	$\frac{\pi}{2}+0^0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0^0$	$\frac{3\pi}{2}+0^0$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan\theta$	0	0.58	1.73	$-\infty$	-1.73	-0.580	0.58	1.73	$+\infty$	$-\infty$	$-1.730.580$				0



పటం 17.21

గమనించినవి : (పరిశీలించినవి)

(i) $\tan(180+\theta) = \tan\theta$ కావున $\tan\theta$ యొక్క గ్రాఫ్

(ii) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$, కావున $(\theta, \tan\theta)$ గ్రాఫ్‌పై ఏదేని బిందువు అనుకొనిన అప్పుడు $(-\theta, -\tan\theta)$ కూడా ఆ గ్రాఫ్‌పై బిందువు అగును.

(iii) పై ఫలితాల నుండి $y = \tan\theta$ గ్రాఫ్ ఎదురెదురు పాదాలలో సౌష్ఠవంగా వుంటుంది.

(iv) $\tan\theta$ విలువ ధనాత్మకమైన లేదా ఋణాత్మకమైన సంఖ్యలను కల్గివుంటుంది.

(v) $\tan\theta$ గ్రాఫ్ $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ బిందువుల వద్ద విచ్ఛిన్నం.

(vi) θ ఈ బిందువుల గుండా పోవు చుండడం వలన, $\tan\theta$ తక్షణంగా $+\infty$ నుండి $-\infty$ కి మారుతుంది.

17.4.5 0 నుండి 2π విచరణలో $\cot\theta$ యొక్క గ్రాఫ్

$\cot\theta$ విలువ $\cos\theta$ మరియు $\frac{1}{\sin\theta}$ లపై ఆధారపడును. ఎందుకనగా $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ కావున

ప్రతి పాదంలో దీనిని చర్చిద్దాం :

ఒకటో పాదం : $\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta$ విలువ 1 నుండి 0కు తగ్గుతుంది.

$\sin\theta$ విలువ 0 నుండి1కి పెరుగుతుంది.

$\cot\theta$ విలువ కూడా $+\infty$ నుండి 0కు తగ్గుతుంది.

కాని $\cot\theta > 0$.

రెండవ పాదం :- $\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta$ విలువ 0 నుండి -1కి తగ్గుతుంది.

$\sin\theta$ విలువ 1నుండి 0కి తగ్గుతుంది.

$\cot\theta < 0$ లేదా cot విలువ 0 నుండి $-\infty$ కు తగ్గుతుంది.

మూడవ పాదం : $\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta$ విలువ -1 నుండి 0కు పెరుగుతుంది.

$\sin\theta$ విలువ 0 నుండి -1కి తగ్గుతుంది.

$\cot\theta$ విలువ $+\infty$ నుండి 0కు తగ్గుతుంది.

నాల్గవ పాదం : $\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$

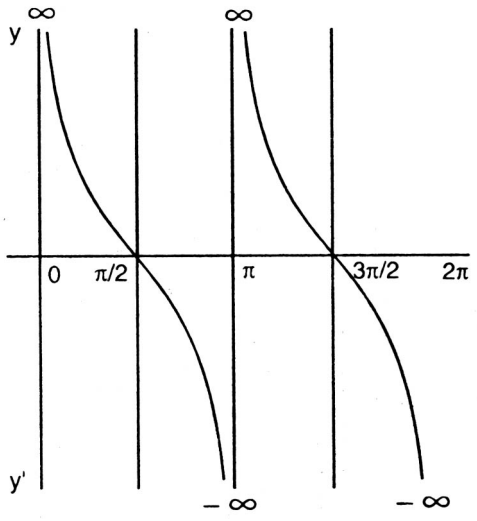
$\cos\theta$ విలువ 0 నుండి 1కి పెరుగుతుంది

$\sin\theta$ విలువ -1 నుండి 0కు పెరుగుతుంది.

$\therefore \cot\theta \Rightarrow \cot\theta$ విలువ 0 నుండి $-\infty$ కి తగ్గును.

$\cot\theta$ యొక్క గ్రాఫ్

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	11π	2π
$\cot\theta$	∞	1.73	0.58	0	-0.58	-1.73	$-\infty$	$+\infty$	1.73	0.58	0	-0.58	-1.73	$-\infty$



పటం 17.22

గమనించవలసినవి

(i) $\cos(\pi+\theta) = \cot\theta$ కావున $\cot\theta$ యొక్క సంపూర్ణ గ్రాఫ్ $\theta = 0$ నుండి $\theta = \pi$ వరకు లేదా $\theta = \pi/2$ నుండి $\theta = 3\pi/2$ వరకు వుంటుంది.

(ii) $\cot\theta$ విలువ ధన లేదా ఋణ సంఖ్యాత్మక విలువలను కల్గి వుంటుంది.

(iii) $\cot\theta$ గ్రాఫ్ విచ్ఛిన్నము అది, 0, π, 2π వద్ద విచ్ఛిన్నమవుతుంది.

(iv) 0, π, 2π ల θ విలువలకు $\cot\theta$ విలువ $-\infty$ నుండి ∞ కి మారుతుంది.

అభ్యాసం 17.8

1. (a) $\tan\theta$ యొక్క గరిష్ట విలువ ఎంత ?

   (b) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ల వద్ద $\tan\theta$ యొక్క మార్పులు తెల్పండి.

   (c) $-\pi$ నుండి π అంతరంలో $y = \tan\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి. దీని నుండి $\tan\theta = 1.7$ కు θ విలువ కనుక్కోండి.

2. (a) $\cot\theta$ యొక్క గరిష్ట విలువ ఎంత ?

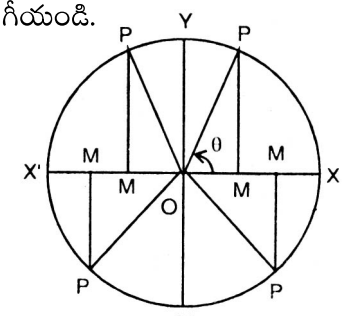
   (b) గ్రాఫ్ నుండి $\cot\theta = -1$ అయితే θ విలువ ఎంత?

17.4.6 0 నుండి 2π అంతరంలో $\sec\theta$ యొక్క విచరణ మరియు గ్రాఫ్

X'OX మరియు Y'OY లను నిరూపక అక్షాలనుకొనుము.

'O' కేంద్రంగా ఒక యూనిట్ వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తాన్ని గీయండి.

P అనేది వృత్తంపై ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. OP ని కలపండి. మరియు PM $\perp$ X'OX అగునట్లు PM లంబాన్ని గీయండి.

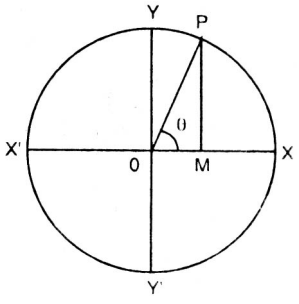


పటం 17.23

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{OM}$$

$\therefore$ OM పై విచరణ ఆధారపడును.

మొదటి పాదం : OM ధనాత్మకం కనుక $\sec\theta$ ధనాత్మకం. ఇంతేకాక $\sec\theta = 1$ మరియు $\sec\frac{\pi}{2} = \infty$ (మనం $\pi/2$ ను కుడివైపు నుండి తీసుకుంటే)



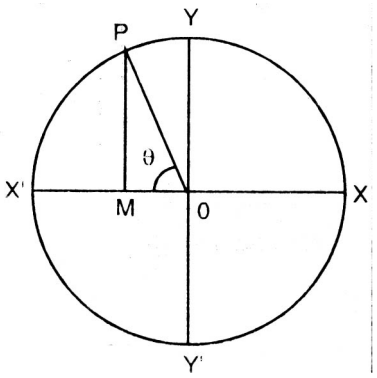
పటం 17.24

θ విలువ 0 నుండి $\pi/2$ కు మారుతుంటే $\sec\theta$ విలువ 1 నుండి ∞ కి పెరుగును.

రెండవ పాదం : OM ఋణాత్మకం కావున $\sec\theta$ విలువ ఋణాత్మకం $\sec\pi/2 = -\infty$ ($\pi/2$ ను మనం ఎడమ వైపు నుండి తీసుకుంటే) అంతేకాక $\sec\pi = -1$.

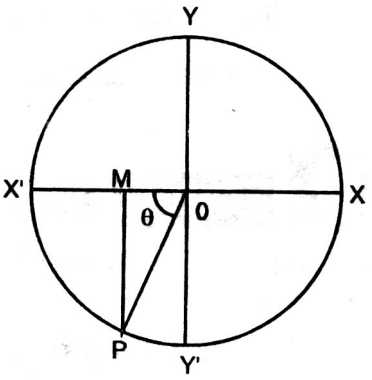
$\therefore$ θ విలువ $\pi/2$ నుండి π కి మారుతుంటే $\sec\theta$ విలువ $+\infty$ నుండి $-\infty$ కి మారును.

ఇక్కడ మనం గమనించినది θ విలువ $\pi/2$ గుండాపోతే $\sec\theta$ విలువ $+\infty$ నుండి $-\infty$ కి మారుతుంది.



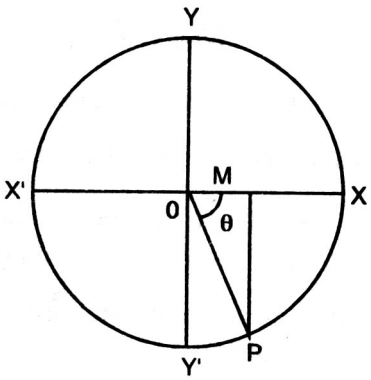
పటం 17.25

మూడవ పాదం : OM ఋణాత్మకం కావున $\sec\theta$ కూడా ఋణాత్మకం అగును. $\sec\pi = -1$ మరియు $\sec\frac{3\pi}{2} = -\infty$ ఇక్కడ θ కోణం అపసవ్యదిశలో $\frac{3\pi}{2}$ ను సమీపిస్తుంది. θ విలువలు π గా నుండి $\frac{3\pi}{2}$ కు మారుతుంటే $\sec\theta$ విలువ -1 నుండి $-\infty$ వరకు తగ్గుతుంది.



పటం 17.26

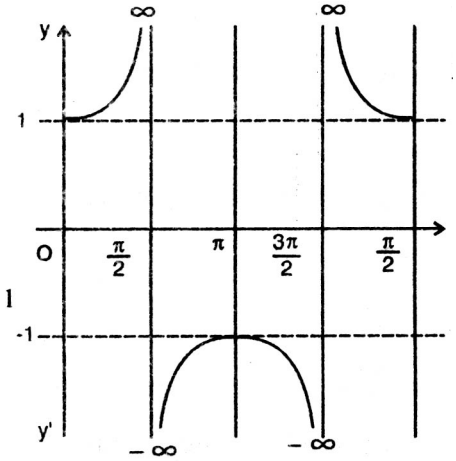
నాల్గవ పాదం : OM ధనాత్మకం కావున ఈ పాదంలో $\sec\theta$ ధనాత్మకం అగును. ఇక్కడ θ విలువ $\frac{3\pi}{2}$ కంటే కొద్దిగా ఎక్కువ అయితే, $\sec\theta$ విలువ ధనాత్మకం మరియు అతి పెద్దది. అంతేకాక $\sec 2\pi = 1$. కావున $\sec\theta$ విలువ ∞ నుండి 1కి తగ్గుతుంది. ఎందుకనగా θ విలువ $\frac{3\pi}{2}$ నుండి



పటం 17.27

2π కి చలిస్తుంది. దీని నుండి θ విలువ $\frac{3\pi}{2}$ ద్వారా పోవడం వలన $\sec\theta$ విలువ $-\infty$ నుండి $+\infty$ కి మారుతుంది.

0 నుండి 2π అంతరంలో $\sec\theta$ యొక్క గ్రాఫ్



పటం 17.28

గమనించినవి

a) సంఖ్యాత్మకంగా $\sec\theta$ విలువ 1 కంటే తక్కువ ఉండదు.

b) $\sec\theta$ యొక్క గ్రాఫ్ విచ్ఛిన్నము ($\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{3\pi}{2}$ వద్ద విచ్ఛిన్నం)

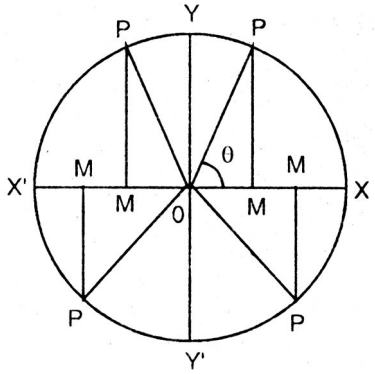
c) θ, $\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{3\pi}{2}$ ల గుండా పోవడం వలన, $\sec\theta$ విలువ $+\infty$ నుండి $-\infty$ కి మరియు $-\infty$ నుండి $+\infty$ కి వరుసగా మారుతుంది.

17.4.7 0 నుండి 2π $\cos\theta$ విలువలకు $\operatorname{cosec}\theta$ గ్రాఫ్

X'OX మరియు Y'OY లను నిరూపక అక్షాలను కొని, 'O' కేంద్రంగా, ఒక యూనిట్ వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తాన్ని గీయండి. P వృత్తంపై ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. OP ని మరియు X'OY పై PM లంబాన్ని గీయండి.

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{MP}$$

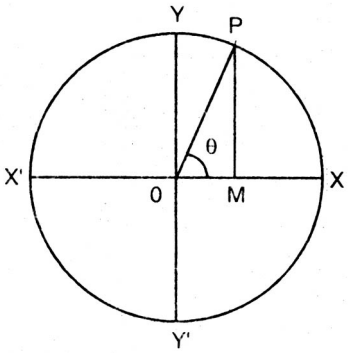
cosec θ విచరణ MP పై ఆధారపడును.



పటం 17.29

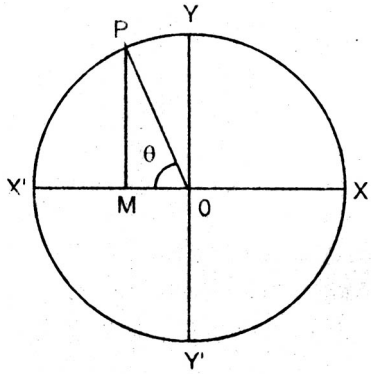
ఒకటో పాదం: ఇక్కడ MP ధనాత్మకం కావున cosec θ కూడా ధనాత్మకం. cosec π/2 = 1 θ అతి చిన్నది అయితే MP కూడా చిన్న విలువ మరియు cosec θ విలువ చాలా పెద్దది.

∴ θ విలువ 0 నుండి π/2 కు పెరగుతుంటే, cosec θ ∞ నుండి 1కి తగ్గుతుంది.



పటం 17.30

రెండో పాదం: PM ధనాత్మకం కావున cosec θ ధనాత్మకం cosec π/2 = 1 మరియు cosec π = ∞ ఎప్పుడైతే భ్రమణ రేఖ అపసవ్యదిశలో ని సమీపిస్తుంది.



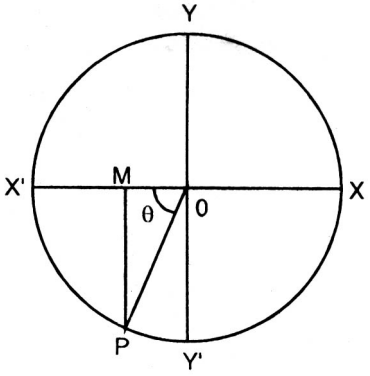
పటం 17.31

∴ θ విలువ π/2 నుండి π కి పెరుగుతుంటే cosec θ విలువ 1 నుండి ∞ కి పెరుగుతుంది.

మూడో పాదం : ఇక్కడ PM ఋణాత్మకం కావున cosec θ కూడా ఋణాత్మకం θ విలువ π కంటే కొంచెం పెద్దదయితే cosec θ విలువ అతి పెద్దది మరియు ఋణాత్మకం.

$$\text{అంతేకాక } \operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -1$$

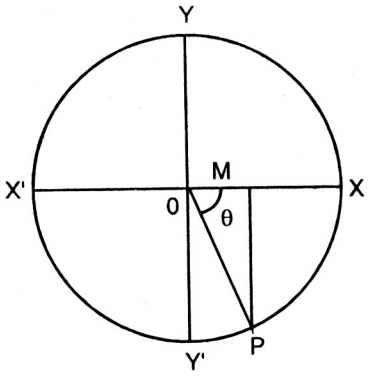
$\therefore$ θ విలువ π నుండి $\frac{3\pi}{2}$ కు పెరుగుతుంటే cosec θ విలువ $-\infty$ నుండి -1 కి మారుతుంది. θ అనునది π గుండా పోతుంటే, cosec θ విలువ $+\infty$ నుండి $-\infty$ కి మారుతుంది.



పటం 17.32

నాల్గవ పాదం : PM ఋణాత్మకం కావున cosec $\theta = -\infty, \theta, 2\pi$ ని సమీపిస్తే,

$\therefore$ θ విలువ $\frac{3\pi}{2}$ నుండి 2π కి పెరుగుతుంటే cosec θ -1 నుండి $-\infty$ కి తగ్గుతుంది.

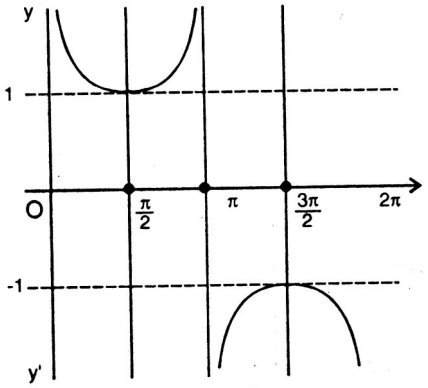


పటం 17.33

cosec θ యొక్క గ్రాఫ్

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
cosec θ	∞	2	1.15	1	1.15	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1.15	-1

θ	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cosec θ	-1.15	-2	$-\infty$



పటం 17.34

పరిశీలనలు

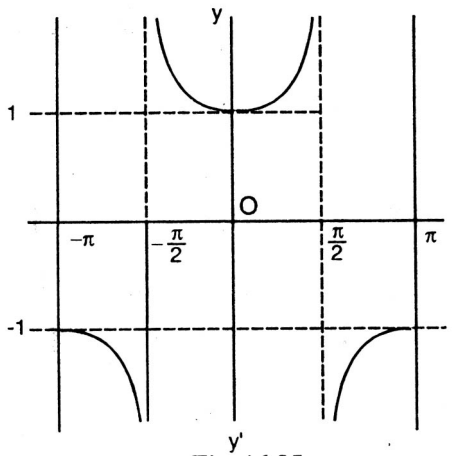
(a) $\operatorname{cosec}\theta$ విలువ సంఖ్యాత్మకంగా 1 కంటే తక్కువ.

(b) $\operatorname{cosec}\theta$ రేఖా చిత్రం విచ్ఛిన్నము. ఇది $\theta = 0, \pi, 2\pi$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నము.

(c) θ, π ద్వారా పోవుచుండడం వలన $\operatorname{cosec}\theta$ విలువ $+\infty$ నుండి $-\infty$ కి మారుతుంది. 0 మరియు 2π విలువలు వరసగా $+\infty$ మరియు $-\infty$ అగును.

ఉదాహరణ 22.17 : $-\pi$ నుండి π మధ్యలో θ కు $\sec\theta$ విలువలలోని మార్పులను గుర్తించండి.

సాధన:



పటం 17.35

అభ్యాసం 17.9

I. (a) -2π మరియు 2π కి మధ్యలో θ వుంటే $\sec\theta$ విలువలోని మార్పును గుర్తించండి. మరియు ఈ అంతరంలో దీని గ్రాఫ్ గీయండి.

(b) -2π మరియు 2π మధ్యలో θ కు $\operatorname{cosec}\theta$ రేఖా చిత్రంలో ని మార్పులను గుర్తించండి.

17.5 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆవర్తనీయత

నీదైనందిన జీవిత అనుభవంలో కొన్ని వస్తువులు లేక విషయాలు కాలానుగుణంగా క్రమంగా పునరావృతం అవడం నీవు తప్పక గమనించి వుంటావు. ఉదాహరణకు వారంలో 7 రోజులు, సంవత్సరానికి 12 నెలలు ఒకదాని తర్వాత ఒకటి క్రమంగా పునరావృతం కావడం, అదేవిధంగా కదిలే చక్రంపై గల వస్తువు స్థానం కూడా ఇదే రకానికి ఉదాహరణగా తీసుకోవచ్చు. ఈవిధంగా క్రమపద్ధతిలో క్రమంగా పునరావృతం కావడం అనే ధర్మాని 'ఆవర్తనంగా' పేర్కొనవచ్చు.

నిర్వచనం : $f(x)$ ఒక ప్రమేయం అవుతూ చలరాశి విలువ స్థిరంగా పెరుగుతుంటే ప్రమేయ విలువలో మార్పు లేకుంటే $f(x)$ ను ఆవర్తన ప్రమేయం అని అందురు.

అనగా $f(x+p) = f(x)$ అన్ని x విలువలకు

లేదా : R లో E ఒక ఉపసమితి, $f: E \to R$ ఒక ప్రమేయం అనుకుందాం. E లోని ప్రతి x కు, (i) $x+p \in E$ (ii) $f(x+p) = f(x)$ అగునట్లు ఒక ధనవాస్తవ సంఖ్య 'p' వ్యవస్థితం అయితే ప్రమేయం 'f' ను ఆవర్తన ప్రమేయం అని, f కు వాస్తవ సంఖ్య 'p' ని ఒక ఆవర్తనం అని అంటారు.

'p' ఆవర్తనంగా గల ఆవర్తన ప్రమేయం $f(x)$ అయితే $\frac{1}{f(x)}$ కూడా 'p' ఆవర్తనంగా గల ఆవర్తన ప్రమేయం అగును.

17.5.1 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల నిర్దిష్ట ఆవర్తనాలు

(i) $\sin x = \sin(x + 2n\pi)$; $n = 0, \pm1, \pm2, ...$

(ii) $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$; $n = 0, \pm1, \pm2, ...$

$\sin(x+2\pi)=\sin x$ మరియు $\cos(x+2\pi)=\cos x$ కావున $f(x)=\sin x$ ప్రమేయం ఆవర్తన ప్రమేయం, దీని నిర్దిష్ట ఆవర్తనం 2π.

ఇదేవిధంగా $f(x)=\cos x$ ప్రమేయా ఆవర్తన ప్రమేయం, దీని నిర్దిష్ట ఆవర్తనం 2π.

(iii) $f(x)=\tan x$ ప్రమేయం ఆవర్తన ప్రమేయం. దీని ఆవర్తనం π.

(iv) $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ కావున $\operatorname{cosec} x$ యొక్క ఆవర్తనం కూడా 2π.

(v) $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ కావున $\sec x$ ఆవర్తనం కూడా 2π అగును.

(vi) $\cot x=\frac{1}{\tan x}$ కావున $\cot x$ యొక్క ఆవర్తనం కూడా π అగును.

ఉదాహరణ 17.18 : క్రింది ప్రమేయాల ఆవర్తనం కనుక్కోండి.

(a) $y=3\sin 2x$

(b) $y=\cos\frac{x}{2}$

(c) $y=\tan\frac{x}{4}$

సాధన : (a) ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{2}$ అనగా π

(b) $y=\cos\frac{1}{2}x,$ కావున ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{1/2}=4\pi$

(c) $y=\tan\frac{x}{4}=\frac{\pi}{1/4}=4\pi$

అభ్యాసం 17.10

1. క్రింది ప్రతి ప్రమేయాలకు ఆవర్తనం కనుక్కోండి.

(a) $y=2\sin 3x$

(b) $y=3\cos 2x$

(c) $y=\tan 3x$

(d) $y=\sin^2 2x$

17.6 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల సంకలనం మరియు గుణకారం

ఇంతకు ముందు మనము కోణాల వర్తుల మానం, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు ప్రత్యేక సంఖ్యలకు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల విలువలను గురించి తెలుసుకున్నాము. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు A, B అను ఏవైనా రెండు సంఖ్యలకు మొత్తము లేదా భేదాలను కనుగొనుటలో మనకు కుతూహలం ఏర్పడును.

సంఖ్యల యొక్క మొత్తానికి లేదా భేదానికి సంబంధించిన త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తుల గూర్చి తెలుసుకుంటాం. ఇది మనకు $\frac{\pi}{12}$ మరియు $\frac{5\pi}{12}$ మొదలైన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుక్కోవడానికి ఉపయోగపడును.

$\frac{\pi}{12}$ ను $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ గా వ్రాయవచ్చు.

$\frac{5\pi}{12}$ ను $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ గా వ్రాయవచ్చు. ...., $\frac{7\pi}{12}$ ను మొత్తము లేదా భేదంగా ఏవిధంగా వ్రాయగలము. ఇలాంటి ప్రమేయాలను గురించి ఇక ముందు తెలుసుకుంటాము.

17.6.1 ఒక సంకలన సూత్రాలు

'A' మరియు 'B' అను రెండు సంఖ్యలను తీసుకుంటే

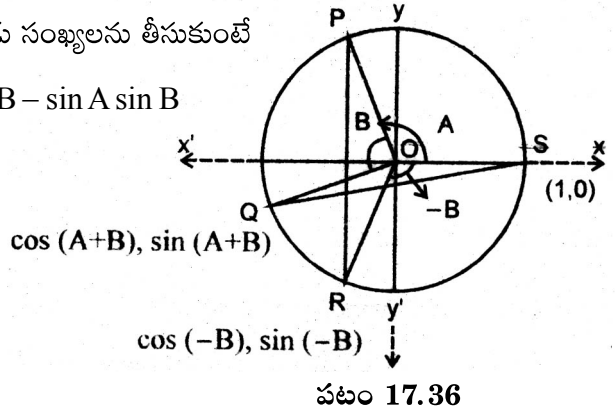
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

ఇచ్చిన పటము నుండి,

$\angle SOP = A$

$\angle POQ = B$

$\angle SOR = -B$



పటం 17.36

ఇక్కడ P, Q, R, S అను బిందువు యూనిట్ వృత్తము పై బిందువులు

P, Q, R, S నిరూపకాలు : $(\cos A, \sin A)$, $[\cos(A+B), \sin(A+B)]$,

$[\cos(-B), \sin(-B)]$ మరియు $(1, 0)$

ఇచ్చిన పటము నుండి

OP భుజము = OQ భుజము

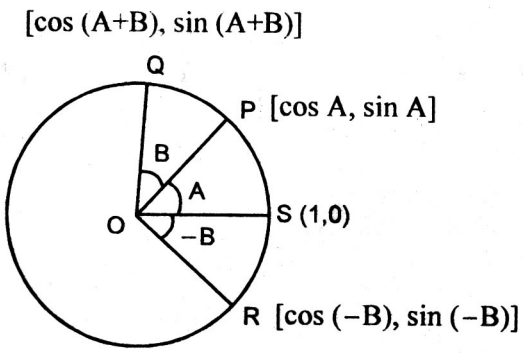
$\angle POR = \angle QOS$

(ప్రతి కోణము $\angle B + \angle QOR$)

OR భుజము = OS భుజము

$\Delta POR \cong \Delta QOS$ (SAS నుండి)

$\therefore$ PR = QS



పటం **17.37**

$$PR = \sqrt{(\cos(A+B)-1)^2 + (\sin(A+B)-0)^2}$$

$\because$ $PR^2 = QS^2$

$\therefore$ $\cos^2A + \cos^2B - 2\cos A \cos B + \sin^2A + \sin^2B + 2 \sin A \sin B$

$= \cos^2(A + B) + 1 - 2\cos (A + B) + \sin^2(A + B)$

$\Rightarrow 1 + 1 - 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = 1 + 1 - 2\cos (A + B)$

$\Rightarrow \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A + B)$ ...(I)

సందర్భము -1 : ఏవైనా రెండు సంఖ్యలు 'A' మరియు 'B' లకు

$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

నిరూపణ : 'B' స్థానంలో $-$'B' అని (I) లో వ్రాయగా

$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

[$\because$ $\cos (- B) = \cos B$ మరియు $\sin (- B) = - \sin B$].

సందర్భము -2 : 'A' మరియు 'B' అను ఏవైనా రెండు సంఖ్యలకు

$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

నిరూపణ : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A$ అని మనకు తెలుసు మరియు $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$

$\therefore$ $\sin (A + B) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - (A+B)\right)\right]$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\sin B$$

లేదా $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ...(II)

సందర్భము -3: A మరియు B అను ఏవైనా రెండు సంఖ్యలకు

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

నిరూపణ : 'B' స్థానంలో '–B' అని (II) లో వ్రాయగా,

$$\sin(A + (-B)) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

లేదా $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$

17.6.2 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అంత్యవిలువలు

ఏదైనా $\theta \in \mathbf{R}$, $-1 \le \sin\theta \le 1$. కావున $\theta \in \mathbf{R}$ అయినప్పుడు $\sin\theta$ యొక్క కనిష్ట, గరిష్ట విలువలు -1 మరియు 1. ఈ విలువలను $\sin\theta$ యొక్క అంత్య విలువలు అందురు. ఇదేవిధంగా $\cos\theta$ యొక్క కనిష్ట, గరిష్ట విలువలు -1, 1.

$a, b, c \in \mathbf{R}$, $a^2 + b^2 \pm 0$ ఐతే $a \sin x + b \cos x + c$ యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట q °= ° **R**పై

$C + \sqrt{a^2 + b^2}$ మరియు $C - \sqrt{a^2 + b^2}$,

$f(x) = a \sin x + b \cos x + c$, అన్నీ $x \in \mathbf{R}$ కు

$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ అనుకొనుము.

$$f(x) = r\cos\theta\sin x + r\sin\theta\cos x + c$$

$$= r[\cos\theta\sin\theta + \sin x\cos x] + c$$

$$= r\sin(\theta + x) + c$$

$-1 \le \sin(\theta + x) \le 1$, so that

$-r \le r\sin(\theta + x) \le r$

$c - r \le \{c + r\sin(\theta + x)\} \le c + r$

$\therefore$ **R** పై f యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు $c+\sqrt{a^2+b^2}$, $c-\sqrt{a^2+b^2}$.

ఉదాహరణ 17.19: $7\cos x - 24 \sin x + 5$ అంత్య విలువలు కనుగొనుము.

$a = 7,\ b = -24,\ c = 5$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{7^2+(-24)^2}$$

$$= \sqrt{49+576}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$= 25.$$

$\therefore$ గరిష్ట విలువ $= c+\sqrt{a^2+b^2} = 5 + 25 = 30$

కనిష్ట విలువ $= c-\sqrt{a^2+b^2} = 5 - 25 = -20.$

ఉదాహరణ 17.20:

(a) క్రింది వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $\sin\frac{5\pi}{12}$ (ii) $\cos\frac{\pi}{12}$ (iii) $\cos\frac{7\pi}{12}$

(b) $\sin A=\frac{1}{\sqrt{10}}, \sin B=\frac{1}{\sqrt{5}}$ అయితే, $A+B=\frac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.

సాధన :

(a) (i) $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6}.$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$\therefore \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

(ii) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\,.\,\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$ అని ఇక్కడ గమనించండి.

(iii) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\,.\,\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(b) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\cos A = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ మరియు $\cos B = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ఈ విలువలను (II) లో వ్రాయగా,

$$\sin(A+B) = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{(\sqrt{5}\sqrt{2})\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}.$$

లేదా, $A+B = \frac{\pi}{4}$

అభ్యాసం 17.11

1. (a) క్రింది ప్రతి వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $\sin\frac{\pi}{12}$ (ii) $\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$

(b) క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right)=\frac{1}{2}(\cos A+\sqrt{3}\sin A)$

(ii) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$

(c) $\sin A=\frac{8}{17}$ మరియు $\sin B=\frac{5}{13}$ అయితే.

$\sin(A-B)$ విలువ కనుక్కోండి.

2. (a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ విలువను కనుక్కోండి.

(b) క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

(iii) $\cos(n+1)A\cos(n-1)A+\sin(n+1)A\sin(n-1)A=\cos 2A$

(iv) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\cos(A+B)$

సందర్భము-4 : $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

నిరూపణ : $\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

cos A, cos B తో భాగించగా,

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} + \frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

లేదా $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$ (III)

సందర్భము -5: $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

నిరూపణ: 'B' ని '–B' గా (III) లో వ్రాయగా, పై సందర్భాన్ని నిరూపించగలం.

సందర్భము-6: $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\ \cot B\ -1}{\cot B + \cot A}$

నిరూపణ: $\cot(A+B) = \dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{\cos A\cos B - \sin A\ \sin B}{\sin A\cos\ B + \cos A\ \sin B}$

$\sin A\sin B$ తో భాగించగా.,

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot\ B - 1}{\cot B + \cot A}.$$

సందర్భము-7: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

నిరూపణ: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan A}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan A}$

$$= \frac{1+\tan A}{1-\tan A}, \text{ కాని } \tan\frac{\pi}{4} = 1,$$

ఇదేవిధంగా, మనము $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$ అని నిరూపించగలం.

ఉదాహరణ 17.21 : $\tan\frac{\pi}{12}$ విలవను కనుక్కోండి.

సాధన : $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{\pi}{6}}$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$

ఉదాహరణ 17.22 : క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{36}+\sin\frac{7\pi}{36}}{\cos\frac{7\pi}{36}-\sin\frac{7\pi}{36}} = \tan\frac{4\pi}{9}.$

(b) $\tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \tan 4A \,.\, \tan 3A$

(c) $\tan\frac{7\pi}{18} = \tan\frac{\pi}{9} + 2\tan\frac{5\pi}{18}$

సాధన : (a) లవం మరియు హారాన్ని $\cos\frac{7\pi}{36}$ తో భాగించగా,

$$\text{LHS} = \frac{\cos\frac{7\pi}{36}+\sin\frac{7\pi}{36}}{\cos\frac{7\pi}{36}-\sin\frac{7\pi}{36}} = \frac{1+\tan\frac{7\pi}{36}}{1-\tan\frac{7\pi}{36}}$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{7\pi}{36}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{7\pi}{36}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{36}\right)$$

$$= \tan\frac{16\pi}{36} = \tan\frac{4\pi}{9} = \text{R.H.S.}$$

(b) $\tan 7A = \tan(4A + 3A) = \dfrac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \tan 3A}$

లేదా $\tan 7A - \tan 7A \tan 4A \tan 3A = \tan 4A + \tan 3A$

లేదా $\tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \tan 4A \tan 3A.$

(c) $\tan\dfrac{7\pi}{18} = \tan\left(\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi}{18}\right) = \dfrac{\tan\frac{5\pi}{18} + \tan\frac{2\pi}{18}}{1 - \tan\frac{5\pi}{18}.\tan\frac{2\pi}{18}}$

$$\tan\frac{7\pi}{18} - \tan\frac{7\pi}{18}\tan\frac{5\pi}{18}\tan\frac{2\pi}{18} = \tan\frac{5\pi}{18} + \tan\frac{2\pi}{18} \qquad \ldots(1)$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{18}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \cot\frac{\pi}{9} = \cot\frac{2\pi}{18}.$$

(1)ని కింది విధంగా కూడా వ్రాయొచ్చు.

$$\tan\frac{7\pi}{18} - \cot\frac{2\pi}{18}\tan\frac{5\pi}{18}\tan\frac{2\pi}{18} = \tan\frac{5\pi}{18} + \tan\frac{\pi}{9}$$

$$\therefore \tan\frac{7\pi}{18} = \tan\frac{\pi}{9} + 2\tan\frac{5\pi}{18}.$$

అభ్యాసం 17.12

1. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right) = \ldots\ldots\ldots$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = ...$

2. (a) క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=1$

(ii) $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(iii) $\tan\frac{\pi}{12}+\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{\pi}{6}=1.$

(b) $\tan A=\frac{a}{b}$, $\tan B=\frac{c}{d}$ అయితే,

$\tan(A+B)=\frac{ad+bc}{bd-ac}$ అని నిరూపించండి.

3. (b) క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right) = -1$

(ii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

(iii) $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

17.7 సంకలన గణన పరివర్తనలు

17.7.1 : త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల లబ్ధాన్ని మొత్తం లేదా భేదంగా మార్చడం

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ అని మనకు తెలుసు.

మొదటి రెండు సూత్రాలను కలపడం మరియు తీసివేయడం వలన క్రింది విలువలు పొందగలం.

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B) \quad ...(1)$$

మరియు $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ ...(2)

అదే విధంగా మిగిలిన రెండు సూత్రాలను కూడి కలపడం మరియు తీసవేయడం వలన క్రింది విలువలు పొందగలం.

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad ...(3)$$

మరియు $2\cos A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ ...(4)

వీటిని ఈ క్రింది విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చు.

$2 \sin A \cos B = \sin$ (మొత్తము) + sin (భేదం)

$2 \cos A \sin B = \sin$ (మొత్తము) – sin(భేదం)

$2 \cos A \cos B = \cos$ (మొత్తము) + cos (భేదం)

$2 \sin A \sin B = \cos$ (భేదం) – cos (మొత్తము).

17.2.2 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మొత్తము లేదా భేదాన్ని లబ్ధంగా మార్చడం :

$$A + B = C$$

మరియు $A - B = D$

అప్పుడు $A = \frac{C+D}{2}$ మరియు $B = \frac{C-D}{2}$

అప్పుడు (1), (2), (3), (4) లను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయొచ్చు.

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

17.2.3 సంకలన మరియు వ్యవకలన సూత్రాల అనువర్తనము :

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$.

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ (or) $\cos^2 B - \sin^2 A$ అని నిరూపించగలం.

నిరూపణ : (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$

$= \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B$

$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$= \sin^2 A - \sin^2 B.$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$

$= \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B$

$= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$= \cos^2 A - \sin^2 B.$

$= (1-\sin^2 A) - (1-\cos^2 B)$

$= \cos^2 A - \sin^2 B.$

ఉదాహరణ 17.23:

క్రింది లబ్ధాలను మొత్తంగా లేదా భేదంగా వ్రాయండి.

(i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta$ (ii) $\cos 6\theta\cos\theta$ (iii) $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

సాధన : (i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin(3\theta+2\theta) + \sin(3\theta-2\theta)$

$= \sin 5\theta + \sin\theta$

(ii) $\cos 6\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(2\cos 6\theta\cos\theta)$

$= \frac{1}{2}[\cos(6\theta+\theta) + \cos(6\theta-\theta)]$

$= \frac{1}{2}[\cos 7\theta + \cos 5\theta]$

(iii) $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{5\pi+\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}\right]$$

ఉదాహరణ: 17.24 క్రింది మొత్తాలను లబ్ధాలుగా వ్రాయండి.

(i) $\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$ (ii) $\sin\frac{5\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}$

సాధన :

(i) $\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi+7\pi}{9\times2}\cos\frac{5\pi-7\pi}{9\times2}$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}$$

$\left[\because \cos\left(\frac{-\pi}{9}\right) = \cos\frac{\pi}{9}\right]$

$$= 2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{9}$$

$$= -2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{9}$$

$\left[\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right]$

(ii) $\sin\frac{5\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{36}\right)+\cos\frac{7\pi}{36}$

$$= \cos\frac{13\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}$$

$$= 2\cos\frac{13\pi+7\pi}{36\times2}\cos\frac{13\pi-7\pi}{36\times2}$$

$$= 2\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{12}.$$

ఉదాహరణ 17.25 : $\frac{\cos 7A - \cos 9A}{\sin 9A - \sin 7A} = \tan 8A$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\text{L.H.S.} = \frac{2\sin\frac{7A+9A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}{2\cos\frac{9A+7A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}$

$$= \frac{\sin 8A \sin A}{\cos 8A \sin A} = \frac{\sin 8A}{\cos 8A} = \tan 8A = \text{RHS}$$

ఉదాహరణ 17.26 : క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \sin(A+B)\cos(A-B)$

(ii) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A.$

సాధన: (i) $\cos^2A - \sin^2B = \cos(A+B)\cos(A-B)$ అను సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే,

$$\text{LHS} = \cos\left[\frac{\pi}{4} - A + \frac{\pi}{4} - B\right]\cos\left[\frac{\pi}{4} - A - \frac{\pi}{4} + B\right]$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A+B)\right]\cos\left[-(A-B)\right]$$

$$= \sin(A+B)\cos(A-B) = \text{RHS}$$

(ii) $\sin^2A - \sin^2B = \cos(A+B)\cos(A-B)$ అను సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే,

$$\text{LHS} = \sin\left[\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{A}{2}\right]\sin\left[\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{A}{2}\right]$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\sin A$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A = \text{RHS.}$$

ఉదాహరణ 17.27: $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $LHS=\cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[2\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$=\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\left[2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\left[\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\cos\frac{5\pi}{9}+\frac{1}{16} \qquad \ldots(1)$$

కానీ $\cos\frac{5\pi}{9}=\cos\left[\pi-\frac{4\pi}{9}\right]=-\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ $\ldots(2)$

(1) మరియు (2) నుండి,

$$LHS=\frac{1}{16}=RHS.$$

అభ్యాసం 17.13

1. క్రింది వాటిని మొత్తంగా లేదా భేదంగా వ్రాయండి.
   (a) $2\cos3\theta\sin2\theta$ (b) $2\sin4\theta\sin\theta$
   (c) $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$ (d) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$
2. క్రింది వాటిని లబ్ధంగా వ్రాయండి.
   (a) $\sin6\theta+\sin4\theta$ (b) $\sin7\theta-\sin3\theta$
   (c) $\cos2\theta-\cos4\theta$ (d) $\cos7\theta+\cos5\theta$

3. ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\sin\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$

(b) $\frac{\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{18}}{\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}}=1$

(c) $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}=0$

(d) $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=0$

4. ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\sin^2(n+1)\theta-\sin^2 n\theta=\sin(2n+1)\theta.\sin\theta.$

(b) $\cos\beta\cos(2\alpha-\beta)=\cos2\alpha-\sin^2(\alpha-\beta)$

(c) $\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

5. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

6. ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\frac{\sin\theta+\sin3\theta+\sin5\theta+\sin7\theta}{\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta+\cos7\theta}=\tan4\theta$

(b) $\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{16}$

(c) $(\cos\theta+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

17.8 గుణిజకోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

(a) sin 2A ను sinA, cos A మరియు tan A పదాలలో వ్రాయడం :

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ అని మనకు తెలుసు

$B=A$ వ్రాయగా

$$\sin2A=\sin A\cos A+\cos A\sin A$$
$$=2\sin A\cos A.$$

$\therefore \sin 2A$ అని ఈ క్రింది విధంగా కూడా వ్రాయొచ్చు.

$$\sin 2A = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \qquad (\because\ 1 = \cos^2 A + \sin^2 A)$$

లవం మరియు హారాన్ని $\cos^2 A$ తో భాగించగా

$$\sin 2A = \frac{2\left(\frac{\sin A\cos A}{\cos^2 A}\right)}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(b) $\cos 2A$ ను sinA, cos A, tanA లలో వ్రాయడం :

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ అని మనకు తెలుసు.

$B = A$ అని వ్రాయగా,

$$\cos 2A = \cos A\cos A - \sin A\sin A$$

(or) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$

ఇంకా, $\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

$$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$$

$$\text{i.e., } \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$$

$$\text{i.e., } \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \Rightarrow \sin^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

$$\therefore \cos 2A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

లవం మరియు హారం RHS లో $\cos^2 A$ తో భాగంచగా,

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(c) tan2A ను tan A లో వ్రాయడం

$$\tan 2A = \tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

∴ అదేవిధంగా,

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{A}, \qquad \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}.$$

ఉదాహరణ 17.28 : $A = \frac{\pi}{6}$ అయితే, ఈ క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

(i) $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

(iii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

సాధన : (i) $\sin 2A = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$2\sin A \cos A = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\left(2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(ii) $\cos 2A = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2\cos^2 A - 1 = 2\cos^2\frac{\pi}{6} - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2\times\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

$$1 - 2\sin^2 A = 1 - 2\sin\frac{\pi}{6} = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\tan^2\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(iii) $\tan 2A = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

ఉదాహరణ 17.29 : $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A.$

ఉదాహరణ 17.30 : $\cos A - \tan A = 2\cot 2A$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\cot A - \tan A = \frac{1}{\tan A} - \tan A$

$= \frac{1-\tan^2 A}{\tan A}$

$= \frac{2(1-\tan^2 A)}{2\tan A}$

$= \frac{2}{\left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right)} = \frac{2}{\tan 2A}$

$= 2\cot 2A .$

ఉదాహరణ 17.31 : $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన : $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}$

$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} = 1.$

ఉదాహరణ 17.32 : $\frac{\cos A}{1-\sin A} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\text{RHS} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{A}{2}}$

$$= \frac{1+\frac{\sin A/2}{\cos A/2}}{1-\frac{\sin A/2}{\cos A/2}} = \frac{\cos A/2+\sin A/2}{\cos A/2-\sin A/2}$$

$$= \frac{\left[\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right]\left[\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right]}{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

$\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$ చే లవ, హారాలను గుణించగా

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos A}{1-\sin A} = \text{LHS}$$

ఉదాహరణ 17.33: $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

సాధన: $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$

$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2\{1 - \cos(\alpha-\beta)\}$

$= 2\times 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

అభ్యాసం 17.14

1. $A = \frac{\pi}{3}$ అయితే, క్రింది వాటిని పరిశీలించుము.

(a) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

2. క్రింది సందర్భాలలో, $\sin 2A$ విలువను కనుక్కోండి.

$[\ 0 < A < \pi/2$ అయితే $]$

(a) $\cos A = \frac{3}{5}$ (b) $\sin A = \frac{12}{13}$ (c) $\tan A = \frac{16}{63}$.

3. క్రింది సందర్భాలలో $\cos 2A$ విలువను కనుక్కోండి.

(a) $\cos A = \frac{15}{17}$ (b) $\sin A = \frac{4}{5}$ (c) $\tan A = \frac{5}{12}$.

4. క్రింది సందర్భాలలో $\tan 2A$ విలువను కనుక్కోండి.

(a) $\tan A = \frac{3}{4}$ (b) $\tan A = \frac{a}{b}$

5. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}$ విలువను కనుక్కోండి.

6. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)$

(b) $\frac{\cot^2 A + 1}{\cos^2 A - 1} = \sec 2A$

7. (a) $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cos A$ అని నిరూపించండి.

(b) $\tan A + \cot A = 2\operatorname{cosec} 2A$ అని నిరూపించండి.

8. (a) $\frac{\cos A}{1+\sin A} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

(b) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$ అని నిరూపించండి.

17.8.1 3A యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు A లో వ్రాయడం :

(a) sin3A ని sinA లో వ్రాయుట :

sin(A + B) = sinA cos B + cosA + sin B అను సూత్రములో B ని '2A' గా వ్రాయగా,

$$\Rightarrow \sin(A+2A) = \sin A\cos 2A + \cos A \sin 2A$$
$$= \sin A(1-2\sin^2 A) + (\cos A \times 2\sin A \cos A)$$
$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A(1-\sin^2 A)$$
$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A - 2\sin^3 A.$$
$$\therefore \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$$

(b) cos 3A ని cos A లో వ్రాయుట

cos(A + B) = cosA cos B – sinA + sin B అను సూత్రములో B ని '2A' గా వ్రాయగా,

$$\cos(A+2A) = \cos A\cos 2A - \sin A \sin 2A$$
$$= \cos A(2\cos^2 A - 1) + (\sin A) \times 2\sin A \cos A$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A)$$
$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A.$$
$$\therefore \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$$

(c) tan 3A ని tan A లో వ్రాయుట :

$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ లో B = 2A అని వ్రాయగా,

$$\tan(A+2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1 - \tan A \times \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}$$

$$= \frac{\frac{\tan A - \tan^3 A + 2\tan A}{1-\tan^2 A}}{\frac{1-\tan^2 A - 2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.$$

$\sin^3 A$ మరియు $\cos^3 A$:

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$$

$$\Rightarrow \sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$$

అదేవిధంగా,

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$3\cos A + \cos 3A = 4\cos^3 A.$$

$$\Rightarrow \cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$$

$\therefore$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

$$\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}, \quad \cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}.$$

ఉదాహరణ. 17.34: $A = \frac{\pi}{4}$ అయితే, క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

(i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(iii) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

సాధన : (a) $\sin 3A = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$3\sin A - 4\sin^3 A = 3\sin\frac{\pi}{4} - 4\sin^3\frac{\pi}{4}$$

$$= 3\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$4\cos^3 A - 3\cos A = 4\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 3\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

(iii) $\tan 3A = \tan\frac{3\pi}{4} = -1.$

$$\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} = \frac{3\times 1 - 1^3}{1 - 3\times 1^2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$\therefore \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

ఉదాహరణ. 17.35: $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ అయితే $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= 4\times\frac{1}{8}\left(a^3 + 3a^2.\frac{1}{a} + 3a.\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) - \frac{3a}{2} - \frac{3}{2a}$$

$$= \frac{a^3}{2} + \frac{1}{2a^3} = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right).$$

ఉదాహరణ. 17.36 : $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{2}\sin\alpha\left[\cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\right]$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha\left[1-2\sin^2\alpha - \left(1-2\sin^2\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\alpha\right]$$

$$= \sin\alpha\left[\frac{3}{4} - \sin^2\alpha\right] = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4} = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

ఉదాహరణ. 17.37 : $\cos^3 A \sin 3A + \sin^3 A \cos 3A = \frac{3}{4}\sin 4A$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\cos^3 A \sin 3A + \sin^3 A \cos 3A$

$$= \cos^3 A\,(3\sin A - 4\sin^3 A) + \sin^3 A(4\cos^3 A - 3\cos A)$$

$$= 3\sin A\cos^3 A - 4\sin^3 A\cos^3 A + 4\sin^3 A\cos^3 A - 3\sin^3 A\cos A$$

$$= 3\sin A\cos^3 A - 3\sin^3 A\cos A$$

$$= 3\sin A\cos A\,(\cos^2 A - \sin^2 A) = (3\sin A\cos A)\cos 2A$$

$$= \frac{3\sin 2A}{2}\times\cos A$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\sin 4A}{2} = \frac{3}{4}\sin 4A.$$

ఉదాహరణ 17.38 : $\cos\frac{3\pi}{9} + \sin^3\frac{\pi}{18} = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{18}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\text{LHS} = \frac{1}{4}\left[3\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{3}\right] + \frac{1}{4}\left[3\sin\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{6}\right]$

$$= \frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{18}\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{18} = \text{RHS}$$

అభ్యాసం 17.15

1. $A = \frac{\pi}{3}$ అయితే, క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

   (a) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

   (b) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

   (c) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

2. కింది సందర్భాలలో విలువను కనుక్కోండి.

   (a) $\sin A = \frac{2}{3}$ (b) $\sin A = \frac{p}{q}$

3. క్రింది సందర్భాలలో $\cos 3A$ విలువను కనుక్కోండి.

   (a) $\cos A = -\frac{1}{3}$ (b) $\cos A = \frac{c}{d}$

4. $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$ అని నిరూపించండి.

5. (a) $\sin^3\frac{2\pi}{9} - \sin^3\frac{\pi}{9} = \frac{3}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{9}\right)$ అని నిరూపించండి.

   (b) $\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A}$ విలువ స్థిరం అని నిరూపించండి.

6. (a) $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$ అని నిరూపించండి.

   (b) $\cos 10A + \cos 8A + 3\cos 4A + 3\cos 2A = 8\cos A\cos^3 3A$ అని నిరూపించండి.

17.9 ఉపగుణిజకోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

$\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}$ లను A కు ఉపగుణిజ కోణాలందురు.

$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$, $\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$ అని నిరూపించబడ్డాయి.

పై సూత్రాలలో A ని A/2 అని వ్రాయగా, A/2 కి సూత్రాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

$\therefore \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ మరియు

$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

పై ప్రమేయం యొక్క విలువ ధనాత్మకమా? లేదా ఋణాత్మకమా అని తెలియుటకు A/2 విలువపై ఆధారపడి వుంటుంది. క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా దీనిని స్పష్టంగా చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 17.38: $\cos\frac{\pi}{12}$ మరియు $\cos\frac{\pi}{24}$ విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ అను సూత్రాన్ని ఇక్కడ ఉపయోగిస్తాము. $\cos\frac{\pi}{12}$ మరియు $\cos\frac{\pi}{24}$లు ధనాత్మకాలు కావున పై విలువలో ధనాత్మక గుర్తును తీసుకుంటాం.

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\pi/6}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\times 2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}} \qquad \left[\because 4+2\sqrt{3} = 1+3+2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2\right].$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/12}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$$

ఉదాహరణ 17.39: $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ మరియు $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ అను సూత్రాన్ని ఉపయోగించగా మరియు $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ రుణాత్మకం కావున పై విలువలో క్రింది గుర్తును తీసుకుంటాం.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{2}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

అదేవిధంగా, $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

ఉదాహరణ 17.40: $\cos A = \frac{7}{25}$ మరియు $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ అయితే, క్రింది వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $\sin\frac{A}{2}$ (ii) $\cos\frac{A}{2}$ (iii) $\tan\frac{A}{2}$

సాధన : $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ కావున A నాలుగవ పాదంలో ఉండును.

$$\Rightarrow \quad 3\frac{\pi}{4} < \frac{A}{2} < \pi$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} > 0,\ \cos\frac{A}{2} < 0,\ \tan\frac{A}{2} < 0$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-7/25}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{32}{50}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{-4}{5}.$$

$$\text{మరియు } \tan\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{1+\frac{7}{25}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{18}{32}} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}.$$

అభ్యాసం 17.16

1. $A = \frac{\pi}{3}$ అయితే, క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

(a) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ (b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

(c) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

2. $\sin\frac{\pi}{2}$ మరియు $\sin\frac{\pi}{24}$ విలువలను కనుక్కోండి.

3. క్రింది వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

(a) $\sin\frac{\pi}{8}$ (b) $\cos\frac{\pi}{8}$ (c) $\tan\frac{\pi}{8}$

ఉదాహరణ 17.41 : క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ మరియు $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

(b) $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ మరియు $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

సాధన: (a) $A=\frac{\pi}{10}$ అనుకుంటే,

$\Rightarrow 5A=\frac{\pi}{2}.$

$\therefore\ 2A=\frac{\pi}{2}-3A$

$\therefore\ \sin 2A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3A\right)=\cos 3A$

$\therefore\ 2\sin A\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$

లేదా $\cos A\,[2\sin A-4\cos^2 A+3]=0$

$\cos A\neq 0$ మరియు $1-\sin^2 A=\cos^2 A$

కాబట్టి, (1) $\Rightarrow 2\sin A-4(1-\sin^2 A)+3=0$

$4\sin^2 A+2\sin A-1=0$

$\Rightarrow \sin A=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$$\sin A = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

ఇప్పుడు, $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

(b) $A = \frac{\pi}{10}$ అనుకుంటే, $2A = \frac{\pi}{5}$,

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A.$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{5} = 1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1-2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right) = \frac{2+2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}}.$$

ఉదాహరణ 17.42 : $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = \cot\alpha$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\tan\alpha - \cot\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$ అని నిరూపించాలి.

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$$

$\Rightarrow -2\cot 2\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$ ...(1)

$-2\cot 2\alpha + 2\tan 2\alpha$ ని కలిపితే,

$\Rightarrow -4\cot 4\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$ ...(2)

$-4\cot 4\alpha + 4\tan 4\alpha$ ను కలిపితే,

(2) యొక్క LHS $= -8\cot 8\alpha + 8\cot 8\alpha = 0 =$ RHS

17.10 త్రికోణమితీయ సమీకరణాలు

బీజగణితంలో సాధారణ సమీకరణాలైన రేఖీయ సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాల గురించి మీకు బాగా తెలుసు. అంతేకాక వాటి సాధన కూడా నీవు తెలుసుకున్నావు. ఈ విధంగా

(i) $x - 3 = 0$ అనునది x కు ఒక విలువను ఇస్తుంది.

(ii) $x^2 - 9 = 0$ అనునది x కు రెండు విలువలను ఇస్తుంది.

నీవు తప్పక తెలుసుకోవలసినది సాధన యొక్క విలువలు ఆ సమీకరణ తరగతి పై ఆధారపడును.

ఇప్పుడు x మరియు y ల బదులు త్రికోణమితీమ నిష్పత్తులను వ్రాస్తే ఏమవుతుందో తెలుసుకోవడం ఈ విధంగా $\sin\theta - 1 = 0$ సమీకరణం నుండి $\sin\theta - 1 = 0$ మరియు $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots..$ అని వస్తుంది.

స్పష్టంగా

త్రికోణమితీయ సమీకరణాలలో సాధన విలువలు పరిమితంగానే ఉండనవసరంలేదు.

కావున అలాంటి సమీకరణాల సాధనకు మార్గాల గురించి మనం ప్రయత్నిద్దాం.

17.10.1 $\sin\theta$ యొక్క సార్వత్రిక సాధన కనుగొనుట

$\sin\theta = 0$

$\sin 0, \sin\pi, \sin 2\pi, \ldots.. \sin n\pi$ ల విలువ 0కి సమానము అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \theta = n\pi, \quad n \in N.$

కాని $\sin(-\theta) = -\sin\theta = 0$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \sin(-\pi), \sin(-2\pi), \sin(-3\pi), \ldots, \sin(-n\pi) = 0.$

$\therefore \theta = n\pi, \ n \in I.$

ఈ విధంగా $\theta = n\pi$ అనేది. $\sin\theta = 0$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన అగును. ఇక్కడ n ఒక పూర్ణసంఖ్య.

17.10.2 $\cos\theta = 0$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన

$$\cos\theta = 0$$

కానీ, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ అని మనకు తెలుసు, $\therefore$ θ యొక్క ప్రాథమిక విలువ :

$\theta = \frac{\pi}{2}$ అగును $\quad \ldots(1)$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ లేదా $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$ అని మనకు తెలుసు.

$\Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

అదేవిధంగా, $\cos\frac{5\pi}{2}, \cos\frac{7\pi}{2}, \cos\frac{9\pi}{2}, \ldots \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ల విలువలు కూడా 0 అని గ్రహించవచ్చు.

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in N$

కానీ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \ldots = \cos\left\{-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in N$

$\therefore$ కావున, $\cos\theta = 0$ సమీకరణానికి $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ అనేది సాధన.

17.10.3 $\tan\theta = 0$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన

$$\tan\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0 \qquad \text{లేదా} \quad \sin\theta = 0.$$

i.e., $\theta = n\pi,\ n \in I$

→ కుడివైపు సున్నా ఉన్నందున పై వాటిని త్రికోణమితీయ సమీకరణాలకు ప్రధాన సాధనలుగా తీసుకుంటాం.

→ కుడివైపు సున్నా లేకపోతే, వాటిని కింది విధంగా చర్చిస్తాము.

17.10.4 $\sin\theta = \sin\alpha$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన

$$\sin\theta = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$\text{లేదా} \quad 2\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0.$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0 \quad \text{లేదా} \quad \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{లేదా} \quad \frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in I$$

$$\Rightarrow \quad \theta = (2p+1)\pi - \alpha \quad \text{లేదా} \quad \theta = 2p\pi + \alpha \qquad \ldots(1)$$

(1) ద్వారా,

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in I$ ను $\sin\theta = \sin\alpha$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధనగా తీసుకుంటాము.

17.10.5 $\cos\theta = \cos\alpha$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన

$$\cos\theta = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta - \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\therefore \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \quad \text{లేదా} \quad \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = p\pi$ లేదా $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in I$

$\Rightarrow \theta = 2p\pi - \alpha$ లేదా $\theta = 2p\pi + \alpha$ ...(1)

(1) ద్వారా, $\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in I$ అనేది $\cos\theta = \cos\alpha$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన అవుతుంది.

17.10.6 $\tan\theta = \tan\alpha$ సమీకరణానికి సార్వత్రిక సాధన $\tan\theta = \tan\alpha$ అని ఇవ్వడమైనది.

$$\tan\theta = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\theta - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \theta - \alpha = n\pi,\ n \in I$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi + \alpha,\ n \in I$$

అదేవిధంగా, $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$, కు సార్వత్రిక సాధన

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \alpha$ అవుతుంది.

మరియు, $\sec\theta = \sec\alpha$, కు సార్వత్రిక సాధన

$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$ అవుతుంది.

మరియు, $\cot\theta = \cot\alpha$, కు సార్వత్రిక సాధన

$\Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$ అవుతుంది.

$\rightarrow \sin^2\theta = \sin^2\alpha$ అయితే, అప్పుడు

$$\frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\alpha \pm 2\alpha,\quad n \in I.$

$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha.$

$\rightarrow$ అదేవిధంగా, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ అయితే, అప్పుడు

$$\alpha = n\pi \pm \alpha,\ n \in I.$$

$\rightarrow$ అదేవిధంగా, $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ అయితే, అప్పుడు

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$\Rightarrow \quad \cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$\Rightarrow \quad 2\theta = 2n\alpha \pm 2\alpha$

$\Rightarrow \quad \theta = n\pi \pm \alpha,\ n \in I$ ఇది సార్వత్రిక సాధన.

ఉదాహరణ 17.43 : క్రింది వాటికి ప్రధాన సాధనలు కనుక్కోండి.

(a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(c) (i) $\cot\theta = -\sqrt{3}$ (d) $4\sin^2\theta = 1.$

సాధన :

(a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \quad n \in I$$

(ii) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}.$

$$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, \quad n \in I$$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in I$$

(ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad n \in I$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}.$

$\therefore\ \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad n \in I$

(d) $4\sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in I$

ఉదాహరణ 17.44 : క్రింది వాటిని సాధించండి.

(a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$ (b) $\cos 4x = \cos 2x$

(c) (i) $\cos 3x = \sin 2x$ (d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

సాధన : (a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$ లేదా $\sin\theta = 2$

$\because \sin\theta = 2$ అనేది సాధ్యం కాదు,

$\therefore \sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}.$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{7\pi}{6}, \quad n \in I.$

(b) $\cos 4x = \cos 2x$

i.e., $\cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow -2\sin 3x \sin x = 0$

$\Rightarrow \sin 3x = 0$ లేదా $\sin x = 0$

$\Rightarrow 3x = n\pi$ లేదా $x = n\pi$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}$ లేదా $x = n\pi, \quad n \in I$

(c) $\cos 3x = \cos 2x.$

$\Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow 3x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right), n \in I$

ధనాత్మక గుర్తును మాత్రమే తీసుకుంటే

$\Rightarrow 3x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$

$\Rightarrow 5x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{2n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}.$

ఇప్పుడు ఋణాత్మక విలువను తీసుకుంటే

$3x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}, \quad n \in I$

(d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

లేదా $(\sin 6x + \sin 2x) + \sin 4x = 0$

లేదా $2\sin 4x \cos 2x + \sin 4x = 0$

లేదా $\sin 4x [2 \cos 2x + 1] = 0$

$\therefore \sin 4x$ లేదా $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$.

$\Rightarrow 4x = n\pi$ లేదా $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad n \in I$

$X = \frac{n\pi}{4}$ లేదా $X = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in I$.

అభ్యాసం 17.17

1. θ ను తృప్తి పరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

   (i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$

   (iii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. θ ను తృప్తి పరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

   (i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ (ii) $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

   (iii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sec\theta = -\sqrt{2}$

3. θ ను తృప్తి పరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

   (i) $\tan\theta = -1$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (iii) $\cot\theta = -1$

4. θ ను తృప్తి పరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

   (i) $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ (iii) $\tan 3\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

   (iv) $\cos 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (v) $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ (vi) $\sin^2 2\theta = \frac{1}{4}$

   (vii) $4\cos^2\theta = 1$ (viii) $\cos^2 2\theta = \frac{3}{4}$.

5. θ ను తృప్తిపరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

   (i) $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$ (ii) $4\cos^2\theta - 4\sin\theta = 1$.

   (iii) $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$.

కీలకపదాలు

- ఒక కిరణం భ్రమణం చేత కోణం ఏర్పడుతుంది.
- కిరణం సవ్యదిశ లేదా అపసవ్యదిశలో భ్రమణం చేసే దానిని బట్టి కోణం ధనాత్మకం లేదా ఋణాత్మకం అని తెలుస్తుంది.
- కోణ ప్రమాణాలలో 'డిగ్రీ' అనునది ఒక కొనమానం కోణం ఒక పూర్తి భ్రమణం ద్వారా ఏర్పడే కోణం 360^0.
- కోణాన్ని రేడియన్‌లలోను కొలుస్తాం.

  360^0 = 2π రేడియన్‌లు.
- వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తకేంద్రం వద్ద 'θ' కోణం చేసే చాపం పొడవు l అయితే $l = r\,\theta$
- ఒక ప్రమాణ (యూనిట్) వృత్తం పై ఏదేని బిందువు p నిరూపకాలు (x, y) అయితే ఆరు త్రికోణ మితీయ నిష్పత్తులను $\sin\theta = y, \cos\theta = x, \tan\theta = \frac{y}{x}, \cot\theta = \frac{x}{y}, \sec\theta = \frac{1}{x}$

  మరియు $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y}$ గా నిర్వచిస్తాం.

  $P(x, y)$ ని $P(\cos\theta, \sin\theta)$ గా కూడా వ్రాయవచ్చు.
- $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ల θ విలువలకు $\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు.
- $\sin\theta, \cos\theta$ రేఖాచిత్రాలు ఎక్కడైనా అవిచ్ఛిన్నం అగును.

  $\sin\theta, \cos\theta$ రెండింటి యొక్క గరిష్ట విలువ 1

  $\sin\theta, \cos\theta$ రెండింటి యొక్క కనిష్ట విలువ -1

  ఈ రెండింటి ప్రమేయాల ఆవర్తనం 2π

- $\tan\theta$, $\cot\theta$ ల ఏ విలువైనా $-\infty$ మరియు ∞ ల మధ్య వుంటుంది.
- $\tan\theta$ ప్రమేయం $\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{3\pi}{2}$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం $(0, 2\pi)$ లలో దీని ఆవర్తనం π.
- $\cot\theta$ యొక్క ఆవర్తనం π, ఇది $0, \pi, 2\pi$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం.
- $\sec\theta$ సంఖ్యాత్మకంగా 1 కంటే తక్కువ విలువలను కల్గి వుండదు.
- $\pi/2$ మరియు $3\pi/2$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం, దీని ఆవర్తనం 2π.
- $\operatorname{cosec}\theta$ -1 మరియు $+1$ మధ్య విలువలను కల్గియుండదు. ఇది $0, \pi, 2\pi$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నము.

  దీని ఆవర్తనం 2π.
- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B.$

  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.$

  $$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B},\ \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

  $$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A},\ \cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$
- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

  $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

  $2\cos A\cos B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

  $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

  $$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

  $$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

  $$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

- $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

  $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B.$

- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

  $= \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

- $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$, $\tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

  $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

- $\sin^3 A = \dfrac{3\sin A - \sin 3A}{4}$, $\cos^3 A = \dfrac{3\cos A + \cos 3A}{4}$

- $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$,

  $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

- $\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

- $\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi, \quad n \in I.$

  $\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \quad n \in I.$

  $\tan\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi, \quad n \in I.$

- $\sin\theta = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = n\pi + (-1)^n\alpha, \quad n \in I.$

- $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha, \quad n \in I.$
- $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, \quad n \in I.$
- $\sin^2\theta = \sin^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, \quad n \in I.$
- $\cos^2\theta = \cos^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, \quad n \in I.$
- $\tan^2\theta = \tan^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, \quad n \in I.$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. 2500 మీ, వ్యాసార్ధం గల వృత్తాకార బాట వెంబడి ఒక రైలు గం॥కు 75 కి.మీ. వేగంతో కదులుతుంది. అయితే ఒక నిమిషం కాలంలో అది ఎన్ని రేడియన్‌ల కోణం చేస్తుంది.
2. వృత్త వ్యాసార్ధం కంటే 0.357 రెట్లు గల చాపం ఆవృత్తకేంద్రం వద్ద చేసే కోణాన్ని కనుక్కోండి.
3. ఒక గడియారపు నిమిషాల ముల్లు పొడవు 30 సెం.మీ అయితే అది 15 నిమిషాలలో ఎంత దూరాన్ని తెల్పుతుందో కనుక్కోండి.
4. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(b) $\frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

(c) $\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

(d) $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = (\tan\theta + \sec\theta)^2$

(e) $\sin^8\theta - \cos^8\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

(f) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

5. $\theta = \frac{\pi}{4}$ అయితే $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ సరి చూడండి.

6. క్రింది విలువలు గణించండి.

(a) $\sin\frac{25\pi}{6}$ (b) $\sin\frac{21\pi}{4}$ (c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $\sin\frac{17}{4}\pi$ (e) $\cos\frac{19}{3}\pi$

7. $x = -\frac{\pi}{2}$ నుండి $x = \frac{3\pi}{2}$ వరకు $\cos x$ కు గ్రాఫ్ గీయండి.

8. x యొక్క ఆవర్తన ప్రమేయాన్ని నిర్వచించండి. $\tan x$ యొక్క ఆవర్తనం π అని రేఖాచిత్రం ద్వారా నిరూపించండి.

9. $\tan(A+B)\times\tan(A-B) = \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B - \sin^2 A}$ అని నిరూపించండి.

10. $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ అని నిరూపించండి.

11. $A + B = \frac{\pi}{4}$ అయితే, $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ మరియు $(\cot A - 1)(\cot B - 1)$ అని నిరూపించండి.

12. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{10} - A\right)\cos\left(\frac{\pi}{10} + A\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} - A\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5} + A\right) = \cos 2A.$

(iii) $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{9\pi}{9} = -\frac{1}{8}.$

(iv) $\cos\frac{13\pi}{45}+\cos\frac{17\pi}{45}+\cos\frac{43\pi}{45}=0.$

(v) $\tan\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\cot\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sin 2A-\sin\frac{\pi}{3}}$

(vi) $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$

(viii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\tan 2\theta+\sec 2\theta$

(ix) $\cos^2 A+\cos^2 A\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}.$

(x) $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$

(xi) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{11}{16}$

(xii) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{2}.$

13. θ ను తృప్తి పరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{2}$

14. θ ను తృప్తి పరిచే క్రింది వాటి ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\cos\theta=\frac{1}{2}$ (b) $\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$

(c) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sec\theta=-2$

15. 'θ' ను తృప్తి పరిచే క్రింది వాటి ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\tan\theta=1$ (b) $\tan\theta=-1$ (c) $\cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

16. 'θ' ను తృప్తి పరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$ (b) $4\cos^2\theta = 1$ (c) $2\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

17. క్రింది వాటిని సాధించండి.

(a) $\cos p\theta = \cos q\theta$ (b) $\sin 9\theta = \sin\theta$ (c) $\tan 5\theta = \cot\theta$

18. క్రింది వాటి 'θ' విలువలు సాధించండి.

(a) $\sin m\theta = \sin n\theta = 0$ (b) $\tan m\theta + \cot n\theta = 0$

(c) $\cos\theta + \cot 2\theta + \cot 3\theta = 0$

(d) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$

జవాబులు

అభ్యాసం 17.1

1. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{5\pi}{12}$ (iv) $\frac{7\pi}{12}$ (v) $\frac{3\pi}{2}$

2. (i) 45^0 (ii) 15^0 (iii) 9^0 (iv) 3^0 (v) 120^0

3. $\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{36}, \frac{14\pi}{36}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$ 6. $\frac{\pi}{3}$

అభ్యాసం 17.2

1. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$

2. (a) 36^0 (b) 30^0 (c) 20^0

3. $\frac{1}{6}$ రేడియన్లు, 9.55^0 4. $\frac{1}{5}$ రేడియన్లు 5. 95.54m

6. (a) 0.53m (b) 38.22 cm (c) 0.002 రేడియన్లు (d) 12.56m

(e) 31.4 cm

(f) 3.75 రేడియన్లు (g) 6.28m (h) 2 రేడియన్లు (i) 19.11 m

అభ్యాసం 17.3

1. (i) ఋణాత్మకం (ii) ఋణాత్మకం (iii) ఋణాత్మకం
(iv) ధనాత్మకం
(v) ధనాత్మకం (vi) ఋణాత్మకం (vii) ధనాత్మకం
(viii) ఋణాత్మకం

2. (i) 0 (ii) 0 (iii) $-\frac{1}{2}$
(iv) -1 +
(v) 1 (vi) నిర్వచింపలేము.
(vii) నిర్వచించలేము (viii) 1.

అభ్యాసం 17.4

2. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cot\theta = 2, \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}, \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3.

$$\sin\theta = \frac{a}{b}, \cos\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}, \sec\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \tan\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \cot\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

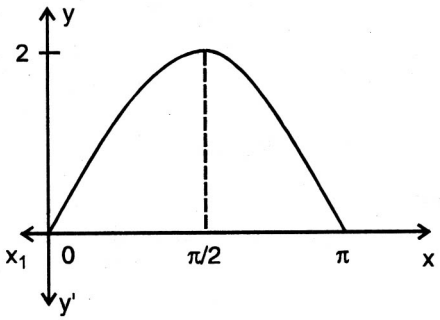
6. $\frac{2m}{1+m^2}$

అభ్యాసం 17.5

1. (i) $4\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{1}{2}$ (iii) -1 (iv) $\frac{22}{3}$
(v) 0

అభ్యాసం 17.6

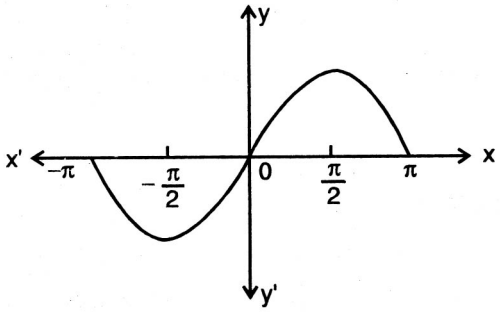
1. 1, –1 (3) $y = 2 \sin \theta$ గ్రాఫ్ $(0, \pi)$



పటం 17.38

4. (a) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

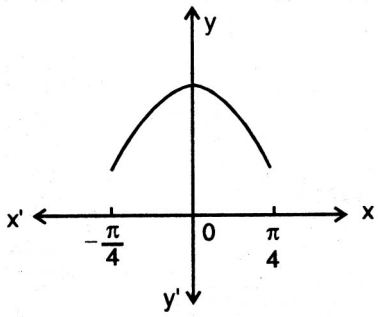
5. $-\pi$ నుండి π మధ్యలో $y = 2 \sin x$ గ్రాఫ్



పటం 17.39

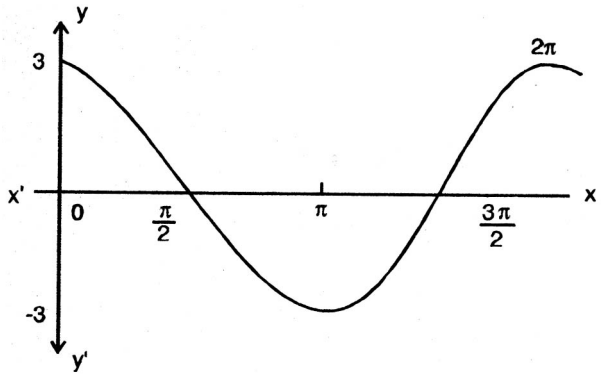
అభ్యాసం 17.7

1. (a) $-\pi/4$ నుండి $\pi/4$ మధ్యలో $y = 2 \sin \theta$ గ్రాఫ్



పటం 17.40

(b) 0 నుండి 2π అంతరంలో $y = 3\cos\theta$ గ్రాఫ్



పటం. 17.41

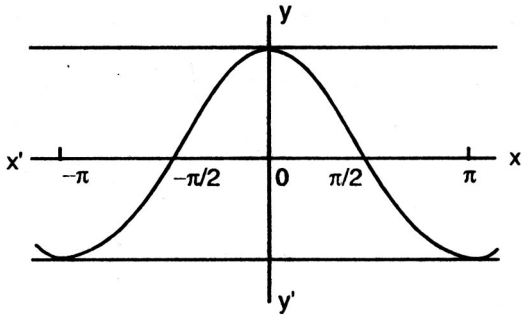
(c) $-\pi$ నుండి π మధ్యలో $y = \cos 3\theta$

$\cos\theta = 0.87$

$\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

$\cos\theta = -0.87$

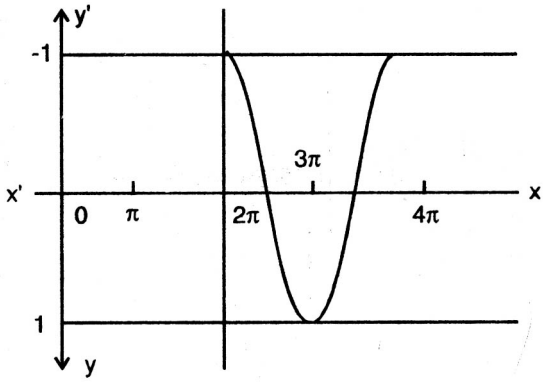
$\theta = \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$



పటం 17.42

(d) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ మధ్యలో $y = \cos\theta$ గ్రాఫ్ X- అక్షానికి క్రింద వుంటుంది.

(e) $y = \cos\theta$ 2π నుండి 4π మధ్యలో θ వుంటుంది.



పటం 17.43

అభ్యాసం 17.8

1. (a) అనంతం

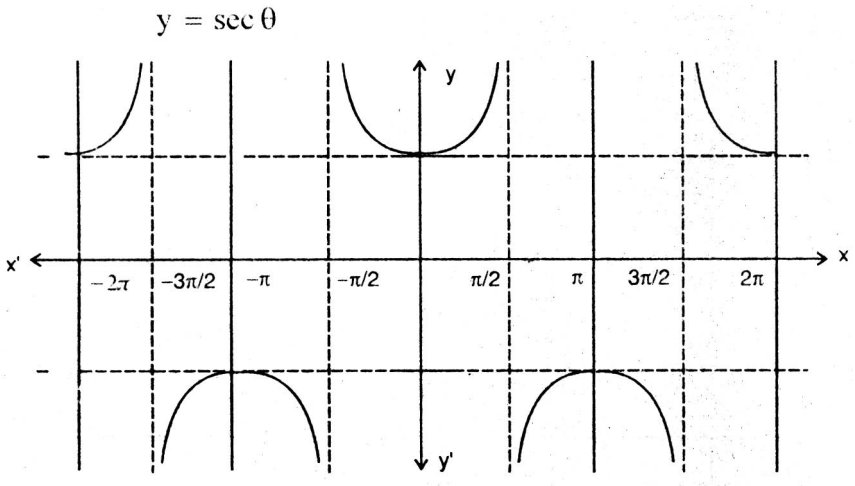
   (b) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ల వద్ద రేఖా చిత్రంలో అంతరం

   (c) $-\pi$ నుండి π లో $y = \tan\theta,\ \theta = \frac{\pi}{3}$ వద్ద $\tan\theta = 1.7$

2. (a) అనంతరం (b) $\cot\ \theta = -1\ \theta = \frac{3\pi}{4}$ వద్ద

అభ్యాసం 17.9

1. (a) $y = \sec\theta$



పటం 17.44

$[0, 2\pi]$ అంతరంలో $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ ల $\sec 2\theta$ వద్ద విచ్ఛిన్నము

(b) 0 నుండి -2π లో $\text{cosec}\,(-\theta) = -\text{cosec}\,2\theta$ ను ఉపయోగించి గీయగా

అభ్యాసం 17.10

1. (a) ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{3}$ (b) ఆవర్తనం $= \pi$ (c) y ఆవర్తనం $\frac{\pi}{3}$

   (d) $y = \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x$: y ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

   (e) $y = 3\cot\left(\frac{x+1}{3}\right)$, y యొక్క ఆవర్తనం $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

అభ్యాసం 17.11

1. (a) (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{21}{221}$

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

అభ్యాసం 17.12

1. (i) $\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{2}$ (ii) $-\frac{1}{4}$

2. (c) $-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}$

అభ్యాసం 17.13

1. (a) $\sin 5\theta - \sin\theta$ (b) $\cos 2\theta - \cos 6\theta$

   (c) $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$ (d) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}$

2. (a) $2\sin 5\theta\cos\theta$ (ii) $2\cos 5\theta\sin\theta$

   (c) $2\sin 3\theta\sin\theta$ (d) $2\cos 6\theta\cos\theta$

అభ్యాసం 17.14

2. (a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{120}{169}$ (c) $\frac{2016}{4225}$

3. (a) $\frac{161}{289}$ (b) $-\frac{7}{25}$ (c) $\frac{119}{169}$

4. (a) $\frac{24}{7}$ (b) $\frac{2ab}{b^2-a^2}$ 5. 1

అభ్యాసం 17.15

2. (a) $\frac{22}{27}$ (b) $\frac{(3pq^2-4p^3)}{q^3}$

3. (a) $\frac{23}{27}$ (b) $\frac{4c^3-3cd^2}{d^3}$

అభ్యాసం 17.16

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}}{2\sqrt{2}}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (c) $\sqrt{2}-1$

అభ్యాసం 17.17

1. (i) $\theta = n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3},\ n\in I$ (ii) $\theta = n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4},\ n\in I$

(iii) $\theta = n\pi+(-1)^n\frac{4\pi}{3},\ n\in I$ (iv) $\theta = n\pi+(-1)^n\frac{5\pi}{4},\ n\in I$

2. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in I$ (ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6},\ n \in I$

(iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in I$ (iv) $\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4},\ n \in I$

3. (i) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4},\ n \in I$ (ii) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3},\ n \in I$

(iii) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4},\ n \in I$

4. (i) $\theta = \frac{n\pi}{2}, (-1)^n \frac{\pi}{12},\ n \in I$ (ii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in I$

(iii) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18},\ n \in I$ (iv) $\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18},\ n \in I$

(v) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in I$ (vi) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12},\ n \in I$

(vii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in I$ (viii) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12},\ n \in I$

5. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6},\ n \in I$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},\ n \in I$

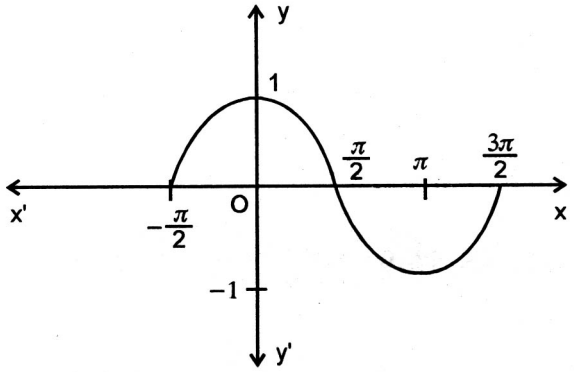
(iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in I$

సాధనా అభ్యాసం

1. $\frac{1}{2}$ రేడియన్లు 2. 20.45^0 3. 15π cm.

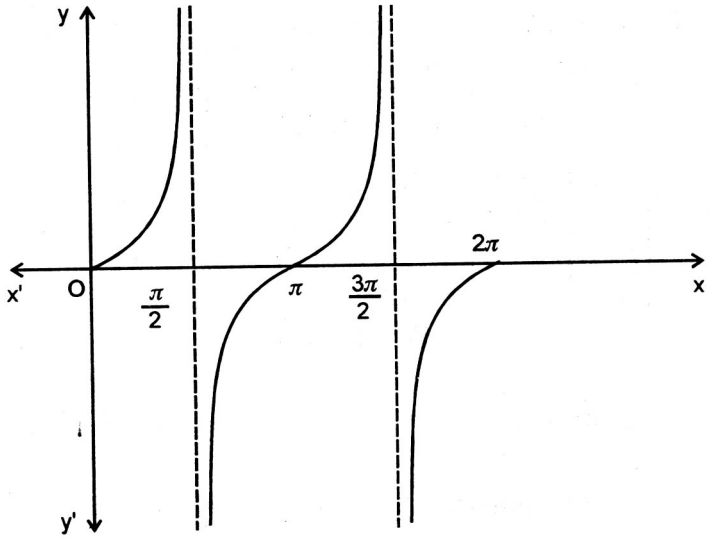
6. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) -1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1}{2}$

7.



పటం **17.45**

8.



పటం **17.46**

5. (a) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, \quad n \in I$ (b) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, \quad n \in I$

(c) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, \quad n \in I$ (d) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, \quad n \in I$

6. (a) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in I$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in I$

(c) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \quad n \in I$ (d) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad n \in I$

7. (a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in I$ (b) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in I$

(c) $n\pi + \frac{2\pi}{3},\ n \in I$.

8. (a) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in I$ (b) $\theta = n\pi\ \pm \frac{\pi}{3},\ n \in I$

(c) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in I$

9. (a) $\theta = \frac{2n\pi}{p \mp q},\ n \in I$ (b) $\theta = \frac{n\pi}{4}$ లేదా $(2n+1)\frac{\pi}{10},\ n \in I$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{12},\ n \in I$

10. (a) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m-n}$ లేదా $\frac{2k\pi}{m+n},\ k \in I$

(b) $\theta = \frac{(2k+1)}{2(m-n)},\ k \in I$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ లేదా $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in I$

(d) $\theta = \frac{2n\pi}{5}$ లేదా $\theta = n\pi\ \pm \frac{\pi}{2},\ n \in I$ లేదా $\theta = (2n-1)\pi,\ n \in I$.

అధ్యాయం 18

విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ అధ్యాయం ద్వారా మనము ఈ క్రింది వాటిని తెలుసుకుంటాము.

- విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాన్ని నిర్వచించడం.
- ఏఏ సందర్భాలలో విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయం వ్యవస్థితమవుతుందో చెప్పగలగడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల ప్రధాన విలువలను నిర్వచించడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల ప్రదేశం, వ్యాప్తిని నిర్వచించడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల ధర్మాలను చెప్పగలగడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలతో కూడిన సమాసాలను సూక్ష్మీకరించడం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- ప్రమేయం మరియు వివిధ రకాల ప్రమేయాలు, ప్రదేశం – మరియు సహ ప్రదేశాలకు సంబంధించిన జ్ఞానం.
- సంయుక్త త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు గుణిజ, ఉపగుణిజ కోణాలకు సంబంధించిన సూత్రాలు.

పరిచయం

గతంలో నేర్చుకొనిన "ప్రమేయాలు" అను అధ్యాయం నుండి, f అనునది A నుండి B కి ఒక ప్రమేయమయితే, $y \in B$ కి $f^{-1}(y)$ లో ఒక మూలకం లేదా ఒకటి కంటె ఎక్కువ మూలకాలు లేదా అసలు మూలకాలే లేకపోవచ్చు.

కాని $f : A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయమైనప్పుడు ప్రతి $y \in B$ కు అనుగుణంగా $f(x) = y$ అయ్యేటట్లు ఏకైక మూలకం $x \in A$ ఉంటుంది. కావున ఈ సందర్భంలో ప్రతి $y \in B$ అనుగుణంగా $f^{-1}(y) \in A$ అయ్యేటట్లు ఏకైక మూలకం $f^{-1}(y)$ ఉంటుంది.

అప్పుడు f^{-1} అనునది B నుండి A కు ప్రమేయమవుతుంది.

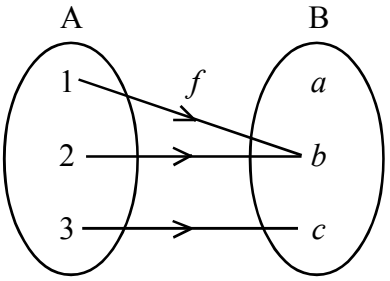
మరియు f^{-1} ను 'f' యొక్క విలోమ ప్రమేయం అంటారు.

> $f : A \to B$ ఒక ద్విగుణ ప్రమేయమైతే, $f^{-1}: B \to A$ ఒక ప్రమేయం అవుతుంది. దీన్నే f యొక్క విలోమ ప్రమేయమంటారు.

ఉదాహరణ : f అనునది A నుండి Bకు ఒక ప్రమేయం.

$f^{-1}(b) = \{1, 2\}$, అందువల్ల f^{-1} అనునది ప్రమేయం కాదు.

$\therefore$ f యొక్క విలోమ ప్రమేయం వ్యవస్థితం కాదు.



పటం. 18.1

ఉదాహరణ : $f : R \to R$ అనేది

$f(x) = 2x + 3$ అని నిర్వచితమైతే,

$f(x) = 2x + 3$ అనునది ద్విగుణ ప్రమేయం అని తెలుసు.

$\therefore$ f యొక్క విలోమ ప్రమేయం

f^{-1} వ్యవస్థితమవుతుంది.

ఈ అధ్యాయంలో విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల గురించి, వాటి ప్రదేశాల, వ్యాప్తి మరియు వాటిలోని సమస్యలను సూక్ష్మీకరించడం నేర్చుకుంటాము.

18.1 ప్రతి ప్రమేయానికి విలోమం సాధ్యమా ?

ఒక ప్రమేయంలోని రెండు క్రమ యుగ్మాలను (x_1, y), (x_2, y) తీసుకుందాం. వాటిని త్రిప్పి వ్రాస్తే (y, x_1) (y, x_2) అనివస్తుంది. ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకనగా క్రమయుగ్మాలలోని ప్రథమ నిరూపకాలు సమానంగా కలవు.

ఇప్పుడు ఇంకో ప్రమేయాన్ని తీసుకుందాం.

$$\left(\sin\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\sin\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\sin\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

వీటి విలోమాన్ని వ్రాస్తే $\left(1, \sin\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$

అగును. ఇది ఒక ప్రమేయం అగును.

ఇప్పుడు కొన్ని నిజజీవితాలకు సంబంధించిన ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

f: విద్యార్థి $\rightarrow$ గణితంలో మార్కులు

దీనికి f^{-1} వుంటుందా ?

ఉండవచ్చు, ఉండకపోవచ్చు. ఎందుకనగా ఇద్దరు విద్యార్థులకు ఒకే మార్కులు వస్తే f^{-1} వుండదు. ఎందుకనగా క్రమ యుగ్మాలలోని ప్రథమ నిరూపకాలు సమానం అవుతాయి. కనుక ప్రతి ప్రమేయాన్ని విలోమంగా వ్రాయలేము.

ఉదాహరణ: 18.1 : $f:\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ ను $f(x) = x^3 + 4$ గా నిర్వచిస్తే f^{-1} విలువ ఎంత?

సాధన : ఈ సందర్భంలో 'f' అనునది అన్వేకం మరియు సంగ్రస్తం రెండూ అగును $\Rightarrow f$ కు విలోమం వుంటుంది.

$y = x^3 + 4$ అనుకొనిన

$\therefore\ y - 4 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-4}$

కావున 'f' కు విలోమ ప్రమేయం i.e., $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-4}$.

$\rightarrow$ అన్వేక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయాలకు విలోమనీయత ఉంటుంది.

$\rightarrow$ దీనిని త్రికోణమితికి అనువర్తిద్దాం.

$y = \sin x$ తీసుకుందాం. ఇక్కడ ప్రమేయం ప్రదేశం వాస్తవ సంఖ్యాసమితి. వ్యాప్తి -1 మరియు 1కి మధ్య వుంటే వాస్తవ సంఖ్యలు అగును. i.e., $-1 \le y \le 1$ ఇక్కడ ప్రతి 'x' విలువకు 'y' లో విలువలు ఏకైకం.

* విలోమంలో

$$y = \sin x = 1/2$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{13\pi}{6} = ...$$

x అనునది $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, ...$ విలువలను కల్గివున్నది. ఈ విధంగా xకు అనంతమైన విలువలు కలవు.

$y = \sin x$ ను ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), ...$ దీనికి విలోమ సంబంధం

$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), ...$ అగును. కాని ఇక్కడ అన్ని ప్రథమ నిరూపకాలు సమానం కావున ఇది ప్రమేయం కాదు. ఇది ప్రమేయ నిర్వచనానికి విరుద్ధం.

$y = \sin x$ ను పరిశీలించండి. ఇక్కడ $x \in \mathrm{R}$ (ప్రదేశం) మరియు $y \in [-1, 1]$ లేక $-1 \le y \le 1$ ఇది వ్యాప్తి, ఇది బహు - ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయం కావున దీనికి విలోమనీయత లేదు.

మరి $y = \sin x$ కు విలోమాన్ని చూపగలమా? ఎట్లు? ఇక్కడ దీని ప్రదేశాన్ని కుదించడం ద్వారా దీనిని అన్వేక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయంగా మార్చగలం. అది ఎలా అనగా :

(i) $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $y \in [-1, 1]$ లేదా,

(ii) $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$, $y \in [-1, 1]$ లేదా,

(iii) $-\frac{5\pi}{2} \le x \le -\frac{3\pi}{2}$, $y \in [-1, 1]$ etc.,

ఇప్పుడు $y = \sin^{-1} x$ కు విలోమాన్ని పరిశీలిద్దాం. దీని ప్రదేశం, వ్యాప్తి మనకు తెలుసు. దీని విలోమం కొరకు ప్రదేశం, వ్యాప్తిని పరస్పరం మార్చగలం. కావున,

(i) $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$ లేదా,

(ii) $\frac{3\pi}{2} \le y \le \frac{5\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$ లేదా,

(iii) $-\frac{5\pi}{2} \le y \le -\frac{3\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$ etc.,

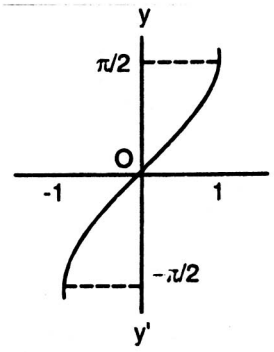
ఇక్కడ x sine విలువ x కు అన్ని వాస్తవ సంఖ్యా విలువలలోని కనిష్ఠ విలువను తీసుకుంటాం. దీనినే $\sin^{-1}x$ యొక్క ప్రధాన విలువ అందురు.

$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ మాత్రమే ఇందుకు సరియైన సందర్భము. కావున $y = \sin^{-1}x$ యొక్క ప్రధాన విలువ కొరకు ప్రదేశం $[-1, 1]$ i.e., $x \in [-1, 1]$ మరియు వ్యాప్తి $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

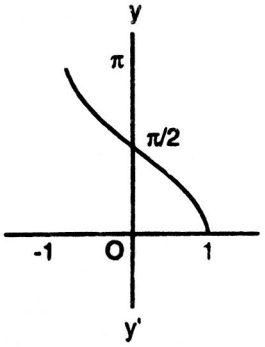
ఇదే విధంగా మరికొన్ని విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను కూడా ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

ప్రమేయం	ప్రదేశం	వ్యాప్తి
1. $y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
3. $y = \tan^{-1} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
4. $y = \cot^{-1} x$	R	$[0, \pi]$
5. $y = \sec^{-1} x$	$x \ge 1$ లేదా $x \le -1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
6. $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$x \ge 1$ లేదా $x \le -1$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

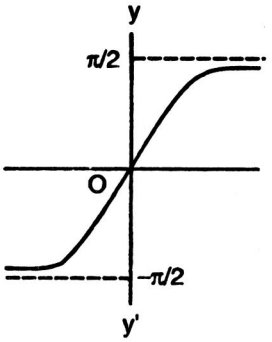
18.2 విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు రేఖాచిత్రాలు



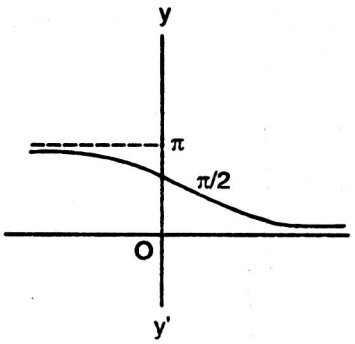
$y = \sin^{-1} x$



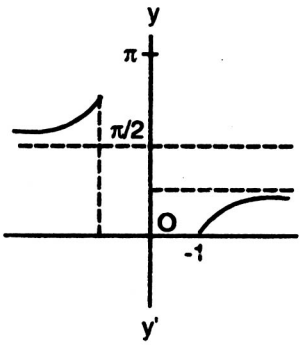
$y = \cos^{-1} x$

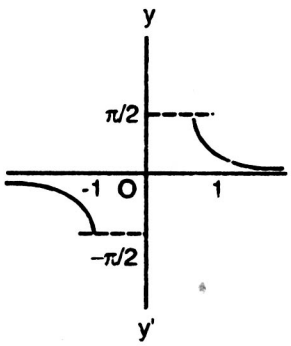


$y = \tan^{-1} x$



$y = \cot^{-1} x$





పటం 18.2

ఉదాహరణ 18.2 క్రింది వాటి యొక్క ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

సాధన : (i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta$ అనుకొనిన

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

(ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$ అనుకొనిన

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ లేదా $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$ అనుకొనిన

లేదా $\frac{-1}{\sqrt{3}} = \tan\theta$ లేదా $\tan\theta = \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$.

ఉదాహరణ 18.3 : క్రింది వాటి ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) (i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$

(b) ప్రధాన విలువను ఉపయోగించి క్రింది వాటి విలువ కనుక్కోండి.

$$\sec\left[\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

సాధన :(a) (i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta$ అనుకొనిన,

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta$ లేదా $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

(ii) $\tan^{-1}(-1) = \theta$ అనుకొనిన,

$-1 = \tan\theta$ లేదా $\tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

(b) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$ అనుకొనిన,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta \quad \text{లేదా} \quad \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore \sec\left[\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \sec\theta = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \sec\left[\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

ఉదాహరణ 18.4 : క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\cos[\sin^{-1}x]$ (ii) $\cot[\text{cosec}^{-1}x]$

సాధన : (i) $[\sin^{-1}x] = \theta$ అనుకొనిన

$\Rightarrow x = \sin\theta.$

$\therefore \cos[\sin^{-1}x] = \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$ $(\because \sin\theta = x)$

(ii) $\text{cosec}^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన, $x = \text{cosec}\,\theta$

$$\cot(\text{cosec}^{-1}x) = \cot\theta = \sqrt{\text{cosec}^2\theta - 1}$$

$$= \sqrt{x^2-1} \qquad (\because \text{cosec}\,\theta = x)$$

అభ్యాసం 18.1

1. క్రింది వాటి ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

(c) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (d) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ (e) $\cot^{-1}(1)$

2. క్రింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ (b) $\text{cosec}^{-1}\left(\text{cosec}\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\cos\left(\text{cosec}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(d) $\tan(\sec^{-1}\sqrt{2})$ (e) $\text{cosec}\left[\cot^{-1}(-\sqrt{3})\right]$

3. క్రింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి.

(a) $\sec(\tan^{-1}x)$ (b) $\tan(\text{cosec}^{-1}x/2)$ (c) $\cot(\text{cosec}^{-1}x^2)$

(d) $\cos(\cot^{-1}x^2)$ (e) $\tan\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$

18.3 విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ధర్మాలు

ధర్మం - 1 :

$$\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

సాధన : $\sin\theta = x$ అనుకొనిన

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}x = \sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$

ఇంతేకాక $\sin(\sin^{-1}x) = x$

ఇదేవిధంగా ఈ క్రింది వాటిని నిరూపిస్తాం.

(i) $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi.$

(ii) $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ధర్మం - 2 : (i) $\text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}(1/x)$ (ii) $\cot^{-1}x = \tan^{-1}(1/x)$

(iii) $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$

సాధన : (i) $\text{cosec}^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన

$x = \text{cosec}\,\theta$

$1/x = \sin\theta$

$\therefore \ \theta = \sin^{-1}(1/x)$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $\cot^{-1} x = \theta$ అనుకొనిన

$x = \cot\theta$

$\Rightarrow 1/x = \tan\theta$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1/x)$

$\therefore \ \cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x).$

(iii) $\sec^{-1} x = \theta$ అనుకొనిన

$x = \sec\theta$

$\Rightarrow 1/x = \cos\theta$

$\therefore \ \theta = \cos^{-1}(1/x)$

$\therefore \ \sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x).$

ధర్మం - 3 : (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ (ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x.$

సాధన : (i) $\sin^{-1}(-x) = \theta$ అనుకొనిన

$\Rightarrow -x = \sin\theta$ లేదా $x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$

$\therefore \ -\theta = \sin^{-1} x$ లేదా $\theta = -\sin^{-1} x.$

$\therefore \ \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x.$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = \theta$ అనుకొనిన

$\Rightarrow -x = \tan\theta$ లేదా $x = -\tan\theta = \tan(-\theta)$

$\Rightarrow -\theta = \tan^{-1} x$ లేదా $\theta = -\tan^{-1} x.$

$\therefore \ \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x.$

(iii) $\cos^{-1}(-x) = \theta$ అనుకొనిన

$\Rightarrow -x = \cos\theta$ లేదా $x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\Rightarrow \cos^{-1} x = \pi - \theta.$

$\therefore \ \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x.$

ధర్మం - 4 : (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$ (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$

(iii) $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \pi/2$.

సాధన : (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$.

$\sin^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన $\Rightarrow x = \sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$

లేదా $\cos^{-1}x = \pi/2 - \theta$.

$\Rightarrow \theta + \cos^{-1}x = \pi/2$ లేదా $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$.

(ii) $\cot^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన $\Rightarrow x = \cot\theta = \tan(\pi/2 - \theta)$

$\therefore \tan^{-1}(x) = \pi/2 - \theta$ లేదా $\theta + \tan^{-1}x = \pi/2$

లేదా $\cot^{-1}x + \tan^{-1}x = \pi/2$.

(iii) $\text{cosec}^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన

$x = \text{cosec}\,\theta = \sec(\pi/2 - \theta)$

$\therefore \sec^{-1}(x) = \pi/2 - \theta$

$\therefore \theta + \sec^{-1}x = \pi/2$

$\therefore \text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \pi/2$.

ధర్మం - 5 :

(i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$.

సాధన : (i) $\tan^{-1}x = \theta$, $\tan^{-1}y = \phi$ అనుకొనిన

$x = \tan\theta$, $y = \tan\phi$.

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ అని నిరూపించాలి.

పై విలువలను LHS మరియు RHS లో ప్రతిక్షేపించగా,

LHS $= \theta + \phi$, మరియు RHS $= \tan^{-1}\left[\dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta.\tan\phi}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\tan(\theta+\phi)\right] = \theta + \phi = \text{LHS}.$

కావున నిరూపించనైనది.

ఇదేవిధంగా (ii) కూడా నిరూపించవచ్చును.

ధర్మం - 6 :

(i) $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left[\dfrac{2x}{1+x^2}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right] = \tan^{-1}\left[\dfrac{2x}{1+x^2}\right]$

(i) (ii) (iii) (iv)

$x = \tan\theta$ అనుకొనిన, దీనిని

(i), (ii), (iii), (iv) లలో ప్రతిక్షేపించగా,

$2\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}(\tan\theta) = 2\theta$ .... (i)

$$\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin 2\theta\right) = 2\theta \qquad \text{.... (ii)}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$= \cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$= 2\theta$ ...(iii)

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$

$= 2\theta$ ...(iv)

$\therefore$ (i), (ii), (iii), (iv) ల నుండి,

$$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

ధర్మం - 7:

(i) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$= \sec^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$= \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]$

$= \operatorname{cosec}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$= \cot^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$= \sec^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$

నిరూపణ : $\sin^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన, $\Rightarrow \sin\ \theta = x$

(i) $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ మరియు $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{x}$

$\therefore \sin^{-1}x = \theta = \cos^{-1}(\sqrt{1-x^2}) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \sec^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \cot^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(ii) $\cos^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన, $\Rightarrow x = \cos\ \theta$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$, $\cot\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

మరియు $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \sec^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ధర్మం -8:

(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$

(ii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

(iii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]$

(iv) $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

నిరూపణ : (i) $x = \sin\theta,\ y = \sin\phi$ అనుకొనిన,

అప్పుడు LHS $= \theta + \phi$,

RHS $= \sin^{-1}[\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi]$

$= \sin^{-1}[\sin(\theta+\phi)] = \theta + \phi.$

$\therefore$ LHS = RHS.

(ii) $x = \cos\theta,\ y = \cos\phi$ అనుకొనిన,

LHS $= \theta + \phi$

RHS $= \cos^{-1}[\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi]$

$= \cos^{-1}[\cos(\theta+\phi)] = \theta + \phi.$

$\therefore$ LHS = RHS.

(iii) $x = \sin\theta,\ y = \sin\phi$ అనుకొనిన,

LHS $= \theta - \phi$

RHS $= \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]$

$= \sin^{-1}\left[\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\phi} - \sin\phi\sqrt{1-\sin^2\theta}\right]$

$= \sin^{-1}\left[\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\right]$

$= \sin^{-1}\left[\sin(\theta-\phi)\right] = \theta - \phi.$

$\therefore$ LHS = RHS.

(iv) $x = \cos\theta,\ y = \cos\phi$ అనుకొనిన,

$\therefore$ LHS $= \theta - \phi$

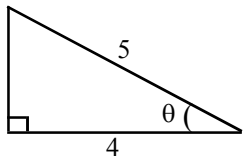
$$\text{RHS} = \cos^{-1}\left[\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos(\theta - \phi)\right] = \theta - \phi$$

$\therefore$ LHS = RHS.

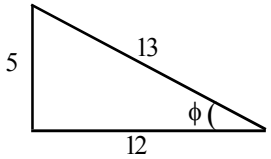
ఉదాహరణ 18.5: $\cos\left[\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right]$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \theta$ మరియు $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \phi$ అనుకొనిన;



అప్పుడు $\sin\theta = \frac{3}{5}$ మరియు $\sin\phi = \frac{5}{13}$.

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$ మరియు $\cos\phi = \frac{12}{13}$.



$$\cos[\theta + \phi] = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

$(\because \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B)$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{33}{65}.$$

ఉదాహరణ 18.6: $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ అను సూత్రాన్ని ఉపయోగించి,

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{13}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right).$$

ఉదాహరణ 18.7 : $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$ నిరూపించండి.

సాధన : ఇక్కడ,

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ అను సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

అప్పుడు, $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\sqrt{1-\frac{16}{25}}\sqrt{1-\frac{144}{169}}\right)$

$=\cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right).$

ఉదాహరణ 18.8: $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\sqrt{x}=\tan\theta$ అనుకొనిన, అప్పుడు

$\text{LHS}=\tan^{-1}\sqrt{x}=\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$

$\text{RHS}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times 2\theta=\theta.$

$\therefore\ \text{LHS}=\text{RHS}.$

ఉదాహరణ 18.9: $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x,\quad x>0$ సాధించండి.

సాధన : $x=\tan\theta$ అనుకొనిన, అప్పుడు

$\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)$

$\Rightarrow\ \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)=\frac{1}{2}\theta.\quad\left(\because\tan(A-B)=\frac{\text{Tan A}-\text{Tan B}}{1+\text{Tan A Tan B}}\right)$

$\Rightarrow\ \frac{\pi}{4}-\theta=\frac{1}{2}\theta\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\theta+\theta=\frac{3}{2}\theta.$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ x = \tan\theta \ \Rightarrow\ x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ఉదాహరణ 18.10. $\tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right] = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$ అని చూపండి.

(LHS) (RHS)

సాధన: $x^2 = \cos 2\theta$ అనుకొని, అప్పుడు

$$2\theta = \cos^{-1}(x^2)$$

$$\Rightarrow\ \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$$

ఇందులో $x^2 = \cos 2\theta$ అని LHS లో వ్రాయగా

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$$

లవ, హారాలను $\cos\theta$ చే భాగించగా

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2).$$

అభ్యాసం 18.2

1. క్రింది వాటిని గణించండి.

   (a) $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (b) $\cot\left(\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha\right)$

   (c) $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$ (d) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$

   (e) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. ఒకవేళ $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\beta$ అయితే,

   $x^2-2xy\cos\beta+y^2=\sin^2\beta$ అని నిరూపించండి.

3. ఒకవేళ $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ అయితే,

   $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ అని నిరూపించండి.

4. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

   (a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{2}$,

   (b) $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)=\frac{\pi}{2}$.

   (c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$

   (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

5. $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}2)=10$ అని నిరూపించండి.

కీలక పదాలు

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు క్రింది ప్రదేశాలకు నిర్వచితమవుతాయి.

(i) $\sin^{-1}x = y$ అయిన $\sin y = x$; $-1 \le x \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

(ii) $\cos^{-1}x = y$ అయిన $\cos y = x$; $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$,

(iii) $\tan^{-1}x = y$ అయిన $\tan y = x$; $x \in R$, $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$.

(iv) $\cot^{-1}x = y$ అయిన $\cot y = x$; $x \in R$, $[0 < y < \pi]$

(v) $\sec^{-1}x = y$ అయిన $\sec y = x$; $x \ge 1$, $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ లేదా $x \le -1$, $\frac{\pi}{2} < y \le \pi$.

(vi) $\operatorname{cosec}^{-1}x = y$ అయిన $\operatorname{cosec} y = x$; $x \ge 1$, $0 < y \le \frac{\pi}{2}$ లేదా $x \le -1$,

$-\frac{\pi}{2} \le y < 0$.

$y = \sin x$ మొదలైన వాటికి అక్షాలను పరస్పరం మార్చడం ద్వారా ఇచ్చిన అంతరాలలో విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయ రేఖా చిత్రాలను గుర్తించగలము.

ధర్మాలు

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, $\tan(\tan^{-1}\theta) = \theta$ and $\sin(\sin^{-1}\theta) = \theta$.

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(iii) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$.

(iv) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}x = \pi/2$, $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$, $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \pi/2$.

(v) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

(vi) $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

(vii) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}(\sqrt{1-x^2}) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(viii) $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$.

(ix) $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy \mp x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. క్రింది ప్రతి వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

2. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{23}{11}\right)$.

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}2.$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

3. (a) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ అని నిరూపించండి.

(b) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$ అని నిరూపించండి.

(c) $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)=2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$ అని నిరూపించండి.

4. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}.$

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-x.$

(c) $\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right)=0$

5. క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\pi/4$

(b) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

(c) $\cos^{-1}x+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{\pi}{6}$

(d) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\frac{\pi}{12},\ x>0$

జవాబులు

అభ్యాసం 18.1

1. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$

   (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{\pi}{3}$

   (e) $\frac{\pi}{4}$

2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

   (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

   (e) –2

3. (a) $\sqrt{1+x^2}$

   (b) $\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

   (c) $\sqrt{x^4-1}$

   (d) $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

   (e) $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

అభ్యాసం 18.2

1. (a) 1 (b) 0

(c) $\frac{x+y}{1-xy}$ (d) $\frac{5}{12}$

(e) $-\frac{7}{17}$

సాధనా అభ్యాసం

5. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) ± 1 (d) $\sqrt{3}$

అధ్యాయం

19

త్రిభుజ ధర్మాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠము ద్వారా నీవు

- సైన్(sine) సూత్రాలు, కొసైన్ (cosine) సూత్రాలు మరియు విక్షేప సూత్రాలను నిర్వహించగలవు.
- సమస్యల సాధనలో వీటిని అనువర్తించడం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- త్రికోణమితీయ మరియు విలోమత్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు.
- వాస్తవ సంఖ్యలపై త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మొత్తము మరియు బేధాలకు సంబంధించిన సూత్రాలు.
- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల గుణిజ–ఉపగుణిజ కోణాలు.

పరిచయం

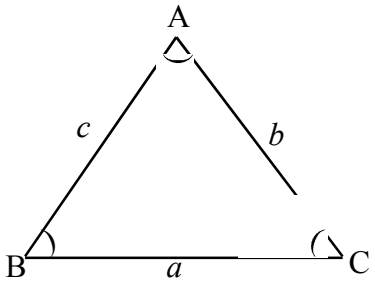
ఇప్పటి వరకు మనం త్రికోణమితి అనే అంశాన్ని త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు మరియు వాటి ధర్మాలను ఒక ఆధునాతన దృక్కోణంలో అధ్యయనం చేయడానికి పరిగణించాము. కాని, ఇచ్చిన త్రిభుజం యొక్క భుజాలు మరియు కోణాల మధ్యగల సంబంధాన్ని కనుగొనుట ఈ త్రికోణమితి అధ్యయనం యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యం.

ఒక త్రిభుజం యొక్క ఒకటి లేదా రెండు భుజాలు లేదా కోణాలు తెలిసినప్పుడు మిగిలిన భుజాలు మరియు కోణాలను కనుగొనుటకు సంబంధించిన సూత్రాలు మరియు పద్ధతులను అభివృద్ధి చేయడం కొరకు ఈ అధ్యాయాన్ని అభ్యసించవలెను.

సంకేతాలు

ΔABC లో A, B, C లు త్రిభుజ శీర్షాలు.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ లు త్రిభుజ కోణాలు మరియు సంబంధిత శీర్షాలకు ఎదురుగా గల భుజాల కొలతలను a, b, c లతో సూచిస్తాము.



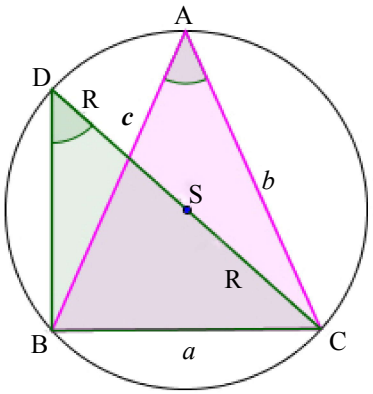
పటం. 19.1

ఒక త్రిభుజం యొక్క 3 కోణాలు మరియు 3 భుజాలను ఆ త్రిభుజం యొక్క ఆరు మూలకాలు అని అంటారు.

19.1 SINE సూత్రము

ΔABC లో $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

(R అనేది పరివృత్త వ్యాసార్ధం)



పటం. 19.2

Case (i) : $\angle A$ అల్పకోణం(పటం. 19.2 చూడుము).

S అనేది పరివృత్త కేంద్రం మరియు CD వ్యాసం అయితే

$CS = SD = R$ మరియు $CD = 2R$.

B, D లను కలుపగా

$\angle DBC = \frac{\pi}{2}$ మరియు ΔDBC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం.

$\therefore \quad \angle BAC = \angle BDC$, ($\because$ వృత్తంలోని ఏకాంతర కోణాలు సమానం)

$\therefore \sin A = \sin \angle BAC = \sin \angle BDC$

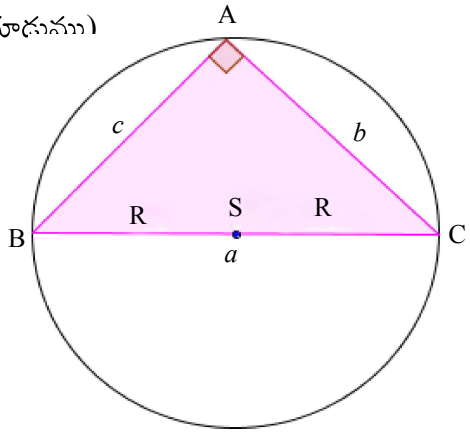
$$= \frac{BC}{CD} = \frac{a}{2R}.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Case (ii) : $\angle A$ లంబ కోణం (పటం. 19.3 చూడుము)

$BC = a = 2R = 2R \cdot 1 = 2R \sin 90^0$

$\therefore a = 2R \sin A. \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$



పటం. 19.3

Case (iii) : $\angle A$ అధిక కోణం

(పటం. 19.4 చూడుము).

$\angle DBC$ ఒక లంబకోణము

($\because$ అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం)

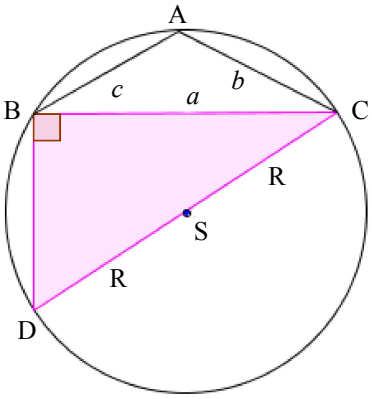
BACD చక్రీయ చతుర్భుజం నుండి,

$\angle BDC = 180^0 - \angle BAC = 180^0 - A$

ΔBDC నుండి $\sin A = \sin\left(180^0 - A\right)$

$= \sin \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{a}{2R}.$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R.$



పటం. 19.4

అదేవిధంగా $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ అని నిరూపించవచ్చు.

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

$a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$

(లేదా) $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 19.1 : sine సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $a \cos\frac{B-C}{2} = (b+c) \sin\frac{A}{2}$ అని నిరూపించండి.

సాధన : R.H.S. : $(b+c) \sin\frac{A}{2}$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (అనుకొనుము) అని మనకు తెలుసు.

$\Rightarrow a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$

$\therefore$ RHS : $k(\sin B + \sin C) . \sin \frac{A}{2}$

$= k.2 \sin \frac{B+C}{2} . \cos \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$

ఇప్పుడు $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$ ($\because A + B + C = \pi$

$\therefore \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$ $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} = 90^0$)

$\therefore$ RHS $= 2k \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$

$= k.\sin A.\cos \frac{B-C}{2}$

$= a \cos \frac{B-C}{2} =$ L.H.S

ఉదాహరణ 19.2 : sine సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

$a(\cos C - \cos B) = 2(b-c) \cos^2 \frac{A}{2}$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (అనుకొనిన)

$a = k \sin A, \quad b = k \sin B, \quad c = k \sin C$

RHS: $2k(\sin B - \sin C) . \cos^2 \frac{A}{2}$

$= 2k \left[2 \cos \frac{B+C}{2} . \sin \frac{B-C}{2} \right] . \cos^2 \frac{A}{2}$

$= 4k \sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B-C}{2} . \cos^2 \frac{A}{2}$

$$= 2a \sin\frac{B-C}{2} . \cos\frac{A}{2}$$

$$= 2a \sin\frac{B+C}{2} . \sin\frac{B-C}{2}$$

$$= a(\cos C - \cos B)$$

$$= \text{L.H.S.}$$

ఉదాహరణ 19.3 : ఏదైనా త్రిభుజం ABC లో

$a\cos A - b\cos B = C\sin(A-B)$ అని చూపండి.

సాధన : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (అనుకొనిన)

$$\text{L.H.S} : k\sin A . \sin A - k\sin B . \sin B$$

$$= k(\sin^2 A - \sin^2 B)$$

$$= k . \sin(A+B) . \sin(A-B)$$

$$A + B = \pi - C \Rightarrow \sin(A+B) = \sin C$$

$$\text{L.H.S} : k\sin C . \sin(A-B)$$

$$= c\sin(A-B) = \text{R.H.S}$$

ఉదాహరణ 19.4 : ఏదైనా త్రిభుజం A BC లో $a(b\cos C - \cos B) = b^2 - c^2$ అని చూపండి.

సాధన : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (అయిన) అని మనకు తెలుసు.

$$\text{L.H.S} : k\sin A[k\sin B\sin C - k\sin C . \sin B]$$

$$= k^2 \sin A . [\sin(B-C)]$$

$$= k^2 \sin(B+C) . \sin(B-C) \qquad [\because \sin A = \sin(B+C)]$$

$$= k^2(\sin^2 B - \sin^2 C)$$

$$= k^2\sin^2 B - k^2\sin^2 C$$

$$= b^2 - c^2 = \text{R.H.S}$$

అభ్యాసం 19.1

1. sine సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, కింది ప్రతి వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\dfrac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} = \dfrac{a-b}{a+b}$

(ii) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$

(iii) $a\sin\dfrac{B-C}{2} = (b-c)\cos\dfrac{A}{2}$

(iv) $\dfrac{b+c}{b-c} = \tan\dfrac{B+C}{2}\cdot\cot\dfrac{B-C}{2}$

(v) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

2. ఏదైనా త్రిభుజములో $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$ అయితే అది సమద్విబాహు త్రిభుజము అని చూపండి.

19.2 COSINE సూత్రాలు

ఇప్పుడు మనం ΔABC యొక్క భుజాల కొలతలు a, b, c మరియు $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ కోణాల cosine లను కలిపే cosine సూత్రాలను నిరూపిద్దాం.

ΔABC లో $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

నిరూపణ $a^2 = (2R\sin A)^2$

$= 4R^2[\sin(B+C)]^2 \qquad (\because \sin A = \sin(B+C))$

$= 4R^2(\sin B\cos C + \cos B\sin C)^2$

$= 4R^2\{\sin^2 B(1-\sin^2 C) + \sin^2 C(1-\sin^2 B) + 2\sin B\sin C\cos B\cos C\}$

$= 4R^2\{\sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C)\}$

$= 4R^2\{\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B \sin C \cos (B + C)\}$

$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

ఇదేవిధంగా మిగిలిన సూత్రాలను నిరూపించవచ్చు.

గమనిక

(i) పై సూత్రాలను Cosine న్యాయాలు లేదా Cosine సూత్రాలు అని అంటారు.

(ii) పై Cosine సూత్రాల నుండి, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

మరియు $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ అని రాయవచ్చు.

పై సూత్రాలనుపయోగించి త్రిభుజం యొక్క భుజాల కొలతలు ఇచ్చినప్పుడు, త్రిభుజంలో ఉండే 3 కోణాల కొలతలను కనుగొనవచ్చు.

19.3 విక్షేప సూత్రాలు

ΔABC లో $a = b \cos C + c \cos B.$

నిరూపణ: Cosine సూత్రాల నుండి

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\therefore b\cos C + c \cos B = b\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) + c\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a.$$

అదేవిధంగా $b = c\cos A + a \cos C$ and $c = a \cos B + b \cos A$ అని నిరూపించవచ్చు.

గమనిక: మూడు సూత్రాలను విక్షేప సూత్రాలు అంటారు.

ఇప్పుడు వీటిని సరిచూచుటకు కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 19.5 : ఏదైనా త్రిభుజంలో

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

సాధన : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

అని మనకు తెలుసు.

$$\text{L.H.S} : \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2abc} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$$

$$= \frac{1}{2abc}[b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2]$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$= \text{R.H.S}$$

ఉదాహరణ 19.6 : త్రిభుజం ABC లో $\angle A = 60^0$ అయితే $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$ అని చూపండి.

సాధన : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ నుండి $A = 60^0 \Rightarrow \cos A = \cos 60 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \quad b^2+c^2-a^2 = bc$$

లేదా $\quad b^2+c^2+2bc-a^2 = 3bc$

లేదా $\quad (b+c)^2-a^2 = 3bc$

లేదా $\quad (b+c+a)(b+c-a) = 3bc$

ఉదాహరణ 19.7 : త్రిభుజంలోని భుజాలు 3 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. మరియు 7 సెం.మీ. అయితే ఆ త్రిభుజపు గరిష్ఠ కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఇక్కడ $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm

త్రిభుజంలో అతిపెద్ద భుజానికి ఎదురుగా ఉండే కోణం పెద్ద కోణం అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \angle C$ అనునది గరిష్ఠ కోణం అగును.

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{9+25-49}{30} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3}$$

కావున గరిష్ఠ కోణం $= \frac{2\pi}{3}$ లేదా 120^0.

ఉదాహరణ 19.8 : ΔABC లో $\angle A = 60^0$ లో $\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ నుండి $\cos 60^0 = \frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$b^2 + c^2 - a^2 = bc \text{ లేదా } b^2 + c^2 = a^2 + bc \qquad \ldots(i)$$

$$\text{R.H.S : } \frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{ab+b^2+c^2+ac}{(c+a)(a+b)}$$

$$= \frac{ab+ac+a^2+bc}{(c+a)(a+b)} \text{ (i) నుండి}$$

$$= \frac{a(a+b)+c(a+b)}{(c+a)(a+b)}$$

$$= \frac{(a+b)+(a+c)}{(c+a)(a+b)} = 1$$

అభ్యాసం 19.2

1. ఏదైనా త్రిభుజంలో కింద వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

(ii) $(a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (b^2 - c^2 + a^2)\tan C = (c^2 - a^2 + b^2)\tan A$

(iii) $\frac{k}{2}[\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

ఇక్కడ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$

(iv) $(b^2 - c^2)\cot A = (c^2 - a^2)\cot B = (a^2 - b^2)\cot C = 0$

2. త్రిభుజం ABC లో $a = 9$ cm, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm అయితే $6\cos C = 4 + 3\cos B$ అని చూపండి.

ఉదాహరణ 19.9 : ఏదైనా త్రిభుజం ABC లో

$(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$ అని చూపండి.

సాధన : L.H.S : $b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= (b\cos A + a\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (c\cos B + b\cos C)$

$= c + b + a$

$= a + b + c = $ R.H.S

ఉదాహరణ 19.10 : ఏదైనా త్రిభుజం ABC లో $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

సాధన : L.H.S : $\frac{1-2\sin^2 A}{a^2} - \frac{1-2\sin^2 B}{b^2}$

$= \frac{1}{a^2} - \frac{2\sin^2 A}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{2\sin^2 B}{b^2}$

$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - 2k^2 + 2k^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ $\left(\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = k\right)$

$=$ R.H.S

ఉదాహరణ 19.11 : Δ ABC లో $a\cos A = b\cos B$, $a \neq b$ అయితే ABC లంబకోణ త్రిభుజం అని చూపండి.

సాధన : $a\cos A = b\cos B$

$$a\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] = b\left[\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right]$$

లేదా $a^2[b^2+c^2-a^2] = b^2[a^2+c^2-b^2]$

$a^2b^2+a^2c^2-a^4 = a^2b^2+b^2c^2-b^4$

$c^2(a^2-b^2) = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$\Rightarrow \quad c^2 = a^2+b^2$

$\therefore$ Δ ABC లంబకోణ త్రిభుజం

ఉదాహరణ 19.12 : $a=2,\ b=3,\ c=4$ అయితే $\cos A,\ \cos B$ మరియు $\cos C$ లను కనుక్కోండి.

సాధన : $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9+16-4}{2\times3\times4} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{7}{8}$

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \dfrac{16+4-9}{2\times4\times2} = \dfrac{11}{16}$

మరియు $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{4+9-16}{2\times2\times3} = -\dfrac{3}{12} = -\dfrac{1}{4}$

అభ్యాసం 19.3

1. $a=3,\ b=4$ మరియు $c=5$ అయితే $\cos A, \cos B$ మరియు $\cos C$ విలువలు కనుక్కోండి.
2. త్రిభుజ భుజాలు $7\,cm,\ 4\sqrt{3}\,cm$ మరియు $\sqrt{13}\,cm$ అయితే త్రిభుజ కనిష్ఠ కోణాన్ని కనుక్కోండి.
3. $a:b:c = 7:8:9$ అయితే $\cos A : \cos B : \cos C = 14:11:6$ అని చూపండి.
4. త్రిభుజ భుజాలు $x^2+x+1,\ 2x+1$ మరియు x^2-1 అయితే ఆ త్రిభుజ గరిష్ఠ కోణం 120^0 అని చూపండి.

5. త్రిభుజం ABC లో $b \cos A = a \cos B$ అయితే అది సమద్విబాహు త్రిభుజం అని చూపండి.

6. విక్షేప సూత్రాల నుండి sine సూత్రాలను రాబట్టండి.

19.4 అర్ధకోణ సూత్రాలు మరియు త్రిభుజ వైశాల్యం

ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి 'b' మరియు ఉన్నతి 'h' అయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం

$$\Delta = \frac{1}{2}bh$$

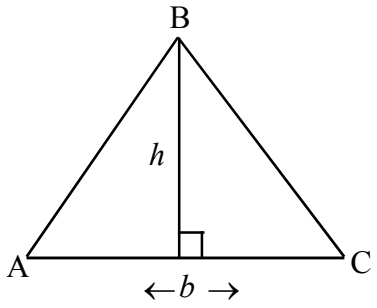


Fig. 19.5

ఒక త్రిభుజం యొక్క 3 భుజాల కొలతలు a, b, c ఇచ్చినట్లయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ఇచ్చట S అనేది అర్ధ చుట్టుకొలత $= \frac{a+b+c}{2}$

ΔABC లో,

(i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

అదేవిధంగా $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ మరియు $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(ii) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

అదేవిధంగా $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$ మరియు $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(iii) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

అదేవిధంగా $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$ మరియు $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

పై సందర్భాలను సరిచూడడానికి కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 19.13 : ఒక త్రిభుజ భుజాలు 13, 14, 15 అయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యము కనుగొనుము.

సాధన : $a = 13,\ b = 14,\ c = 15$ అనుకొనిన

త్రిభుజ వైశాల్యము $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ఇక్కడ $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$

$\therefore \quad \Delta = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$= \sqrt{21\times 8\times 7\times 6}$

$= 84$ చ.యూనిట్లు

ఉదాహరణ 19.14 : ΔABC లో $(a + b + c)\ (b + c - a) = 3bc$, అయితే $\angle A$ ఎంత?

సాధన: మనకు తెలిసిన ఫలితం నుండి $a + b + c = 25$ మరియు $b + c = 2s - a$.

$$(\underline{a + b + c})\ (\underline{b + c} - a) = 3bc$$

$$\Rightarrow \quad 2s(2s - a - a) = 3bc$$

$$\Rightarrow \quad 2s(2s - 2a) = 3bc$$

$$\Rightarrow \quad 4s(s - a) = 3bc$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s(s-a)}{bc} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{3}{4} \qquad \left(\because \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0.$$

$$\therefore \frac{A}{2} = 30^0 \Rightarrow A = 60^0$$

అభ్యాసం 19.4

1. $a = 4,\ b = 5,\ c = 7$ అయితే $\cos\frac{B}{2}$ ఎంత?

2. $\tan\frac{A}{2} = \frac{5}{6}$ మరియు $\tan\frac{C}{2} = \frac{2}{5}$ అయితే a, b, c ల మధ్య సంబంధమును కనుగొనుము.

3. $\cot\frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}$, అయితే కోణం 'B' కనుగొనుము.

కీలక పదాలు

- త్రిభుజంలో కొన్ని మూలకాలు ఇస్తే, సంబంధిత మూలకాలను కనుగొనుటకు

sine సూత్రం : (i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

cosine సూత్రాలు :

(ii) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

విక్షేప సూత్రాలు : $a = b\cos C + c\cos B$

$a = c\cos A + a\cos C$

$a = a\cos B + b\cos A$

అర్ధకోణ సూత్రాలు :

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

త్రిభుజ వైశాల్యం :

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ఇచ్చట $S = \frac{a+b+c}{2}$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

త్రిభుజం ABC లో కింది వాటిని నిరూపించండి (1-10)

1. $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$
2. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$
3. $\frac{b^2 - c^2}{a^2} . \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} . \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} . \cos 2C = 0$
4. $\frac{c^2 + a^2}{b^2 + c^2} = \frac{1 + \cos B \cos(C - A)}{1 + \cos A \cos(B - C)}$
5. $\frac{c - b\cos A}{b - c\cos A} = \frac{\cos B}{\cos C}$
6. $\frac{a - b\cos C}{c - b\cos A} = \frac{\sin C}{\sin A}$
7. $(a+b+c)\left[\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right] = 2c\cot\frac{C}{2}$
8. $\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}$
9. (i) $b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C)$

(ii) $a\cos A + b\cos B = c\cos(A-B)$

10. $b^2 = (c-a)^2\cos^2\frac{B}{2} + (c+a)^2\sin^2\frac{B}{2}$

11. త్రిభుజములో $b=5,\ c=6$ $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ అయితే $a=\sqrt{41}$ అని చూపండి.

12. ఏదేని త్రిభుజం ABC లో $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b-a\cos C}{a-b\cos C}$ అని నిరూపించండి.

13. $\cot\frac{A}{2}:\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{C}{2}=3:5:7$, అయితే $a:b:c=6:5:4$ అని చూపండి.

14. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ అని చూపండి.

15. $a\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{A}{2}$ యొక్క విలువను s, a, b, c పదాలలో తెలపండి.

జవాబులు

అభ్యాసం 19.3

1. $\cos A=\frac{4}{5}$ $\cos B=\frac{3}{5}$ $\cos C =$ సున్నా (0)

2. త్రిభుజపు కనిష్ఠ విలువ 30^0

అభ్యాసం 19.4

1. $\sqrt{\frac{6}{7}}$

2. a, b, c లు అంకశ్రేఢి (AP) లో ఉంటాయి.

3. 90^0

అధ్యాయం

20

అవధులు, అవిచ్ఛిన్నాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగలిగిన విషయాలు.

- ఒక ప్రమేయపు అవధి విలువ భావనను రేఖా చిత్రాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా వివరించుట.
- అవధులపై ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలను ప్రవచించి, వినియోగించటం
- ఒక అంతరంలో ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నతను నిర్వచించటం.
- ఒక బిందువు వద్ద ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నత లేదా ఇతరములను నిర్ధారించటం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- ఈ విభాగంలో నేర్చుకొన్న కొన్ని అంశాలు, సంబంధాలు, ప్రమేయాలు, త్రికోణమితి ప్రమేయాలు, ఘాత ప్రమేయాలు మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాలు.

పరిచయం

మార్పులకు సంబంధించిన సమస్యలను అధ్యయనం చేసే శాస్త్ర విభాగంగా కలన గణితాన్ని పరిగణించవచ్చు. 17వ శతాబ్ధికి చెందిన ఐజాక్ న్యూటన్ (Isaac Newton

1642 - 1727), గాట్‌ఫ్రెడ్ లైబ్నిజ్ (Gottfried Leibnitz 1646 - 1716) ల ఆవిష్కరణల నుంచి ఉద్భవించిన ఈ గణితశాస్త్ర విభాగం నేడు శాస్త్ర, సాంస్కృతిక రంగాలకు పరిమాణాత్మక కొలబద్ధగా రూపుదాల్చింది.

న్యూటన్, లైబ్నిజ్‌లు ఏకకాలంలో కలన గణిత ఆవిష్కరణకు కృషి చేస్తున్న సమయంలో మొట్టమొదటగా 1680లో అవధి అనే భావనకు బీజం పడింది. అవధి భావనకు వారు ఇచ్చిన వివరణాత్మక నిర్వచనం మరిన్ని సమస్యలకు దారితీసింది. అదే కాలానికి చెందిన మరికొంత మంది గణితజ్ఞులు అవధి భావనకు మరిన్ని నిర్వచనాలు ప్రతిపాదించినప్పటికీ అవేవీ స్పష్టమైన ఉపపత్తులకు ఆధారంగా నిలవలేక పోయాయి. మొట్టమొదటగా అవధి భావన గురించి ఆర్కిమెడిస్‌కు (Archemedes 287 - 212 B.C.) తెలసున్నందుకు కూడ ఆధారాలున్నట్లు చరిత్రకారులు చెబుతున్నారు.

అగస్టీన్ లూయూ కోషీ (Angustin - Louis Cauchy 1789 - 1857)తాను రచించిన ఉద్గ్రంధం 'Coursed Analyse' లో తన పూర్వీకుల కంటే మరింత స్పష్టంగా అవధి భావనను నిర్వచించినప్పటికీ అవధి బావన ఇంకా అస్పష్టంగానే ఉండిపోయింది. ఈ రోజు మనం వాడుతున్నట్లుగా, అవధి భావనకు స్పష్టమైన నిర్వచనం ఇచ్చింది మాత్రం కార్ల్‌వైర్‌స్ట్రాస్ (Karl Weierstrass 1815 - 1897)

అంతరాలు, సామీప్యాలు

మొదట అంతరాలు, సామీప్యాలు అనే భావనలను చూద్దాం. అవధులు, అవిచ్ఛిన్నతను అధ్యయనం చేయడంలో ఈ భావనలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

అంతరాలు

$a, b \in \mathbf{R}, a \leq b$ అనుకోండి. అప్పుడు సమితి

(i) $\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ ను $[a, b]$ తో సూచిస్తూ, దీనిని ఒక సంవృతాంతరం అంటాము.

(ii) $\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ ను (a, b) తో సూచిస్తూ, దీనిని ఒక వివృతాంతరం అంటాము.

ఇదేవిధంగా మరికొన్ని అంతరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

(iii) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$ ను వివృత, సంవృతాంతరాలు

(iv) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$ ను సంవృత, వివృతాంతరాలు

పై పేర్కొన్న అంతరాలను $(b - a)$ పొడవుగా గల పరిమిత అంతరాలు అంటాం.

సామీప్యాలు (Neighbourhoods)

$a \in \mathbf{R}$ అనుకోండి. $\delta > 0$ అయితే, వివృతాంతరం $(a - \delta, a + \delta)$ ను a యొక్క δ సామీప్యం అంటాం. అంటే $\{x \in \mathbf{R} : a - \delta < x < a + \delta\}$. సంఖ్యారేఖపై $(a - \delta, a + \delta)$ స్థానీయతను కింది పటం తెలుపుతుంది.

సామీప్యాన్ని $N_\delta(a)$ తో సూచిస్తాం, అందువల్ల

$$N_\delta(a) = (a - \delta , a + \delta) = \{x, \mathbf{R} \setminus a - \delta < x < a + \delta\}$$

$N_\delta(a) - \{a\}$ సమితిని a వ్యాసార్ధం గల δ యొక్క తొలగించబడిన సామీప్యత అంటారు. సమితి $(a - \delta, a)$ ని 'a' యొక్క ఎడమ సామీప్యత అని మరియు $(a, a + \delta)$ని 'a' యొక్క కుడి సామీప్యత అని పిలుస్తారు.

ఒకవేళ δ చాలా చిన్నది మరియు x అనునది $(a - \delta, a)$ విరామంలో ఉంటే, అప్పుడు x ఎడమ నుండి 'a' కి చేరువవుతుందని చెప్పబడింది మరియు మనం దీనిని $x \to a^-$ గా వ్రాస్తాం.

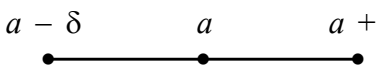
ఒకవేళ x, $(a, a + \delta)$ అయితే, అప్పుడు x కుడి నుండి 'a' కి చేరువవుతుంది. దీన్ని $x \to a^+$ గా వ్రాస్తాం.

$|x - a| < \delta$ ను తీసికొంటే

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta$$

$$\Leftrightarrow a - \delta | < x < a + \delta \Leftrightarrow x. N_\delta(a)$$

అందువల్ల δ వ్యాసార్ధం కలిసి 'a' సామీప్యంలో 'x' ను $|x - a| < \delta$ ను కింది పటం ద్వారా తెలుస్తుంది.



ఈ సామీప్యనుండి a ను తొలగిస్తే ఏర్పడే సమితిని a వివర్జిత δ-సామీప్యం అంటాం. అంటే, a విసర్జిత δ-సామీప్యం

$(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ లేదా $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$

గమనిక : 1) ఏ అంతరం (c, d) అయినా, ఒక $a \in (c, d)$ కు సామీప్యమని చూడవచ్చు.

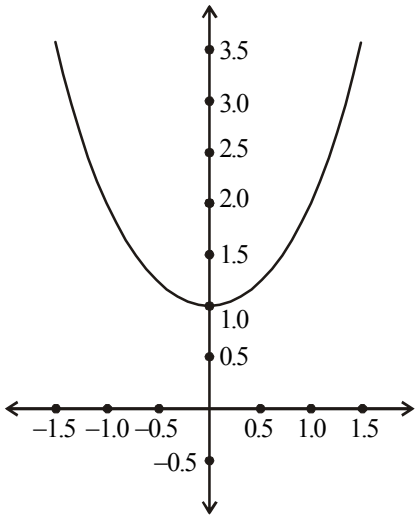
ఎలాగంటే $a = \frac{c+d}{2}$, $\delta = \frac{d-c}{2} > 0$ అనుకోండి.

అప్పుడు $(a - \delta, a + \delta) = \left[\frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2}, \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}\right)$

$= (c, d)$ కాబట్టి a కి ఒక సామీప్యం (c, d).

20.1 అవధులు (LIMITS)

1. ప్రమేయం $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$ ద్వారా నిర్వచిద్దాం. ఇక్కడ x విలువలు O కి బాగా దగ్గరగా చేరుతున్నప్పుడు, $f(x)$ విలువ 1 కి చేరడాన్ని గమనిద్దాం.



ఈ సందర్భంలో O ను x సమీపిస్తున్నప్పుడు 1ను $f(x)$ సమీపిస్తుందని అంటాం. దీనినే

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

అని రాస్తాం అంటే, O ను x సమీపిస్తున్నప్పుడు, $f(x)$ అవధి 1.

2. $f : (\mathbf{R} \setminus \{1\}) \to \mathbf{R}$ ను $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ అని నిర్వచిద్దాం.

$x = 1$ కి ఇరువైపులా ఉన్న కొన్ని విలువలకు $f(x)$ విలువలను ఈ కింది పట్టికలో తీసికొందాం.

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1

దీనిని ఈ విధంగా రాయవచ్చు. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$, కాని $x - 1 \neq 0$ $(x - 1)$ చేత భాగించబడుతుంది.

x విలువ 1కి సమీపిస్తున్నప్పుడు, $f(x)$ నిర్వచితం కానప్పుడు x విలువ 1కి సమీపిస్తునప్పుడు $f(x)$ విలువ 2ను సమీపిస్తుంది.

3. $f : (\mathbf{R} \setminus \{2\}) \to \mathbf{R}$ ను

$$f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x-2}$$ అని నిర్వచిద్దాం.

ఈ కింది పట్టికలో 2కి దగ్గరగా ఉన్న విలువలు, వాటికి సంబంధించి $f(x)$ విలువలు ఉన్నాయి.

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	6.9	6.99	6.999	6.9999	7.0001	7.001	7.01	7.1

2 వద్ద f నిర్వచింపబడనప్పటికీ, 2 ను x సమీపిస్తున్నప్పుడు 7ను $f(x)$ సమీపిస్తుండటాన్ని పట్టిక ద్వారా చూడవచ్చు.

4. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ను ప్రతిక్షేపన పద్ధతి ద్వార సాధించండి.

మెట్టు 1: x, a ను సమీపిస్తుందని అను కొనుము. $x = a + h$, h అనేది అతిచిన్న ధనాత్మక విలువ అప్పుడు $x \to a$, $h \to 0$	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ అని రాస్తే $x = 3 + h$ అయితే $x \to 3$, $h \to 0$
మెట్టు:2 $f(x) = f(a + h)$ సూక్ష్మంగా	$f(x) = f(3 + h)$ ప్రస్తుతం $= \frac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$ $= \frac{h^2+6h}{h}$ $= h + 6$
మెట్టు 3 : $h = 0$ అయినప్పుడు కావలసిన విలువ	$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}(6+h)$ $x \to 0$ అయితే, $h \to 0$ కావున $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6+0 = 6$ $h = 0$ ను ప్రతిక్షేపించగా.

గమనిక : 3 వద్ద f నిర్వచింపబడనప్పటికి, 3 ను x సమీపిస్తున్నప్పుడు '6' ను $f(x)$ సమీపిస్తుంది. రకరకాల ప్రమేయాలను ఉపయోగించి వేరే పద్ధతుల ద్వారా అవధులను కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 20.1 : $\lim\limits_{x\to 1} f(x),\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

ఇక్కడ $x\neq 1$ అయిన $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా సాధించడం

మెట్టు 1: $g(x),\ h(x)$ కారణాంకాలు అయినప్పుడు	**సాధన.** $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$ ($\because x\neq 1, x-1\neq 0$ మరియు అపుడు కొట్టివేయబడతాయి అవి)
మెట్టు 2 : సాధారణంగా $f(x)$	$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
మెట్టు 3: x కు విలువలు ప్రతిక్షేపించి నప్పుడు, కావలసిన విలువలు వస్తాయి.	$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{1+1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$ $f(1)=1$ (ఇచ్చినవి) దీని విషయంలో $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

20.1.1 అవధి నిర్వచనం

$E \subseteq \mathbf{R}$, $f : E \to \mathbf{R}$ అనుకోండి. ఒక $a \in \mathbf{R}$, ప్రతి $r > 0$ కు $((a - r, a + r) \setminus \{a\}) \cap E$ శూన్యేతర మయ్యేటట్లు ఉన్నదనుకొందాం. అప్పుడు ఒక వాస్తవ సంఖ్య l కింది నియమంతో వ్యవస్థితమైతే l ను a వద్ద f కు అవధి అంటాం.

ఇచ్చిన $\varepsilon > 0$ కు అనుగుణంగా,

$x \in E$, $0 < |x - a| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - l| < \varepsilon$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta > 0$ వ్యవస్థితమవుతుంది. ఈ సందర్భంలో, a ని x సమీపిస్తున్నప్పుడు $f(x)$ కు అవధి వ్యవస్థితమవుతుందని, దీన్ని 'l' అని అంటాం.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ లేదా $x \to a$ అయినప్పుడు $f(x) \to l$ అని రాస్తాం. ఇలాంటి l వ్యవస్థితం. కానప్పుడు $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదని అంటాం.

20.1.2 కుడి, ఎడమ అవధులు

$x = a$ బిందువు వద్ద ప్రమేయం f యొక్క అవధిని, 'a'ని x చేరేటప్పుడు $f(x)$ సమీపించే విలువ అని చదువుకొన్నాం. ఇక్కడ x విలువ 'a' ను 'a' కి కుడివైపు నుంచి గాని లేదా 'a'కి ఎడమవైపు నుంచి గాని చేరవచ్చునని గమనిద్దాం. ఇది సహజంగా రెండు అవధులకు దారితీస్తుంది. అవి 'కుడి అవధి', 'ఎడమ అవధి', ప్రమేయం f కి $x = a$ వద్ద కుడి అవధి అంటే x విలువలు 'a' కంటే పెద్దవిగా ఉంటూ 'a' ని చేరేటప్పుడు $f(x)$ విలువల అవధి. 'a' వద్ద f యొక్క కుడి అవధికి $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ అని సూచిస్తాం. ఇదే విధంగా 'a' వద్ద f యొక్క ఎడమ అవధిని వివరిస్తాం. దీనిని $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ అని సూచిస్తాం.

కావున $x \to a^-$ ను సమానంగా $x = a - h$, $h > 0$ ఇ $h \to 0$

అదేవిధంగా $x \to a^+$ ను సమానంగా $x = a + h$, $h \to 0$.

నిర్వచనం : కుడి, ఎడమ అవధులు

$E \subseteq R$, $f : E \to R$ అనుకోండి.

(i) $a \in R$ అనే బిందువు ప్రతీ $r > 0$ కు $E \cap (a, a + r)$ శూనేతరం అయ్యేటట్లుందనుకోండి. అప్పుడు $l \in R$ అనే బిందువు కింది నియమంతో వ్యవస్థితమైతే l ను f కు a వద్ద

కుడి అవధి అంటాం. దీనిని $\underset{x\to a^+}{\text{Lt}} f(x) = l$ అని రాస్తాం. ఇచ్చిన $\varepsilon > 0$ కు అనుగుణంగా అన్ని $x \in E$, $0 < x - a < \delta$ లకు $|f(x) - l| < \varepsilon$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ వ్యవస్థితం.

(ii) $a \in R$ అనే బిందువు ప్రతీ $r > 0$ కు $E \cap (a - r, a)$ శూన్యేతరం అయ్యేటట్లు ఉందనుకోండి. అప్పుడు $m \in R$ అనే బిందువు కింది నియమంతో వ్యవస్థితమైతే m ను f కు a వద్ద ఎడమ అవధి అంటారు.

$\underset{x\to a^-}{\text{Lt}} f(x) = m$ అనిరాస్తాం.

ఇచ్చిన $\in > 0$ కు అనుగుణంగా అన్ని $x \in E$, $0 < a - x < \delta$ లకు $|f(x) - m| < \varepsilon$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ వ్యవస్థితం.

గమనిక:

I $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \\ \text{మరియు } \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

II $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell_1 \\ \text{మరియు } \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు

III $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ లేదా $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు

20.2 అవధులపై ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలు

1. e స్థిరరాశి అయినపుడు, $\lim\limits_{x\to a} ex = e.\lim\limits_{x\to a} x$ దీనిని సరిచూడాలంటే, $f(x) = 5x$ ప్రమేయాన్ని పరిగణిద్దాం. $\lim\limits_{x\to z} 5x$ లో, 5 స్థిరరాశి కావున 5 పై అవధి ప్రభావము ఉండదు.

$$\therefore \lim_{x\to 2} 5x = 5 \lim_{x\to 2} x$$
$$= 5 \times 2 = 10.$$



2. $g(x), h(x), p(x)...$ లు ఏవైనా ప్రమేయాలయినపుడు

$$\lim_{x\to a}[g(x)+h(x)+p(x)+....]$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} h(x) + \lim_{x\to a} p(x)+....$$

3. $\lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\,.\,\lim_{x\to a} g(x)$

దీన్ని సరిచూడాలంటే $f(x)=5x^2+2x+3$ మరియు $g(x)=x+2$ లను పరిగణించండి.

అపుడు $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(5x^2+2x+3)$

$$= 5\lim_{x\to 0} x^2 + 2\lim_{x\to 0} x + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = \lim_{x\to 0} x + 2 = 2$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(5x^2+2x+3) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 6 \qquad ...(i)$$

ఇంకనూ, $\lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 0}[(5x^2+2x+3)\,(x+2)]$

$$= \lim_{x\to 0}(5x^3+12x^2+7x+6)$$

$$= 5\lim_{x\to 0} x^3 + 12\lim_{x\to 0} x^2 + 7\lim_{x\to 0} x + 6$$

$$= 6 \qquad (ii)$$

(i), (ii) ల నుండి,

$$\lim_{x\to 0}[(5x^2+2x+3)\,(x+2)] = \lim_{x\to 0}(5x^2+2x+3)\lim_{x\to 0}(x+2)$$

4. $\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ అయితే

దీన్ని సరిచూడాలంటే $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2}$ ప్రమేయాన్ని పరిగణించండి.

ఇపుడు $\lim_{x\to -1}(x^2+5x+6) = (-1)^2 + 5(-1) + 6$

$= 1 - 5 + 6$

$= 2$

మరియు $\lim\limits_{x \to -1} (x+2) = -1 + 2$

$= 1$

$$\frac{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 5x + 6)}{\lim\limits_{x \to -1} (x+2)} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{...(i)}$$

ఇంకనూ, $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x^2 + 5x + 6)}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x + 3)\,(x + 2)}{x + 2}$

$$= \lim_{x \to -1} (x+3) \qquad \begin{bmatrix} \because\ x^2 + 5x + 6 \\ = x^2 + 3x + 2x + 6 \\ = x(x+3) + 2(x + 3) \\ = (x + 3)\,(x + 2) \end{bmatrix}$$

$= -1 + 3 = 2$ ...(ii)

(i), (ii) ల నుండి, $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 5x + 6)}{\lim\limits_{x \to -1} (x+2)}$.

ఇచ్చిన రెండు ప్రమేయాలను సంయుక్తపరచి, వేరొక ప్రమేయాన్ని యేర్పరచటానికి చాల పద్ధతులున్నాయని పైన గమనించాం. ఇచ్చిన ప్రమేయాల అవధుల నుండి $x \to a$ అయినపుడు నూతనంగా యేర్పడిన ప్రమేయానికి అవధి గణించవచ్చును. క్లుప్తంగా, మూల ప్రక్రియలను కలిగియున్న ప్రమేయాల అవధులను కనుక్కోవటానికి ఉపయోగించే అవధుల ప్రాథమిక సూత్రాలను కింది విధంగా ప్రవచిద్దాం.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ మరియు $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ అయితే

(i) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = k \,.\, \lim\limits_{x \to a} f(x) = kl$, ($k$ స్థిరరాశి)

(ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = l \pm m$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x) = l.m$

(iv) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{m}$ $[\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ అయినపుడు]

రెండు కంటే ఎక్కువ ప్రమేయాలున్న సందర్భంలో కూడ పై ఫలితాలను ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదాహరణ 20.1 : $f(x) = \begin{matrix}1-x & \text{if} & x\le 1\\ 1+x & \text{if} & x>1\end{matrix}$; $a=1$ అయిన కుడి, ఎడమ అవధులను కనుగొనుము.

సాధన : ఎడమ అవధి $= \underset{x\to a^-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 1^-}{\text{Lt}} f(x)$

$= \underset{x\to 1}{\text{Lt}}(1-x) = 0$

కుడి అవధి $= \underset{x\to a^+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 1^+}{\text{Lt}} f(x)$

$= \underset{x\to 1^+}{\text{Lt}}(1+x) = 1+2 = 2$

$\therefore$ ఎడమ అవధి $\neq$ కుడి అవధి

$\underset{x\to 1}{\text{Lt}} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

ఉదాహరణ 20.2 : $f(x) = \begin{cases}x+2 & \text{if} \quad -1<x\le 3\\ x^2 & \text{if} \quad 3<x<5\end{cases}$; $a=3$ నిరూపించండి.

ఎడమఅవధి $= \underset{x\to 3^-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 3}{\text{Lt}} x+2 = 3+2 = 5$

కుడి అవధి $= \underset{x\to 3^+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 3}{\text{Lt}} x^2 = 3^2 = 9$

$\therefore$ ఎడమ అవధి $\neq$ కుడి అవధి $\Rightarrow \underset{x\to 3}{\text{Lt}} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

ఉదాహరణ 20.3 : ఎడమ, కుడి అవధులను గణించండి.

(i) $\underset{x\to 3^+}{\text{Lt}}\frac{|x-3|}{x-3}$

ఇక్కడ $\underset{x\to 3^+}{\text{Lt}}\frac{|x-3|}{x-3} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{|(3+h)-3|}{[(3+h)-3]}$

$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{|h|}{h}$

$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{h}{h}$ (as $h>0$ so $|h| = h$)

$= 1$

(ii) $\underset{x\to 3^-}{\text{Lt}} \frac{|x-3|}{x-3} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{|(3-h)-3|}{[(3-h)-3]} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{|-h|}{h}$

$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{h}{-h} = -1$

(i), (ii) ల నుండి $\underset{x\to 3^+}{\text{Lt}} \frac{|x-3|}{x-3} \neq \underset{x\to 3^-}{\text{Lt}} \frac{|x-3|}{x-3}$

ఉదాహరణ 20.4 : $f(x)$ అను ప్రమేయం కింది విధంగా నిర్వచింపబడింది.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$\underset{x\to\frac{1}{2}}{\text{Lt}} f(x)$ యొక్క ఉనికిని పరీక్షించండి.

సాధన : ఇక్కడ $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \quad ...(i) \\ 0, & x = \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \quad ...(ii) \end{cases}$

$$\underset{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f\left(\frac{1}{2}-h\right)$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{1}{2}-h\right) \quad \left[\because \frac{1}{2}-h < \frac{1}{2} \text{ and from (i)} \; f\left(\frac{1}{2}-h\right) = \frac{1}{2}-h\right]$$

$$= \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2} \quad ...(iii)$$

$$\underset{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f\left(\frac{1}{2}+h\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left[\left(\frac{1}{2}+h\right)-1\right] \qquad \left[\begin{array}{l}\therefore \frac{1}{2}^{\text{th}} > \frac{1}{2} \text{ and from(ii)},\\ f\left(\frac{1}{2}+h\right)=\left(\frac{1}{2}+h\right)-1\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}+(-1) = -\frac{1}{2} \qquad \text{...(iv) (iii), (iv) ల నుండి}$$

ఎడమ అవధి ≠ కుడి అవధి ∴ వ్యవస్థితంకాదు

20.2.1 అవధుల మూల్యాంకనము

ఈ విభాగంలో వివిధ పద్ధతులలో అవధులను గణించుట జరుగును.

(i) బీజగణిత అవధులు

(ii) త్రికోణమితీయ అవధులు

(iii) ఘాత మరియు సంవర్గమాన అవధులు

20.2.2 బీజగణిత అవధులు

'a' ఒక వాస్తవ సంఖ్య, $f(x)$ ఒక ప్రమేయం అయితే $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ f(x)$ ను బీజగణిత అవధి అంటాం.

ఉదాహరణ : $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ \frac{x^3-1}{x-1}$, $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\ \frac{x^5-32}{x-2}$ మొదలగునవి.

కింద సూచించిన పద్ధతిలో బీజగణిత అవధులు

i) ప్రత్యక్షంగా ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

ii) కారంణాల పద్ధతి

iii) నిష్పత్తి పద్ధతి

iv) ప్రామాణిక ఫలితాలను ఉపయోగించి

v) మూల్యాంకన అవధి పద్ధతి $x\to\infty$ అయినప్పుడు

(i) ప్రత్యక్షంగా ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

ఉదాహరణ 20.5 : $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ (3x^2+4x+5) = 3(1)^2+4(1)+5 = 12$

ఉదాహరణ 20.6 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} = \frac{1}{1+0} = 1$

ఉదాహరణ 20.7 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,(x^2+3x+7)$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,(x^2+3x+7)$

$= (0 + 0 + 7)$

$= 7.$

ఉదాహరణ 20.8 : $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\,\left[(x+1)^2+2\right]$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\,\left[(x+1)^2+2\right]$

$= [(1 + 1)^2 + 2] = [2^2 + 2]$

$= 4 + 2 = 6$

ఉదాహరణ 20.9 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\left[(2x+1)^3-5\right]$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\left[(2x+1)^3-5\right]$

$= [(2 \times 0 + 1)^3 - 5]$

$= [1 - 5]$

$= - 4$

ఉదాహరణ 20.10 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{1}{0^2-3.0+2}=\dfrac{1}{0-0+2}=\dfrac{1}{2}$

ఉదాహరణ 20.11 : $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{x}\right]$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{x}\right]$

$$= \left[\frac{2}{2+1} - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{4-9}{6}\right]$$

$$= \frac{-5}{6}.$$

ఉదాహరణ 20.12 : $\underset{x\to 1^-}{\text{Lt}} \frac{3x+1}{x-10}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 1^-}{\text{Lt}} \frac{3x+1}{x-10}$

$$= \frac{3(-1)+5}{-1-10} = \frac{-3+5}{-11} = \frac{2}{-11}$$

$$= -\frac{2}{11}.$$

ఉదాహరణ 20.13 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{px+q}{ax+b}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{px+q}{ax+b}$

$$= \frac{p(0)+q}{a(0)+b}$$

$$= \frac{q}{b}.$$

ఉదాహరణ 20.14 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{(e^x+x-1)}{x}\right]$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{e^x+x-1}{x}\right) = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{x}{x}\right)$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \underset{x\to 0}{\text{Lt}}(1)$$

$$= 1 + 1 \qquad \left[\because \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^x-1}{x} = 1\right]$$

$$= 2.$$

ఉదాహరణ 20.15 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{(1+x)e^x-1}{x}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{(1+x)e^x-1}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{e^x+xe^x-1}{x}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{x}\right]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{xe^x}{x}\right)$$

$$= 1+\underset{x\to 0}{\text{Lt}}(e^x) = 1+1 = 2.$$

ఉదాహరణ 20.16 : $\underset{x\to 0^+}{\text{Lt}}\left\{\dfrac{2|x|}{x}+x+1\right\} = 3$ అని చూపుము

సాధన : $\underset{x\to 0^+}{\text{Lt}}\left\{\dfrac{2|x|}{x}+x+1\right\}$

$$\underset{x\to 0^+}{\text{Lt}}\frac{2x}{x}+x+1 \qquad |x| = x \text{ నుండి, } x > 0$$

$$\underset{x\to 0^+}{\text{Lt}}(2+x+1) = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}(2+0+1) = 3$$

$$\therefore \underset{x\to 0^+}{\text{Lt}}\left\{\frac{2|x|}{x}+x+1\right\} = 3.$$

ఉదాహరణ 20.17 : $\underset{x\to 2^+}{\text{Lt}}([x]+x)$ మరియు $\underset{x\to 2^-}{\text{Lt}}([x]+x)$ అయితే గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 2^+}{\text{Lt}}[x+x]$ x బదులు $2 + h$; $h \to 0$

$$\underset{h\to 0}{\text{Lt}}[2+h]+2-h = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\,2+2+h-h = 4$$

$\underset{x\to 2^-}{\text{Lt}}[x]+x$ x బదులు $2-h$ ఇక్కడ $h\to 0$

$$=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}[2-h]+2-h=2+2=4.$$

ఉదాహరణ 20.18 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\frac{(1+x)^{3/2}-1}{x}\right]$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\frac{(1+x)^{3/2}-1}{x}\right]=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\frac{(1+x)^{3/2}-1^{3/2}}{(1+x)-1}\right]$

$$\underset{1+x\to 1}{\text{Lt}}\frac{(1+x)^{3/2}-1^{3/2}}{(1+x)-1}=\frac{3}{2}(1)=\frac{3}{2}$$

ఉదాహరణ 20.19 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin ax}{x\cos x}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin ax}{x\cos x}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{a}{\cos x}$

$$=1\times\frac{a}{1}=a.$$

ఉదాహరణ 20.20 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{1-\cos^2 mx}{\sin^2 nx}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{1-\cos 2mx}{\sin^2 nx}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{2\sin^2 mx}{\sin^2 nx}$

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,2.\left[\frac{\sin mx}{nx}\right]^2.\left[\frac{nx}{\sin nx}\right]\times\frac{m^2x^2}{n^2x^2}$$

$$=2.\frac{m^2}{n^2}=\frac{2m^2}{n^2}$$

ఉదాహరణ 20.21 : $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\frac{8|x|+3x}{3|x|-2x}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $x\to\infty\Rightarrow x>0$ $\quad\because\quad |x|=x$

$$=\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\frac{8|x|+3x}{3|x|-2x}=\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\frac{8|x|+3x}{3|x|-2x}$$

$$=\underset{x\to\infty}{\text{Lt}}\frac{11x}{x}=11$$

ఉదాహరణ **20.22** : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{8}}-(1-x)^{\frac{1}{8}}}{x}\right]$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{8}}-1}{x}-\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{8}}-1}{x}\right]$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{(1+x)^{\frac{1}{8}}-1}{(1+x)-1}+\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{(1-x)^{\frac{1}{8}}-1}{(1-x)-1}$$

$$= \frac{1}{8}(1)^{\frac{1}{8}-1}+\frac{1}{8}(1)^{\frac{1}{8}-1}$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

ఉదాహరణ **20.23** : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{x\sin a-a\sin x}{x-a}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{x\sin a-a\sin x}{x-a}$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{x\sin a-a\sin a+a\sin a-a\sin x}{x-a}$$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\sin a(x-a)-a(\sin x-a\sin a)}{x-a}$$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\sin a(x-a)}{(x-a)}-\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{a2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$= \sin a-\underset{x\to a}{\text{lt}}\, a\cos\left(\frac{x+a}{2}\right).\underset{x\to a}{\text{lt}}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}$$

$$= \sin a-a.\cos\left(\frac{2a}{2}\right).1$$

$$= \sin a - a\cos a.$$



ఉదాహరణ 20.24 : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\left[\frac{\tan x-\tan a}{(x-a)}\right]$ గణించండి, $\tan(x-a)=\frac{\tan x-\tan a}{1+\tan x\tan a}$

సాధన : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\left[\frac{\tan x-\tan a}{(x-a)}\right]=\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin a}{\cos a}}{(x-a)}$

$$=\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\sin x\cos a-\cos x\sin a}{(x-a)\cos x\cos a}$$

$$=\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)}\times\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{1}{\cos x\cos a}$$

$$=1.\frac{1}{\cos a.\cos a}=\frac{1}{\cos^2 a}=\sec^2 a$$

ఉదాహరణ 20.25 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ ను గణించండి

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left[\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\right]=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{2\sin\left(\frac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\frac{bx-ax}{2}\right)}{x^2}$

$$=2.\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin(a+b)\frac{x}{2}}{x}.\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\sin\left[\frac{(b-a)\frac{x}{2}}{x}\right.$$

$$=2.\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin(b+a)\frac{x}{2}}{(b+a)\frac{x}{2}}\times\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin(b-a)\frac{x}{2}}{(b-a)\frac{x}{2}}\times\left(\frac{b+a}{2}\right)\times\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$=2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)\quad=2\cdot\frac{(b^2-a^2)}{4}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

ఉదాహరణ 20.26 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{1-\cos 2x}{3\tan^2 x}$ ను గణించండి

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{1-\cos 2x}{3\tan^2 x}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{2\sin^2 x}{3.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$$= \frac{2}{3}\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\cos^2 x$$

$$= \frac{2}{3}\underset{x\to 0}{\text{Lt}}(\cos x)^2$$

$$= \frac{2}{3}\times 1$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\therefore \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{1-\cos 2x}{3\tan^2 x} = \frac{2}{3}.$$

ఉదాహరణ 20.27 : $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$ ను గణించండి.

సాధన : $x\to 1\Rightarrow 1-x\to 0$

Let $1-x=h\Rightarrow x=1-h$

$$\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-h)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi h}{2}\right)}{h} \qquad \cos(90-\theta)=\sin\theta$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\frac{\pi h}{2}}{\frac{\pi h}{2}}\times\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\underset{\frac{\pi h}{2}\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\frac{\pi h}{2}}{\frac{\pi h}{2}} \qquad \left(h\to 0\Rightarrow\frac{\pi h}{2}\to 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\times 1 = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) కారణాంకాల పద్ధతి

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, తీసికొనుము. $x=a$ ను ప్రతిక్షేపించినచో, కారణాంక ప్రమేయం $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ మొదలగు రూపాలలో తీసికొంటే $(x-a)$ అనేది కారణాంకము $f(x)$ మరియు $g(x)$ కు ఈ విధంగా లవ, హారాలకు $(x-a)$ కారణాంకాలను తీసివేసికుంటు ఒక అర్థవంతమైన సంఖ్య వచ్చేంత వరకు ఈ పద్ధతి కొనసాగించవలెను.

ఉదాహరణ 20.29 : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-6x+8}$ అయిన విలువ కనుగొనుము. $x = 2$ ప్రతిక్షేపించగా, $\dfrac{0}{0}$ రూపం వస్తుంది.

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{2}$$

ఉదాహరణ 20.30 : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^4-5x^3+27x-27}$ విలువను కనుగొనుము $x = 3$ ప్రతిక్షేపిస్తే, $\dfrac{0}{0}$ రూపం వస్తుంది.

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x^2-4x+3)}{(x-3)(x^3+2x^2-6x+9)} \Rightarrow \left(\frac{0}{0}\text{ రూపం}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-6x+9}\left(\frac{0}{0}\text{ రూపం}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x^2+x-3)}\left(\frac{0}{0}\text{ రూపం}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-1)}{x^2+x-3} = \frac{3-1}{9+3-3} = \frac{2}{9}.$$

ఉదాహరణ 20.31 : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ ను గణించండి.

సాధన : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\,(x^2+2x+4)$$

$$= 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 4 + 4 + 4$$

$$= 12.$$

ఉదాహరణ 20.32 : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \dfrac{(x+a)(x-a)}{(x-a)} = (a+a) = 2a$

ఉదాహరణ 20.33 : $\underset{x\to \frac{1}{3}}{\text{Lt}}\ \dfrac{9x^2-1}{3x-1}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to \frac{1}{3}}{\text{Lt}}\ \dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

$$= \underset{x\to \frac{1}{3}}{\text{Lt}}\ \frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x-1)}$$

$$= \left(3\times\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= (1 + 1)$$

$$= 2$$

ఉదాహరణ 20.34 : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \dfrac{\tan(x-a)}{x^2-a^2}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \dfrac{\tan(x-a)}{(x-a)}\times\dfrac{1}{x+a}$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \frac{\tan(x-a)}{x-a} \times \underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \frac{1}{x+a}$$

$$1\times\frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

ఉదాహరణ 20.35 : $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)x+2}\right]$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right]$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{(x-2)}\left\{1-\frac{4}{x+2}\right\}\right]$$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\frac{1}{(x-2)}\left[\frac{x+2-4}{x+2}\right] = \frac{1}{(x-2)}\left[\frac{x-2}{x+2}\right]$$

$$= \underset{x\to 2}{\text{Lt}}\left[\frac{1}{2+2}\right] = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ఉదాహరణ 20.36 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^{2x}-1}{x}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{2x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)\times\frac{2}{2}$ $\underset{2x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\times 2$ $\left(\therefore \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^{x}-1}{x}=1\right)$

$$= 1\times 2 = 2$$

ఉదాహరణ 20.37 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\times ax}{\frac{\sin bx}{bx}\times bx}$

$$= \frac{1\times a}{1\times b} = \frac{a}{b}.$$

(iii) అకరణీయ పద్ధతి

సాధారణంగా లవం లేదా హారం లేదా రెండింటి వ్యక్తీకరణాల వర్గమూలాల పద్ధతిలో వ్యక్తపరచడం.

ఉదాహరణ 20.38 : $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$ ను గణించండి.

$x = 0$ అయినప్పుడు అనినిర్ధారక రూపం $\dfrac{0}{0}$ వస్తుంది.

ఇప్పుడు

$$\underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{\left(\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}\right)}{\left(\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}\right)}\times\left(\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}\right)$$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}}\frac{(a-x)\left(\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}\right)}{3(a-x)\left(\sqrt{a+2x}+3\sqrt{x}\right)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}}\left(\frac{\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}}{3\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{2(3\sqrt{3a})} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ఉదాహరణ 20.39 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{x\sqrt{1+x}+1}{(1+x-1)} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\sqrt{1+x}+1\right) = \sqrt{1+0}+1 = 1+1 = 2$$

ఉదాహరణ 20.40 : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ ను గణించండి.

సాధన : వర్గమూలాన్ని కలిగి ఉన్న కారకాన్ని అకరణీయం చేసి, సరళీకృతం చేసినచో x విలువను పొందవచ్చు.

$$= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{(1+x)-(1-x)}{x[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}]}$$

$$= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+x}\right)+\left(\sqrt{1-x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

ఉదాహరణ 20.41 : $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3}$ ను గణించండి.

సాధన : లవం, హారాన్ని హేతుబద్ధీకరించిన (అకరణీయం చేసిన)చో

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3} = \frac{\left(\sqrt{12-x}-x\right)}{\left(\sqrt{6+x}-3\right)} \times \frac{\left(\sqrt{12-x}+x\right)}{\left(\sqrt{6+x}+3\right)} \times \frac{\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\left(\sqrt{12-x}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\left(12-x-x^2\right)}{6+x-9} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{-(x+4)(x-3)}{(x-3)} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x} \quad x \neq 3$$

$$= -(3+4)\frac{6}{6} = -7.$$

ఉదాహరణ 20.42 : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{\sqrt{1+x}-1}\right)$ ను గణించండి.

సాధన : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{\sqrt{1+x}-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{\sqrt{1+x}-1} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{|1+x-1|} \times \sqrt{1+x}+1$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{3^x - 1}{x} \cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$= \log_e 3\left(\sqrt{1+0}+1\right)$$

$$= \log_e 3\,(1+1) = 2\log_e 3$$

$$= \log_e 3^2 \Rightarrow \log_e 9$$

ఉదాహరణ 20.43 : $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ ను గణించండి.

సాధన : $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{1}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]}$$

$x \to \infty$ అయితే $\frac{1}{x} \to 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

20.3 కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రమేయాల అవధులను కనుగొనుట

(i) n ధనపూర్ణాంకమైనపుడు $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = n\,a^{n-1}$ అని నిరూపించండి.

ఉపపత్తి : $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(a^n + n\,a^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right) - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(n\,a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[n\,a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right]$$

$$= n\,a^{n-1} + 0 + 0 + \ldots + 0$$

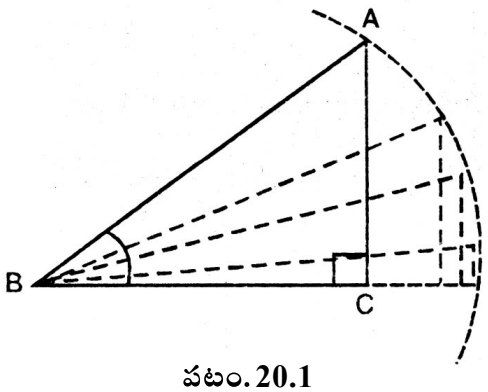
$$= n\,a^{n-1}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = n.a^{n-1}$$

గమనిక : యీ ఫలితము అన్ని 'n' లకు నిజము.

(ii) (a) $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ మరియు (b) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ అని నిరూపించుము.

ఉపపత్తి : B కేంద్రంగా ఒక యూనిట్ వృత్తాన్ని తీసుకోండి. ఇందులో $\angle C$ లంబకోణము $\angle ABC = x$ రేడియన్లు (పటం 30.3) అనుకుందాం. ఇపుడు $\sin x = AC$ మరియు $\cos x = BC$. x తగ్గిన కొలది, A, C కి సమీపంగా వస్తుంది. ie., $x \to 0$ అయితే $A \to C$ అవుతుంది. లేదా $x \to 0$. అయినపుడు $AC \to 0$ అవుతుంది.



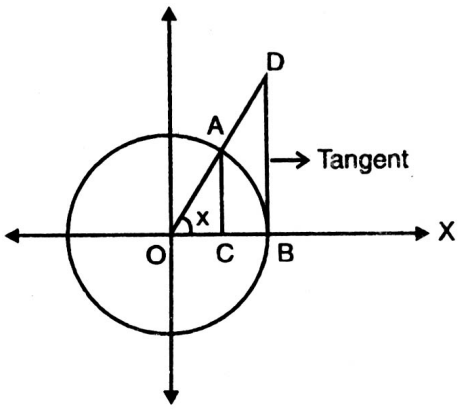
పటం. 20.1

మరియు $BC \to AB$ ie., $BC \to 1$ అవుతుంది. $\therefore\ x \to 0$ అయినపుడు $\sin x \to 0$ మరియు $\cos x \to 0$ అవుతాయి.

$\therefore\ \lim_{x\to 0} \sin x = 0$ మరియు $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ అని నిరూపించండి.

ఉపపత్తి : '0' వద్ద కేంద్రము మరియు '1' యూనిట్ వ్యాసార్ధము కలిగిన వృత్తాన్ని గీయుము. వృత్తంపై B(1, 0) ఒక బిందువు మరియు A ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము. $AC \perp OX$ గీయుము. (పటం 20.2)



పటం. 20.2

$\angle AOX = x$ రేడియన్లు అనుకొనుము $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

B వద్ద వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ, OA ను పొడిగించగా D వద్ద కలుస్తుంది. $BD \perp OX$ గీయుము.

త్రి. AOC వైశాల్యము < సెక్టరు OBA వైశాల్యము < త్రి. OBD వైశాల్యము.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AC < \frac{1}{2} x(1)^2 < \frac{1}{2} OB.BD$$

$\left(\because \text{త్రి. వైశాల్యం } = \frac{1}{2} \text{ . భూమి . ఎత్తు; సెక్టరు వైశాల్యము } = \frac{1}{2} \cdot \theta . r^2\right)$

$$\therefore\ \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\left(\because\ \cos x = \frac{OC}{OA}, \sin x = \frac{AC}{OA}; \tan x \cdot = \frac{BD}{OB}; OA = 1 = OB\right)$$

i.e., $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\ \sin x\ \text{భాగించగా}\right)$



(లేదా) $\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

(లేదా) $\dfrac{1}{\cos x} > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

(i.e,) $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos\ x}$

$\lim\limits_{x\to 0}$ తీసుకోగా,

$$\lim_{x\to 0} \cos\ x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

(లేదా) $1 < \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\ x}{x} < 1$

$$\left(\because \lim_{x\to 0} \cos\ x = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1\right)$$

యీ విధంగా, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

గమనిక: పై ఫలితాలలో, కోణము 'x' తప్పనిసరిగా రేడియన్లలో కొలవాలని గుర్తు పెట్టుకోవాలి.

(iv) నిరూపించండి: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

ఉపపత్తి : ద్విపద సిద్ధాంతం ప్రకారం $|x| < 1$ అయినపుడు

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[1 + \frac{1}{x}.x + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots\infty\right]$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{(1-x)}{2!} + \frac{(1-x)\,(1-2x)}{3!} + ...\infty\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1 + 1 + \frac{1-x}{2!} + \frac{(1-x)\,(1-2x)}{3!} + ...\infty\right]$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\infty\right]$$

$= e$ నిర్వచనం ద్వారా

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(v) నిరూపించుము:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x}$$

$= \log e$ (

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ నుండి)

$= 1$

(vi) నిరూపించుము : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ఉపపత్తి : $e^x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \quad e^x - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...-1\right)$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)$$

$$\therefore \quad \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)}{x}$$ x చే భాగించటం ద్వారా

$$= \frac{x\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...\right)}{x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...\right)$$

$$= 1 + 0 + 0 + ... = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

అవధుల యొక్క ముఖ్య ఫలితాలు

1. If $n \in Q$ then $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

2. $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$

3. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \frac{(x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n) - n}{x - 1} = \frac{n(n+1)}{2}$

4. $\underset{x\to -a}{\text{Lt}} \frac{x^9 + a^9}{x + 9} = 9$ find 'a'

$$= \underset{x\to -a}{\text{Lt}} \frac{x^9 - (-a)^9}{x - (-a)} = 9$$

$$= 9(-a)^{9-1} = 9 \Rightarrow 9a^8 = 9 \Rightarrow a^8 = 1$$

$$\Rightarrow a = \pm 1$$

iv) If $a > 0$, $n \in R$. Then $\underset{x\to a}{\text{Lt}} x^n = a^n$.

త్రికోణమితీయ అవధులు

i) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$

vi) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\tan(x-a)}{x-a} = 1$

vii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} = 1$

ఘాత మరియు సంవర్గమాన అవధులు

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ప్రత్యేక అవధులు

i) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\lambda x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lambda}$

iv) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[1+\frac{\lambda}{x}\right]^x = e^{\lambda}$

గణించండి : $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{d+\frac{e}{x}+\frac{f}{x^2}}$

$$= \frac{a+0+0}{d+0+0} = \frac{a}{d}.$$

'L' హాస్పిటల్ రూల్‌ను ఉపయోగించి అవధులను కనుగొనుట

x అనేది, $f(x)$ మరియు $g(x)$ రెండూ ప్రమేయాలు అయితే

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

ii) $x = a$ వద్ద రెండూ అవిచ్ఛిన్నాలు.

iii) $x = a$ వద్ద రెండూ అవకలనీయాలు

iv) $x = a$ వద్ద $f'(x)$, $g'(x)$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు అయితే

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $g(a) \neq 0$ కావడం వల్ల

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ మరియు $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ పై నియమాలు వర్తిస్తాయి.

ఉదాహరణ 20.44 : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a} = \dfrac{0}{0}$ రూపంను గణించండి

$$= \lim_{x\to a} \frac{ax^{a-1} - a^x \log a}{x^x(1+\log x) - 0} \quad \text{[L' హాస్పిటల్ నియమాన్ని ఉపయోగించి]}$$

$$= \frac{a^a - a^a \log a}{a^a(1+\log a)} = \frac{1-\log a}{1+\log a}.$$

కొన్నిసార్లు అవధులను కనుగొనడానికి కింది విస్తారణలు ఉపయోగపడతాయి.

a) $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$

b) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ...$

c) $a^x = 1 + x + (\log_e a) + \dfrac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + ...$

d) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + ...$

e) $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + ...$

f) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$

g) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ...$

h) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + ...$

i) $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{x^5}{4} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + ...$

j) $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + ...$

h) $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} + ...$

అభ్యాసం 20.1

1. కింది వాటిని గణించండి.

a) $\lim_{x \to 2}\left[2(x+3)7\right]$

b) $\lim_{x \to 1}\left[(x+3)^2 - 16\right]$

c) $\lim_{x \to 1}(3x+1)(x+1)$

2. కింది వాటికి అవధులను కనుగొనుము.

a) $\lim_{x \to 1}\frac{x+2}{x+1}$

b) $\lim_{x \to \frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x-1}$

c) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right]$

d) $\lim_{x \to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

e) $\lim_{x \to 0}\frac{px+q}{ax+b}$

3. కింది వాటిని గణించండి.

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a}{x-a}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{x}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{x}+x^{5/2}\right]\ x>0$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}\ x<2$ What is $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2-x}$?

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2x+1}{3x^2-4x+5}\right]$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{3/2}-1}{x}\right]$

4. కింది వాటికి విలువలను కనుగొనుము.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}\ x\neq 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x-a)}{x^2-a^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{1-\cos nx}\ n\neq 0$

5. కింది వాటికి అవధులను గణించండి.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8|x|+3x}{3|x|-2x}$

అభ్యాసం 20.2

1. కింది వాటికి కుడి, ఎడమ అవధులను కనుగొనుము.

a) $f(x)\begin{matrix}x+2 & \text{if } -1<x\leq 3\\ x^2 & \text{if } 3<x<5\end{matrix}$; $a=3$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{if } x\leq 1\\ x & \text{if } 1<x\leq 2;\\ x-3 & \text{if } x>2\end{cases}$ $a=2$

2. కింది అవధులను గణించండి.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+bx)-\sin(a-bx)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2mx}{\sin^2 nx}$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sin a - a\sin x}{x-a}$

3. కింది వాటికి అవధులను గణించండి.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2+1}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

4. $f(x)=\begin{cases} ax+5, & x<2 \\ x-1, & x\geq 2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ వ్యవస్థితం అయితే 'a' విలువను కనుగొనుము.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ విలువను కనుగొనుము.

6. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta}$ గణించండి.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx}$ గణించండి.

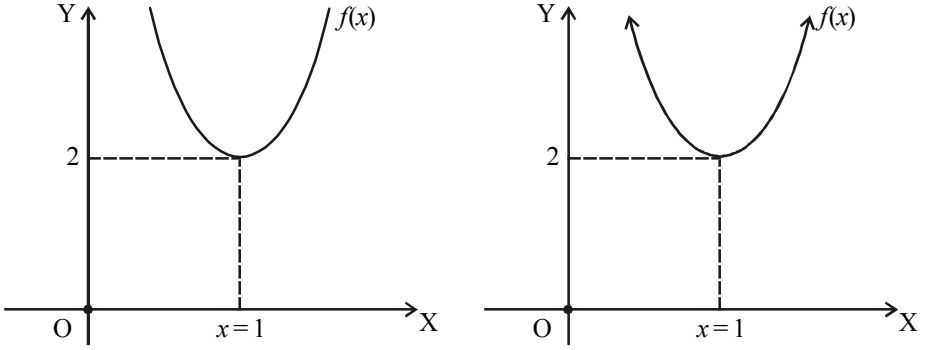
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3\tan^2 x}$ గణించండి.

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x-\tan x)$ విలువను కనుగొనుము.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)e^x-1}{x}$ విలువను కనుగొనుము.

20.4 అవిచ్ఛిన్నత పరిచయం

గ్రాఫ్‌ల ద్వార సమీపబిందువుల అవధుల అవిచ్ఛిన్నతను చర్చించడం జరిగింది. పటంను చూడండి.



$x = a$ అనే బిందువు వద్ద ప్రమేయం $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం అనుకుంటే, బిందువు $(a, f(a))$ గ్రాఫ్ మీద ఎటువంటి దూరం లేకుండ బిందువు $(a, f(a))$ మధ్యదూరం ఉండదు.

పటం ద్వార ఇక్కడ

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 2$ మరియు $f(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ కావున $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం

20.4.1 అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం

$x = a$ వద్ద ప్రమేయం $f(x)$ అచ్ఛిన్నము అయితే అప్పుడు a అనేది ప్రదేశం $f(x)$ లో ఉంటుంది. అయితే

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

$x = a$ వద్ద ప్రమేయపు విలువ ఎడమ అవధి = కుడి అవధి లేదా $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$x = a$ వద్ద $f(x)$ అనే ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం కాకపోతే దానిని విచ్ఛిన్నం అంటాం.

కింద సూచించిన విధంగా

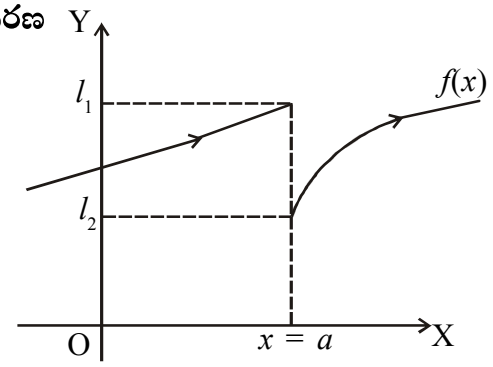
(i) $x = a$ వద్ద $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ మరియు $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ అవిచ్ఛిన్నాలు కాని సమానం కావు.

(ii) $\underset{x\to a^-}{\text{Lt}} f(x)$ మరియు $\underset{x\to e^-}{\text{Lt}} f(x)$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు, సమానాలు కాని $f(a)$ కు సమానం కావు.

(iii) $f(a)$ అనేది నిర్వచితం కాదు.

(iv) కనీసం ఒక అవధి అయిన వ్యవస్థితం కాదు.

20.4.2 అవిచ్ఛిన్నతకు జ్యామితీయ వివరణ



(i) $\underset{x\to a^-}{\text{Lt}} f(x)$ మరియు $\underset{x\to a^+}{\text{Lt}} f(x)$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు కాని సమానం కావు.

ఇక్కడ $\underset{x\to a^-}{\text{Lt}} f(x) = l_1$,

$\underset{x\to a^+}{\text{Lt}} f(x) = l_2$

$\therefore \underset{x\to a^-}{\text{Lt}} f(x)$ మరియు $\underset{x\to a^+}{\text{Lt}} f(x)$

అవిచ్ఛిన్నాలు, కాని సమానం కావు.

$x = a$ వద్ద $f(x)$ అనేది విచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

$f(a)$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమా, కాదా అనేది అవసరం లేదు.

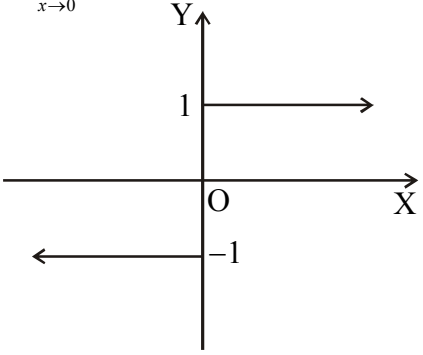
ఉదాహరణ 20.45 : $x = 0$ వద్ద $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ విచ్ఛిన్నం అయితే

$x > 0$ అయితే $+1$ అని
$x < 0$ అయితే -1 అని

$\therefore \underset{x\to 0^+}{\text{Lt}} f(x) \neq \underset{x\to 0^-}{\text{Lt}} f(x)$

(i) గ్రాఫ్ ద్వారా

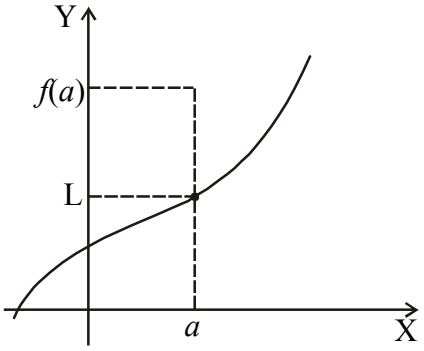
$$f(x) = \frac{|x|}{x} \begin{cases} \dfrac{x}{x} & x > 0\ 1,\ x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} & x < 0,\ -1,\ x < 0 \end{cases}$$



మరియు $f(0) = \dfrac{0}{0}$ (అని నిర్ధారక రూపం) నిర్వచింపబడదు.

కావున $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x) \Rightarrow$ అనేది వ్యవస్థితం కాదు. ఇచ్చిన ప్రమేయం విచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

(ii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ మరియు $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు సమానం. కాని $f(a)$ కు సమానం కావు.



ఇక్కడ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$

$f(a)$ అనేది నిర్వచితం కాని $f(a) \neq$ L

మరల $x = a$ వద్ద $f(x)$ వ్యవస్థితం.

కాని $x = a$ వద్ద అవచ్ఛిన్నం కాదు.

20.4.3 అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల లక్షణాలు

$x = a$ వద్ద $f(x)$ మరియు $g(x)$ ప్రమేయాలు అవిచ్ఛిన్నాలు అప్పుడు

(i) $x = a$ వద్ద C $f(x)$ అనే ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం అయితే 'C' అనేది స్థిరం.

(ii) $x = a$ వద్ద $f(x) \pm g(x)$ లు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు

(iii) $x = a$ వద్ద $f(x) \cdot g(x)$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు.

(iv) $x = a$ వద్ద $f(x)/g(x)$, $g(a) \neq 0$

(vi) $f(x)$ ప్రమేయం అనుసరించినప్పుడు $f : [a, b] \to [a, b]$

$\Rightarrow f(x) = x$ అయినప్పుడు $x \in [a, b]$

20.5 అవిచ్ఛిన్నతపై ముఖ్య ఫలితాలు

పై ఉదహరించిన ధర్మాలను ఉపయోగిస్తూ, అవిచ్ఛిన్నతపై కొన్ని ముఖ్య ఫలితాలను ఇపుడు చర్చించుకుందాం.

(i) $f(x) = px + q, x \in$ R, ప్రమేయాన్ని పరిగణించండి.

వాస్తక సంఖ్యా సమితి యీ ప్రమేయానికి ప్రదేకము 'a' ఏదైనా ఒక యాదృచ్ఛిక వాస్తవ సంఖ్య అనుకుందాం. ప్రమేయానికి యిరువైపుల అవధులను తీసుకోగా,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (px+q) = pa + q [= x = a \text{ వద్ద } px + q \text{ విలువ}]$$

$\therefore$ $x = a$ వద్ద $px + q$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఇదే విధంగా, $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ ను కూడా అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయంగా చూపవచ్చును.

సాధారణరూపంలో, $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ లు స్థిరరాశులయి, n ఋణేతర పూర్ణాంకమైనపుడు $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.

'c' వాస్తవ సంఖ్య అయి $x = c$ వద్ద $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots a_n x^n$ అవిచ్ఛిన్నాలని, మరియు ధర్మము (ii) ప్రకారం, వాటి మొత్తం $x = c$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని చూపవచ్చును.

$\therefore$ ఏదైనా బిందువు 'c' వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము.

$\therefore$ ప్రతిబిందువు వద్ద, ప్రతి బహుపద ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమవుతుంది.

(ii) $f(x) = \dfrac{(x+1)\,(x+3)}{x-5}$ ప్రమేయాన్ని పరిగణిద్దాం. $x - 5 = 0$ లేదా $x = 5$ అయినపుడు $f(x)$ నిర్వచింపబడదు. $(x + 1), (x + 3)$ లు రెండునూ అవిచ్ఛిన్నాలు కావున $(x + 1)$ $(x + 3)$ కూడా అవిచ్ఛినం అని చెప్పగలం [ధర్మం (iii)]

$f(x)$ నందలి హారము అనగా $(x - 5)$ కూడా అవిచ్ఛిన్నమే.

$\therefore$ ధర్మము (iv) ప్రకారం, $x = 5$ వద్ద కాకుండా మిగిలిన అన్ని బిందువుల వద్ద $\dfrac{(x+1)\,(x+3)}{x-5}$ అవిచ్ఛిన్నమని చెప్పవచ్చును.

సాధారణరూపంలో, $p(x), g(x)$ లు బహుపద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలయి, $g(x) \neq 0$ అయినపుడు $f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 20.46 : $f(x) = \sin x$ is అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమని చూపుము.

సాధన : Lt $f(x) = \sin x$

$\sin x$ ప్రదేశము '**R**'

'a' అనేది యాదృచ్ఛిక వాస్తవ సంఖ్య

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin a.\cos h + \cos a \sin h\right]$$

$= \sin a \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \cos h + \cos a \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \sin h$

$= \sin a \times 1 + \cos a \cdot 0$

$= \sin a$ ...(i)

$\therefore$ కావున $f(a) = \sin a$ ...(ii)

(i), (ii) ల నుండి $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x) = f(a)$ కావున $x = a$ వద్ద $\sin x$ అవిచ్ఛిన్నం.

$x = a$ వద్ద $\sin x$ అవిచ్ఛిన్నం. కావున 'a' అనేది సహేతుక బిందువు (యాదృచ్ఛిక రాశి)

కావున $f(x) = \sin x$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉదాహరణ 20.47 : కింద ఇచ్చిన ప్రమేయానికి 1 మరియు 2ల వద్ద f అనే ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నతను సరిచూడండి.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if} \quad x \le 1 \\ 2x & \text{if} \quad 1 < x < 2 \\ 1+x^2 & \text{if} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

సాధన : $\underset{x\to 1^+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 1^+}{\text{Lt}} 2x = 2 = f(1)$ అని తెలుసు

$\underset{x\to 1^-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 1^-}{\text{Lt}} (x+1) = 2$

కావున $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} f(x) = f(1)$

1 వద్ద f అనేది అవిచ్ఛిన్నము.

అదేవిధంగా $\underset{x\to 2^+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 2^+}{\text{Lt}} (1+x^2) = 5 = f(2)$

$\underset{x\to 2^-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 2^-}{\text{Lt}} 2x = 4$

$\underset{x\to 2^+}{\text{Lt}} f(x)$ మరియు $\underset{x\to 2^-}{\text{Lt}} f(x)$ వ్యవస్థితము, కాని

సమానము కావు, 2 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

ఉదాహరణ 20.48 : x విలువ $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ అయినప్పుడు $\tan x$ అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

సాధన : $\tan x$ ప్రదేశం $f(x) = \tan x$;

$\mathbf{R} - (2x+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \text{I}$

Let $a \in \mathbf{R} - (2x+1)\frac{\pi}{2}$, ని యాదృచ్ఛికం అనుకొనిన

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \tan(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\cos h + \cos a \sin h}{\cos a \cos h - \sin a \sin h}$$

$$= \frac{\sin a \lim_{h\to 0} \cos h + \cos a \lim_{h\to 0} \sin h}{\cos a \lim_{h\to 0} \cos h - \sin a \lim_{h\to 0} \sin h}$$

$$= \frac{\sin a.1 + \cos a \times 0}{\cos a \times 1 - \sin a \times 0}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a \quad \text{...(i)}$$

[$\because \forall\, a$ అనేది $\tan x$ ప్రదేశంలో ఉంది, $\cos a \neq 0$]

అలాగే $f(a) = \tan a$ ...(ii)

(i), (ii) ల నుండి $\lim_{h\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore x = a$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం కాని 'a' అనేది (సహేతుకము) యాదృచ్ఛికరాశి.

$0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ల మధ్య x యొక్క అన్ని విలువలకు Tan x అవిచ్ఛిన్నము.

ఉదాహరణ 20.49 : $x = 2$ వద్ద $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

సాధన : $x = 2$ వద్ద $(x^2 + 4)$ అనేది అవిచ్ఛిన్నం అని తెలుసు.

$x = 2$ వద్ద కూడ $(x + 2)$ అనేది అవిచ్ఛిన్నం

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x-2)$$

$$= 2 - 2 = 0 \quad \text{...(i)}$$

$$f(2)=\frac{2^2-4}{2+2}=\frac{0}{4}=0 \qquad \text{...(ii)}$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ $\therefore f(x)$ అనేది $x=2$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం. .

$x=2$ వద్ద (x^2-4) మరియు $(x+2)$ రెండూ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు.

$\frac{x^2-4}{x+2}$ అనేది కూడ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉదాహరణ 20.50 : $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$. $f(x)$ అనేది $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమా? కాదా! కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

ఎడమ అవధి $=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2(0-h)}{0-h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin 2h}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 2h}{2h}\times\frac{2}{1}\right)=1\times 2=2 \qquad \text{...(i)}$$

కుడి అవధి $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2(0+h)}{0+h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\times\frac{2}{1}$$

$$=1\times 2=2 \qquad \text{...(iii)}$$

కావున $f(0)=2$

(i) & (iii) నుండి

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2=f(0)$$

$x=0$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉదాహరణ 20.51 : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ for $x \neq 1$ and $f(x) = 2$ when $x = 1$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం అని చూపుము.

సాధన : ఇక్కడ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$

ఎడవ అవధి $\underset{x\to 1^-}{\text{Lt}}\ f(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ f(x-h)$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{(1-h)^2-1}{(1-h)-1} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{1-2h+h^2-1}{-h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{h(h-2)}{-h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ -(h-2)$$

$$= 2 \qquad \text{...(i)}$$

కుడి అవధి $\underset{x\to 1^+}{\text{Lt}}\ f(x) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ f(1+h)$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{1-2h+h^2-1}{-h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{h(h+2)}{h}$$

$$= 2 \qquad \text{...(ii)}$$

అలాగే $f(1) = 2$ (ఇచ్చినది) ...(iii)

(i) & (iii) ల నుండి

$$\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\ f(x) = f(1)$$

కావున $x = 1$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉదాహరణ 20.52 : 2 వద్ద ఈ కింది ప్రమేయమును అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించుము.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2-4) & \text{if} \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{if} \quad x = 2 \\ 2-8x^{-3} & \text{if} \quad x > 2 \end{cases}$$

$x = 2$ వద్ద విచ్ఛిన్న ప్రమేయం $f(x)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

సాధన : ఎడమ అవధి $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}(x^2-4)$$

x బదులు $2 - h$; $h \to 0$ రాయగా

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left[(2-h)^2-4)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}(4-4) = 0$$

కుడి అవధి $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$= \lim_{x\to 2^+} (2-8x^{-3})$$

x బదులు $2 + h$; $h \to 0$ రాయగా

$$= \lim_{h\to 0} 2-8(2+h)^{-3} = 2-8(+2)^{-3}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2-8(2+h)^{-3} = 2$$

$f(2) = 0$

ఎడవ అవధి ≠ కుడి అవధి

∴ కావున $x = 2$ వద్ద విచ్ఛిన్నప్రమేయం.

ఉదాహరణ 20.53 : a మరియు b లు స్థిర వాస్తవ సంఖ్యలు,

$$f(x) = \begin{cases} \cos ax - \cos bx & \text{if} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2}(b^2-a^2) & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

సాధన : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2\sin\left(\frac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\frac{bx-ax}{2}\right)}{x^2}$$

$$= 2 \cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(a+b)\frac{x}{2}}{x} \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(b-a)\frac{x}{2}}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ 2.\frac{\sin(b+a)\frac{x}{2}}{(b+a)\frac{x}{2}} \times \frac{(b+a)}{2} \times \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(b-a)\frac{x}{2}}{(b-a)\frac{x}{2}} \times \frac{(b+a)}{2}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ 2.\frac{\sin(b-a)\frac{x}{2}}{(b-a)\frac{x}{2}} \times \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{b+a}{2}\right).\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[b^2 - a^2\right]$$

Also $f(0) = \dfrac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$

$x = 0$ వద్ద $f(x)$ అనేది అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

ఉదాహరణ 20.54 : $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{if} \quad x \le 0 \\ x-5 & \text{if} \quad 0 < x \le 1 \\ 4x^2-9 & \text{if} \quad 1 < x < 2 \\ 3x+4 & \text{if} \quad x \ge 2 \end{cases}$

0, 1 మరియు 2 బిందువుల వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నతను సరిచూడండి.

సాధన : ఎడవ అవధి $\underset{x\to 0^-}{\text{Lt}} (4-x^2)$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ 4-(0-h)^2 = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ 4 = 4$$

కుడి అవధి $\underset{x\to 0^+}{\text{Lt}}\ x-5$ x బదులు 0 వ్రాయగా

$$\lim_{h\to 0} 0+h-5 = -5$$

$x = 0$ వద్ద ఎడమ అవధి ≠ కుడి అవధి

కావున $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం

ఎడమ అవధి $\lim_{x\to 1^-} x-5$ x బదులు $1 - h$ వ్రాయగా

$$\lim_{h\to 0} (1-h)-5 = -4$$

కుడి అవధి $\lim_{x\to 1^+} 4x^2-9$

$$= \lim_{h\to 0} 4(1+h)^2-9 = -5$$

$x = 1$ వద్ద ఎడమ అవధి ≠ కుడి అవధి, $f(x)$ అనేది విచ్ఛిన్నం.

కుడి అవధి $= \lim_{x\to 2^+} 3x+5$

$$= \lim_{h\to 0} 3(2+h)+4$$

$$= 3(2 + 0) + 4$$

$$= 10$$

ఎడమ అవధి $= \lim_{h\to 2^-} (4x^2-9)$

$$= \lim_{h\to 0} 4(2-h)^2-9 = 7$$

∴ ఎడమ అవధి ≠ కుడి అవధి

∴ $x = 2$ వద్ద $f(x)$ విచ్ఛిన్నం.

ఉదాహరణ 20.55 : a, b లు స్థిర వాస్తవ సంఖ్యలు f అనేది **R** మీద అవిచ్ఛిన్నం అయితే a, b లను కనుగొనుము.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{if} \quad x \le 0 \\ x^2+a & \text{if} \quad 0 < x \le 1 \\ bx+3 & \text{if} \quad 0 \le x \le 3 \\ -3 & \text{if} \quad x > 3 \end{cases}$$

సాధన : $x = 0$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \sin x = \lim_{x\to 0^+} x^2 + a = f(0)$$

$$0 = a = f(0)$$

$$\boxed{a = 0}$$

$x = 3$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం అయితే

$$\lim_{x\to 3^-} (bx+3) = \lim_{x\to 3^+} -3 = f(3)$$

$$\lim_{h\to 0} b(3-h)+3 = -3$$

$$3b+3 = -3 \Rightarrow 3b = -6$$

$$\boxed{b = -2}$$

ఉదాహరణ 20.56 : $f(x) = \dfrac{x-|x|}{x}$ $(x \neq 0)$ అనేది $\mathbf{R} - \{0\}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

సాధన : $f(x) = \dfrac{x-|x|}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x-|x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{|x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-|x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x-(-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2} = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$\therefore x = 0$ వద్ద $f(x)$ విచ్ఛిన్నం.



ఉదాహరణ 20.57 : $f(x) = \begin{cases} ax^2+9x-5 & \text{if} \quad x<1 \\ b & \text{if} \quad x=1 \\ (x+3)(2x-a) & \text{if} \quad x>1 \end{cases}$ అనేది R మీద అవిచ్ఛిన్నము

అయితే a, b లను కనుగొనుము.

సాధన : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+9x-5$

$= a(1)^2 + 9(1) - 5$

$= a + 4$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x+3)(2x-a)$

$= (1 + 3)\ (2 - a) = 8 - 4a$

కావు $f(x)$ అనేది అవిచ్ఛిన్నం

ఎడమ అవధి = కుడి అవధి

$a + 4 = 8 - 4a$

$5a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

R పై కూడ $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం

$\lim\limits_{x\to 1} f(1) = f(1) = b$

$a(1)^2 + 9(1) - 5 = b$

$a + 4 = b$

$\frac{4}{5} + \frac{4}{1} = b$

$\Rightarrow b = \frac{24}{5}.$

అభ్యాసం 20.3

1. $x = 2$ వద్ద $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & x \neq 2 \\ 3x+5 & x = 2 \end{cases}$ అవిచ్ఛిన్నం అయితే x విలువ కనుగొనండి.

2. $x = 1$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 12 \\ x+5 & x > 1 \end{cases}$$

3. అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x, & \frac{1}{2} < x < 1 \text{ at } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. $x = 4$ వద్ద K యొక్క ఏ విలువలకు ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{if } x \neq 4 \\ \text{K} & \text{if } x = 4 \end{cases}$$

5. f అనేది **R** మీద అవిచ్ఛిన్నం, నిర్వచితమైతే a విలువలను కనుగొనుము.

$$f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{if } x < 3 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

6. f యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - a)}{(x^2 - 2x - 3)} & \text{అయితే } 0 < x < 5 \text{ మరియు } x \neq 3 \\ 1.5 & \text{అయితే } x = 3,\ 3 \text{ బిందువు వద్ద} \end{cases}$$

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http : //www.wikipedia.org
- http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ విలువను కనుగొనుము.

2. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{(x+k)^4 - x^4}{k(k+2x)}$ విలువను కనుగొనుము.

3. క్రింది దానికి ఎడమ అవధి మరియు కుడి అవధి విలువను కనుగొనుము.

$$\text{if } f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{if } x \le 1 \\ 3x-5 & \text{if } x > 1 \end{cases} \text{ as } x \to 1.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{\sin 7x}{2x}$ గణించండి.

5. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{\sin 2x + 3x}{2x + \sin 3x}$ గణించండి.

6. k యొక్క ఏ విలువలకు, $x = 4$ వద్ద ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & x \neq 4 \text{ అయితే} \\ k & x = 4 \text{ అయితే} \end{cases}$$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + \cos x \neq 0 & \text{అయితే } x = 0 \text{ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపుము.} \\ 2 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \text{ అయితే} \\ 5, & x = \dfrac{\pi}{2} \text{ అయితే} \end{cases}$ ద్వారా నిర్వచితమైన ప్రమేయం $f(x)$ అయితే

'a' విలువను కనుగొనుము.

జవాబులు

అభ్యాసం 20.1

1. a) 17 b) 0 c) 8

2. a) $\dfrac{3}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 4 e) $\dfrac{q}{b}$

3. a) $2a$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{-5}{6}$ d) 0

e) 0 f) $\frac{3}{4}$ g) $\frac{3}{2}$

4. a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2a}$ e) $\left(\frac{m}{n}\right)^2$

5. a) ∞ b) 11

అభ్యాసం 20.2

1. a) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 9, \lim_{x\to 3^-} f(x) = 5;$ $\lim_{x\to 3}$ వద్ద $f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2, \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$ మరియు $f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

2. a) $2b \cos a$ b) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ c) $\frac{2m^2}{n^2}$

d) $\sin a - a \cos a$

3. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 4. $a = -2$

5. 2 6. $\frac{4}{9}$ 7. $\frac{a}{b}$ 8. $\frac{2}{3}$

9. 0 10. 2

అభ్యాసం 20.3

1. అవిచ్ఛిన్నం **2.** విచ్ఛిన్నం **3.** విచ్ఛిన్నం

4. K = 8 **5.** $a = 5$ **6.** $x = 3$ వద్ద విచ్ఛిన్నం.

సాధనా అభ్యాసం

1. 1 2. x^2 3. 1, –2 4. $\frac{7}{2}$

5. 1 6. k = 8 8. 10

అధ్యాయం

21

అవకలనం

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠము చదివిన పిమ్మట మీరు నేర్చుకునే అంశాలు :

- ఒక ప్రమేయం f యొక్క అవకలజాన్ని నిర్వచించండి మరియు ఇది f' తో సూచించబడుతుంది.
- ఒక బిందువు అవకలజాన్ని జ్యామితీయంగా విశ్లేషించటము.
- ప్రమేయపు, అవకలజాన్ని కనుగొనే ప్రక్రియను అవకలనం అంటారు.
- ఒక అంతరం స్థిరమైన ప్రమేయపు అవకలజాలం సున్నా అవుతుంది.
- $y = x^n$ అను ప్రమేయాన్ని నిర్వచించి దీని ద్వారా $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ దీనిని న్యూటన్ ఫవర్ ఫార్ములా లేదా ఫవర్ రూల్ అంటారు.
- ఒక ప్రమేయపు గొలుసు సూత్రాన్ని ప్రవచించి, ఉపయోగించటం అవకలజాలను కనుక్కోవడం.
- ఒక ప్రమేయపు రెండో తరగతి అవకలజాన్ని కనుక్కోవడం.
- ప్రమేయం లేదా కోషియంట్ రూల్ యొక్క పరస్పర అవకలజాలాన్ని నిర్వచించండి.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- ఒక ప్రమేయపు ప్రదేశం, వ్యాప్తి, వాటి రకాలను జ్ఞానాన్ని సంపాదించడం.

- త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణిజాలు, ఉపగుణిజాల కోణాల సూత్రాలు

పరిచయం

వేగం, త్వరణం, వక్రంపైన ఏదయినా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు మొదలైన భావనలకు మూలాధారం అనదగిన అవకాలజాన్ని విస్తృతంగా చర్చించడం. ఈ అధ్యాయం ముఖ్యోద్దేశ్యం. ఈ భావనను ఒకే సమయంలో ఆవిష్కరించిన ఘనత ఇంగ్లండుకు చెందిన సర్ ఐజాక్ న్యూటన్ (1642 - 1727), జర్మన్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు లైబ్నిజ్ (1646-1716) లకు చెందుతుంది.

$[a, b]$పై $f(x)$ అనునది అవకలన ప్రమేయం అనుకొనుము. అప్పుడు ప్రతీ బిందులు $c \in [a, b]$, $x = \mathrm{C}$ వద్ద $f(x)$ లేదా అవకలన ప్రమేయం $f'(c)$ కి సమానమైన ప్రత్యేక వాస్తవ సంఖ్యను పొందుతాము. ఈ బిందువులు $[a, b]$ మరియు అవకలనం లోని బిందువుల మధ్య కొత్త వాస్తవ విలువలు కలిగి ప్రమేయం యొక్క $[a, b]$ గా మరియు వ్యాప్తి ఉపసమితి పరిధిని నిర్వచిస్తుంది.

కొత్త వాస్తవ విలువలు కలిగి ప్రమేయం యొక్క అంటే $x \in [a, b]$ యొక్క ప్రతిబింబం అనునది f యొక్క అవకలనం ie $f'(x)$ or $\mathrm{D}\, f(x)$.

ఈ ప్రమేయాన్ని $f(x)$ యొక్క అవకలనం లేదా x తో పాటు అవకలజాలం అంటారు. దీనిని $f'(x)$ లేదా $\mathrm{D}\, f(x)$ లేదా $\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$ గా సూచిస్తారు.

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{...(i)}$$

$$\text{OR} \qquad \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \qquad \text{...(ii)}$$

వ్యవస్థితమవుతూ సమానం కావడం ఆవశ్యకమూ పర్యాప్తము అని గమనించండి. అవధులు $f(x)$ యొక్క బేధాన్ని $f(x)$ యొక్క అవకలన గుణకం అంటారు.

ఇలా ఉపయోగించే (చిహ్నాలు) సంకేతం

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

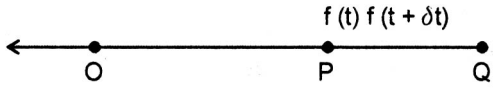
అంతేకాక $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$y = f(x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కూడ y_1 లేదా y' తో సూచిస్తాం.

21.1 అవధి రూపంలో వేగము

O వద్ద నిశ్చల స్థితిలో వున్న ఒక కణము OP రేఖ దిశగా కదులుతోందనుకొనుము. 'P' ను సమీపించడంలో జరిగిన దూరము s, కాలము t దృష్ట్యా ప్రమేయమవుతుంది.

$\therefore$ OP = $s = f(t)$ గా రాయవచ్చును.



పటం 21.1

ఈ విధంగానే P కు దగ్గరగా ఉన్న Q ను సమీపించటంలో జరిగిన దూరము PQ. అనగా δt కాలము దృష్ట్యా δs ప్రమేయమవుతుంది.

$$OQ = OP + PQ = s + \delta S = f(t + \delta t) \quad \text{..... (ii)}$$

δt అంతరంలో కణం సరాసరివేగము $= \frac{\text{దూరంలో మార్పు}}{\text{కాలంలో మార్పు}}$

$$= \frac{(s+\delta s) - s}{(t+\delta t) - t} \quad [\text{(i), (ii)ల నుండి}]$$

$$= \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

(δt అంతరంలో ప్రయాణించిన దూరము సరాసరి రేటు)

P కి సమీపంగా తగిన స్వల్ప అంతరంలో సరాసరి వేగాన్ని పొందటానికి δt ని స్వల్పం చేద్దాం. $\delta t \to 0$ అయినప్పుడు సరాసరి వేగము అవధి, t కాలంలో P వద్ద పొందిన తక్షణ వేగం అవుతుంది.

$\therefore$ t కాలంలో వేగం $= \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$. దీన్ని $\frac{ds}{dt}$ గా సూచిస్తారు.

ఈ విధంగా t కాలంలో చలించే కణం జరిగే దూరం $f(t)$ అయితే, దాని అవకలజం $t = t_0$ కాలంలో P వద్ద తక్షణ వేగాన్ని సూచిస్తుంది. దీన్ని ఒక బిందువు వద్ద ఒక ప్రయేయపు అవకలజం యొక్క భౌతిక విశ్లేషణగా వ్యవహరిస్తారు.

గమనిక : x దృష్ట్యా y యొక్క మార్పురేటును $\frac{dy}{dx}$ గా సూచిస్తారు.

ఉదాహరణ 21.1 : t సెకండ్ల కాలంలో ఒక కారు ప్రయాణించిన దూరము s మీటర్లు $s = 3t^2$ సమీకరణం చేత సూచించబడింది. $t = 4$ సెకండ్ల వద్ద కారు ప్రయాణించే వేగం కనుక్కోండి.

సాధన : $f(t) = s = 3t^2$

$$f(t+\delta t) = s + \delta s = 3(t+\delta t)^2$$

t కాలంలో కారు వేగము $= \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t+\delta t)^2 - 3t}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t^2 + 2t\cdot\delta t + \delta t^2) - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (6t + 3\delta t)$$

$$= 6t$$

$t = 4$ సె. వద్ద కారు వేగం

$= (6 \times 4)$ m/sec

$= 24$ m/sec

ఉదాహరణ 21.2 : ఒక సరళరేఖ వైపుగా t కాలంలో చలించే ఒక కణం యొక్క 'కాలం – దూరం' సంబంధాలు కింది విధంగా సూచించబడినాయి. ఆ కణవేగం కనుక్కోండి.

$$s = 2 + 3t^2; \quad t = \frac{1}{3}$$

సాధన : $s = 2 + 3t^2$

$$f(t) = s = 2 + 3t^2$$

$$f(t + \delta t) = s = s + \delta s = 2 + 3(t + \delta t)$$

't' కాలంలో కారువేగం

$$t = \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 + 3(t+\delta t)^2 - (2+3t^2)}{\delta t}$$

$t = 3$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 + 3\left[t^2 + 2t.\delta t + \delta t^2\right] - [2+3t^2]}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 + 3t^2 + 6t.\delta t + 3\delta t^2 - 2 - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{6t\ \delta t}{\delta t} + \frac{3\ \delta t^2}{\delta t}$$

$$= 6t.$$

కారు వేగం $t = \frac{1}{3}$ sec $\Rightarrow \left(6 \times \frac{1}{3}\right) = 2$ m/s.

ఉదాహరణ 21.3 : $S = 8t - 7$; $t = 4$

సాధన : ఇక్కడ $f(t) = S = 8t - 7$; $f(t + \delta t) = 8(t + \delta t) - 7$

$$t = \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

t కాలంలో కారువేగం

$$t = \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t}$$

$$t = \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{8(t+\delta t) - 7 - (\delta t - 7)}{\delta t}$$

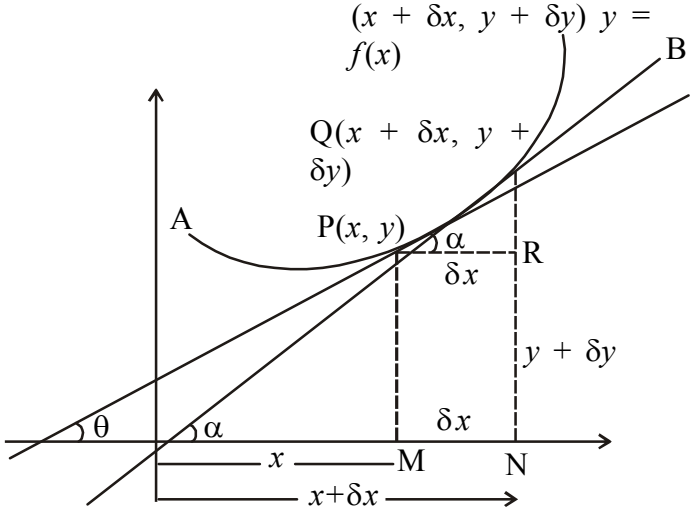
$$t = \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{8t + 8\delta t - 7 - \delta t + 7}{8t}$$

$$t = \underset{\delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{8\,\delta t}{\delta t}$$

$$= 8$$

21.2 $\frac{dy}{dx}$ యొక్క జ్యామితీయ విశ్లేషణ

$y = f(x)$ అనేది $P(x, y)$ యొక్క అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమైతే, దాని రేఖాచిత్రాన్ని APQB గా సూచించండి.



పటం 21.2

$y = f(x)$ సూచించే రేఖాచిత్రం లేదా వక్రంపై $P(x, y)$ ఏదైనా బిందువును కనుగొనుము. P సమీపంలో, అదే వక్రముపై $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ మరొక బిందువు అనుకొనుము. PM, QN లను X-అక్షానికి లంబముగాను, QN ను R వద్ద కలిసేలా PR ను X-అక్షానికి సమాంతరముగాను గీయండి. QP ని కలిపి, అది సీకెంట్ రేఖను s వద్ద కలిసేలా పొడిగించుము. X-అక్షపు ధనాత్మకదిశలో QPS సీకెంట్ రేఖ α కోణాన్ని చేస్తుందనుకొనుము. P వద్ద వక్రానికి PT స్పర్శరేఖను గీస్తే, అది X-అక్షంతో θ కోణం చేస్తుందనుకొనుము.

ΔQPS లో $\angle QPR = \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QN - RN}{MN} = \frac{QN - PM}{ON - OM} = \frac{(y+\delta y) - y}{(x+\delta x) - x} = \frac{\delta y}{\delta x}$$

వక్రంపై Q బిందువు P బిందువు వద్దకు అత్యంత సమీపంగా కదులుతోందనుకోండి.

$\therefore$ $Q \to P$ అయినప్పుడు $\delta x \to 0; \delta y \to 0\, d \to \theta\, (\tan\alpha \to \tan\theta)$ అయి, QPS సీకెంట్ రేఖ, PT స్పర్శరేఖతో ఏకీభవిస్తుంది.

(i) నుండి, $\tan\alpha = \dfrac{\delta y}{\delta x}$

అవధి సందర్భంలో $\lim\limits_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0\\ \alpha\to 0}} \tan\alpha = \lim\limits_{\delta x\to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$

లేదా $\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$

ఈ విధంగా, P(x, y) బిందువు వద్ద $y = f(x)$ ప్రమేయపు అవకలజం $\frac{dy}{dx}$. P వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు లేదా నిమ్నతను సూచిస్తుంది. దీనినే $\frac{dy}{dx}$ యొక్క జ్యామితీయ విశ్లేషణ అంటారు.

వక్రంపై వివిధ బిందువుల వద్ద $\frac{dy}{dx}$ కు వివిధ విలువలుంటాయని గమనించండి.

$\therefore$ ఒక ఫలాన బిందువు వద్ద వక్రము యొక్క వాలును కనుగొనాలంటే, ముందుగా $y = f(x)$ వక్రం నుండి $\frac{dy}{dx}$ కనుక్కొని, బిందువు నిరూపకాలను $\frac{dy}{dx}$ లో ప్రతిక్షేపించండి.

ఉపసిద్ధాంతము 1 : P వద్ద వక్రానికి గీసిన స్పర్శరేఖ X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటే $\theta = 0^o$ లేదా 180^o అయి, $\frac{dy}{dx} = \tan 0^o$ లేదా $\tan 180^o$ అయి, $\frac{dy}{dx} = 0$ అవుతుంది. ఈ సందర్భములో P వద్ద $y = f(x)$ వక్రపు స్పర్శరేఖ X-అక్షానికి సమాంతర రేఖ అవుతుంది.

ఉపసిద్ధాంతము 2 : P వద్ద వక్రానికి గీసిన స్పర్శరేఖ అక్షానికి లంబంగా ఉంటే, $\theta = 90^o$ అయి, $\frac{dy}{dx} = \tan 90^o = \infty$ అవుతుంది. అనగా P వద్ద $y = f(x)$ వక్రపు స్పర్శరేఖ Y-అక్షానికి సమాంతరంగా వుంటుంది.

ఉదాహరణ 21.4 : కింది వాటికి అవకలజాలను కనుగొనుము.

i) x^{10} ii) x^{50} iii) x^{91}

సాధన :

i) $\frac{d}{dx}(x^{10}) = 10x^{10-1} = 10x^9$

ii) $\frac{d}{dx}(x^{50}) = 50x^{50-1} = 50x^{49}$

iii) $\frac{d}{dx}(x^{91}) = 91x^{91-1} = 91x^{90}$

ఉదాహరణ 21.5 : $y = \sqrt{x}$ అవకలజాలను కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1} \times 1 = \frac{1}{2} \times (x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ఉదాహరణ 21.6 : $\frac{1}{x}$ యొక్క అవకలజాలను కనుగొనుము..

సాధన : $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = -1(x)^{-1-1} \times 1 = -1(x)^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}}$$

ఉదాహరణ 21.7 : $y = \sqrt[3]{x^2+5x-7} = \left(x^2+5x+7\right)^{\frac{1}{3}}$ అయిన y'ను కనుగొనుము.

సాధన : $y' = \frac{1}{3}\left[x^2+5x-7\right]^{\frac{1}{3}-1}\left[2x+5+0\right]$

$$y' = \frac{(2x+5)}{3}\left[x^2+5x+7\right]^{\frac{1}{3}-1}$$

$$y' = \frac{2x+5}{3}\left[x^2+5x+7\right]^{-\frac{2}{3}}$$

ఉదాహరణ 21.8 : $y = (x^2 + 1)^2$, $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$

$y = f(x) \cdot g(x)$

$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)(2x) + (x^2+1)2x$$

$$= (x^2 + 1)\ (2x + 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x(x^2+1)$$

ఉదాహరణ 21.9 : $f(x) = 3\sqrt{x}$ ను డెల్టా పద్ధతిని ఉపయోగించి $f'(x)$ను కనుగొనుము

సాధన : $y = f(x) = 3\sqrt{x}$

$$y + \delta y = 3\sqrt{x+\delta x}$$

$$y + \delta y - y = 3\sqrt{x+\delta x} - 3\sqrt{x}$$

$$\delta y = 3\left(\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}\right)$$

లవాన్ని అకరణీయం చేయగా

$$\delta y = \frac{3\left(\sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}} \times \sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}$$

$$\delta y = \frac{3(x+\delta x - x)}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\delta y = \frac{3\delta x}{\left(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}\right)} \qquad \therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{3}{\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{3}{\left(\sqrt{x+\delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ f'(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము

నోట్స్

21.3 స్థిర ప్రమేయపు అవకలజం

ప్రవచనం : ఒక స్థిరరాశి యొక్క అవకలజం సున్న.

ఉపపత్తి : $y = c$ ఒక స్థిర ప్రమేయం అనుకుందాం. దీనిని

$$y = c.x^o \quad \text{గా రాద్దాం.} \quad (x^o = 1 \text{ కావున}) \qquad \ldots\ldots (i)$$

x లో స్వల్ప వృద్ధి δx అనుకుందాం. దీనికి అనుగుణంగా,

y లో స్వల్ప వృద్ధి δy అనుకుంటే,

$$y + \delta y = c(x + \delta x)^o \qquad \ldots\ldots (ii)$$

$$y + \delta y = c(x + \delta x)^o$$

(ii) - (i) $(y + \delta y) - y = c(x + \delta x)^o - cx^o,$

లేదా $\delta y = c - c$ లేదా $\delta y = 0$

δx చే భాగిస్తే, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{0}{\delta x}$ లేదా $\dfrac{\delta y}{\delta x} = 0$

$\lim\limits_{\delta x \to 0}$ తీసుకుంటే, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = 0$ లేదా $\dfrac{dy}{dx} = 0$

లేదా $\dfrac{dc}{dx} = 0$ [(i) నుండి $y = c$]

దీని నుంచి, స్థిరరాశి యొక్క మార్పురేటు సున్న అని నిరూపించడమైనది. కావున, స్థిరరాశి యొక్క అవకలజము సున్న.

ఉదాహరణ 21.10 : $y = x^n$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : Let $y = x^n$

$$y + \delta y = (x + \delta x)^n$$

$(y + \delta y) - y = (x + \delta x)^n - x^n$

$$\delta y = x^n\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - x^n$$

$$= x^n\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - 1\right].$$

$\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ ను బైనావియల్ సిద్ధాంతం ద్వారా విస్తరించినచో

$$\underset{\delta x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = x^n\left[\frac{n}{x}+0+0+....\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \left[\therefore y = x^n\right]$$

దీనిని న్యూటన్స్ పవర్ సూత్రం లేదా పవర్ రూల్ అంటారు.

21.4 ప్రాథమిక సూత్రం నుండి ఒక ప్రమేయం యొక్క అవకలజం

ఒక బిందువు వద్ద ఒక ప్రమేయపు అవకలజాన్ని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ, ప్రాథమిక సూత్రము ద్వారా ఒక ప్రమేయపు అవకలజాన్ని కనుక్కోవడానికి కింది సోపానాలను పరిశీలిద్దాం.

సోపానం

1. దత్త ప్రమేయాన్ని $y = f(x)$ రూపంలో రాయుము. .... (i)

2. x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లోని వృద్ధి δy అనుకుంటే

$$y + \delta y = f(x + \delta x) \qquad \text{... (ii)}$$

3. (ii) - (i), $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

4. δx చే భాగించగా, $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

5. $\lim_{\delta x \to 0}$ తగిలించగా $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$

గమనిక : ప్రాథమిక సూత్రం నుండి ప్రమేయపు అవకలజాన్ని కనుగొనే పద్ధతిని డెల్టా పద్ధతి అని కూడా అంటారు.

ఇప్పుడు, మనం ప్రాథమిక సూత్రాల ద్వారా కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుక్కుందాం.

21.4.1 ప్రాథమిక సూత్రాల నుండి ప్రమేయాల అవకలజాలు

$y = x^n$ అనుకుందాం. ... (i)

x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లోని వృద్ధి δy అనుకుందాం.

$$y + \delta y = (x + \delta x)^n \quad \text{... (ii)}$$

$$(y + \delta y) - y = f(x + \delta x)^n - x^n$$

$$\delta y = x^n\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - x^n$$

$$= x^n\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - 1\right]$$

x తో పోలిస్తే, δx స్వల్పరాశి అయి, $\frac{\delta x}{x} < 1$ అవుతుంది. కావున, ఏఘాతానికైనా ద్విపదసిద్ధాంతం ప్రకారం $\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ ను విస్తరించవచ్చు.

$\therefore \left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ ను ద్విపద సిద్ధాంతము ప్రకారం, విస్తరించటం ద్వారా

$$\delta y = x^n\left[1 + n\left(\frac{\delta x}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 + ... - 1\right]$$

$$= x^n(\delta x)\left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3} + ...\right]$$

δx చే భాగిస్తే,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = x^n\left[\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3}+....\right]$$

$\delta x \to 0$ అయినప్పుడు $(\delta x)^2$ మరియు δx యొక్క అంతకంటే ఎక్కువ ఘాతాలు θ ను సమీపిస్తాయి.

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} x^n\left[\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3}+....\right]$$

లేదా $$\text{lt}_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = x^n\left[\frac{n}{x}+0+0+....\right]$$

లేదా $$\frac{dy}{dx} = x^n\cdot\frac{n}{x} = nx^{n-1}$$

లేదా $$\frac{dy}{dx} = x^n\cdot\frac{n}{x} = nx^{n-1} \qquad (y = x^n \text{ కావున})$$

దీనినే న్యూటన్ ఘాత సూత్రము లేక ఘాత న్యాయము అంటారు.

గమనిక : పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, n = 1, 2, 3, ... అయినప్పుడు x, x^2, x^3 యొక్క అవకలజాలను కనుక్కోగలం.

లేదా $$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1.1 = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x^{2-1} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 3x^{3-1} = 3x^2 \text{ వగైరా}$$

ఉదాహరణ 21.11 : $F(x) = x+\frac{1}{x}$ అయితే $f'(x)$ ను నిర్వచన రూపంలో కనుగొనుము.

సాధన : $y = x + \frac{1}{x}$ say $\Rightarrow y + \delta y = (x + \delta x) + \frac{1}{x + \delta x}$

$$y + \delta y - y = x + \delta x + \frac{1}{x + \delta x} - \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$= x + \delta(x) + \frac{1}{x + \delta x} - x - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\delta(x)}{1} + \frac{1}{x + \delta x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\delta x(x + \delta x)x + x - (x + \delta x)}{x(x + \delta x)}$$

$$= \frac{\delta x(x + \delta x)x + x - x - \delta x}{x(x + \delta x)}$$

$$\delta y = \frac{\left[\delta x(x + \delta x)x - 1\right]}{x(x + \delta x)}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x(x^2 + x\delta x - 1]}{x(x + \delta x)\delta x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{x^2 + x\delta x - 1}{x(x + \delta x)}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^2 + x\delta x - 1}{x(x + \delta x)} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad \therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}}$$

21.5 అవకలజాల బీజ గణితం

చాలా ప్రమేయాలు సంయుగ్మ రూపాలలో ఉంటాయి. ఈ సంయుగ్మాలు సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహార రూపాలలో ఉండవచ్చును. దత్త ప్రమేయము "ప్రమేయంలో ప్రమేయం" రూపాన్ని కలిగి యుండే సందర్భాలను కూడా చదువుకుంటాం.

ఇలాంటి సందర్భాలలో పరిపూర్ణంగా అవకలజం చేయటం కొరకు, సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహారం, ప్రమేయంలో ప్రమేయం రూపాలలో ఉన్న వాటికి కొన్ని నియమాలను

ఏర్పాటు చేసుకోవాల్సి వుంటుంది. ఈ నియమాలు తిరిగి బహుపద, బీజగణిత (అకరణీయాలతో కలసి) ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుక్కోవడానికి ఉపయోగపడతాయి.

21.6 ప్రమేయాల కూడిన, తీసివేతల అవకలజాలు

$f(x),\ g(x)$ లు రెండూనూ అవకలనీయ ప్రమేయాలయి $h(x) = f(x) + g(x)$ అయితే $h'(x)$ ఏమవుతుంది?

ఇక్కడ $h(x) = f(x) + g(x)$

x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లో వృద్ధి δy అనుకుందాం.

$$h(x + \delta x) = f(x + \delta x) + g(x + \delta x)$$

కావున
$$h'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x) + g(x+\delta x)][f(x) - g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x) - f(x)] + [g(x+\delta x) - g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} + \frac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x} \right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}$$

లేదా $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

దీని నుంచి రెండు ప్రమేయాల మొత్తం యొక్క అవకలజం, వాటి అవకలజాల మొత్తమునకు సమానమని గ్రహించగలం. 'సంకలన సూత్రం' అంటారు.

ఉదా : $y = x^2 + x^3$

అయితే
$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= 2x + 3x^2$$

కావున $y' = 2x + 3x^2$

సంకలన సూత్రము నుంచి వ్యవకలన సూత్రం కూడా సులభంగా వస్తుంది.

అంటే $h(x) = f(x) - g(x)$

అంటే $h(x) = f(x) - [g(x)]$

$\therefore\ h'(x) = f'(x)\ [-g'(x)]$

$= f'(x) - g'(x)$

అంటే రెండు ప్రమేయాల భేదం యొక్క అవకలజం, వాటి అవకలజాల భేదం అవుతుంది.

సంకలన సూత్రం : $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]+\frac{d}{dx}[g(x)]$

వ్యవకలన సూత్రం : $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]-\frac{d}{dx}[g(x)]$

సంకలన, వ్యవకలన ప్రమేయాల అవకలజాలు

$h(x) = f(x) + g(x)$

$h(x + \delta x) = f(x + \delta x) + g(x + \delta x)$

$$h'(x) = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{[f(x+\delta x)+g(x+\delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\delta x}$$

కావున ఇది వస్తుంది.

$h'(x) = f'(x)+g'(x)$ సంకలన సూత్రం

$h'(x) = f'(x)-g'(x)$ వ్యవకలన సూత్రం

ఉదాహరణ 21.12 : $y = x^2 + x^3$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

సాధన : $y' = \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(x^3)$

$y' = 2x + 3x^2$

ఉదాహరణ 21.13 : $y = 10t^2 + 20t^3$ అయిన $\frac{dy}{dt}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dt} = 10(t^2)' + 20(t^3)'$

$= 10(2t) + 20(3t^2)$

$$\frac{dy}{dt} = 20t + 60t^2$$

ఉదాహరణ 21.14 : $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^3 + x^{-2} - (x^{-1})$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + (-2)x^{-3} - (-1)x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x^{-3} + x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

ఉదాహరణ 21.15 : $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$, $x = 1$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right] = 3x^2 + 6x + 4$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 13.$$

ఉదాహరణ 21.16 : $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 2$ అయిన $f'(x)$ కనుగొనుము.

సాధన : $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 2$ $\boxed{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{d}{dx}\right)x^8 - \frac{1}{6}\frac{d}{dx}(x^6) + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}(x^4) - 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}\times 8.x^{8-1} - \frac{1}{6}6x^{6-1} + \frac{1}{4}.4x^{4-1} - \frac{d}{dx}(2)$$

$$f'(x) = x^7 - x^5 + x^3$$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము

నోట్స్

21.7 ప్రమేయాల లబ్ధం యొక్క అవకలజం

బీజగణిత ప్రక్రియలైన సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహారాల గురించి మీకు అవగాహన ఉండే ఉంటుంది. సంకలన, వ్యవకలన సూత్రాల గురించి తెలుసుకున్న మనం, యిప్పుడు ప్రమేయాల లబ్ధం యొక్క అవకలజాన్ని గురించి నేర్చుకుందాం.

ఉదాహరణ 21.17 : $y = (x^2 + 1)^2$ ను పరిగణిద్దాం. దీనినే

$y = (x^2 + 1)\,(x^2 + 1)$ గా రాద్దాం. ఇప్పుడు దీనికి అవకలజం కనుక్కొనే ప్రక్రియను కనుక్కొందాం.

సాధన : x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లో వృద్ధి δy అనుకుందాం.

$$y+\delta y = [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2+1]$$

$$\delta y = [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2+1]-(x^2+1)(x^2+1)$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2-x^2]+(x^2+1)[(x+\delta x)^2+1]-(x^2+1)(x^2+1)$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2-x^2]+(x^2+1)[(x+\delta x)^2+1-(x^2+1)]$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2-x^2]+(x^2+1)[(x+\delta x)^2-x^2]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = [(x+\delta x)^2+1]\cdot\left[\frac{(x+\delta x)^2-x^2}{\delta x}\right]+(x^2+1)\left[\frac{(x+\delta x)^2-x^2}{\delta x}\right]$$

$$= [(x+\delta x)^2+1]\cdot\left[\frac{2x-\delta x+(\delta x)^2}{\delta x}\right]+(x^2+1)\left[\frac{2x+\delta x+(\delta x)^2}{\delta x}\right]$$

$$= [(x+\delta x)^2+1][(2x+\delta x)+(x^2+1)(2x+\delta x)$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}[(x+\delta x)^2+1].[2x+\delta x]+\lim_{\delta x\to 0}(x^2+1)(2x+\delta x)$$

లేదా $$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)(2x)+(x^2+1).(2x)$$

$$= 4x(x^2+1)$$

విశ్లేషిస్తే, $\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\ (2x) + (x^2+1)\ (2x)$

$x^2 + 1$ అవకలజం $x^2 + 1$ అవకలజం

$y = x^3 \cdot x^2$ ను పరిగణించండి.

$\frac{dy}{dx} = x^3 \cdot (2x) + x^2 \cdot (3x^2)$ అవుతుందా?

సరిచూస్తే $x^3\ (2x) + x^2\ (3x^2)$

$= 2x^4 + 3x^4$

$= 5x^4$

$y = x^3 . x^2$

$= x^5$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4$

సాధారణ రూపంలో ప్రమేయాలయితే, వాటి లబ్ధం యొక్క అవకలజాన్ని నిర్వచిస్తే,

$$\frac{dy}{dx} = [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

[మొదటి ప్రమేయం] + [d/dx రెండో ప్రమేయం] + [రెండో ప్రమేయం] + [d/dx మొదటి ప్రమేయం]

దీన్నే ఈ విధంగా చదువుదాం.

(మొదటి ప్రమేయం) (రెండో ప్రమేయం అవకలజం) + (రెండో ప్రమేయం) (మొదటి ప్రమేయం అవకలజం)

దీనిని **గుణకార నియమం** అంటారు.

గమనిక : ఈ నియమాన్ని రెండు అంతకంటే ఎక్కువ ప్రమేయాల లబ్ధానికి కూడ విస్తరించవచ్చు. $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ లు మూడు ప్రమేయాలయితే

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f(x)g(x)\frac{d}{dx}h(x) + g(x)h(x)\frac{d}{dx}f(x) + h(x)f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

ఉదాహరణ 21.18 : If $f(x)=\frac{x^2-a}{a-2}$ $a\neq 2$. అయితే $f'(x)$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $f(x)=\frac{x^2-a}{a-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-a}{a-2}\right)$

$$=\frac{1}{a-2}\frac{d}{dx}(x^2-a)$$

$$=\frac{1}{a-2}(2x)=\frac{2x}{a-2}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{a-2}$$

ఉదాహరణ 21.19 : $y = (5x - 3)^7$ అయిన y'ను కనుగొనుము.

సాధన : $y' = 7(5x - 3)^{7-1}\ [5\times 1-0] = 7[5x - 3]^6 \times 5$

$y' = 35(5x - 3)^6$.

ఉదాహరణ 21.20 : $y=5x^6(7x^2+4x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

సాధన : రెండూ ప్రమేయాల లబ్ధం

$y = 5x^6\ (7x^2 + 4x)$

$y = f(x)\ g(x) \Rightarrow y' = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

$$\frac{dy}{dx}=5x^6.\frac{d}{dx}(7x^2+4x)+(7x^2+4x)\frac{d}{dx}(5x^6)$$

$$\frac{dy}{dx}=5x^6(14x+4)+(7x^2+4x)(5\times 6x^5)$$

$$\frac{dy}{dx}=70x^7+20x^6+210x^7+120x^6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=280x^7+140x^6$$

ఉదాహరణ 21.21 : $f(x) = (x + 1)(-3x - 7)$ అయిన $f'(x)$ని కనుగొనుము.

సాధన : రెండూ ప్రమేయాల లబ్ధం

$f'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ లబ్ధం సూత్రం

$$f'(x) = (x+1)\frac{d}{dx}(-3x-7) + (-3x-7)\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$f'(x) = (x+1)(-3-0) - 3x - 7(1+0)$$

$$f'(x) = -3x - 3 - 3x - 7$$

$$f'(x) = -6x - 10 = -2(3x + 5)$$

ఉదాహరణ 21.22 : $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ అయిన $f'(x)$ ని కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చిన ప్రమేయము లబ్ధ రూపంలో ఉంది.

$y = f(x)\ g(x)\ h(x)$

$$y' = f(x)g(x)\frac{d}{dx}(hx) + f(x)h(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)h(x)\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$f'(x) = (x-1)(x-2)\frac{d}{dx}(x-3) + (x-1)(x-3)\frac{d}{dx}(x-2) + (x-2)(x-3)\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$f'(x) = (x-1)(x-2)(1) + (x-1)(x-3)(1) + (x-2)(x-3)(1)$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - x + 2 + x^2 - 3x - x + 3 + x^2 - 3x - 2x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

ఉదాహరణ 21.23 : $f(x) = x(x-3)(x^2 + x)$ అయిన $f'(x)$ని కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చిన ప్రమేయము ఈ రూపంలో ఉంది.

$$f'(x) = f(x)g(x)\frac{d}{dx}(hx) + f(x)h(x)\frac{d}{dx}(gx) + f(x)g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

కింది విధంగా సాధించవచ్చు.

$f(x) = x(x - 3)(x^2 + x)$

$$f'(x) = x(x-3)\frac{d}{dx}(x^2+x) + x(x^2+x)\frac{d}{dx}(x-3) + (x-3)(x^2+x)\frac{d}{dx}x$$

$$f'(x) = (x^2-3x)(2x+1) + (x^3+x^2)(1) + (x^3+x^2-3x^2-3x)1$$

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + x^2 - 3x + 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x.$$

21.8 భాగహార నియమం

ఇప్పటివరకు మీరు, రెండు ప్రమేయాల కూడిన లేదా భేదము లేదా గుణకార రూపంలో వున్న ప్రమేయాల అవకలజాలను నిమిత్తం వరసగా సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార సూత్రాలను చదివి యున్నారు. ఇప్పుడు మనం రెండు ప్రమేయాల భిన్న రూపంలో ఉన్న ప్రమేయాలకు అవకలజాన్ని కనుక్కోవడానికి భాగహార సూత్రం గురించి నేర్చుకుందాం.

$$g(x) = \frac{1}{r(x)}, [r(x) \neq 0]$$

మూల సూత్రం ద్వారా $g(x)$ అవకలజం కనుక్కుందాం.

$$g(x) = \frac{1}{r(x)}$$

$$g'(x) = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\frac{1}{r(x+\delta x)} - \frac{1}{r(x)}}{\delta x}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{r(x) - r(x+\delta x)}{\delta(x) r(x) r(x+\delta x)}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{r(x) - r(x+\delta x)}{\delta x}\right] \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{r(x)\cdot r(x+\delta x)}$$

$$= -r'(x)\frac{1}{[r(x)]^2} = \frac{r'(x)}{[r(x)]^2}$$

$\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ రూపంలో ఉండే $f(x)$, $g(x)$ అనే రెండు ప్రమేయాలను పరిగణిద్దాం.

$\phi(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ గా రాస్తే,

$$\phi(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left[\frac{-g(x)}{[g(x)]^2}\right]$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

= (హారము) (లవము యొక్క అవకలజం)

– (లవము) (హారము యొక్క అవకలజం) / (హారము)^2

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

దీనిని "భాగహారం సూత్రము" అంటారు. $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right] = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}}$

ఉదాహరణ 21.24 : $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-1}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$ అయితే $f'(x)$ ను కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ భాగహార పద్ధతి $\dfrac{u}{v}$ రూపంలో ఉంది.

$$f(x) = u.v \Rightarrow f'(x) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{4x+3}{2x-1} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(4x+3)' - (4x+3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10}{(2x-1)^2}$$

ఉదాహరణ 21.25 : $f(x)=\frac{4x+3}{(2x-1)},\ x\neq\frac{1}{2}$ అయితే $f'(x)$ కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చిన ప్రమేయం భాగహార రూపంలో కలదు.

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$y=\frac{4x+3}{2x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(4x+3)-(4x+3)\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-1)(4)-(4x+3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-4-8x-6}{(2x-1)^2}=\frac{-10}{(2x-1)^2}.$$

ఉదాహరణ 21.26 : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^3+4}$ అయితే $f'(x)$ ను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన ప్రమేయం భాగహార రూపంలో కలదు.

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(gx)^2}$$

$$y=\frac{\sqrt{x}}{x^3+4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+4)\frac{d}{dx}(\sqrt{x})-(\sqrt{x})\frac{d}{dx}(x^3+4)}{(x^3+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-(\sqrt{x})\ (3x^2)}{(x^3+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^3+4}{2\sqrt{x}}-\frac{3x^2(\sqrt{x})}{1}}{(x^3+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+4-6x^2(x)}{2\sqrt{x}(x^3+4)^2} = \frac{x^3-6x^3+4}{2\sqrt{x}(x^3+4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-5x^3}{2\sqrt{x}(x^3+4)^2}$$

21.9 గొలుసు సూత్రం

ఇంతకు పూర్వము ఒక రకమైన ప్రమేయము $\sqrt{x^4+8x^2+1}$. ఈ విధంగా ఉండేది దీనిని, రెండు ప్రమేయాల మొత్తం, భేదం, లబ్ధము, విభక్త రూపంలో అవకలజంను కనుగొనలేము. ఈలాంటి ప్రమేయాలను గొలుసు నియమము ద్వారా సాధించవచ్చు.

$t = x^4+8x^2+1$ గా ప్రతిక్షేపణ చేసి, $y = \sqrt{x^4+8x^2+1}$ ను $y = \sqrt{t}$ గా రాద్దాం. దీని మూలంగా y అనేది t లో ప్రమేయం, t అనేది x లో ప్రమేయం అవుతాయి.

t లోని వృద్ధి δt కు అనుగుణంగా y లో వృద్ధి δy అనుకుంటే $\delta x \to 0$ అయినప్పుడు $\delta y \to 0$ అవుతుంది.

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta t}$$

ఈ విధంగానే $\delta x \to 0$ అయినప్పుడు $\delta y \to 0$ అవుతుంది.

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x}$$

కావున, ఈ రెండింటి నుంచి $\delta x \to 0$ అయినప్పుడు $\delta y \to 0$ అవుతుంది.

(i), (ii)ల నుంచి

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta t}\right]\left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x}\right]$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

కాబట్టి $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

దీనిని గొలుసు నియమం లేదా గొలుసు సూత్రం అంటారు.

ఉదాహరణ 21.27 : $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

or $y = \sqrt{t}$ where $t = x^4 + 8x^2 + 1$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}}$ దీనిని గొలుసు సూత్రం అంటారు.

$y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$; $y = \sqrt{t}$ ఇక్కడ $t = x^4 + 8x^2 + 1$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ మరియు $\frac{dt}{dx} = 4x^3 + 16x$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(4x^3 + 16x)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3 + 16x}{2\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}}\right) = \frac{2x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}}.$$

ఉదాహరణ 21.28 : $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sqrt{t}$ $t = x^4 + 8x^2 + 1$

$y = \sqrt{t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$,

$t = x^4 + 8x^2 + 1$

$$\frac{dt}{dx} = 4x^3 + 16x + 0 = 4x^3 + 16x$$

కాని $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (4x^3 + 16x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + 16x}{2\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}}$$

ఉదాహరణ 21.29 : $y = at^2$, $t = \frac{x}{2a}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = at^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2at$ ...(i)

$$t = \frac{x}{2a} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2a}$$ ...(ii)

(i), (ii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = 2at \times \frac{1}{2a} = t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = t = \frac{x}{2a}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a}}$$

ఉదాహరణ 21.30 : $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ గొలుసు సూత్రంను ఉపయోగించి y' ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \left[\frac{(1-x)\frac{d}{dx}(1+x) - (1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sqrt{1+x})\,(1-x)^{3/2}}$$

21.10 ఒక ప్రమేయానికి రెండో తరగతి అవకలజాలు

$y = f(x)$ ఒక ప్రమేయం అనుకుందాం. దీని అవకలజం $\frac{dy}{dx}$ అనేది ఒక అవకలనీయ ప్రమేయం అయితే $\frac{dy}{dx}$ యొక్క అవకలజాన్ని $y = f(x)$ నకు x దృష్ట్యా రెండో తరగతి

అవకలజం అని $\frac{d^2y}{dx^2}$ తో సూచిస్తాం. ఈ రెండో తరగతి అవకలజాలకు ఇతర సంకేతాలు $D^2,\ f'',y'',y_2....$ వగైరాలు.

గమనిక : $f''(x)=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right]$ ద్వారా x వద్ద f'' విలువ కనుక్కుంటారు.

ఈ విధంగానే మూడవ, నాల్గవ ... తరగతుల అవకలజాలను నిర్వచించవచ్చు.

x దృష్ట్యా యొక్క రెండో తరగతి అవకలజం అంటే

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

ఉదాహరణ 21.31 : రెండో తరగతి అవకలజాలను కనుక్కోండి.

(i) x^2 (ii) x^3+1 (iii) $y=\frac{x+1}{x-1}$

సాధన : (i) $y=x^2$, అయితే $\frac{dy}{dx}=2x$

మరియు $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(2x)=2\cdot\frac{d(x)}{dx}$

$=2.1=2$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=2$

(ii) $y=x^3+1$ అయితే

$\frac{dy}{dx}=3x^2$ (సంకలన సూత్రము ద్వారా మరియు స్థిరరాశి అవకలజం సున్న)

మరియు $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(3x^2)=3.2x=6x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=6x$

iii) $y = \frac{x+1}{x-1}$ అయితే y'' ను కనుగొనుము.

$$y' = \frac{(x-1)(x+1)' - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{(x-1)(1) - (x+1)1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right] = -2\left[(x-1)^2\right]^{-1}$$

$$= (-2)\ [-2]\ (x-1)^{-2-1} \times (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

ఉదాహరణ 21.32 : $y = (x^2+1)(x-1)$ అయితే y'' ను కనుగొనుము

Sol. $\frac{dy}{dx} = x^2+1\left(\frac{d}{dx}\right)(x-1) + (x-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)(1) + (x-1)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 1$$

and $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(3x^2-2x+1)$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 6x-2}$$

ఉదాహరణ 21.33 : $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ అయిన $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ ఇచ్చినది $\frac{f(x)}{g(x)}$ రూపంలో ఉంది.

$$y' = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)\ f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$y' = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x^2+1) - (x^2+1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+1)^2.\frac{d}{dx}(x^2+2x-1) - (x^2+2x-1)\frac{d}{dx}(x+1)^2}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+1)^2(2x+2) - (x^2+2x-1)2(x+1).1}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x+1)\left[x^2+1+2x-x^2-2x+1\right]}{(x+1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(x+1)^3}.$$

ముఖ్య సూత్రాలు

1. $f'(x) = \underset{\delta x \to}{\text{Lt}} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ $\delta x > 0$
2. స్థిర ప్రమేయం అవకలజం సున్న $\frac{dc}{dx} = 0$

3. న్యూటన్స్ పవర్ సూత్రం

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

4. $\frac{d}{dx}[C.f(x)] = C.f'(x)$

5. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$

6. $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

8. $\frac{d}{dx}[f\{g(x)\}] = f'(x)g(x).\frac{d}{dx}[g(x)]$

9. $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$.

ఉదాహరణ 21.34 : $y = \frac{1}{x^2+3x+1}$ అయిన y' ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \frac{1}{x^2+3x+1} \Rightarrow (x^2+3x+1)^{-1}$

$y = (x^2+3x+1)^{-1}$

$y' = -1(x^2+3x+1)^{-1-1}\ [2x+3+0]$

$y' = -1(x^2+3x+1)^{-2}\ (2x+3) = \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$

$y' = \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము

నోట్స్

అభ్యాసం 21.1

1. $y = \sqrt{x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

2. $y = 12$ tఅయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

3. $y = 2x^3 - 3x^2$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

4. $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},\ x \neq 0$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

5. $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

6. $y = 16x + 2$ అయిన $y'(0),\ y'(3),\ y'(8)$లను కనుగొనుము.

7. $y = \frac{ax+b}{cx+d},\ x \neq \frac{-d}{c}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

8. $y = x + \frac{1}{x},\ x \neq 0$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

9. $y = x^2 + x^3$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

10. $y = 10t^2 + 20t^3$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

11. S = $4.9t^2 + 2.4$ మరియు $t = 1,\ t = 5$ వద్ద $\frac{ds}{dt}$ విలువలను కనుగొనుము.

12. $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ the అయితే $x = 1$ వద్ద $\frac{dy}{dx}$ విలువ ఎంత?

13. $f(x) = \frac{2}{5}x^{2/3} - x^{\frac{-4}{5}} + \frac{3}{x^2}$ అయితే $f'(x)$ ని కనుగొనుము.

14. $y = (x - 1)\ (x - 2)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

15. $y = \frac{3x-2}{x^2+x-1}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

16. $y = \frac{1}{\sqrt{7-3x^2}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

17. $y = x^3 + 1$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

18. $y = \sqrt{x^2+1}$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

అభ్యాసం 21.2

1. మూల సూత్రం నుండి x^2 యొక్క అవకలజం కనుగొనండి.

2. మూల సూత్రం నుండి $\frac{1}{x}$ యొక్క అవకలజం కనుగొనండి.

3. $y = (2x + 3)(5x^2 - 7x + 1)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

4. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

5. $f(x) = \frac{4x+3}{2-x}$ అయితే $f'(x)$ ను కనుగొనుము.

6. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ అయితే $f'(x)$ ను కనుగొనుము.

7. $y = \sqrt[3]{x^2+5x-7}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

8. $y = x+\sqrt{x^2+8}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

9. $y = x^3 + 1$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ను కనుగొనుము.

10. $y = \sqrt{x^2+1}$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ను కనుగొనుము.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http : //www.wikipedia.org
- http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. ఒక కారు 't' సెకండ్స్ కాలములో s మీటర్లు ప్రయాణం చేసింది. అయితే వాటి మధ్య సంబంధము $s = t^2$ అయితే సమస్యను సాధించుము.

   (a) t కాలంలో కారు, దూరంలోని మార్పు రేటును

   (b) $t = 3$ సెకండ్సు అయినప్పుడు కారు వేగము.

2. అవకలజం ప్రాథమిక సూత్రం నుంచి కింది ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుక్కోండి.

   (a) $2x^2 + 5$ (b) $x^3 + 3x^2 + 5$ (c) $(x - 1)^2$

3. కింది ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుగొనుము.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

   (b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

   (c) $f(x) = \frac{x^2 - a}{a - 2}, a \neq 2$

   (d) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{10}{x^3}$

   (e) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}$

   (f) $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}$

(g) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 5}{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{(x^3 + 1)(x - 1)}{x^2}$

4. గొలుసు నియమాన్ని ఉపయోగించి కింది ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుగొనుము.

(a) $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (b) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

5. కింది ప్రమేయాల రెండో పరిమాణం అవకలజాలను కనుగొనుము.

(a) $\sqrt{x+1}$ (b) $x\sqrt{x-1}$

జవాబులు

అభ్యాసం 21.1

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. 0

3. $6x^2 - 6x$

4. $3x^2 - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$

5. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

6. 16, 16, 16

7. $\dfrac{ab - bc}{(cx + d)^2}$

8. $1-\frac{1}{x^2}$

9. $2x + 3x^2$

10. $20t + 60t^2$

11. 9.8 ; 49

12. $3x^2 + 6x + 4$; 13

13. $\frac{4}{15}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{4}{5}x^{\frac{-9}{5}}-6x^3$

14. $2x - 3$

15. $\frac{-3x^2+4x-1}{(x^2+x+1)^2}$

16. $3x(7 - 3x^2)^{-3/2}$

17. $6x$

18. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

అభ్యాసం 21.2

1. $2x$

2. $\frac{-1}{x^2}$

3. $30x^2 + 2x - 19$

4. $30x^2 - 12x + 11$

5. $\frac{-2}{(2x-1)^2}$

6. $\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$

7. $\frac{1}{3}\left[x^2+5x-7\right]^{-2/3}(2x+5)$

8. $1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

9. $6x$

10. $\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) $2t$

   (b) 6 seconds

2. (a) $4x$

   (b) $3x^2 + 6x$

   (c) $2(x - 1)$

3. (a) $3x^2 - 6x + 5$

   (b) $1-\frac{1}{x^2}$

   (c) $\frac{2x}{a-2}$

(d) $\frac{-6}{(x-1)^3}-\frac{30}{x^4}$

(e) $\frac{-4x^3}{(1-x^4)^2}$

(f) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^{3/2}}$

(g) $3+\frac{5}{x^2}$

(h) $3x^2-2-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}$

4. (a) $1-\frac{1}{x^2}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{1+x}(1-x)^{3/2}}$

5. (a) $-\frac{1}{4(x+1)^{3/2}}$

(b) $\frac{2+x-x^2}{4(x-1)^{1/2}}$

అధ్యాయం
22

త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగలిగిన విషయాలు

- మూల సూత్రం నుండి త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనం
- గుణకార, భాగహార మరియు గొలుసు నియమాలను ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల అవకలనం
- రెండో తరగతి అవకలజాలు
- త్రికోణమితీయ కోణాలు, వాటి నిష్పత్తికి సంబంధించిన జ్ఞానం
- i) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \sin x = 0$ ii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\sin x}{x} = 1$

  iii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \cos x = 1$ iv) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{\tan x}{x} = 1$
- అవకలనాలు మరియు నియమాలు వాటి నిర్వచనం ద్వారా ప్రమేయపు అవకలజాలను కనుగొనవచ్చు.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంబంధాలు, ప్రమేయాలు, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు ఘాత ప్రమేయాలు మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాలు.

పరిచయం

గణితశాస్త్రంలోని భాగాలయిన కలన గణితం, సదిశలు, త్రిపరిమాణ నిరూపక జ్యామితి, సరళ మరియు హరాత్మక ప్రమేయాలు వగైరాలన్నింటిని అధ్యయనం చేసే అవకాశాన్ని త్రికోణమితి భాగం కలుగజేస్తుంది. ఇంకనూ, నిర్దేశించబడిన పరిధిలో విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల గురించి చదవడం కూడ సంభవమే.

ఇప్పటివరకు నేర్చుకున్న అవకలన సూత్రాలన్ని త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు వర్తిస్తాయా అన్నది ఇక్కడ ఉదయించే ప్రశ్న.

త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు సంబంధించిన అవకలన ప్రక్రియ, అవకలన సూత్రాలు, ఫలితాలు రాబట్టడమనే ప్రతిపాదనను ఈ పాఠంలో అవకలంభిస్తాం. ఈ సందర్భంగా, త్రికోణమితీయ విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను 'రేడియన్ మానంలోనే' వ్యవహరిస్తాం.

22.1 మూల సూత్రాల నుండి త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలజాలు

ఉదాహరణ 22.1 : $y = \sin x$ అనుకొందాము. x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లో వృద్ధి δy అనుకుందాము.

$$y + \delta y = \sin(\delta x + x)$$

$$\delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x$$

$$= 2\cos\left[x + \frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2} \qquad \left[\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = \cos x.1 \qquad \left[\because \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}\right]$$

కావున $\frac{dy}{dx} = \cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

ఉదాహరణ 22.2 : $y = \cos x$ అనుకొందాము. x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లో వృద్ధి δy అనుకుందాము.

$$y + \delta y = \cos(x + \delta x)$$

$$\delta y = \cos(x+\delta x) - \cos x$$

$$= -2\sin\left[x+\frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= -\sin x.1$$

కావున $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ఉదాహరణ 22.3 : $y = \tan x$ అనుకొందాము. x లోని వృద్ధి δx కు అనుగుణంగా y లో వృద్ధి δy అనుకుందాము.

$$y + \delta y = \tan(x + \delta x)$$

$$\delta y = \tan(x + \delta x) - \tan x$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x).\cos x - \sin x.\cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\sin[(x+\delta x)-x]}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\sin \delta x}{\cos(x+\delta x).\cos x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin \delta x}{\delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin \delta x}{\delta x} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin \delta x}{\delta x} = 1\right]$$

$$= \sec^2 x$$

కావున $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

ఈ విధంగా 1. $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$

2. $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$

3. $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x}$

ఉదాహరణ 22.4 : $y = \cot x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y + \delta y = \cot(x + \delta x) = \delta y = \cot(x + \delta x) - \cot x.$

$$\delta y = \frac{\cos(x+\delta x)}{\sin(x+\delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos(x+\delta x)\sin x - \cos x \sin(x+\delta x)}{\sin x\,(x+\delta x)}$$

$$\delta y = \sin(x - x - \delta x) \times \frac{1}{\sin x\, \sin(x+\delta x)}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{-\sin \delta x}{\delta x} \times \frac{1}{\sin x\, \sin(x+\delta x)}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ఉదాహరణ22.5 : $y =$ $\tan 2x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \tan 2x \Rightarrow y + \delta y = \tan 2(x + \delta x)$

$$\delta y = \tan 2(x + \delta x) - \tan 2x$$

$$\delta y = \frac{\sin 2(x+\delta x)}{\cos 2(x+\delta x)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin 2(x+\delta x)\cos 2x - \sin 2x \cos 2(x+\delta x)}{\delta x . \cos 2x \cos 2(x+\delta x)}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} 2 \,.\, \frac{\sin \delta x}{\delta x} \times \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\cos 2x \cos 2(x+\delta x)}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} 2 \,.\, \frac{\sin \delta x}{\delta x} \times \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\cos 2x \cos 2(x+\delta x)} \qquad \boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 . \frac{1}{\cos^2 2x} = 2 \sec^2 2x$$

ఉదాహరణ 22.6 : $y = \sec 3x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y + \delta y = \sec 3(x + \delta x)$

$$\delta y = \sec 3(x+\delta x) - \sec 3x$$

$$\delta y = \frac{1}{\cos 3(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos 3x}$$

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos 3x - \cos 3(x+\delta x)}{\delta x . \cos 3x \cos 3(x+\delta x)}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos 3x - \cos 3(x+\delta x)}{\delta x} \cdot \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos 3x \cos 3(x+\delta x)}$$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{-2 \sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{3\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{3\delta x}{2}\right)\frac{2}{3}} \times \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos 3x \cos 3(x+\delta x)}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{-2 \sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right)\left(-\sin\frac{3\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{3\delta x}{2}\right)\frac{2}{3}} \times \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos 3x \cos 3(x+\delta x)}$$

$$= \underset{\frac{3\delta x}{2} \to 0}{\text{Lt}} 2 \sin\left(3x + \frac{3\delta x}{2}\right) \times \frac{3}{2} \times \underset{\frac{3\delta x}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\frac{3\delta x}{2}}{\frac{3\delta x}{2}} \times \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos 3x \cos 3(x+\delta x)}$$

$$= 2 \sin 3x \times \frac{3}{2} \times 1 \times \frac{1}{\cos^2(3x)}$$

$$= \frac{3 . \sin 3x}{\cos^2 3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 . \sin 3x}{\cos^2 3x} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = 3 \tan 3x \sec^2 3x}$$

ఉదాహరణ 22.7 : మూల సూత్రం నుండి $\sec^2 x$ యొక్క అవకలజంను కనుగొనండి.

సాధన : $y = \sec^2 x$

$$y + \delta y = \sec^2(x + \delta x)$$

$$\delta y = \sec^2(x + \delta x) - \sec^2 x$$

$$\delta y = \frac{1}{\cos^2(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\delta y = \frac{\cos^2 x - \cos^2(x+\delta x)}{\cos^2 x \cos^2(x+\delta x)}$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x+x)\ \sin(x+\delta x-x)}{\cos^2 x \cos^2(x+\delta x)}$$

$$\delta y = \frac{\sin(2x+\delta x)\ \sin \delta x}{\cos^2 x \cos^2(x+\delta x)}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin(2x+\delta x)\ \sin \delta x}{\cos^2 x \cos^2(x+\delta x)\delta x}$$

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(2x+\delta x)\ \sin \delta x}{\cos^2 x \cos^2(x+\delta x)\delta x}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(2x+\delta x)}{\cos^2 x \cos^2(x+\delta x)} \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \delta x}{\delta x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos^2 x . \cos^2 x} \times 1$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x \cos^2 x} = 2 \tan x \sec^2 x$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx}(\sec^2 x) = 2 \tan x \sec^2 x}$$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

ముఖ్యసూత్రాలు

1. i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

   iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ iv) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

   v) $\frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \cot x$ v) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

2. Differentiate with respect to the 'x'

   i) $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos \frac{dy}{dx}$ ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin u \frac{du}{dx}$

   iii) $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ iv) $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\text{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

   v) $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

   vi) $\frac{d}{dx}(\text{cosec } u) = -\text{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

3. i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

   iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

   v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

   vi) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

4. i) 2 sin A cos B = sin(A + B) + sin (A – B)

   ii) 2 cois A sin B = sin (A + B) – sin (A – B)

   iii) 2 sinA sin B = cos(A – B) – cos (A + B)

iv) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

v) $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

vi) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

vii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

viii) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

ix) $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$.

22.2 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలజాలు

ఇప్పటివరకు మీరు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలజాలను మూలసూత్రాల ద్వారా ఏవిధంగా కనుక్కోవచ్చునో తెలిసికొనియున్నారు. ఆ విధంగానే ప్రమేయంలో ప్రమేయం రూపంలో ఉన్న ప్రమేయాలకు యితర పద్ధతుల ద్వారా అవకలజం కనుక్కోవటం కూడా తెలిసికొని యున్నారు. ఈ అవకలజాలకు సంబంధించి మరికొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 22.8 : $y = \tan\sqrt{x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \tan\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2\sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}$$

ఉదాహరణ 22.9 : $y = \pi \cot 3x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

సాధన: $y = \pi \cot 3x$

$$\frac{dy}{dx} = -\pi \cot 3x \operatorname{cosec} 3x \frac{d}{dx}(3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3\pi \cot 3x \operatorname{cosec} 3x$$

ఉదాహరణ 22.10 : $y = x^4 \sin 2x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^4 \sin 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^4 \frac{d}{dx}(\sin 2x) + \sin 2x \frac{d}{dx}(x^4)$

$$\frac{dy}{dx} = x^4(2\cos 2x) + 4\ x^3 \sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3(x\cos 2x + 2\sin 2x)$$

ఉదాహరణ 22.11 : $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము

సాధన : $y = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$$y = \tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

ఉదాహరణ 22.12 : $y = \frac{\sin x}{x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

ఉదాహరణ 22.13 : $y = \sqrt{\sin^3 x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sqrt{\sin^3 x} = (\sin^3 x)^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin^3 x)^{\frac{1}{2}-1}\left[\frac{d}{dx}(\sin^3 x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^3 x)^{-\frac{1}{2}}\ 3\sin^2 x.\cos x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x}} \times\ 3\sin^2 x.\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\ \cos x\ .$$

ఉదాహరణ 22.14 : $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}}$$

$$y = \frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$y = \sec x - \tan x$

'x' దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \sec x\tan x - \sec^2 x = \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - 1}{1-\sin^2 x} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\sin x}}$$

ఉదాహరణ 22.15 : $x = a\cos^3\theta;\ y = a\sin^3\theta$ అయిన $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ని కనుగొనుము

సాధన : $x = a\cos^3\theta;\ y = a\sin^3\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\ .\ \sin\theta;\qquad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\ .\ \cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$ (గొలుసు సూత్రం ఉపయోగించి)

$$\frac{dy}{dx} = 3a\sin^2\theta\cos\theta \times \frac{-1}{3a\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\tan\theta}$$

ఉదాహరణ 22.16 : $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x + \cos x)(-\sin x) - \cos x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x} = \frac{-1}{1 + \sin 2x}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + \sin 2x}}$$

ఉదాహరణ 22.17 : $y = \sin^m x \cos^n x$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము..

సాధన : $y = \sin^m x \cos^n x$ లబ్ధ సూత్రం ఉపయోగించి

$$y' = (\sin^m x)(\cos^n x)' + (\cos^n x)(\sin^m x)'$$

$$y' = (\sin^m x)\left[n\cos^{n-1}x(-\sin x)\right] + \cos^n x[m\sin^{m-1}x.\cos x]$$

$$y' = -n\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x + m\cos^{n+1}x\sin^{m-1}x$$

$$y' = m\cos^{n+1}x\sin^{m-1}x - n\sin^{m+1}x + \cos^{n-1}x$$

ఉదాహరణ 22.18 : $x = 2\cos t + \cos 2t + 1; \quad y = 2\sin t + \sin 2t$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $x = 2\cos t + \cos 2t + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2(\sin t + \sin 2t)$

$$y = 2\sin t + \sin 2t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2\cos t + 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{2(\cos t + \cos 2t)}{-2(\sin t + \sin 2t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\cos t + \cos 2t)}{\sin t + \sin 2t}$$

ఉదాహరణ 22.19 : $x = 2e^{-t}; \; y = 4e^{-t}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{(dy/dt)}{(dx/dt)} \Rightarrow x = 2e^{-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2e^{-t}.$

$$y = 4e^{t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4e^{t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4t}{-2e^{-t}} = -2e^{2t}.$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = -2e^{2t}}$$

ఉదాహరణ 22.20 : $\sin y = x \sin (a + y)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $\sin y = x \sin (a + y)$ ...(i)'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా వచ్చునది

$$\cos y \frac{dy}{dx} = \sin(a+y).1 + x\cos(a+y)\frac{dy}{dx}$$

$$\left[\cos y - x\cos(a+y)\right]\frac{dy}{dx} = \sin(a+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a+y)}{\left[\cos y - x\cos(a+y)\right]}$$

(i) నుండి $x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a+y)}{\cos y - \frac{\sin y}{\sin(x+y)} \cdot \cos(x+y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\cos y \sin(a+y) - \sin y \cos(a+y)}$$

$\therefore$ sin AcosB – cos A sin B = sin(A – B)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin(a+y-y)} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}}$$

ఉదాహరణ 22.21 : $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+....\infty}}}$ అయిన $(2y-1)\frac{dy}{dx} = 1$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \sqrt{x+y} \Rightarrow y^2 = x+y$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \boxed{\therefore (2y-1)\frac{dy}{dx} = 1}$$

ఉదాహరణ 22.22 : $x = 3\cot t - 2\cot^3 t$; $y = 3\sin t - 2\sin^3 t$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుక్కోండి.

సాధన : $y = 3\sin t - 2\sin^3 t$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 2\times 3\sin^2 t.\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 6\sin^2 t\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t\,(1-2\sin^2 t) \qquad ...(1)$$

$x = 3\cos t - 2\cos^3 t$

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t - 6\cos^2 t(-\sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t(1-2\cos^2 t) \qquad ...(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} = \frac{3\cos t(1-2\sin^2 t)}{-3\sin t(1-2\cos^2 t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cot t(1-2\sin^2 t)}{1-2(1-\sin^2 t)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cot t(1-2\sin^2 t)}{-(1-2\sin^2 t)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \cot t}$$

ఉదాహరణ 22.23 : $x = a\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]$, $y = \frac{2bt}{1+t^2}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుక్కోండి.

సాధన : $y = \frac{2bt}{1+t^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2b(1+t^2)-(2t)[2bt]}{(1+t^2)^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2b[1+t^2-2t^2]}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2b[1-t^2]}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore\ x = a\left[\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = a\left\{\frac{(1+t^2)(-2t)-(2t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right\}$$

$$\frac{dx}{dt} = a\left[(-2t)\frac{2}{(1+t^2)^2}\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \times \frac{(1+t^2)^2}{-4at}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b(1-t^2)}{2at}$$

ఉదాహరణ 22.24 : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ అని చూపుము.

సాధన : $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$

Put $x = \sin\theta$, $y = \sin\alpha$

$$\sqrt{1-\sin^2\theta} + \sqrt{1-\sin^2\alpha} = a(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$\cos\theta + \cos\alpha = a(\sin\theta - \sin\alpha)$$

$$\therefore \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2} = a\left[2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right]$$

$$\cos\frac{\theta-\alpha}{2} = a\sin\frac{\theta-\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{a} = \tan\frac{\theta-\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta-\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\theta - \alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\alpha = \theta - 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\sin^{-1} y = \sin^{-1} x - 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}}$$

22.3 మూల సూత్రాల ద్వారా విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలజాలు

ఇప్పుడు మనం ప్రాథమిక విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలయినట్టి $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ లకు మూల సూత్రాల ద్వారా అవకలజాలను కనుక్కుందాం.

ఉదాహరణ 22.25 : మొదటగా x దృష్ట్యా $\sin^{-1} x$ అవకలజాన్ని మూల సూత్రాల ద్వారా $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ గా కనుగొందాం.

$y = \sin^{-1} x$ అనుకుంటే, $x = \sin y$ మరియు $x + \delta x = \sin(y + \delta y)$ అవుతాయి.

ఇంకనూ $\delta x \to 0$ అయితే $\delta y \to 0$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు $\delta x = \sin(y + \delta y) - \sin y$

$$1 = \frac{\sin(y+\delta y) - \sin y}{\delta x} \quad (\delta x \text{ చేత యిరువైపులా భాగించగా})$$

లేదా $1 = \dfrac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}\cdot\dfrac{\delta y}{\delta x}$

$$1 = \lim_{\delta y\to 0}\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} \quad (\delta x \to 0 \text{ అయితే } \delta y \to 0)$$

$$= \left[\lim_{\delta y\to 0} = \frac{2\cos\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta y}\right]\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ఉదాహరణ 22.26 : $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \cos^{-1}x \Rightarrow \cos y = x \Rightarrow x+\delta x = \cos(y+\delta y)$

As $\delta x \to 0,\ \delta y \to 0$

$x + \delta x = \cos(y + \delta y) \Rightarrow \delta x = \cos(y + \delta y) - x$

$\delta x = \cos(y + \delta y) - \cos y$

$1 = \dfrac{\cos(y+\delta y)-\cos y}{\delta x}$ divide by both δx.

$1 = \dfrac{\cos(y+\delta y)-\cos y}{\delta y}\cdot\dfrac{\delta y}{\delta x}$

$1 = \underset{\delta x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\cos(y+\delta y)-\cos y}{\delta y}\ \underset{\delta x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\delta y}{\delta x}$ $[\because \delta y \to 0 \text{ when } \delta x \to 0]$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

$$1 = \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{2\sin\left(\frac{y+\delta y+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-(\delta y+y)}{2}\right)}{\delta y} \right] \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = \lim_{\delta x \to 0} - \left[\frac{2\sin\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)\sin\frac{\delta y}{2}}{\delta y} \right] \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = -(\cos y)\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

ఉదాహరణ 22.27 : $\frac{d}{dx}(\text{Tan}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \tan^{-1} x \Rightarrow$ అయితే $x = \tan y \Rightarrow x + \delta x = \tan(y + \delta y)$

As $\delta x \to 0,\ \delta y \to 0$

$$\delta x = \tan(y + \delta y) - \tan y$$

ఇరువైపుల δx తో భాగించుము.

$$1 = \frac{\tan(y+\delta y)-\tan y}{\delta x} \times \frac{\delta y}{\delta y}$$

$$1 = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\tan(y+\delta y)-\tan y}{\delta y} \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \quad [\because \delta y \to 0 \text{ when } \delta x \to 0]$$

$$1 = \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\frac{\sin(y+\delta y)}{\cos(y+\delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y}}{\delta y} \right] \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin(y+\delta y)\cos y - \cos(y+\delta y)\sin y}{\delta y \,.\, \cos(y+\delta y)\cos y}$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \cdot \underset{\delta y \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(y+\delta y - y)}{\delta y \cdot \cos(y+\delta y)\cos y}$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \cdot \underset{\delta y \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{\sin \delta y}{\delta y} \cdot \frac{1}{\cos(y+\delta y)\cos y} \right]$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx} \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ఈ విధంగా $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

22.4 విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలజాలు

ఇప్పటి వరకు విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలజాలను మూల సూమరతాల ద్వారా కనుక్కోవటం నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతుల ద్వారా వీటి అవకలజాలను కనుక్కుందాము

ఉదాహరణ 22.28 : $\sin^{-1} x$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sin^{-1} y$

$\therefore\ x = \sin y$

y దృష్ట్యా అవకలజం చేస్తే, $\frac{dx}{dy} = \cos y$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-\sin^2 y}$$



లేదా $$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left[\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[\sin^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ఈ విధంగానే

$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1} x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$ అని చూపవచ్చు.

ఉదాహరణ 22.29 : $y = \tan^{-1}x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనండి.

సాధన : $y = \tan^{-1}x \Rightarrow x = \tan y$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dy}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ఈ విధంగా $\frac{d}{dy}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

ఉదాహరణ 22.30 : $y = \sec^{-1}x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $x = \sec y$ 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y \left[\pm\sqrt{\sec^2 y - 1}\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm \sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

ఈ విధంగానే $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

ఉదాహరణ 22.31 : $y = \cos^{-1}x$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \cos^{-1}x$ $'x'$ దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$ వస్తుంది.

$$\frac{dy}{dx} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$'x'$ దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలనం చేయగా వచ్చునది.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{-1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}[0-2x]\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{-1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)\right]$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

ఉదాహరణ 22.32 : $y = \sin^{-1}x$, అయితే $(1 - x^2)y^2 - xy_1 = 0$ అని చూపుము.

y_2, y_1 అనేవి రెండో తరగతి, మొదటి తరగతులను అవకలజాలను సూచిస్తుంది. y ని $'x'$ దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

సాధన : $y = \sin^{-1}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 0 \qquad ...(1)$$

మరల ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$(1-x^2), 2y_1 \frac{d}{dx}(y_1) + (-2x)y_1^2 = 0$$

$$(1 - x^2)\ 2y_1y_2 - 2x\,y_1^2 = 0$$

$$2y_1[(1 - x^2) - y_2 - xy_1] = 0$$

$$(1 - x^2)\ y_2 - xy_1 = 0.$$

ఉదాహరణ 22.33 : $y = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

Let $x\cos\theta$ say $\theta = \cos^{-1} x$

$$y = \cos^{-1}[4\cos^3\theta - 3\cos\theta] = \cos^{-1}[\cos 3\theta]$$

$$y = 3\theta = 3\cos^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

ఉదాహరణ 22.34 : $y = \sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{4}\right)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{4}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{4}\right)^2}}\left(\frac{3.1}{4} - 0\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16-(3x-1)^2}{16}}} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{16-9x^2-1+6x}}\ \frac{3}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{15+6x-9x^2}}$$

ఉదాహరణ 22.35 : $y = \sin h^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $u = \frac{1-x}{1+x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1+x)(-1) - (1-x)(1)}{(1+x)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2}{(1+x)^2} \qquad ...(1)$$

$$y = \sinh^{-1}(u) \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1+4^2}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1} + \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)^2 + (1-x)^2}{(1+x)^2}}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1+x}{\sqrt{2+(1+x^2)}} = \frac{1+x}{\sqrt{2}\ (\sqrt{1+x^2})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1+x}{\sqrt{2}(\sqrt{1+x^2})} \times \frac{-2}{(1+x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}.$$

ఉదాహరణ 22.36 : $y = \tan^{-1}\left[\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}\right]$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{3a^2(a\tan\theta) - a^3\tan^3\theta}{a(a^2 - 3a^2\tan\theta)}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{a^3[3\tan\theta - \tan^3\theta]}{a^3(1-\tan^2\theta)}\right] \qquad \because \left[\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}\right]$$

$$y = \tan^{-1}[\tan 3\theta]$$

$$y = 3\theta \Rightarrow 3.\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,.\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \times \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3a}{a^2+x^2}}$$

ఉదాహరణ 22.37 : $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$$y = \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$y = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

$$y = 2\theta \Rightarrow 2.\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

ఉదాహరణ 22.38 : $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\ \cos\theta/2}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\tan\frac{\theta}{2}\right] = \frac{\theta}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}[\theta] = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

ఉదాహరణ 22.39 : $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

$$\therefore 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

సాధన : $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right]$

$$y = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}[x]$$

diff w.r.t 'x'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

ఉదాహరణ 22.40 : $f(x) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$; $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ $g'(x)$ దృష్ట్యా అవకలనం చేయుము.

సాధన : Let $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ and $u = \sqrt{1-x^2}$

Put $x = \cos\alpha \Rightarrow y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\alpha - 1}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}\right)$

$$y = \sec^{-1}(\sec 2\alpha) = 2\alpha$$

$$y = 2\alpha \Rightarrow \frac{dy}{du} = 2.1 = 2\frac{dy}{d\alpha} = 23 \qquad ...(1)$$

$$u = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha$$

$$\frac{du}{d\alpha} = \cos\alpha \qquad ...(2)$$

1, 2 ల నుండి

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{du} = 2.\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{2}{\cos\alpha} = \frac{2}{x} \qquad \boxed{\therefore \cos\alpha = x}$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{x}}$$

ఉదాహరణ 22.41 : $f(x) = \tan^{-1}\left[\frac{2x}{1-x^2}\right]$; $g(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2x}{1+x^2}\right]$

$g(x)$ దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

సాధన : Let $y = \tan^{-1}\left[\frac{2x}{1-x^2}\right]$ $x = \tan\theta$ను ప్రతిక్షేపించగా

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right] = \tan^{-1}[\tan 2\theta] = 2\theta$$

$$y = 2\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2 \qquad \text{...(i)}$$

$$Z = \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right] = \sin^{-1}[\sin 2\theta]$$

$$Z = 2\theta = 2.\theta \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = 2 \qquad \text{...(ii)}$$

From (i), (ii)

$$\frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dz} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

ఉదాహరణ 22.42: $f(x) = 2\sqrt{x+1}\,\sin^{-1}x + 4\sqrt{1-x}$ అయిన $f'(x)$ను కనుగొనుము.

సాధన : $f(x) = 2\sqrt{x+1}\,\sin^{-1}x + 4\sqrt{1-x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x+1}\right)\sin^{-1}x + 2\sqrt{x+1} + \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) + \frac{4(-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{x+1}}\sin^{-1}x + \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1+x}} + \frac{2}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{\sqrt{1+x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{x+1}}}$$

ఉదాహరణ 22.43 : ప్రమేయం అవకలజం $\tan^{-1}\left\{\frac{\cos x}{1+\sin x}\right\} = -\frac{1}{2}$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \tan^{-1}\left\{\frac{\cos x}{1+\sin x}\right\} \Rightarrow y = \tan^{-1}\left\{\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\right\}$

$$y = \tan^{-1}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$y = \tan^{-1}\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2} \Rightarrow y = \tan^{-1}\left[\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$ on diff w.r.t 'x' we get

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{ Thus } \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right] = \frac{-1}{2}$$

ఉదాహరణ 22.44 : $x = -\frac{1}{3}$ వద్ద $\sqrt{1+3x}$ దృష్ట్యా $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ యొక్క అవకలజం సున్న అని చూపుము.

సాధన : $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

$x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}x$

$$\therefore y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta-1}\right) \Rightarrow y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$y = \sec^{-1}(\sec 2\theta)$

$y = 2\theta \Rightarrow y = 2\cos^{-1}x$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా వచ్చునది.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$z = \sqrt{1+3x}$ తీసికొనగా

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా వచ్చునది.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}(1+3x)^{\frac{1}{2}-1}(3)$$

ఇక్కడ $$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dz} = \frac{-2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{1}{2}}(3)}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-4}{3}\sqrt{\frac{1+3x}{1-x^2}}$$

At $x = \frac{-1}{3}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-1}{4}\sqrt{\frac{1-1}{1-\frac{1}{9}}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dz} = 0}$$

ఉదాహరణ 22.45 : $\sin^{-1}\left[\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\right]$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b\sin x)}$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \sin^{-1}\left[\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\right]$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\right)^2}} \times$$

$$\frac{(a+b\sin x)(a\cos x)-(b\cos x)(b+a\sin x)}{(a+b\sin x)^2}$$

$$\left[\therefore\ y = \sin^{-1} x\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times 1\right]$$

$$y' = \frac{a + b\sin x}{\sqrt{(a+b\sin x)^2 - (b + a\sin x)^2}}$$

$$\left[\frac{(a\cos x)(a+b\sin x) - b(\cos x)(b + a\sin x)}{(a+b\sin x)^2}\right]$$

$$y' = \frac{a + b\sin x}{\sqrt{(a+b\sin x)^2 - (b + a\sin x)^2}}$$

$$\left[\frac{(a\cos x)(a+b\sin x) - b(\cos x)(b + a\sin x)}{(a+b\sin x)^2}\right]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + 2ab\sin x + b^2\sin^2 x) - (b^2 + a^2\sin^2 x + 2ab\sin x)}}$$

$$\times \frac{(a\cos x)(a+b\sin x) - (b\cos x)(b + a\sin x)}{(a+b\sin x)}$$

$$y' = \frac{1}{(a - b\sin x)} \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)\sin^2 x}} \cos[a^2 - b^2]$$

$$y' = \frac{(a^2 - b^2)\cos x}{(a+b\sin x)\sqrt{(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)\sin^2 x}}$$

$$y' = \frac{(a^2 - b^2)\cos x}{(a+b\sin x)\sqrt{(a^2 - b^2)[1 - \sin^2 x]}}$$

$$y' = \frac{(a^2 - b^2)\cos x}{(a+b\sin x)} \times \frac{1}{(\sqrt{(a^2 - b^2)}\cos x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{(a+b\sin x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\sin x}$$

ఉదాహరణ 22.46 : $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right]$, $0 < |x| < 1$, అయితే $\dfrac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $x^2 = \cos 2\theta$ ను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చునది.

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2\cos^2\theta}+\sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta}-\sqrt{1-\cos^2\theta}}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right] \Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$$

$$y = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$$

$$y = \frac{\pi}{4}+\theta$$

కావున $y = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$

కాబట్టి $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(-1)}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}}$$

ఉదాహరణ 22.47 : $f(x) = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$, $g(x) = \tan^{-1}x$ అయితే $f(x)$ ను $g(x)$ దృష్ట్యా అవకలనము చేయుము.

సాధన : $y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ మరియు

$$z = \tan^{-1}x \Rightarrow \tan z = x$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\tan^2 z}-1}{\tan z}\right] \qquad \therefore\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sec z - 1}{\tan z}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\cos z} - \frac{1}{1}}{\frac{\sin z}{\cos z}}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1-\cos z}{\cos z}}{\frac{\sin z}{\cos z}}\right] \Rightarrow y = \tan^{-1}\left[\frac{1-\cos z}{\sin z}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}\right] \qquad \left[\because \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2},\ \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$y = \tan^{-1}\left[\tan\frac{z}{2}\right] = \frac{z}{2}$$

$$y = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}}$$

ఉదాహరణ **22.48 :**

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \tan^{-1}\left[\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}\right]$$

అయిన $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ అని చూపుము.

సాధన : $x = \tan\theta$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) + \tan^{-1}\left[\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right]$$

$$- \tan^{-1}\left[\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}\right]$$

$$y = \tan^{-1}(\tan 2\theta) + \tan^{-1}(\tan 3\theta) - \tan^{-1}(\tan 4\theta)$$

$$y = 2\theta + 3\theta - 4\theta$$

$$y = \theta$$

$$y = \tan^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$$

22.5 రెండో తరగతి అవకలజాలు

ఒక ప్రమేయపు రెండో తరగతి అవకలజం అంటే దాని మొదటి తరగతి అవకలజం యొక్క అవకలజం అని మనకు తెలుసు. ఈ విభాగంలో మనం, త్రికోణమితీయ మరియు విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు రెండో తరగతి అవకలజాలను కనుగొనే ప్రయత్నం చేద్దాం. ఈ క్రమంలో మనం, గుణకార, భాగాహార మరియు గొలుసు నియమాలను ఉపయోగించుదాం.

ఉదాహరణ 22.49 : (i) $\sin x$ లకు రెండో తరగతి అవకలజాలను కనుక్కోండి.

సాధన :

$y = \sin x$, x దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలనం చేస్తే $\frac{dy}{dx} = \cos x$

మరలా x దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలజం చేస్తే,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

ఉదాహరణ 22.50 : $y = x\cos x$

సాధన : x దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలజం చేస్తే,

$$\frac{dy}{dx} = x(-\sin x) = \cos x \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -x\sin x + \cos x$$

మరోమారు x దృష్ట్యా అవకలజం చేస్తే,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x\sin x + \cos x)$$

$$= -(x.\cos x + \sin x) - \sin x$$

$$= -x.\cos x - 2\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(x\cdot\cos x + 2\sin x)$$

ఉదాహరణ 22.51 : $y = \cos^{-1} x^2$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \cos^{-1} x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \times \frac{d}{dx}(x^2)$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \times 2x \qquad \left(\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

ఉదాహరణ 22.52 : $y = \tan^{-1}(\text{cosec } x - \cot x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \tan^{-1}(\text{cosec } x - \cot x)$, say $\left[\therefore \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}\right]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\text{cosec}\, x - \cot x)^2} \times \frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x - \cot x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\text{cosec}^2 x + \cot^2 x - 2\text{cosec}\, x \cot x} \times (-\text{cosec}\, x\ \cot x + \text{cosec}^2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2\text{cosec}^2 x - 2\text{cosec}\, x \cot x} \times \text{cosec}\, x\ (\text{cosec}\, x - \cot x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\text{cosec}\, x(\text{cosec}\, x - \cot x)} \times 2\text{cosec}\, x\ (\text{cosec}\, x - \cot x)\right]$$

$\because 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}}.$$

ఉదాహరణ 22.53 : $y = \cos^3 x$ అయితే $\frac{dy^2}{dx^2}$ ను కనుగొనుము.

సాధన : $y = \cos^3 x$

$$\therefore \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}[\cos 3x + 3\cos x]$$

$$y = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(-\sin 3x.3 + 3(-\sin x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}[-3\sin 3x - 3\sin x]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}[-3(\cos 3x) \,.\, 3 - 3\cos x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4}[9\cos 3x + 3\cos x]$$

ఉదాహరణ 22.54 : $y = \sin^4 x$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sin^4 x \Rightarrow (\sin^2 x)^2 = \left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^2$

$$y = \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}\left[\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1}{1} - \frac{2\cos 2x}{1}\right]$$

$$y = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x - 2\cos 2x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{-4}{8}\sin 4x + \frac{4}{4}\sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{8}\sin 4x + \frac{4}{4}\sin 2x$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-16}{8}\cos 4x + \frac{8}{4}\cos 2x}$$

ఉదాహరణ 22.55 : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx+by)^2}$ అని చూపుము.

సాధన : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ అని ఇవ్వడమైంది.

'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$2ax + 2h\left[x.\frac{dy}{dx} + y.1\right] + 2by\,\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(ax+hy)}{(hx+by)}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{(hx+by)\left[a+h\frac{dy}{dx}\right]-\left[(ax+hy)h+b\frac{dy}{dx}\right]}{(hx+hy)^2}\right] \quad ...(i)$$

(i) లో $\frac{dy}{dx}$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^2}}$$

ఉదాహరణ 22.56 : $y = ax^{n+1} + b^{-n}x$ అయితే $x^2y_2 = n(n+1)y$ అని చూపుము.

సాధన : $y = ax^{n+1} + b^{-n}x$

$$\frac{dy}{dx} = a.(n+1)x^{n+1-1}.1 + b^{-n}x^{-n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = (n+1)a\ x^n - n\,b\,x^{-n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (n+1)a\ (n)x^{n-1} - n\,b\left[(-(n+1)^{(-(n+1)-1}x.1\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n+1)a\,x^{n-1} + n(n+1)\,bx^{-n-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n+1)\left[a\,x^{n-1} + bx^{-n-2}\right]$$

ఇరువైపుల x^2 చే గుణించగా

$$\frac{x^2d^2y}{dx^2} = n(n+1)\left[a\,x^{n-1}\times x^2 + bx^{-n-2}\times x^2\right]$$

$$\frac{x^2d^2y}{dx^2} = n(n+1)\left[a\,x^{n+1} + bx^{-n}\right]$$

$$\therefore \boxed{x^2y_2 = n(n+1)y}$$

ఉదాహరణ 22.57 : $y = ae^{nx} + be^{-nx}$ అయితే $y'' = n^2 y$ అని చూపుము.

సాధన : $y = ae^{nx} + be^{-nx}$

$$\frac{dy}{dx} = nae^{nx} - bne^{-nx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n\left[a.n^{nx} + b\ n^2\ e^{-nx}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n^2ae^{nx} + n^2be^{-nx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n^2\left[ae^{nx} + be^{-nx}\right] = n^2y\ .$$

ఉదాహరణ 22.58 : $x = \cos\theta,\ y = \sin 5\theta,$ అయితే $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = -25y.$

అని చూపుము.

సాధన : $\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta;\ \frac{dy}{d\theta} = \cos 5\theta.5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{5\cos 5\theta}{-\sin\theta} \qquad ...(i)$$

ఇప్పుడు 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{5\cos 5\theta}{-\sin\theta}\right)\left(\frac{-1}{\sin\theta}\right) \qquad \boxed{\frac{u}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\sin\theta\sin 5\theta.25 + 5\cos 5\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\right].\left[\frac{-1}{\sin\theta}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-25\sin 5\theta}{\sin^2\theta} - \frac{5\cos 5\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

Now $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = (1-\cos^2\theta)\left[\frac{-25\sin 5\theta}{\sin^2\theta} - \frac{5\cos 5\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}\right]$

$$-\cos\theta\left[\frac{-5\cos 5\theta}{\sin^3\theta}\right]$$

$$= \sin^2\theta\left[\frac{-25\sin 5\theta}{\sin^2\theta} - \frac{5\cos 5\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}\right] + \frac{5\cos\theta\cos 5\theta}{\sin\theta}$$

$$= -25\sin 5\theta - \frac{5\cos 5\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{5\cos\theta\cos 5\theta}{\sin\theta}$$

$$= -25\sin 5\theta$$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx} - \frac{xdy}{dx} = -25y} \qquad (\therefore\ y = \cos\ 5\theta)$$

ఉదాహరణ 22.59 : $y = x^2\tan^{-1}x$ అయిన రెండో తరగతి అవకలజంను కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^2\tan^{-1}x$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \tan^{-1}x.\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2.\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x\ .\ (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x\tan^{-1}x$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x^2)(2x) - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} + 2\left[x.\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x.1\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2\left[\frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1}x\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} + 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{2x+2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2} + 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x+2x^3}{(1+x^2)^2} + 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} + 2\tan^{-1}x$$

ఉదాహరణ 22.60 : $y = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}$ అయితే $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 = 1$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.2(\sin^{-1}x)^{2-1} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin^{-1}x)^{-1} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_1 = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

అడ్డగుణకారం చేయగా

$$(\sqrt{1-x^2})y_1 = \sin^{-1}x$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$(1-x^2)y_1^2 = (\sin^{-1}x)^2$$

$$\therefore\ 2y = (\sin^{-1}x)^2$$

$$\therefore (1-x^2)y_1^2 = 2y$$

diff w.r.t x on both sides

$$(1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 2y_1$$

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2y_1$$

$$\boxed{(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1}$$

ఉదాహరణ 22.61 : $y = \cos(\cos x)$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x\frac{dy}{dx} + y\sin^2 x = 0$ అని చూపుము.

సాధన : $y = \cos(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\cos x)(-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin(\cos x).\sin x$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x\ \sin(\cos x)' + \sin(\cos x)(\sin x)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x\cos(\cos x)(-\sin x) + \sin(\cos x).\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin^2 x.y + \sin(\cos x).\cos x$$

But $\frac{dy}{dx} = \sin(\cos x).\sin x$

$$\sin(\cos x) = \frac{dy}{dx}\times\frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin^2 x.y + \frac{dy}{dx}\times\frac{1}{\sin x}\times\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y\sin^2 x + \cot x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y\sin^2 x + \cot x \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \frac{dy}{dx} + y\sin^2 x = 0$$

అభ్యాసం 22.1

1. $y = 2\sin^2 x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

2. $y = \tan^2 x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

3. $y = \tan\sqrt{x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

4. $y = \cos^2 x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

5. $x = a(t + \sin t); y = a(1 - \cos t)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

6. If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + ...\text{to infinity}}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

7. $y = 3 \sin 4x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

8. $y = \pi\cot 3x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

9. $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + ...\infty}}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

10. $y = \frac{\cos^{-1} x}{x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

అభ్యాసం 22.2

1. మూల సూత్రం నుండి $\tan x$ అవకలజంను కనుగొనుము.

2. మూల సూత్రం నుండి $\cot^2 x$ అవకలజంను కనుగొనుము.

3. $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

4. $y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

5. $\sin y = x(\sin a + y)$ అయితే $\left[\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}\right]$ అని రుజువు చేయుము.

6. $y=\sqrt{\frac{(\sec x+\tan x)}{\sec x-\tan x}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

7. $y=\sin^{-1}\sqrt{x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

8. $y=\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

9. $y = x \cos x$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

10. $y = x + \tan x$ అయితే $\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2y + 2x = 0$ అని చూపుము.

అభ్యాసం 22.3

1. $y = \cos^2 x$ అయితే మూల సూత్రం నుండి $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

2. $y = x^3$ అయితే మూల సూత్రం నుండి $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

3. $y=\frac{1-x\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}$ $x>0$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

4. $y = \sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{4}\right)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

5. $y = \cos^{-1}\left[\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right]$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

6. $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

7. $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}}$ మరియు $g(x) = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}}$

అయితే $f'(x) = g'(x)$ అని చూపుము.

8. $f(x) = (a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}} \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right)$

అయితే $f'(x) = (a+b\cos x)^{-1}$ అని చూపుము.

9. $y =$ sin $2x$ sin $3x$ sin $4x$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

10. $y = \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

11. If $ay^4 = (x+b)^5$ అయితే $5y\ y'' = (y')^2$,

$5y\ y_2 = (y')^2$ అని చూపుము.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http : //www.wikipedia.org
- http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. $y = x^3 \tan^2\frac{x}{2}$. అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

2. $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \cos^2(2x+1)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

3. $y = \sec^{-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.అయితే $\frac{dy}{dx} = 0$ అని చూపుము.

4. $x = a\cos^3\theta$, అయితే $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ విలువ కనుగొనుము.

5. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+}}}$..... అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

6. $x = a\cos(\cos x)$, అయితే $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \cdot \frac{dy}{dx} + y\sin^2 x = 0$ అని చూపుము.

7. $y = \tan^{-1}x$. అయితే $(1+x)^2 y_2 + 2xy_1 = 0$ అని చూపుము.

8. $y = (\cos^{-1}x)^2$, అయితే $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ అని చూపుము

9. $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ యొక్క అవకలజాన్ని $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ దృష్ట్యా కనుగొని దాని విలువ 1 అని చూపుము.

10. $y = \tan^{-1}x$. అయితే $(1+x)^2 y_2 + 2xy_1 = 0$ అని చూపుము

జవాబులు

అభ్యాసం 22.1

1. $2\sin 2x$

2. $2\tan x \sec^2 x$

3. $\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

4. $-\sin 2x$

5. $\tan\frac{t}{2}$



6. $\frac{\cos x}{2y-1}$

7. $12 \cos 4x$

8. $-3\pi \text{cosec}^2 3x$

9. $\frac{\sec^2 x}{2y-1}$

10. $\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\cos^{-1} x}{x^2}$

అభ్యాసం 22.2

1. $\sec x \tan x$

2. $-2x \text{ cosec } x^2$

3. $\frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2}$

4. $\frac{1}{1+x}$

6. $\sec x (\sec x + \tan x)$

7. $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

8. $-\frac{1}{2}$

9. $-(x \cos x + 2 \sin x)$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము



అభ్యాసం 22.3

1. $-\sin 2x$

2. $3x^2$

3. $\dfrac{-3\sqrt{x}}{\left(1-x\sqrt{x}\right)^2}$

4. $\dfrac{3}{\sqrt{15+6x+9x^2}}$

5. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b\cos x)}$

6. $2 \tan x \sec^2 x$

9. $\dfrac{1}{4}\left[81\sin 9x-25\sin 5x-9\sin 3x-\sin x\right]$

10. $\dfrac{-4}{(x-1)^3}+\dfrac{6}{(x-1)^4}-\dfrac{4}{(x-2)^3}$

సాధనా అభ్యాసం

1. $x^3 \tan\dfrac{x}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}+3x^2\tan^2\dfrac{x}{2}$

2. $\dfrac{5(3-x)}{3(1-x)^{5/3}}-2\sin(4x+2)$

4. $\sec\theta$

5. $\dfrac{1}{2y-1}$

10. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

అధ్యాయం

23

ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాల అవకలనాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశము నేర్చిన తరువాత, ఈ క్రింది విషయములను మీరు తెలుసుకొంటారు.

- ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయముల నిర్వచనము మరియు అవకలజములు
- బీజగణిత, త్రికోణమితీయ, ఘాత మరియు సంవర్గమాన ఘాత ప్రమేయముల అవకలజములు మరియు
- వాటి యొక్క రెండవ తరగతి అవకలజములు

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంబంధాలు, ప్రమేయాల, అవకలన ప్రమేయాల నిర్వచనాలు, అవకలజాలను కనుగొనే పద్ధతి, ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాలు.

పరిచయం

సామాన్యముగా జనాభా సంఖ్య పెరుగునని మనకు తెలుసు. మరికొన్ని విషయములలో తరుగుదలను కూడా గమనించగలము. చాలా విషయములలో పెరుగుదల మరియు తగ్గుదల అనునవి అవిచ్ఛినముగా ఉంటూ ఉండటాన్ని గమనించగలము. ఉదాహరణగా ఆర్థిక వ్యవస్థ,

వ్యవసాయం మరియు వ్యాపారరంగం. వీటిలో అవిచ్ఛిన్నముగా పెరుగుదల మరియు తగ్గుదల ఉంటాయి. ప్రస్తుతం ఉన్న 10,00,000 బాక్టీరియాలు 10గంటలలో రెట్టింపు అవుతాయని అనుకొంటే, ఇవి 30,00,000 కావడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది అనే విషయం తెలుసుకోవాలనే సమస్యలకు జవాబును సంకలన పద్ధతి లేక గుణిజపద్ధతి కాకుండా మరియొక విధముగా తెలుసుకొనుటకు ఘాత ప్రమేయం ఉపయోగపడుతుంది. ఘాత ప్రమేయము సంవర్గ మాన ప్రమేయమునకు విలోమము.

పూర్వజ్ఞానం

ప్రామాణజక అవధులు

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ OR $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{h}} = e$ OR $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x} = \log_e a$
- $\lim\limits_{h\to\infty}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = 1$

23.1 ఘాత ప్రమేయము యొక్క అవకలజం

ఘాత ప్రమేయాల అవకలజాలు

ఉదాహరణ 23.1 : Let $y = e^x$ అనేది ఘాతప్రమేయము ... (i)

..... $y + \delta y = e^{(x + \delta x)}$ (అనుగుణంగా చిన్న విలువలు) ... (ii)

(i), (ii) ల నుండి వచ్చేది

δx తో ఇరువైపులా భాగించి, $\delta x \to 0$ అవధిని తీసుకొంటే

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^x . e^{\delta x} - e^x}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^x (e^{\delta x} - 1)}{\delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{e^{\delta x} - 1}{\delta x} = e^x \times 1 = e^x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

అమలు చేయు సూత్రము $\quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \frac{d}{dx}(x)$

$$= e^x . 1 = e^x$$

ఉదాహరణ 23.2 : $y = e^{ax+b}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = e^{ax+b} \Rightarrow y + \delta y = e^a(x + \delta x) + b$

δx అనునది x లో చిన్న మార్పు δy అనునది yలో అనుగుణంగా వచ్చు మార్పును సూచిస్తుంది.

$$y + \delta y = e^{a(x+b)+b}$$

$$\delta y = e^{a(x+b)+b} - e^{ax+b}$$

$$\delta y = e^{ax+b} \left[e^{a\delta x} - 1 \right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = a.e^{ax+b} \left[\frac{e^{a\delta x} - 1}{a\delta x} \right]$$ 'a' తో గుణించి, భాగించుము.

$\lim_{\delta x \to 0}$ తీసికొనగా వచ్చునది.

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = a.e^{ax+b} . \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{e^{a\delta x} - 1}{a\delta x} \right) \qquad \left(\because \lim_{h \to 0} \frac{e^n - 1}{x} = 1 \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = a.e^{ax+b}.1$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a.e^{ax+b}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^{ax+b}\right) = ae^{ax+b}$$

ఉదాహరణ 23.3 : $y = e^{5x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

సాధన : $y = e^{5x}$, $5x = t$ అనుకొనుము.

$$y = e^t \qquad 5 \cdot \frac{d}{dx}(x) = \frac{dt}{dx} \Rightarrow 5 = \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = e^t \cdot 5 = 5\, e^{5x}$ అని తెలుసు.

$y = e^{5x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5.e^{5x}$ అమలు చేయు సూత్రము

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 5e^{5x}}$$

ఉదాహరణ 23.4 : $y = e^{\frac{-3x}{2}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{-3}{2}x} \frac{d}{dx}\left(\frac{-3}{2}x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}x}$$

ఉదాహరణ 23.5 : $y = e^{x\cos x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = e^{x\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\frac{d}{dx}(x\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\left[x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\left[x(-\sin x) + \cos x\right]$$

ఉదాహరణ 23.6 : $y = \frac{1}{x}e^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము

సాధన : $y = \frac{1}{x}e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left[e^x.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(e^x)\right]$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}e^x = e^x\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2}[x-1]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{x^2}[x-1].$$

ఉదాహరణ 23.7 : $g(x)$ దృష్ట్యా $f(x)$ ను అవకలనం చేయగా

$$f(x)\,e^x,\ g(x)\sqrt{x}$$

సాధన : $y = e^x$ మరియు $u = \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \text{మరియు} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{xdx}{dt} = e^x\,.2\sqrt{x}$$

ఉదాహరణ 23.8 : $x = 2\ e^{-t}$; $y = 4e^t$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = 4e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} = 4e^t$

$$x = 2e^{-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -2e^{-t}$$

$$x = 4e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 4e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4e^{+t}}{-2e^{-t}} = -2e^{2t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -2e^{2t}$$

ఉదాహరణ 23.9 : $y = e^{\frac{-7}{2}x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = e^{\frac{-7}{2}x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{-7}{2}x}\right) = e^{\frac{-7}{2}x}\left[\frac{d}{dx} - \frac{7}{2}x\right]$

$$= e^{\frac{-7}{2}x} \times \left(-\frac{7}{2}\right) \times 1 = \frac{-7}{2}\ e^{\frac{-7}{2}x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{2}\ e^{\frac{-7}{2}x}$$

ఉదాహరణ 23.10 : $y = e^{x^2+2x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d}\ e^{x^2} + \frac{d}{dx}(2x) = e^{x^2} \times 2x + 2 = 2e^{x^2} + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2(xe^{x^2} + 1)$$

ఉదాహరణ 23.11 : $y = 5\sin x - 2\ e^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = 5\frac{d}{dx}(\sin x) - 2\frac{d}{dx}(e^x)$

$$= 5\cos x - 2\ e^x.$$



ఉదాహరణ 23.12 : $y = \frac{1}{3}e^x - 5e$

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{dy}{dx}(e^x) - 5\frac{d}{dx}(e)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}e^x - 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{3}}$$

ఉదాహరణ 23.13 : $y = e^{\sqrt{x+1}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{1+x}}) = e^{\sqrt{1+x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x+1})$

$$= e^{\sqrt{1+x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{x+1}}}$$

ఉదాహరణ 23.14 : $y = e^x \log x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \log x(e^x)^1 + e^x(\log x) = e^x(\log x)^1 + e^x.1$

$$= e^x.\frac{1}{x} + \log x\, e^x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)}$$

ఉదాహరణ 23.15 : If $y = e^{a\sin^{-1}x}$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$ అని చూపుము.

సాధన : $y = e^{a\sin^{-1}x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a\sin^{-1}x} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a . e^{a\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a . y}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \because (y = e^{a\sin^{-1}x})$$

ఉదాహరణ 23.16 : If $e^{x+y} = xy$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\log e^{x+y} = \log xy \Rightarrow (x + y) \log e = \log x + \log y$

$$x + y = \log x + \log y$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$1+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(1-\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{x}-1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x(y-1)} = \frac{y(1-x)}{x(y-1)}$$

ఉదాహరణ 23.17 : $y = e^{x\sin^2 x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = e^{x\sin^2 x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{x\sin^2 x}\right) = e^{x\sin^2 x} \frac{d}{dx}(x\sin^2 x)$$

$$= e^{x\sin^2 x}\left[x.\frac{d}{dx}(\sin^2 x)+\sin^2 x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= e^{x\sin^2 x}\left[x.2\sin x\cos x+\sin^2 x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\sin^2 x}.\sin x\left[2\sin x\cos x+\sin^2 x.1\right].$$



ఉదాహరణ 23.18 : $y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ అయితే $\dfrac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{u}{v}$ $\boxed{\therefore \dfrac{vu'-uv'}{v^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{\sqrt{x^2+1}\,.\,\frac{d}{dx}(e^{2x}) - e^{2x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\frac{2e^{2x}\sqrt{x^2+1}}{1}\,.\,e^{2x}\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\times 2x\right]}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}(x^2+1) - xe^{2x}}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}(x^2+1) - xe^{2x}}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}(2x^2+2-x)}{(x^2+1)^{3/2}}$$

ఉదాహరణ 23.19 : $y = e^{-\frac{k}{2}x}(a\cos nx + b\sin nx)$ అయితే

$y + ky' + \left(n^2 + \dfrac{k^2}{4}\right)y = 0$ అని చూపుము.

సాధన : $y = e^{-\frac{k}{2}x}(a\cos nx + b\sin nx)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k}{2}\,e^{\frac{-kx}{2}}.1\,(a\cos nx + b\sin nx) + e^{\frac{-kx}{2}}\,(-a\cos nx.n + b.n\sin nx)$$

$$y_1 = \frac{-k}{2} y + e^{\frac{-kx}{2}} (-a \sin nx.n + b\, n \cos nx)$$

$$y_2 = \frac{-k}{2} y_1 - e^{\frac{-kx}{2}} [-an \sin nx + b\, n \cos nx)$$

$$+ \left[e^{\frac{-kx}{2}} (an^2 \cos nx - b\, n^2 \sin nx) \right]$$

$$y_2 + ky_1 + \left[n^2 + \frac{k^2}{4} \right] y = 0$$

ఉదాహరణ 23.20 : $y = x^x + e^{e^x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^x + e^{e^x}$

$u = x^x$ తీసికొనుము x మరియు $y = e^{e^x}$

$$u = x^x \Rightarrow \log u = x \log x$$

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \log x.1 + \frac{1}{x}.x$$

$$\frac{du}{dx} = u[\log x + 1] \Rightarrow x^x[1 + \log x]$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = x^x[1 + \log x]$$

$$v = e^{e^x}$$

$$\log v = e^x \log_e e \Rightarrow \log v = e^x.1$$

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = v\, e^x = e^{e^x}(e^x)$$

$$y = u + v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x\left[1+\log x\right] + e^{e^x}(e^x)$$

ఉదాహరణ 23.21 : $e^x \log y = \sin^{-1}x + \sin^{-1} y$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము

సాధన : $e^x \log y = \sin^{-1}x + \sin^{-1} y$

'x' దృష్ట్యా ఇరువైపుల అవకలనం చేయగా వచ్చునది.

$$e^x\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right) + e^x \log y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{e^x}{y} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x \log y$$

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1-y^2}\left[\frac{1-e^x\sqrt{1-x^2}\log y}{\left[e^x\sqrt{1-y^2}-y\right]\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1-y^2}\left[1-e^x\sqrt{1-x^2}\log y\right]}{\left[e^x\sqrt{1-y^2}-y\right]\sqrt{1-x^2}}$$

23.2 సంవర్గమాన ప్రమేయముల అవకలజం

ఉదాహరణ 23.22 : $y = \log x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము. ...(i)

సాధన : $y = \log x \Rightarrow y + \delta y = \log(x + \delta x)$ ...(ii)

δx అనునది x లో చిన్న మార్పు, δy అనునది y లో అనుగుణంగా వచ్చు మార్పును సూచిస్తుంది.

$y + \delta y = \log (x + \delta x)$

$\delta y = \log (x + \delta x) - y$

$\delta y = \log (x + \delta x) - \log x \quad \because \log m - \log n = \log \frac{m}{n}$

$$\delta y = \log \frac{x+\delta x}{x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \log \left[1+\frac{\delta x}{x}\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x} . \frac{x}{\delta x} \log \left[1+\frac{\delta x}{x}\right]$$ 'n' తో గుణించి, భాగించగా

$$= \frac{1}{x} . \log \left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}}$$

ఇరువైపుల $\delta x \to 0$ తో అవధులను తీసుకొనగా వచ్చునది.

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x} \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \log \left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} . \log \left[\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} . \log e \qquad \because \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}} = e$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

ఉదాహరణ 23.23 : $y = \log(ax + b)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log(ax + b)$

$y + \delta y = \log (a(x + \delta x) + b)$

δx, δy లలో అనుగుణంగా చిన్న మార్పు

$$\delta y = \log [a(x + \delta x) + b] - y$$

$$\delta y = \log [a(x + \delta x) + b] - \log (ax + b)$$

$$\delta y = \log\left[\frac{a(x+\delta x)+b}{\log(ax+b)}\right] \qquad \boxed{\because \log m - \log n = \log\frac{m}{n}}$$

$$\delta y = \log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a}{ax+b}\times\frac{ax+b}{a}\cdot\frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$= \frac{a}{ax+b}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a}{ax+b}\lim_{\delta x\to 0}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(ax+b)}\cdot\log e$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}}$$

అమలు చేయు సూత్రం

$$\frac{d}{dx}\log(ax+b) = \frac{1}{ax+b}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= \frac{1}{ax+b}\cdot a = \frac{a}{ax+b}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\log(ax+b) = \frac{a}{ax+b}.$$

ఉదాహరణ 23.24 : $y = \log x^5$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనండి.

సాధన : $y = \log x^5$ $\quad \boxed{\therefore \log m^n = n \log m}$

$$\Rightarrow y = 5\log x \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{x}}$$

ఉదాహరణ 23.25 : $y = \log\sqrt{x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\log x$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

ఉదాహరణ 23.26 : $y = (\log x)^5$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = (\log x)^5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5(\log x)^{5-4} \cdot \frac{1}{x}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x}(\log x)^4}$$

ఉదాహరణ 23.27 : $y = x^3 \log x$, అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \log x(3x^2) + x^3\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \log x + x^2 \Rightarrow x^2(3\log x + 1)$$

$$\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = x^2(3\log x + 1)}$$



ఉదాహరణ 23.28 : $y = \log \tan x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \times \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec} x . \sec x$$

ఉదాహరణ 23.29 : $y = \log \cos x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \times -\sin x = -\tan x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\tan x$$

ఉదాహరణ 23.30 : $y = \log (\log x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log (\log x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$$

ఉదాహరణ 23.31 : $y = \log [\sin \log x]$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log [\sin \log x] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin(\log x)} \times \cos(\log x) \times \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{\cos(\log x)}{\sin(\log x)} = \frac{\cot(\log x)}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cot(\log x)}{x}$$

ఉదాహరణ 23.32 : $y = x^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^x \Rightarrow \log y = \log x^x$ ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\log y = x \log x$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log x \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log x + x \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y[\log x + 1] = x^x[\log x + 1]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^x[\log x + 1]}$$

ఉదాహరణ 23.33 : $y = \log (\sec x + \tan x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log (\sec x + \tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x}[\sec x \tan x + \sec^2 x]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \sec x(\sec x + \tan x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \sec x}$$

ఉదాహరణ 23.34 : $y = (\tan x)^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = (\tan x)^x$

$\log y = \log (\tan x)^x = x \log (\tan x)$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\boxed{\begin{aligned}(uv)' &= uv' + vu' \\ &= uv' + vu'\end{aligned}}$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}(\log(\tan x)) + \log\tan x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{\tan x}\times\sec^2 x + \log\tan x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x}{\sin x\cos x} + \log\tan x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)^x\left[\frac{x}{\sin x\cos x} + \log\tan x\right]$$

ఉదాహరణ 23.35 : $x^{x\sqrt{x}}$ యొక్క అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^{x\sqrt{x}} \Rightarrow x^{x^{\frac{3}{2}}}$

$$\log y = \log x^{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{2}}\cdot\log x$$

$$\log y = x^{\frac{3}{2}}\cdot\log x \qquad (uv)' = uv' + vu'$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) + \log x.\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\log x\, x^{\frac{1}{2}}\right) = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{3}{2}\log x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}\left(1 + \frac{3}{2}\log x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\; x^{x\sqrt{x}}\left(1 + \log x\sqrt{x}\right)$$

ఉదాహరణ 23.36 : $y = \log\left[\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right]$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : ఇరువైపుల 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right] \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \left[\frac{vu'-uv'}{v^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+e^x}-1\right]-\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+e^x}+1\right]}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{1+e^x}}{1}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\times e^x - \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{1}\times\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\times e^x}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\left[\frac{e^x\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)-e^x\sqrt{1+e^x}+e^x}{2\sqrt{1+e^x}\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\left[\frac{e^x\sqrt{1+e^x}+e^x-e^x\sqrt{1+e^x}+e^x}{2\sqrt{1+e^x}\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\left[\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)}\right]$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}}$$

ఉదాహరణ 23.37: $y = x + 2\sqrt{1+e^x} - 2\log\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ని కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{1+e^x}\right) - \frac{d}{dx}\left(2\log\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\right)$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\right)e^x - 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{1+e^x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\right)e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\right)e^x - \frac{e^x}{\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\left(\sqrt{1+e^x}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} + \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} - \frac{e^x}{\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\sqrt{1+e^x}}$$

$$= 1 + \frac{e^x + e^x\left(\sqrt{1+e^x} - e^x\right)}{\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)}$$

$$= 1 + \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\left(\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1-\sqrt{1+e^x}}\right)$$

$$= 1 + \frac{e^x\left(1-\sqrt{1+e^x}\right)}{1-1-e^x}$$

$$= 1 - 1 + \sqrt{1+e^x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+e^x}}$$

ఉదాహరణ 23.38 : $x^{\log y} = \log x$ అయితే $\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1-\log x \log y}{(\log x)^2}\right]\frac{y}{x}$ అని చూపుము.

సాధన : $x^{\log y} = \log x \Rightarrow \log(x^{\log y}) = \log(\log x)$

$$\Rightarrow \log y \ \log x = \log(\log x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot\log x\cdot\frac{dy}{dx}+\log y\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\log x}\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{\log x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\log x}-\log y\right]$$

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log x}\left[\frac{1-\log x\ \log y}{\log x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left[\frac{1-\log x\log y}{(\log x)^2}\right]$$

ఉదాహరణ 23.39 : $x^y+y^x=a^b$ అయితే $\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}\right]$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y_1=x^y$ మరియు $y_2=y^x$

that $y_1+y_2=a^b$

$y_1=x^y \qquad y_2=y^x$

$\log y_1=y\log x\ ; \quad \log y_2=x\log y$

$$\frac{1}{y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}=y\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right]=x^x\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right] \qquad ...(i)$$

Let $y_2=y^x \Rightarrow \log y_2=x\log y$

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy_2}{dx}=\frac{1}{y}\cdot x.\frac{dy_1}{dx}+\log y$$

$$\frac{dy_2}{dx}=\left[y_2\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+\log y\right]$$

$$=y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right] \qquad ...(2)$$

$$y_1+y_2=a^b \Rightarrow \frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}=0$$

$$x^y\left[\frac{y}{x}+\log x+\frac{dy}{dx}\right]+y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right]=0$$

$$y\,.\,x^{y-1}+x^y\log x.\frac{dy}{dx}+x.y^{x-1}\frac{dy}{dx}+y^x\log y=0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x^y\log x+x.y^{x-1}\right)=-\left(y.x^{y-1}+y^x\log y\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{(y.x^{y-1}+y^x\log y)}{(x^y\log x+x.y^{x-1})}\right]$$

ఉదాహరణ 23.40 : $y=x^{x^x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y=x^{x^x}\Rightarrow$ ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$$\log y=\log\left(x^{x^x}\right)$$

$\log y = x^x(\log(x))$

మరల ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$\log(\log y)=\log\left[x^x\log x\right]$ $\qquad\qquad$ $\log mn = \log m + \log n$

$\log(\log y) = \log x^x + \log(\log x)$

$$\frac{1}{\log(y)}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=x\log x+\log(\log x)$$

$$\frac{1}{\log y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=1.\log x+\frac{1}{x}\cdot x+\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{\log y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log x+1\,\frac{1}{x(\log x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\log y\left[1+\log x+\frac{1}{x\log x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{x^x}\,.\,\log x^{x^x}\left[\log e+\log x+\frac{1}{x\log x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^x} \cdot x^x \log x \left[\log e\, x + 1 \frac{1}{x \log x} \right]$$

$$= x^{x^x}\ x^x \log x \left[\frac{x \log x \log e\, x}{x \log x} + 1 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^x + x - 1} \left[\frac{x \log x \log e\, x}{x \log x} + 1 \right]$$

ఉదాహరణ 23.41 : $y = (\sin x)^x + x^{\sin x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = (\sin)^x + x^{\sin x}$

$u = (\sin\ x)^x$ తీసికొని, మరియు $v = x^{\sin\ x}$

ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$\log\ u = x\ \log\ (\sin\ x)$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \log(\sin x).1$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = x \cot x + \log\ \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = u[x \cot x + \log\ \sin x]$$

$$\frac{du}{dx} = (\sin^x x)[x \cot x + \log\ \sin x]$$

$v = x^{\sin x}$

$\log\ v = \sin\ x\ .\ \log\ x$

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \sin x . \frac{1}{x} + \log x . \cos x$$

$$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{\sin x}{x} + \log x . \cos x \right]$$

$$\frac{dv}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + (\log x)\sin x\right]$$

$y = u + v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x\left[x\cot x + \log(\sin x)\right] + x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + (\log x)\cos x\right].$$

ఉదాహరణ 23.42 : $y = x^x + (\cot x)^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^x + (\cot x)^x$

$u = x^x$ and $v = (\cot x)^x$

$u = x^x \Rightarrow$ ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 1\,.\log x + \frac{1}{x}.x$$

$$\frac{du}{dx} = u[\log x + 1] = x^x[\log x + 1]$$

$v = (\cot x)^x$

ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x.\log(\cot x) + x.\frac{1}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x)$$

$$= \log(\cot x) - x.\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log(\cot x) - \frac{2x}{2\sin x\cos x}$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\log(\cot x) - \frac{2x}{\sin 2x}\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = (\cot x)^x \left[\log(\cot x) - \frac{2x}{\sin 2x} \right]$$

$y = u + v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x \left[1 + \log x\right] + (\cot x)^x \left\{ \log(\cot x) - \frac{2x}{\sin 2x} \right\}.$$

ఉదాహరణ 23.43 : $y = e^{-ax^2} \sin(x \log x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : Let $y = e^{-ax^2} \sin(x \log x)$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం తీసికొనగా

$$\frac{dy}{dx} = e^{-ax^2} \left[\sin x(x \log x)\right]' + \sin(x \log x) \cdot \left(e^{-ax^2}\right)'$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-ax^2} \cos(x \log x) \cdot (x \log x)' + \sin(x \log x)\left(e^{-ax^2}\right)(-2ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-ax^2} \cos(x \log x)\left[\log x + \frac{1}{x}.x \right] - \sin(\log x.x)\left(e^{-ax^2}\right)(2ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-ax^2} \cos(x \log x)\left[1 + \log x\right] - 2ax \sin(x \log x)\left(e^{-ax^2}\right)$$

$$= e^{-ax^2} \left[\cos(x \log x).\left(\log e + \log x\right) - 2ax \sin\left(x \log x\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-ax^2} \left[\cos(x \log x) \log ex - 2ax \sin\left(x \log x\right)\right]$$

ఉదాహరణ 23.44 : $y = 20^{\log \tan x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : diff w.r.t 'x' $\frac{dy}{dx} = 20^{\log \tan x} \cdot \log_e 20 \left[\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x \right]$

$$\frac{dy}{dx} = 20^{\log \tan x} \cdot \log_e 20 \left[\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right]$$

$$= 20^{\log \tan x} \cdot \log_e 20\left[\frac{1}{\sin x \cos x}\right]$$

$$= 20^{\log(\tan x)} \cdot \log_e 20\left[\frac{2}{2\sin x \cos x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 2.20^{\log(\tan x)} \log_e 20\left[\frac{1}{\sin x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 2.20^{\log(\tan x)} \log_e 20(\text{cosec } 2x)$$

ఉదాహరణ 23.45 : If $y = \log\left\{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}\right\} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log\left\{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}\right\} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$

$$\therefore \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\tanh^{-1} x$$

$$y = \frac{1}{2}\tanh^{-1} x - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా వచ్చినది

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^4}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{1-x^4}\right] = \frac{x^2}{1-x^4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-x^4}$$

ఉదాహరణ 23.46 : If $y = (\sin x)^{\log x} + x^{\sin x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = (\sin x)^{\log x} + x^{\sin x}$

$u = (\sin x)^{\log x}$ తీసికొనగా

ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$\log u = \log(\sin x)^{\log x}$

$\log u = \log x \,.\, [\log(\sin x)]$ $\qquad uv = uv' + vu'$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{u} \,.\, \frac{du}{dx} = (\log x) \,.\, \frac{1}{\sin x}(\cos x) + \frac{1}{x}\log(\sin x)$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[(\log x)\cos x + \frac{\log(\sin x)}{x}\right]$$

$v = x^{\sin x}$ తీసికొనగా

ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$$\log v = \log (x^{\sin x})$$

$$\Rightarrow \log v = \sin x \log x$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{v} \,.\, \frac{dv}{dx} = (\cos x)\log x + \frac{1}{x}\sin x$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[(\cos x)\log x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = x^{\sin x}\left[(\cos x)\log x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

Now $y = u + v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\text{So} \quad \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\log x}\left[(\log x)\cot x + \frac{\log(\sin x)}{x}\right]$$

$$+ x^{\sin x}\left\{\frac{\sin x}{x} + (\log x)\cos x\right\}$$

ఉదాహరణ 23.47 : $g(x)$ దృష్ట్యా $f(x)$ ను అవకలనం చేయుము.

$$f(x) = x^{\sin^{-1}x};\ g(x) = \sin^{-1}x$$

సాధన : $y = x^{\sin^{-1}x}$, $u = \sin^{-1}x$

$$\log y = \log x^{\sin^{-1}x} = \sin^{-1}x \,.\, \log x$$

$$\log y = \sin^{-1}x \,.\, \log x$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, \log x + \sin^{-1}x \,.\, \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = \left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right]$$

$$\frac{d}{dx} = y\left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right] \qquad ...(1)$$

$$\text{U} = \sin^{-1}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{du}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right] \times \sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = x^{\sin^{-1}x}\left[\log x + \frac{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}{x}\right]$$

ఉదాహరణ 23.48 : $y = (\log x)^x + (\sin^{-1}x)^{\sin x}$ అయితే అవకలజంను కనుగొనుము.

సాధన : $y = (\log x)x + (\sin^{-1})\sin x$

$y = u + v$

$u = (\log x)^x$ and $v = (\sin^{-1}x)^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$u = (\log x)^x$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$\log u = \log (\log x)^x$

$\log u = x \log (\log x)$

$$\frac{1}{u}.\frac{du}{dx} = 1.\log(\log x) + x.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right] \qquad ...(1)$$

$v = (\sin^{-1}x)^{\sin x}$

$\log v = \sin x \log (\sin^{-1}x)$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{d}{dx}\left[\sin x \log(\sin^{-1}x)\right]$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}=\sin x.\frac{1}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\cos x.\log(\sin^{-1}x)$$

$$\frac{dv}{dx}=v\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-n^r}}+\cos x.\log(\sin^{-1}x)\right]$$

$$=(\sin^{-1}x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-n^r}}+\cos x.\log(\sin^{-1}x)\right] \quad ...(ii)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=(\log x)^x\left[\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right]$$

$$+(\sin^{-1}x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^r}}+\cos x\log(\sin^{-1}x)\right]$$

ఉదాహరణ 23.49 : $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\infty}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చినది

$$y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\infty}}$$

$$y=(\cos x)^y$$

ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$$\log y = y\log(\cos x)$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=y.\frac{1}{\cos x}(-\sin x)+\log(\cos x).\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}-\log(\cos x)\frac{dy}{dx}=-y\tan x$$

$$\left[1-y\log(\cos x)\right]\frac{dy}{dx}=-y^2\tan x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2\tan x}{[1-y\log(\cos x)}$$

ఉదాహరణ 23.50 : $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^x$

$y_1 = (\tan x)^{\cot x}$, $y_2 = (\cot x)^x$ say

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \qquad ...(i)$$

$$y_1 = (\tan x)^{\cot x} \Rightarrow \log y_1 = \cot x \log(\tan x)$$

$$\frac{1}{y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} = \cot x . \frac{1}{\tan x} . \sec^2 x + \log(\tan x)(-\operatorname{cosec}^2 x)$$

$$\frac{1}{y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} = \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec}^2 x \log(\tan x)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1[\operatorname{cosec}^2 x(1 - \log(\tan x)]$$

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dx} = (\tan x)^{\cot x} \operatorname{cosec}^2 x(1 - \log(\tan x)) \qquad ...(ii)$$

$$y_2 = (\cot x)^x \Rightarrow \log y_2 = x \log(\cot x)$$

$$\frac{1}{y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = x . \frac{1}{\cot x}(-\operatorname{cosec}^2 x) + \log(\cot x).1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2 \left[\frac{-x \operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} + \log(\cot x) \right]$$

$$= (\cot x)^x \left[-\frac{x}{\sin x \cos x} + \log(\cot x) \right]$$

$$= (\cot x)^x \left[-x \operatorname{cosec}^2 x \tan x + \log(\cot x) \right] \qquad ...(ii)$$

(i), (ii), (iii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\cot x} \operatorname{cosec}^2 x (1 - \log \tan x)$$

$$+(\cot x)^x \left[-x \operatorname{cosec}^2 x \tan x + \log \tan x \right]$$

ఉదాహరణ 23.51 : $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$. అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సాధన : $y_1 = x^{\tan x}$; $y_2 = (\sin x)^{\cos x}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow y = y_1 + y_2$

$\therefore\ y_1 = x^{\tan x}$ taking log both sides

$\log y_1 = \log x^{\tan x} \Rightarrow \log y_1 = \tan x \log x$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} = \tan x . \frac{1}{x} + \log x \ \sec^2 x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \left[\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \log x \right] \qquad ...(ii)$$

$y_2 = (\sin x)^{\cos x}$ ఇరువైపుల సంవర్గమానం తీసికొనగా

$\log y_2 = \log (\sin x)^{\cos x}$ 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = \cos x . \frac{1}{\sin x} . \cos x - \log \sin x (-\sin x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2 \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x \log \sin x \right]$$

$$\frac{dy_2}{dx} = (\sin x)^{\cos x} \left[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x \right] \qquad ...(ii)$$

i, ii, iii ల నుంచి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\tan x} \left(\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \log x \right) + (\sin x)^{\cos x} \left[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x \right]$$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

23.3 సంవర్గమాన ప్రమేయముల అవకలజం - కొనసాగింపు

x దృష్ట్యా x^n యొక్క అవకలజం $n\,x^{n-1}$ అని తెలుసు, ఇచట n స్థిర సంఖ్య. ఘాతము చలనరాశి అయిన ప్రమేయమునకు . ఈ సూత్రమునుపయోగించి అవకలజం కనుగొనలేము. ఇటువంటి సందర్భములలో అలకజం కనుగొనడానికి సంవర్గమానమును ప్రమేయమునకు తీసుకొని తరువాత అవకలజం కడతాము. ఇచ్చిన ప్రమేయము $[f(x)]^{g(x)}$ రూపములోనున్న ప్రమేయమనకు ఈ పద్ధతి ఉపయోగకరము. ఉదా. a^x, x^x etc

గమనిక : $f(x)$ స్థిర పదము కావచ్చును.

a^x కు x దృష్ట్యా అవకలనం కనుగొనుము

$y = a^x$ అనుకొనుము, $a > 0$

ఇరువైపులా సంవర్గ మానములను తీసుకొనగ

$\log y = \log a^x$ $\quad\boxed{\because \log m^n = n \log m}$

$\log\ y = x\ \log\ a$

'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log a \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\ \ \frac{dy}{dx} = \log a$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = y\ \log a$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = a^x\ \log a$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}(a^x) = a^x\ \log a \quad a > 0$$

23.4 రెండో పరిమాణం అవకలజం

ఇంతకు ముందు పాఠ్యాంశములలో, త్రికోణమితీయ మరియు విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములకు రెండవ పరిమాణం అవకలజం కనుగొనియున్నాము. అవికనుగొనుటకు మనము

త్రికోణమితీయ మరియు విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల అవకలజములను, వివిధ అవకలన సూత్రములు, గొలుసు సూత్రము, ఘాత సూత్రములను ఉపయోగించినాము. అదే విధముగ, ఇక్కడ మనము ఘాత ప్రమేయములకు మరియు సంవర్గ మాన ప్రమేయములకు రెండవ పరిమాణం అవకలజం గురించి తెలుసుకొందాము.

ఉదాహరణ 23.52 : e^x ప్రమేయముకు రెండో పరిమాణం అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = e^x$ అనుకొనుము

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

ఉదాహరణ 23.53: $x = \cos\theta + \theta\sin\theta,\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sin\theta - \theta\cos\theta;\quad x = \cos\theta + \sin\theta$

'θ' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా వచ్చునది.

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + \sin\theta.1 + \theta.\cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \theta.\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 1\cos\theta + \theta\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \theta\sin\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \theta\sin\theta\,\frac{1}{\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\theta) = \frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2\theta\frac{1}{\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2\theta}{\theta}$$

ఉదాహరణ 23.54 : $y = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{x^2+3x+2}$$

ఇప్పుడు $y = \frac{x^3}{x^2+3x+2} = (x-3)+\frac{7x+6}{(x+1)(x+2)}$

కాని $\frac{7x+6}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{x+1}+\frac{-8}{-1(x+2)} = \frac{-1}{x+1}+\frac{8}{x+2}$

(పాక్షిక భిన్నాలను అనుసరించి)

$$y = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)} = x-3-\frac{1}{(x+1)}+\frac{8}{(x+2)}$$

$$y = (x-3)-\frac{1}{(x+1)}+\frac{8}{(x+2)}$$

'x' దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 1-\frac{1(-1)}{(x+1)^2}+\frac{8(-1)}{(x+2)^2}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{8}{(x+2)^2} \quad ...(i)$$

మరల 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 + \frac{-2}{(x+1)^3} + \frac{16}{(x+2)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{16}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$

ఉదాహరణ 23.55 : $y = \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)}$

పాక్షిక భిన్నాలను అనుసరించి

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$$

$x = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2$

$x = 1, \Rightarrow$ $B = -1$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$x = 2, \Rightarrow$ $C = 2$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$x = 0, \Rightarrow$ $2A - 2B + C = 0$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$2A - 2(-1) + 2 = 0$

$2A = -4 \Rightarrow \boxed{A = -2}$

$$y = \frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-2}{(x-1)} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)}$$

$\therefore$ 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-2)(-1)}{(x-1)^2} + \frac{(-1)(-2)}{(x-1)^3} + \frac{2(-1)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2}$$

మరల 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4} - \frac{4}{(x-2)^3}$$

అభ్యాసం 23.1

1. $y = e^{ax}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

2. $y = e^{\frac{3a}{2}}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

3. $y = \frac{1}{x} . e^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

4. $y = e^{7x+4}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

5. $y = e^{\sqrt{2}x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

6. $y = (x - 1)e^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

7. $y = e^{x\sec^2 x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

8. $y = \log(\tan x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

9. If $y = \log[\cos(\log x)]$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

10. $y = \frac{e^{x^2}}{\log x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

11. $y = \log(\log x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

12. $y = a^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

13. $y = (\log)^{\sin x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

14. $y = e^x$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

15. $y = \frac{\log x}{x}$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

అభ్యాసం 23.2

1. $y = \frac{e^{2x}\cos x}{x\sin x}$ అయితే ని కనుగొనుము

2. $y = (\log x)^3$ అయితే ని కనుగొనుము

3. $y = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

4. $y = \log \sin (\log x)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

5. $y = x^{(x^2+\sin x)}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

6. $y = (x)^{x^2} + (\log x)^{\log x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

7. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ అయితే

$\frac{x^2d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ అని చూపుము.

8. $y = e^{\tan^{-1}x}$ అయితే

$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} = 0$ అని రుజువు చేయుము.

9. $y = (\log x)^{\tan x}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

10. $g(x)$ దృష్ట్యా $f(x)$ అవకలనం కనుగొనండి.

$f(x) = s^{\sin^{-1} x}$; $g(x) = \sin^{-1} x$.

అభ్యాసం 23.3

1. $x = a\left\{\cos\theta + \log\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$ మరియు $y = a\sin\theta$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

2. $y = \sin\left(\log_e x\right)$ అయితే $\frac{x^2 d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

3. $u = \log(\sec x + \sec y + \sec z)$ అయితే $\Sigma\cot x\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

4. $f(x) = (a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\cos^{-1}\left[\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right]$ అయితే

$f'(x) = (a + b\cos x)^{-1}$ ని కనుగొనుము.

5. $y = \frac{x^3\sqrt{2+3x}}{(2+x)(1-x)}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

6. $y = 128\sin^3 x\cos^4 x$ అయితే $\frac{d^2y}{dx^2}$ ని కనుగొనుము.

7. $y = a\cos x + (b + 2x)\sin x$ అయితే $y'' + y = 4\cos x$ ని కనుగొనుము.

8. If $y = a\cos(\sin x) + b\sin(\sin x)$ అయితే $y'' + (\tan x)y' + y\cos^2 x = 0$ ని కనుగొనుము.

9. If $y = e^{a\sin^{-1} x}$ అయితే $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$ అని చూపుము.

10. If $y = \left(x^x\right)^x$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ని కనుగొనుము.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http : //www.wikipedia.org
- http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. కింది ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుగొనుము.

   (a) $\left(x^x\right)^x$ (b) $x^{\left(x^x\right)}$

2. కింది ప్రమేయాల $\frac{dy}{dx}$ అవకలజాలను కనుగొనండి.

   (a) $y = a^{x \log \sin x}$ (b) $y = (\sin x)^{\cos^{-1} x}$

   (c) $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (d) $y = \log\left[e^x\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{3/4}\right]$

3. కింది ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుగొనుము.

   (a) $f(x) = [\sin^{-1} x]^2 . x^{\sin x} . e^{2x}$

   (b) $y = (\tan x)^{\log x} + \cos x$

   (c) $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$

   (d) $y = \frac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}$

   (e) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})}$

   (f) $y = 7^{x^2+2x}$

   (g) $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$

(h) $y = \dfrac{2^x \cot x}{\sqrt{x}}$

(i) $y = x^x$ అయితే $\dfrac{x.dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1 - y\log x}$ అని నిరూపించండి.

4. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, అయితే $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ అని చూపుము.

5. $y = e^{\tan^{-1}x}$, అయితే $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\dfrac{dy}{dx} = 0$ అని చూపుము.

జవాబులు

అభ్యాసం 23.1

1. $a\ e^{ax}$

2. $\dfrac{-3}{2}\ e^{\frac{-3x}{2}}$

3. $\dfrac{e^x}{x^2}[x-1]$

4. $7e^{7x+4}$

5. $\sqrt{2}\ e^{\sqrt{2}x}$

6. $x\ \ e^x$

7. $e^{x\sec^2 x}\ [\sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x]$

8. cosec x $\sec^2 x$

9. $-\dfrac{1}{x}\tan(\log x)$

10. $-\tan x$

11. $\dfrac{1}{x\log x}$

12. $a^x \log a$

13. $(\log)^{\sin x}\left[\cos x \log(\log x)\right] + \dfrac{\sin x}{x \log x}$ **14.** e^x

15. $\dfrac{2\log x - 3}{x^3}$

అభ్యాసం 23.2

1. $\dfrac{e^{2x}\left[(2x-1)\cot x - x\operatorname{cosec}^2 x\right]}{x^2}$ **2.** $\dfrac{3}{x}\left[\log x\right]^2$

3. $\dfrac{\cot(\log x)}{x}$ **4.** $-\tan x$

5. $x^{(x^2+\sin x)}\left[\dfrac{x^2+\sin x}{x} + (2x+\cos x)\log x\right]$

6. $(x)^{x^2}.x(1+2\log x) + (\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1+\log(\log x)}{x}\right]$

9. $y\left[\dfrac{\tan x}{x\log x} + \log(\log x)\sec^2 x\right]$

10. $x^{\sin^{-1}x}\left[\log x + \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{\sin^{-1}x}{x}\right]$

అభ్యాసం 23.3

1. $\tan\theta$ **2.** $-y$

3. $\Sigma \cot x \dfrac{dy}{dx} = 1$

5. $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{2(2+3x)} - \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{1-x}\right]$

6. $-54\sin 3x - 6\sin x + 98\sin 7x + 50\sin 5x$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \left(x^x\right)^x\left[x + 2x\log x\right]$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము



సాధనా అభ్యాసం

1. (a) $\left(x^x\right)^x[x+2x\log x]$ (b) $x^{(x)^x}[x^{x-1}+\log x(\log x+1)]$

2. (a) $a^{x\log\sin x}[\log\sin x+x\cot x]\log a$

(b) $(\sin x)^{\cos^{-1}x}\left[\cos^{-1}x\cot x-\frac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\left[2x\log\left(x+\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right]$

(d) $1+\frac{3}{4(x-4)}-\frac{3}{4(x+4)}$

3. (a) $(\sin^{-1}x)^2.x^{\sin x}e^{2x}\left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2\sin^{-1}x}}+\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}+2\right]$

(b) $(\tan x)^{\log x}\left[2\text{cosec}\,x\log+\frac{1}{x}\tan x\right]+(\cos x)^{\sin x}$

$\left[-\sin x\tan x+\cos x\log(\cos x)\right]$

(c) $x^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{x}+\sec^2 x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}[\cot x\cos x-\sin x\log(\sin x)]$

(d) $\frac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}\left[\frac{4}{x}+\frac{1}{2(x+6)}-\frac{6}{3x+5}\right]$

(e) $\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

(f) $7^{x^2+2x}(2x+2)\log_e 7$

(g) $x^2e^{2x}\cos 3x\left\{\frac{2}{x}+2-3\tan 3x\right\}$

(h) $\frac{2^x\cot x}{\sqrt{x}}\left[\log 2-2\text{cosec}\,2x-\frac{1}{2x}\right]$

అధ్యాయం

24

స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశము నేర్చుకొన్న తరువాత, మీరు ఈ క్రింది విషయాలను నేర్చుకొంటారు.

- ఒక వక్రానికి ఒక బిందువు వద్దగల స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖ
- స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖల సమీకరణములు.
- స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖ, ఉపస్పర్శ ఖండం, ఉపలంబఖండంల పొడవులు.
- రోల్ సిద్ధాంతం మరియు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- నిరూపకజ్యామితి
- వివిధ ప్రమేయమాల అవకలజ గుణకాలు
- స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖలు
- ఒక బిందువు వద్ద అవకలజానికి జ్యామితీయ వివరణ

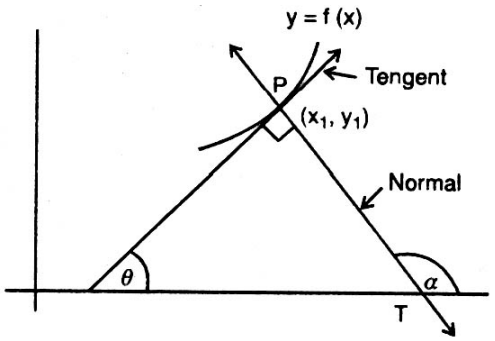
పరిచయం

స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖలు వక్రాలకు అనుబంధించబడిన రేఖలు. ఒక ప్రత్యేక బిందువు వద్ద వక్రాన్ని స్పృశించే రేఖను స్పర్శరేఖ అంటాము. వక్రానికి ప్రతి బిందువు వద్ద, స్పర్శరేఖను గీయవచ్చు. స్పర్శ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉండే రేఖను అభిలంబ రేఖ

అంటాము. ఈ అధ్యాయంలో మనం వివిధ వక్రాలకు స్పర్శరేఖా, అభిలంబ రేఖ ఉపస్పర్శఖండం మరియు ఉపలంబ ఖండం సమీకరణాలను మరియు వాటి పొడవులను ఎలా కనుగొనాలో నేర్చుకొందాము.

24.1 స్పర్శ రేఖ మరియు అభిలంబరేఖ వాలు

$y = f(x)$ ఏదేని అవిచ్ఛిన్న వక్రము మరియు $P(x_1, y_1)$ వక్రంపై ఏదేని ఒక బిందువు. P బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు



$$\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ at } (x_1, y_1) \qquad \ldots. (1)$$

$= \tan\theta$

P గుండా పోతూ, P వద్ద వక్రం స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖను వక్రానికి P వద్ద అభివలంబరేఖ అంటారు.

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$ అవుతుంది

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta}$$

$\therefore$ అభిలంబరేఖ వాలు = −1/స్పర్శరేఖవాలు $= -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \text{ at } (x_1, y_1) = -\frac{dx}{dy} \text{ at } (x_1, y_1)$

గమనిక

1. వక్రానికి P వద్ద స్పర్శరేఖ X- అక్షానికి సమాంతరంగా నున్న యెడల $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 0$ అగును.

2. వక్రానికి P వద్ద స్పర్శరేఖ Y- అక్షానికి సమాంతరంగా నున్న యెడల $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)} = 0$ అగును.

ఉదాహరణ 24.1: $x^2+x^3+3xy+y^2=5$ వక్రానికి (1, 1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు, అభిలంబరేఖ వాలు కనుగొనుము.

సాధన: వక్రము యొక్క సమీకరణమును అవకలనము చేయగా

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(x^3)+3\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$2x+3x^2+3\left\{x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)\right\}+2y\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$2x+3x^2+3x\frac{dy}{dx}3.y.1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x-3x^2-3y$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-2x-3x^2-3y}{3x+2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=\frac{-2.1-3.1^2-3.1}{3.1+2.1}=\frac{-8}{5}$$

స్పర్శరేఖ వాలు $=-\frac{8}{5}$

అభిలంబరేఖ వాలు $\frac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}}=\frac{5}{8}$

ఉదాహరణ 24.2 : $y=\frac{1}{6}\left[3x^5+2x^3-3x\right]$ వక్రమునకు $x=\pm 3$ బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు సమాంతరము అని చూపండి.

సాధన: వక్రము యొక్క సమీకరణము, $y=\frac{3x^5+2x^3-3x}{6}$

అవకలనము చేయగా $\frac{dy}{dx}=\frac{15x^4+6x^2-3}{6}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3}=\frac{15(3)^4+6(3)^2-3}{6}=m_1 \text{ అనుకొనుము}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-3} = \frac{15(-3)^4 + 6(-3)^2 - 3}{6}$$

$$= \frac{15(3)^4 + 6(3)^2 - 3}{6} = m_2 \text{, అనుకొనుము}$$

$m_1 = m_2$, కావున $x = \pm 3$ బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు సమాంతరము.

ఉదాహరణ 24.3: వక్రము $6y^3 = px^2 + q$ కు $(2, -2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $\frac{1}{6}$ అయిన p , q విలువలు కనుగొనుము.

సాధన: $6y^3 = px^2 + q$ ను అవకలనము చేయగా

$$6 \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot 2x + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2px}{18y^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,-2)} = \frac{2p(2)}{18(-2)^2} = \frac{p}{18}$$

కావున స్పర్శరేఖ వాలు $= \frac{p}{18}$

కాని, స్పర్శరేఖ వాలు $= \frac{1}{6}$

$$\therefore \frac{p}{18} = \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{18}{6} = 3$$

వక్రం సమీకరణం $6y^3 = 3x^2 + q$

$(2 , -2)$ వక్రం మీద బిందువు, కావున

$6(-2)^3 = 3(2)^2 + q$

$6(-8) = 3(4) + q$

$-48 - 12 = q$

$q = -60$

$\therefore \quad p = 3, q = -60$

అభ్యాసం 24.1

1. ఈ క్రిందనీయబడిన వక్రములకు అడిగిన బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖల వాలులను కనుగొనుము.

   (i) $y = x^3 - 2x$, $x = 2$ (ii) $x^2 + 3y + y^2 = 5$, కు $(1, 1)$ వద్ద

   (iii) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ కు $\theta = \frac{\pi}{2}$ వద్ద

2. $xy + px + qy = 2$ వక్రమునకు $(1, 1)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు 2 అయిన p, q విలువలు కనుగొనుము.

3. $x^2 + y^2 = 18$ వక్రమునకు ఏ బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ సరళరేఖ $x + y = 3$ కు సమాంతరముగ నుండును.

4. ఏ బిందువుల వద్ద వక్రము $y = x^2 - 4x + 5$ కు స్పర్శరేఖ $2y + x - 7 = 0$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండును.

24.2 వక్రమునకు ఒకబిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ అభిలంబరేఖల సమీకరణములు

(x_1, y_1) బిందువు గుండా పోతూ, వాలు m కలిగిన సరళరేఖ సమీకరణం $y - y_1 = m(x - x_1)$ అని మనకు తెలుసు.

$y = f(x)$ వక్రమునకు (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ అనియు

అభిలంబరేఖ వాలు $= -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}$

స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$

అభిలంబరేఖ సమీకరణం, $y - y_1 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$

లేక $y - y_1 = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} (x - x_1)$

గమనిక: (i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 0$ అయిన సందర్భములో, స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y - y_1 = 0$ అగును. అభిలంబరేఖ సమీకరణం $x - x_1 = 0$ అగును.

(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} \to \infty$ అయిన సందర్భములో, స్పర్శరేఖ సమీకరణం $x - x_1 = 0$ అభిలంబరేఖ సమీకరణం $y - y_1 = 0$ అవును.

ఉదాహరణ 24.4

వృత్తము $x^2 + y^2 = 25$ కు (4, 3) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $x^2 + y^2 = 25$ ను అవకలనం చేయగా

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y \frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,3)} = -\frac{4}{3} = \text{స్పర్శరేఖ వాలు}$$

స్పర్శరేఖ (4, 3) బిందువు గుండా పోవును. కావున స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x-4)$$

$$3(y-3) = -4(x-4)\ ;\ 3y - 9 = -4x + 16$$

$$4x + 3y - 25 = 0$$

$$\text{అభిలంబరేఖ వాలు} = \frac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}} = \frac{-1}{\frac{-4}{3}} = \frac{3}{4}$$

అభిలంబరేఖ (4, 3) బిందువు గుండా పోవును. అభిలంబరేఖ సమీకరణం

$$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$$

$$4y - 12 = 3x - 12 \Rightarrow 3x - 4y = 0$$

స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణములు వరుసగా $4x+3y-25=0,\ 3x-4y=0$

ఉదాహరణ 24.5 $16x^2 + 9y^2 = 144$ వక్రమునకు (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖల సమీకరణములను కనుక్కోండి. (x_1, y_1) లో $x_1 = 2$ మరియు $y_1 > 0$.

$(x_1, y_1) = (2, y_1)$ బిందువు $16x^2 + 9y^2 = 144$ వక్రము మీద ఉన్నది.

$$\therefore \quad 16(2)^2 + 9y_1^2 = 144$$

$$9y_1^2 = 144 - 64 = 80$$

$$y_1^2 = \frac{80}{9}$$

$$y_1 = \pm\frac{\sqrt{80}}{3} \qquad (\because \quad y_1 > 0)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{80}}{3}$$

$$y_1 = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$$(x_1, y_1) = \left(2, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$$

$16x^2 + 9y^2 = 144$ ను అవకలనం చేయగా

$$16\frac{d}{dx}(x^2) + 9\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(144)$$

$$16(2x) + 9(2y).\frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$18y\frac{dy}{dx} = -32x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-32x}{18y} = \frac{-16x}{9y}$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(2,\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)} = \frac{-16.2}{9.\frac{4\sqrt{5}}{3}} = \frac{-8}{3\sqrt{5}} =$ స్పర్శరేఖ వాలు

$\left(2,\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y-\frac{4\sqrt{5}}{3} = -\frac{8}{3\sqrt{5}}(x-2)$$

$$3\sqrt{5}y-20=-8x+16$$

$$8x+3\sqrt{5}y-36=0$$

అభిలంబరేఖ, స్పర్శరేఖకు లంబముగా నుండును. కావున అభిలంబరేఖ వాలు × స్పర్శరేఖ వాలు $= -1$

$$\text{అభిలంబరేఖ వాలు} = \frac{-1}{\frac{-8}{3\sqrt{5}}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

అభిలంబరేఖ సమీకరణం, $y-\frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{8}(x-2)$

$$8(3y-4\sqrt{5}) = 9\sqrt{5}(x-2)$$

$$9\sqrt{5}\,x-24y+14\sqrt{5}=0$$

ఉదాహరణ 24.6 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ వక్రమునకు స్పర్శరేఖలు

$x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా ఏ బిందువుల వద్దనో కనుగొనుము.

సాధన $\frac{x2}{9}-\frac{y2}{16}=1$ ను అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{9}.2x-\frac{1}{16}.2y.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{16x}{9y}$$



స్పర్శరేఖ x –అక్షమునకు సమాంతరము

కాబట్టి స్పర్శరేఖ వాలు $= 0$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{16x}{9y} = 0 \Rightarrow 16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x = 0$ అని $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$లో ప్రతిక్షేపించగా

$$-\frac{y^2}{16} = 1,\ y^2 = -16,\ y = \pm 4i$$

కాబట్టి ఏ వాస్తవ బిందువు వద్ద కూడా స్పర్శరేఖ x –అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండదు.

ఉదాహరణ 24.7 $y = \frac{1}{x-1}$ వక్రమునకు స్పర్శరేఖ వాలు -4 కలిగిన స్పర్శరేఖల సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన $y = \frac{1}{x-1}$ ను అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

స్పర్శరేఖ వాలు -4 అని తెలుసు

$$\text{కాబట్టి } \frac{-1}{(x-1)^2} = -4 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ అని $y = \frac{1}{x-1}$లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$x = \frac{1}{2}$ అని $y = \frac{1}{x-1}$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$\therefore$ బిందువులు $\left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right)$

$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y-2 = -4\left(x-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow y-2 = -4x+6 \Rightarrow 4x+y-8 = 0$$

$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y+2 = -4\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y+2 = -4x+2 \Rightarrow 4x+y = 0$$

ఉదాహరణ 24.8 $y = x^3$ వక్రమునకు $(2, 8)$ బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన $y = x^3$ ను అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,8)} = 3.2^2 = 3.4 = 12$$

స్పర్శరేఖ వాలు $= 12$

అభిలంబరేఖ వాలు $= \frac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}} = \frac{-1}{12}$

అభిలంబరేఖ సమీకరణము $y - 8 = -\frac{1}{12}(x-2)$

$12y - 96 = -x + 2 \Rightarrow x + 12y - 98 = 0$

అభ్యాసం 19.2

1. స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణములు అక్కడ ఇవ్వబడిన బిందువుల వద్ద కనుగొనండి.

   (i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ కు $(0 , 5)$ వద్ద

   (ii) $y = x^2$ కు $(1 , 1)$ వద్ద

   (iii) $y = x^3 - 3x + 2$ కు x–నిరూపకము 3 అయిన బిందువు దగ్గర

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ కు (x_1 , y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ కు (x_0 , y_0) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

4. $y = x^3+2x+6$ కు $x + 14y + 4 + 0$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా నున్న అభిలంబరేఖల సమీకరణం కనుగొనుము.

5. $8k^2 = 1$ అయిన వక్రములు $x = y^2$ మరియు $xy = k$ లు పరస్పరము లంబముగా ఖండించుకొంటాయని చూపుము.

సూచన : (i) వక్రముల సమీకరణములను సాధించి వక్రముల ఖండన బిందువు కట్టాలి. (ii) ఆ బిందువు వద్ద వక్రములకు స్పర్శరేఖల వాలులు కనుగొనాలి. (iii) వక్రముల మధ్యకోణము $\frac{\pi}{2}$ కాబట్టి వాలుల లబ్ధమును కనుగొని అందులో $8k^2 = 1$ ను ఉపయోగించి వాలుల లబ్ధము -1 అని చూపిన లెక్క పూర్తి అవుతుంది.

24.3 స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల పొడవులు ఉపస్పర్శఖండం మరియు ఉపఅభిలంబ ఖండం

ఈ విభాగంలో స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల పొడవులు ఉపస్పర్శఖండం, ఉపలంబఖండం అనే భావనలను నిర్వచించి వాటిని కనుక్కోవడానికి సూత్రాలను రాబడుతాం.

నిర్వచనం :

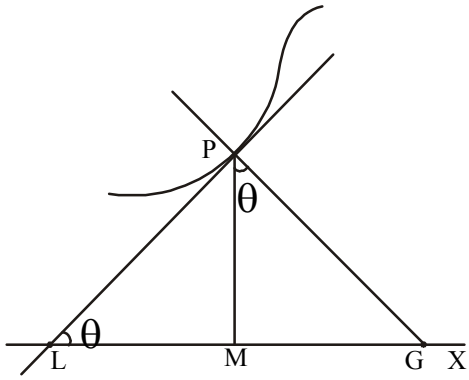
$y = f(x)$ వక్రంపై $P = (x_1, y_1)$ ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. P వద్ద వక్రానికి స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖలు X-అక్షాన్ని వరసగా L, G ల వద్ద ఖండిస్తాయనుకొందాం. P నుండి X-అక్షంపైకి గీసిన లంబపాదం M అనుకొందాం.

(i) PL ను స్పర్శరేఖ పొడవని

(ii) PG ను అభిలంబరేఖ పొడవని

(iii) LM ను ఉపస్పర్శ ఖండం అని

(iv) MG ను ఉపలంబ ఖండం అని అంటాము.



సాధారణంగా $\theta \neq 0$

మరియు $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ అయినప్పుడు పై నాలుగు రేఖా ఖండాలకు సులభంగా సూత్రాలు కనుక్కోవచ్చు.

(i) స్పర్శరేఖ పొడవు = PL = $\frac{P\mu}{\sin\theta}$

$$= \left|\frac{y_1}{\sin\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{y_1}{\tan\theta\cos\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{y_1 \sec\theta}{\tan\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{y_1\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}\right|$$

$$= \left|\frac{y_1\sqrt{1+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}\right]^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}}\right|$$

(ii) అభిలంబరేఖ పొడవు = PG = $PM\sec\theta$

$$= |y_1\sec\theta|$$

$$= \left| y_1 \sqrt{1+\tan\theta} \right|$$

$$= \left| y_1 \sqrt{1+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}\right]^2} \right|$$

(iii) ఉపస్పర్శఖండం = LM $= \text{LM} = \left| \frac{y_1}{\tan\theta} \right|$

$$= \left| \frac{y_1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\,y_1)}} \right|$$

(iv) ఉపలంబ ఖండం = MG = $\left| y_1 \tan\theta \right|$

$$= \left| y_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\,y_1)} \right|$$

వక్రంపై సాధారణ బిందువు (x, y) వద్ద పై సూత్రాలను కింది విధంగా గుర్తుపెట్టుకోవచ్చు.

(i) స్పర్శరేఖ పొడవు $= \left| \frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'} \right|$

(ii) అభిలంబరేఖ పొడవు $= \left| y\sqrt{1+(y')^2} \right|$

(iii) ఉపస్పర్శరేఖ ఖండం $= \left| \frac{y}{y'} \right|$

(iv) ఉపలంబఖండం $= |y\ y'|$ $\left[y' = \frac{dy}{dx} \right]$

ఉదాహరణ 24.9 : $y^2 = 4ax$ వక్రంపై ఏ బిందువు వద్ద నైనా ఉపలంబ ఖండం స్థిరమని చూపండి.

సాధన : $y^2 = 4ax$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే $2y\,y' = 4a$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$$

$$\Rightarrow \quad y\,y' = 2a$$

$\therefore$ $y^2 = 4ax$ వక్రంపై ఏదేని బిందువు (x, y) వద్ద ఉపలంబ ఖండం

$= |\,y\,y'\,| = |\,2a\,|$ స్థిరాంకం.

ఉదాహరణ 24.10 : $y = a^x\ (a > 0)$ వక్రంపై ఏ బిందువు వద్దనైనా ఉపస్పర్శఖండం స్థిరమని చూపండి.

సాధన : $y = a^x$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$y' = a^x \log a$$

$\therefore$ దత్త వక్రంపై ఏదేని బిందువు (x, y) వద్ద ఉపస్పర్శఖండం పొడవు

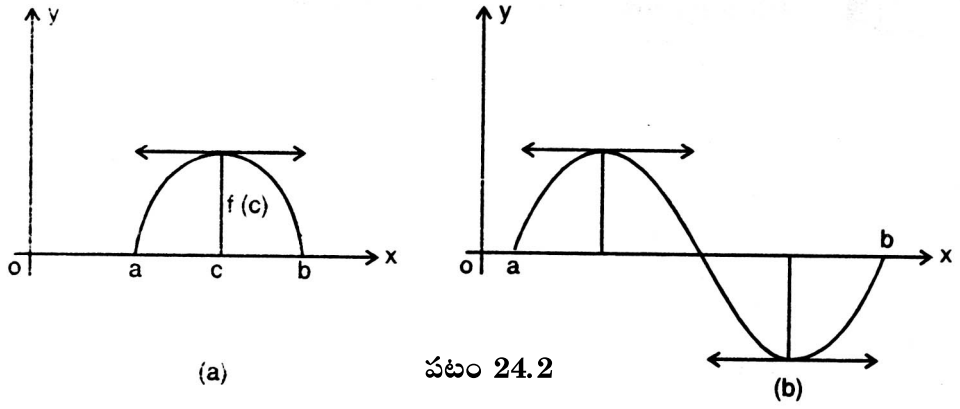
$$= \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{a^x}{a^x \log a}\right| = \frac{1}{\log a} = \text{స్థిరాంకం.}$$

అభ్యాసం 24.3

1. $y = b\sin\frac{x}{a}$ వక్రంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శఖండం, ఉపలంబఖండం పొడవులను కనుక్కోండి.
2. $y = be^{x/a}$ వక్రంపై ఏదేని బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శఖండం స్థిరమని మరియు ఉపలంబ ఖండం పొడవు $\frac{y^2}{a}$ అని చూపండి.

24.3 రోల్ సిద్ధాంతం జ్యామితీయ వివరణ

మనమొక ముఖ్యమైన సిద్ధాంతము గూర్చి తెలుసుకొందాము. $y = f(x)$ వక్రముపై $f(a) = f(b)$ అగునట్లు $(a\ ,\ f(a)), (b\ ,f(b))$ లు రెండు బిందువులు అయిన ఈ బిందువుల మధ్య నున్న వక్రమునకు స్పర్శరేఖ $x-$అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండు బిందువు కనీసము ఒక్కటైన ఉండును.



పటం 24.2

రోల్ సిద్ధాంతం 24.3.1

సంవృతాంతరం $[a, b]$ పై నిర్వచించిన ఒక వాస్తవ ప్రమేయం f అనుకొందాము.

(i) సంవృతాంతరం $[a, b]$ పై f అనిచ్ఛిన్నము.

(ii) వివృతాంతరం (a, b) పై f అవకలనీయముగా

(iii) $f(a) = f(b)$

అయితే $f'(c) = 0$ అయ్యేటట్లుగా వివృతాంతరం (a, b) లో కనీసం ఒక్క విలువైనా c ఉంటుంది.

గమనిక అవకలజం సున్న అయ్యే x విలువలు ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఉండవచ్చని గమనించండి.

ఉదాహరణ $f(x) = |x|, [-1, 1]$ అవిచ్ఛిన్నమూ మరియు $(-1, 1) - \{0\}$ లో అవకలనము, $f(-1) = f(1)$. కావున f కు రోల్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించలేము. $|x|$ ప్రమేయము $x = 0$ వద్ద అవకలనము కాదు.

ఉదాహరణ 24.11: $f(x) = x(x-1)(x-2), x \in [0, 2]$

ప్రమేయమునకు రోల్ సిద్ధాంతం అనువర్తనము పరిశీలించండి.

సాధన $f(x) = x(x^2 - 2x - x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

(i) $f(x)$ సమాసము కావున $[0, 2]$ పై అవిచ్ఛిన్నము

(ii) $f(x), (0, 2)$ పై అవకలనీయము.

(iii) $f(0) = 0;\ f(2) = 0$. కావున $f(0) = f(2)$ రోల్ సిద్ధాంతములోని అన్ని నియమములు తృప్తి చెందినవి.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = 0 = \Rightarrow c = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$$

$$\Rightarrow c = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6}{6} \pm \frac{2\sqrt{3}}{6} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \pm 0.577$$

c యొక్క రెండు విలువలు వివృతాంతరం $(0, 2)$లో ఉన్నవి.

ఉదాహరణ 24.12: $\sin x - \sin 2x$ ప్రమేయమునకు $[0, \pi]$ పై రోల్ సిద్ధాంతం సరిచూడండి.

సాధన ఇచ్చినది సైన్ ప్రమేయము. అది $[0, \pi]$ పై అవిచ్ఛిన్నము మరియు $[0, \pi]$ పై అవకలనీయము.

$$f(0) = \sin 0 - \sin 2(0) = 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

$$f(\pi) = \sin \pi - \sin 2\pi = 0 - 0 = 0$$

$$\therefore\ f(0) = f(\pi)$$

రోల్ సిద్ధాంతములోని అన్ని నియమములు తృప్తిచెందినవి.

$$f'(x) = \cos x - 2\cos 2x = \cos x - 2(2\cos^2 x - 1)$$

$$= \cos x - 4\cos^2 x + 2 = -4\cos^2 x + \cos x + 2)$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -4\cos^2 x + \cos x + 2 = 0$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -4\cos^2 c + \cos c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$33 < 36 \Rightarrow \sqrt{33} < 6 \Rightarrow 1 + \sqrt{33} < 7$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{33}}{8} < \frac{7}{8} = 0.875$$

$\cos c = 0.875$ అయ్యేటట్లు ఒక $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ లో ఉంటుంది.

$c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ కావున

$\because$ $f'(c) = 0$ అయ్యేటట్లు ఒక $c \in (0, \pi)$ ఉన్నది.

అభ్యాసం 24.4

ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు రోల్ సిద్ధాంతమును సరిచూడండి.

(i) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{3} + 2x,\ x \in [0, 3]$

(ii) $f(x) = x^2 - 1, x \in [-1, 1]$

(iii) $f(x) = \sin x + \cos x - 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(iv) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2), [-1, 2]$

24.4 లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం

సంవృతాంతరం $[a, b]$ పై అవిచ్ఛిన్నమవుతూ, వివృతాంతరం (a, b) పై అవకలనీయమయ్యే ఒక వాస్తవ ప్రమేయం f అనుకొందాము. అప్పుడు (a, b) లో

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ అయ్యేటట్లుగా, కనీసం ఒక "c" ఉంటుంది.

గమనిక : $f(a) = f(b)$ అయ్యే ప్రత్యేక సందర్భంలో, ఈ సిద్ధాంతం రోల్ సిద్ధాంతమే అవుతుంది.

జ్యామితీయ వివరణ

ప్రమేయం f గ్రాఫ్‌పై A$(a, f(a))$, B$(b, f(b))$ లు రెండు బిందువులనీ, $a < b$ అనీ అనుకొందాము. అపుడు AB జ్యా వాలు $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ అవుతుంది. $x = c$ బిందువు వద్ద $y = f(x)$ వక్రమునకు స్పర్శరేఖ వాలు $f'(c)$. ఈ స్పర్శరేఖ, AB జ్యాకు సమాంతరముగా నున్నది. అందు వలన $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ పటం చూడండి.

కొన్ని ఉదాహరణల పరిశీలన

ఉదాహరణ 24.13 ప్రమేయము $f(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$; నకు $[3, 5]$ పై లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం సరిచూడండి. సిద్ధాంతములో ఉన్న విధముగా c కనుక్కోండి.

సాధన $f(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162$$

(i) f ఒక సమాసము, కావున $[3, 5]$ పై అవిచ్ఛిన్నము

(ii) $(3, 5)$ పై అవకలనీయము

(iii) $f(3) = 0, f(5) = (2)(-1)(-4) = 8$

$$f(3) \neq f(5)$$

లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతములోని నియమములు తృప్తిచెందినవి.

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{8-0}{2} = 4$$

$f'(c) = 4$ అనుకొందాము ...(1)

$f'(x) = 3x^2 - 36x + 99$

(i) నుండి $3c^2 - 36c + 99 = 4$

$$3c^2 - 36c + 95 = 0$$

$$c = \frac{36 \pm \sqrt{(36)^2 - 4.3.95}}{2.3} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1140}}{6}$$

$$c = \frac{36 \pm \sqrt{156}}{6} = \frac{36 \pm 2\sqrt{39}}{6} = 6 \pm \frac{\sqrt{39}}{3}$$

$$36 < 39 < 49 \Rightarrow 6 < \sqrt{39} < 7 \Rightarrow 2 < \frac{\sqrt{39}}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow -2 > -\frac{\sqrt{39}}{3} > -\frac{7}{3}\ ;\ 2 < \frac{\sqrt{39}}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 4 > 6 - \frac{\sqrt{39}}{3} > 6 - \frac{7}{3}\ ;\ 8 < 6 + \frac{\sqrt{39}}{3} < 6 + \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{3} < 6-\frac{\sqrt{39}}{3} < 4 \; ; \; 8 < 6+\frac{\sqrt{39}}{3} < 8+\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3+\frac{2}{3} < 6-\frac{\sqrt{39}}{3} < 4$$

$$\Rightarrow \; 6-\frac{\sqrt{39}}{3} \in (3, 5)$$

$f'\left(6-\frac{\sqrt{39}}{3}\right) = 4$ అవుతుంది.

కాబట్టి లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం సరిపోల్చబడింది.

ఉదాహరణ 24.14

$y = (x-4)^2$ వక్రంపై (4, 0), (5, 1) లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువులను కలిపే జ్యాకు, వక్రంపై ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమాంతరంగా ఉంటుందో కనుక్కోండి.

సాధన $y = (x-4)^2$ ను అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(x-4)$$

(4, 0), (5, 1) బిందువులను కలిపే జ్యా వాలు $= \frac{1-0}{5-4} = 1$

$$2\,(x-4) = 1$$

$$x - 4 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + 4 = 4.5$$

4.5 విలువ వివృతాంతరం (4, 5)లో ఉన్నది. (లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్యసిద్ధాంతం ప్రకారం)

$x = 4.5$ అయినపుడు, $y = (4.5-4)2 = 0.25$

$\therefore$ వక్రంపై (4.5, 0.25) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమాంతరముగా ఉండును.

అభ్యాసం 24.5

1. లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం ప్రతి సందర్భానికి 'c' విలువ కనుక్కోండి.

   (i) $f(x) = 3x^2 - 4$; $[2, 3]$ పై (ii) $f(x) = \log x$; $[1, 2]$ పై

   (iii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[1, 3]$ పై (iv) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$; $[0, 1]$ పై

2. $y = (x+3)^2$ వక్రంపై $(3, 0)$, $(-4, 1)$ లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువులను కలిపే జ్యాకు, వక్రంపై ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమాంతరముగా ఉంటుందో కనుక్కోండి.

కీలక పదాలు

- $y = f(x)$ వక్రంపై (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం

$$y - y_1 = [f'(x)]_{(x_1, y_1)} \{x - x_1\}$$

- $y = f(x)$ వక్రంపై (x_1, y_1) బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖా సమీకరణం

$$y - y_1 = \left[\frac{-1}{f'(x)}\right]_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$$

- $y = f(x)$ వక్రమునకు (x_1, y_1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ x-అక్షమునకు సమాంతరముగ నున్న యెడల, దాని సమీకరణం $y = y_1$ అగును. y-అక్షమునకు సమాంతరంగా నున్న యెడల, దాని సమీకరణం $x = x_1$ అగును.

- $y = f(x)$ వక్రంపై $p(x, y)$ ఏదేని బిందువయినా

  (i) స్పర్శరేఖ పొడవు $= \left|\frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'}\right|$

  (ii) అభిలంబరేఖ పొడవు $= \left|y\sqrt{1+(y')^2}\right|$

  (iii) ఉపస్పర్శఖండం పొడవు $= \left|\frac{y}{y'}\right|$

(iv) ఉపలంబఖండం పొడవు = $|yy'|$

- రోల్ సిద్ధాంతం

  $[a, b]$ పై నిర్వచించిన వాస్తవ ప్రమేయము f అనుకొందాం.

  (i) $[a, b]$ పై f అవిచ్ఛిన్నము

  (ii) (a, b) పై f అవకలనీయము

  (iii) $f(a) = f(b)$

  అయిన యెడల $f'(c) = 0$ అయ్యేటట్లుగా వివృతాంతరం (a, b) లో కనీసం ఒక బిందువు 'c' ఉంటుంది.

- లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం

  $[a, b]$ పై నిర్వచింపబడిన వాస్తవ ప్రమేయము f.

  (i) $[a, b]$ పై f అవిచ్ఛిన్నము (ii) (a, b) పై f అవకలనీయము. అప్పుడు $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ అయ్యేటట్లుగా, కనీసం ఒక c, (a, b) లో ఉంటుంది.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

సాధనా అభ్యాసం

1. స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల వాలులు క్రింది ఇవ్వబడిన వక్రమునకు అడగబడిన బిందువు వద్ద కనుగొనుము.

   (i) $y = \sqrt{x}$, $x = 9$ వద్ద (ii) $y = x^3 + x$, $x = 2$ వద్ద

   (iii) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ వద్ద

   (iv) $y = 2x^2 + \cos x$, $x = 0$ వద్ద (v) $xy = 6$, $(1, 6)$ వద్ద

2. వక్రం $x = a\cos^3\theta$; $y = a\sin^3\theta$ కు $\theta = \frac{\pi}{4}$ వద్ద స్పర్శరేఖ, మరియు అభిలంబరేఖల సమీకరణము కనుక్కోండి.

3. వక్రం $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ కు ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ T అక్షమునకు సమాంతరముగా నున్నదో కనుగొనుము.

4. $y = x^2 - 2x + 5$ వక్రమునకు స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుక్కోండి. ఆ స్పర్శరేఖ (i) $2x + y + 7 = 0$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉండవలెను. (ii) $5(y - 3x) = 12$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండవలెను.

5. $y = 7x^3 + 11$ వక్రమునకు $x = 2$ మరియు $x = -2$ అగు బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు సమాంతరముగ నున్నవి అని చూపండి.

6. $(a\,m^2, a\,m^3)$ బిందువు వద్ద $a\,y^2 = x^3$ వక్రమునకు అభిలంబరేఖా సమీకరణం కనుక్కోండి.

7. రోల్ సిద్ధాంతం సరిచూడండి.

   (i) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$; $[-1, 2]$ పై

   (ii) $f(x) = \frac{x(x-2)}{x-1}$; $[0, 2]$ పై

   (iii) $f(x) = \frac{8x^2}{3} - 2x$, $x \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$ పై

8. $f(x) = x^3 + b\,x^2 + ax$, $[1, 3]$ పై రోల్ సిద్ధాంతము తృప్తి చెందుతున్నది మరియు $c = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ అయిన a, b ల విలువలు కనుగొనండి.

9. కింది ప్రమేయాలకు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్యసిద్ధాంతాన్ని సరిచూడండి.

   (i) $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, $[0, 1]$ పై

   (ii) $f(x) = \frac{1}{4x+1}$, $[-1, 4]$ పై

   (iii) $y = (x+3)^2$, $[-4, 3]$ పై

10. $y = (x-3)^2$ పరావలయంపై $(3, 0)$, $(4, 1)$ లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువలను కలిపే జ్యా, వక్రం పై ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటుందో కనుక్కోండి.

జవాబులు

అభ్యాసం 24.1

1. (i) $10, -\frac{1}{10}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{5}{2}$ (iii) $1, -1$

2. $p = 5, q = -4$ 3. $(3, 3), (-3, -3)$ 4. $(3, 2)$

అభ్యాసం 24.2

1. స్పర్శరేఖ అభిలంబరేఖ

   (i) $y + 10x = 5$ $x - 10y + 50 = 0$

   (ii) $2x - y = 1$ $x + 2y - 3 = 0$

   (iii) $24x - y = 52$ $x + 24y = 483$

2. $\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$ 3. $\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$

4. $x + 14y - 254 = 0,\ x + 14y + 86 = 0$

అభ్యాసం 24.3

1. ఉపస్పర్శఖండం పొడవు $\left|a \tan \frac{x}{a}\right|$

2. ఉపస్పర్శఖండం పొడవు $\left|\frac{b^2}{2a} \sin \frac{2x}{a}\right|$

అభ్యాసం 24.4

1. (i) $c = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$ (ii) $c = 0$

   (iii) $c = \frac{\pi}{4}$ (iv) $c = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

అభ్యాసం 24.5

1. (i) $c = 2.5$ (ii) $c = \frac{1}{\log_e^2}$

   (iii) $c = \sqrt{3}$ (iv) $c = \frac{1}{3}$

2. $\left(-\frac{43}{14}, \frac{1}{196}\right)$

సాధనా అభ్యాసం

1. (i) $\frac{1}{6}, -6$ (ii) $13, -\frac{1}{13}$ (iii) $1, -1$

   (iv) 0 నిర్వచించబడదు. (v) $-6, \frac{1}{6}$

2. $2\sqrt{2}\,(x+y) = a;\ x + y = 0$

3. (3, 0), (−3, 0)

4. (i) $2x + y - 5 = 0$ (ii) $12x + 36y = 155$

6. $2x + 3m\,y - am^2\,(2 + 3\,m^2) = 0$

7. $c = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

   (ii) ఏ వాస్తవ బిందువు లేదు (iii) $c = \frac{3}{8}$

8. $a = 11,\ b = -6$

9. (i) $c = \frac{1}{2}$ (ii) అనువర్తనము చేయలేము.

   (iii) $c = -\frac{1}{2}$

10. $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

అధ్యాయం

25

మహిష్ఠము మరియు అల్పిష్ఠము (గరిష్ఠ - కనిష్ఠ విలువలు)

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠం చదివిన పిమ్మట మీరు నేర్చుకునే అంశాలు :

- ఏకదిష్ఠ (ఆరోహణ మరియు అవరోహణ) ప్రమేయాల్ని నిర్వచించటం.
- ఆరోహణ ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx}>0$, అవరోహణ ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx}<0$ అని తెలుసుకోవటం
- గరిష్ఠ, కనిష్ఠ బిందువులను నిర్వచించటం మరియు రేఖాచిత్రం ద్వారా ప్రమేయాల స్థానిక, గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల్ని గుర్తించటం.
- మొదటి, రెండోతరగతి అవకలజాల ద్వారా ప్రమేయాల గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలను రాబట్టే ప్రక్రియను కనుక్కోవటం మరియు
- గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలపై సరళమైన సమస్యల్ని సాధించటం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- ప్రమేయ భావన మరియు ప్రమేయాల రకాలు
- ప్రమేయ నిర్వచనం
- సమీకరణాల మరియు అసమీకరణాల సాధనలు.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము

నోట్స్

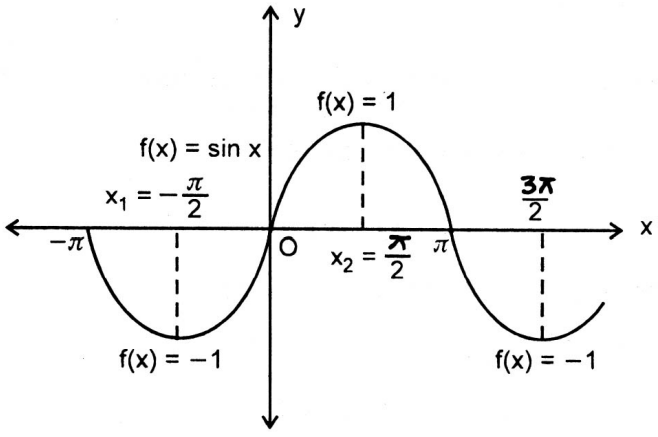
పరిచయం

ఈ అధ్యాయంలో అవకలజాలను ఉపయోగించి దత్త ప్రమేయాలు ఏ అంతరాలలో ఆరోహణ లేదా అవరోహణం అవుతుందో కనుగొంటాము. ప్రమేయము యొక్క గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువలను కనుగొనడానికి అవకలజాలను ఎలా ఉపయోగించవచ్చో చూపుతాము.

25.1 ఆరోహణ మరియు అవరోహణ ప్రమేయాలు

ఇప్పటివరకు మీరు ఆరోహణ లేదా అవరోహణ ప్రమేయం యొక్క సామాన్యరీతులను చూశారు. ఇపుడు మనం ఒక ప్రమేయం ఆరోహణం లేదా అవరోహణం అయ్యే నిబంధనలను పరిశీలించే ప్రయత్నం చేద్దాం.

$f(x)$ ప్రమేయం సంవృత అంతరం $[a, b]$ లో నిర్వచనీయం అనుకుందాం. $x_1, x_2 \in [a,b]$ అనుకుంటే $x_2 > x_1$ అయినప్పుడల్లా $f(x_2) \geq f(x_1)$ అయితే $f(x)$ ప్రమేయం దత్త అంతరంలో ఆరోహిస్తుందంటాం. $f(x_2) > f(x_1)$ అయినపుడు $f(x)$ కచ్చితంగా ఆరోహిస్తుందంటాం. $-\frac{\pi}{2}$ నుండి $\frac{\pi}{2}$ వరకూ x ఆరోహించినపుడు $\sin x$ ప్రమేయం -1 నుండి 1 వరకు ఆరోహిస్తుందని 25.3 పటంలో చూపబడింది.



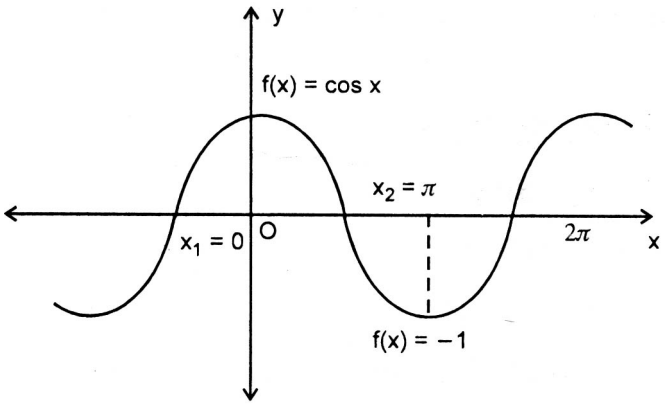
పటం. 25.1

గమనిక : అన్ని 'x' లు దత్త అంతరానికి చెందినవై, h ధనాత్మకం అయితే $f(x+h) > f(x)$ అయినపుడు అట్టి అంతరంలో $f(x)$ ఆరోహిస్తుంది అంటాం.

$x_1, x_2 \in [a, b]$ అనుకుంటే, $x_2 > x_1$ అయినప్పుడల్లా $f(x_2) \leq f(x_1)$ అయితే $f(x)$ ప్రమేయం దత్త అంతరంలో అవరోహిస్తుందంటాం.

$f(x_2) < f(x_1)$ లేదా $f(x_1) > f(x_2)$ అయినప్పుడు $f(x)$ కచ్చితంగా అవరోహిస్తుందంటాం.

0 నుండి π వరకూ x ఆరోహించినపుడు $\cos x$ ప్రమేయం 1 నుండి -1 వరకూ అవరోహిస్తుందని పటం 25.4లో చూపబడింది.



పటం 25.2

గమనిక : అన్ని 'x' లు దత్త అంతరానికి చెందినవై, h ధనాత్మకం అయితే $f(x+h) < f(x)$ అయినపుడు అట్టి అంతరంలో $f(x)$ అవరోహిస్తుంది అంటాం.

25.2 ఏకదిష్ట ప్రమేయాలు

ప్రమేయం $f(x)$ నిర్వచనీయమైన అంతరంలో x_1, x_2 లు ఏవైనా రెండు బిందువులయితే $x_1 < x_2$ అనుకుందాం. ఆరోహించినా లేదా అవరోహించినా $f(x)$ ను ఏకదిష్టం అంటాం.

x_1, x_2 లు దత్త అంతరానికి చెంది, $x_2 > x_1$ అయినపుడు $f(x_2) \geq f(x_1)$ కావడాన్ని ఏకదిష్ట ఆరోహణమని, $f(x_1) \geq f(x_2)$ కావడానికి ఏకదిష్ట అవరోహణమని అంటాం.

ఉదాహరణ 35.1 : అన్ని $x \in \mathrm{R}$ లకు $f(x) = 4x + 7$ ఏకదిష్ట ప్రమేయమని నిరూపించండి.

సాధన : x యొక్క రెండు విలువలు $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ లు

$x_2 > x_1$ అయ్యేలా ఉన్నాయనుకుందాం. ...(1)

(1)ని 4చే గుణించగా : $4x_2 > 4x_1$ ...(2)

(2)కి యిరువైపులా 7 కూడగా : $4x_2 + 7 > 4x_1 + 7$

అంటే $f(x_2) > f(x_1)$

అంటే $x_2 > x_1$ కి $f(x_2) > f(x_1)$ అయిందన్నమాట. కావున $f(x) = 4x + 7$ ఏకదిష్ఠ ప్రమేయం (ఆరోహితప్రమేయం).

ఉదాహరణ 35.2 : అన్ని $x < 0$ లకు $f(x) = x^2$ కచ్చిత అవరోహణ ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన : x యొక్క ఏ రెండు విలువలయినయినా x_1, x_2గా గ్రహించి, ...(i)

$\Rightarrow x_2 . x_1 < x_1 . x_2$ (x_2చే యిరువైపులా గుణిస్తే)

$\Rightarrow x_2^2 < x_1 x_2$ ...(ii)

ఇంకనూ, $x_1 . x_2 < x_1 . x_1$ (x_1చే యిరువైపులా గుణిస్తే)

$x_1 x_2 < x_1^2$ ...(iii)

(ii), (iii) ల నుంచి, $x_2^2 < x_1 x_2 < x_1^2 \Rightarrow x_2^2 < x_1^2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ ...(iv)

$\therefore$ (i), (iv) ల నుంచి, $x_2 > x_1$ కి $f(x_2) < f(x_1)$ కావున అన్ని $x < 0$ లకు $f(x)$ కచ్చిత అవరోహణ ప్రమేయం.

అభ్యాసం 25.1

1. (a) అన్ని $x \in R$ లకు $f(x) = 3x + 4$ ప్రమేయము ఏకదిష్ఠ ఆరోహణమవుతుందని నిరూపించండి.

   (b) అన్ని $x \in R$ లకు $f(x) = 7 - 2x$ ప్రమేయము ఏకదిష్ఠ అవరోహణమవుతుందని నిరూపించండి.

   (c) a, b స్థిరరాశులయి, $a > 0$ అయితే అన్ని 'x' వాస్తవ విలువలకు, $f(x) = ax + b$ కచ్చిత ఆరోహణ ప్రమేయమవుతుందని చూపండి.

2. (a) అన్ని $x > 0$ లకు $f(x) = x^2$ కచ్చిత ఆరోహణ ప్రమేయమని చూపండి.

   (b) $x \in R$ అయి, $x > 2$ కి $f(x) = x^2 - 4$ ఏకదిష్ఠ ఆరోహణమని, $-2 < x < 2$ కి ఏకదిష్ఠ అవరోహణమని చూపండి.

సిద్ధాంతము 1 : $]a, b[$ లో $f(x)$ ఆరోహణ ప్రమేయమైనపుడు, అన్ని $x \in [a, b]$ లకు $f(x)$ అవకలజమైనట్టి $f'(x)$ ధనాత్మకం అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $y = f(x)$ వక్రంపై (x, y) లేదా $[x, f(x)]$

ఒక బిందువు అనుకుందాం.

ధనాత్మక δx కి, $x + \delta x > x$

$f(x)$ ఆరోహణప్రమేయమనుకుంటే

$$f(x + \delta x) > f(x)$$

$$f(x + \delta x) - f(x) > 0$$

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} > 0 \quad (\because \delta x > 0)$$

$\delta x \to 0$ కి

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

కాబట్టి, ఏదైనా బిందువు వద్ద $y = f(x)$ ఆరోహణమైతే,

ఆ బిందువు వద్ద $f'(x)$ ధనాత్మకం అవుతుంది.

సిద్ధాంతం 2: $]a, b[$ లో $f(x)$ అవరోహణ ప్రమేయమైనపుడు, అన్ని $x \in [a, b]$ లకు $f(x)$ అవకలజమైనట్టి $f'(x)$ రుణాత్మకం అవుతుంది.

ఉపపత్తి : $y = f(x)$ వక్రంపై (x, y) లేదా $[x, f(x)]$

ఒక బిందువు అనుకుందాం.

ధనాత్మక δx కి $x + \delta x > x$

$f(x)$ అవరోహణప్రమేయం అనుకుంటే

$$f(x + \delta x) < f(x)$$

$$f(x + \delta x) - f(x) < 0$$

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} < 0 \quad (\because \delta x > 0)$$

$\delta x \to 0$ కి,

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

కాబట్టి, ఏదైనా బిందువు వద్ద $y = f(x)$ అవరోహణమైతే,

ఆ బిందువు వద్ద $f'(x)$ రుణాత్మకం అవుతుంది.

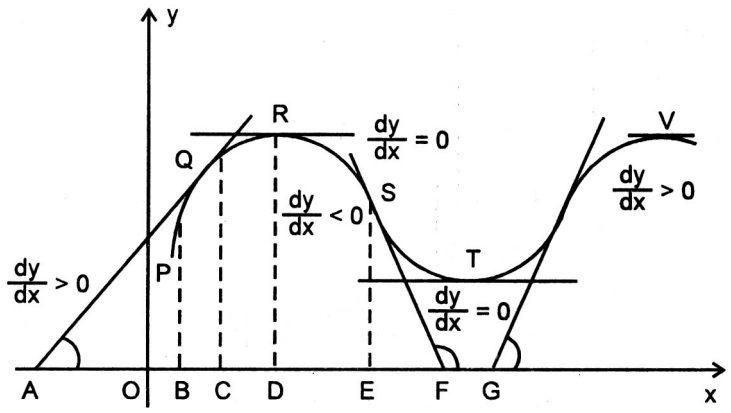
గమనిక : $[a, b]$ అంతరంలో $f(x)$ అవకలనీయమైతే,

(i) $]a, b[$ అంతరంలో $f'(x) > 0$ అయితే $[a, b]$ లో $f(x)$ ఆరోహణం

(ii) $]a, b[$ అంతరంలో $f'(x) < 0$ అయితే $[a, b]$ లో $f(x)$ అవరోహణం.

25.3 అవకలజం గుర్తు మరియు ఏకదిష్ఠ ప్రమేయం మధ్య సంబంధం

కింది పటాన్ని పరిశీలించండి.



పటం 25.5

పై పటంలో వక్రాన్ని (i) P నుండి R కు, (ii) R నుండి T కు (iii) T నుండి V కు మూడు భాగాలుగా విభజించి ప్రమేయ అవకలజ గుర్తును, ఏకదిష్ఠ ప్రమేయం మధ్యగల సంబంధాన్ని చదువుదాం.

(i) P నుండి R వరకు x విలువలు పెరిగిన కొలది, Y విలువలు పెరగటం గమనించగలం. అంటే (x_1, y_1) తదుపరి బిందువు అయితే (x_2, y_2) అయితే $x_2 > x_1$ అయి $y_2 > y_1$ లేదా

$f(x_2) > f(x_1)$ అవుతుంది. ఇంకనూ, P, R ల మధ్య ప్రతి బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ x - అక్షపు ధనదిశలో లఘుకోణాన్ని చేస్తూండటం గమనించగలం. తద్వారా స్పర్శరేఖ x-అక్షపు ధనదిశలో లఘుకోణాన్ని చేస్తూండటం గమనించగలం. తద్వారా స్పర్శరేఖ వాలు (R వద్ద తప్ప) ధనాత్మకం అవుతుంది. R వద్ద స్పర్శరేఖ x-అక్షానికి సమాంతరంగా వుండి, స్పర్శరేఖ వాలు 'సున్న' అవుతుంది. కావున గమనించదగిన అంశాలు వరసగా

(a) P నుండి R వరకు ప్రమేయం ఏకదిష్ట ఆరోహణం.

(b) R వద్ద తప్ప మిగిలిన అన్ని బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ x-అక్షపు ధనదిశలో లఘుకోణం చేస్తుంది.

(c) స్పర్శరేఖవాలు ధనాత్మకం. అంటే y ఆరోహణం అయ్యే ప్రతిబిందువుకు $\frac{dy}{dx} > 0$

(d) R వద్ద స్పర్శరేఖవాలు సున్న అంటే y గరిష్ఠమై $\frac{dy}{dx} = 0$.

(ii) R నుండి T వరకు x విలువలు పెరిగిన కొలది, y విలువలు తగ్గటం గమనించగలం. అంటే (x_1, y_1) తదుపరి బిందువు (x_2, y_2) అయితే $x_2 > x_1$ అయి, $y_2 < y_1$ లేదా $f(x_2) < f(x_1)$ అవుతుంది. ఇంకనూ R, T ల మధ్య ప్రతిబిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ x- అక్షపు ధనదిశలో అధికకోణాన్ని చేస్తూండటం గమనించగలం. తద్వారా స్పర్శరేఖవాలు (T వద్ద తప్ప) రుణాత్మకం అవుతుంది. T వద్ద స్పర్శరేఖ x- అక్షానికి సమాంతరంగ వుండి స్పర్శరేఖ 'సున్న' అవుతుంది. కావున గమనించదగిన అంశాలు వరసగా

(a) R నుండి T వరకు ప్రమేయం ఏకదిష్ట అవరోహణం

(b) T వద్ద తప్ప మిగిలిన అన్ని బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ x-అక్షపు ధనదిశలో అధికకోణం చేస్తుంది.

(c) స్పర్శరేఖవాలు రుణాత్మకం. అంటే y అవరోహణం అయ్యే ప్రతిబిందువుకు $\frac{dy}{dx} < 0$

(d) T వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు 'సున్న', అంటే y కనిష్ఠమై, $\frac{dy}{dx} = 0$.

(iii) మరల, T నుండి V వరకు, y విలువ పెరిగి T, V ల మధ్య ప్రతిబిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ X- అక్షపుధనదిశలో లఘుకోణాన్ని చేస్తోంది. తద్వారా, స్పర్శరేఖవాలు ధనాత్మకం అవుతుంది. అంటే $\frac{dy}{dx} > 0$ అవుతుంది. T, V ల మధ్య మాత్రం $\frac{dy}{dx} = 0$. R, T, V లకు ఒకవైపు

$\frac{dy}{dx}<0$, మరోవైపు $\frac{dy}{dx}>0$, R, T, V ల వద్ద $\frac{dy}{dx}=0$ అనేవి గమనించాల్సిన ముఖ్య అంశాలు.

ఉదాహరణ 25.3: 'x' యొక్క యేవిలువల వద్ద $f(x)=x^2-6x+8$ ప్రమేయం ఆరోహణం లేదా అవరోహణం అయ్యేది కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(x) = 2x - 6$

ఆరోహణ ప్రమేయానికి, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad 2x - 6 > 0$

$\Rightarrow \quad 2(x - 3) > 0$

$\Rightarrow \quad x - 3 > 0$ లేదా $x > 3$

$\therefore x - 3 > 0$ కి $f(x)$ ఆరోహణం.

అవరోహణ ప్రమేయానికి, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad 2x - 6 < 0$

$\Rightarrow \quad 2(x - 3) < 0$

$\Rightarrow \quad x - 3 < 0$ లేదా $x < 3$

$\therefore x < 3$ కి $f(x)$ అవరోహణం.

ఉదాహరణ 25.4: $f(x)=2x^3-3x2-12x+6$ ప్రమేయం ఆరోహణం లేదా అవరోహణం కాగల అంతరాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$= 6(x - 2)\ (x + 1)$

ఆరోహణ ప్రమేయానికి, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow\ 6(x-2)\,(x+1) > 0$

$\Rightarrow\ (x-2)\,(x+1) > 0$

రెండు కారణాంకాల లబ్ధం ధనాత్మకమైనపుడు, ఆ కారణాంకాలు రెండునూ ధనాత్మకం లేదా రుణాత్మకం అయి వుండాలి. అంటే

$(x-2) > 0$ మరియు $(x+1) > 0$ లేదా $(x-2) < 0$ మరియు $(x+1) < 0$

$\Rightarrow\quad x > 2,\ \ x > -1$ లేదా $x < 2,\ \ x < -1$

$\Rightarrow\quad x > 2,$ అంటే $x > -1$ లేదా $x < -1, x < 2.$

$\therefore x > 2$ మరియు $x < -1$

$\therefore f(x)$ ఆరోహించే అంతరం $x > 2, x < -1$

అవరోహణ ప్రమేయానికి, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow\ 6(x-2)\,(x+1) < 0$

$\Rightarrow\ (x-2)\,(x+1) < 0$

రెండు కారణాంకాల లబ్ధం రుణాత్మకమైనపుడు, ఆ కారణాంకాల్లో ఒకటి ధనాత్మకం, రెండోది రుణాత్మకం అయి వుండాలి. అంటే

$(x-2) > 0$ మరియు $(x+1) < 0$

లేదా

$(x-2) < 0$ మరియు $(x+1) > 0$

$\Rightarrow\ x > 2,\ x < -1$ లేదా $x < 2,\ x > -1$

$x > 2$ మరియు $x < -1$ అనేది ఒకేసారి సంభవం కాదు.

$x < 2,\ x > -1$ అంటే $x < 2,\ -1 > x$ కాబట్టి, దీనిని

$-1 < x < 2$ గా రాయవచ్చు.

$\therefore f(x)$ అవరోహించే అంతరం : $-1 < x < 2$.

ఉదాహరణ 25.5 : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ప్రమేయం ఆరోహించే లేదా అవరోహించే అంతరాల్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $f'(x)=\frac{(x^2+1)\frac{dx}{dx}-x.\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)}$

$$=\frac{(x^2+1)-x.(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

అన్ని వాస్తవ 'x' లకు $(x^2+1)^2$ ధనాత్మకం.

$-1<x<0$ అయితే $(1-x),\ (1+x)$ లు ధనాత్మకం కాబట్టి $f'(x)>0$

$0<x<1$ అయితే $(1-x),\ (1+x)$ లు ధనాత్మకం కాబట్టి $f'(x)>0$

$x<-1$ అయితే $(1-x)$ ధనాత్మకం మరియు $(1+x)$ రుణాత్మకం కాబట్టి $f'(x)<0$

$x>1$ అయితే $(1-x)$ రుణాత్మకం మరియు $(1+x)$ ధనాత్మకం కాబట్టి $f'(x)<0$

$\therefore$ క్లుప్తంగా ముగించాలంటే, ప్రమేయం ఆరోహణం అయితే $-1<x<0;\ \ 0<x<1;$

లేదా $-1<x<1$ అవరోహణం అయితే $x<-1, x>1$ అవుతాయి.

గమనిక : $f'(x)=0$ ద్వారా వచ్చేవి సందిగ్ధ బిందువులు. ఇక్కడ $x=-1, x=1$ లు సందిగ్ధ బిందువులు.

ఉదాహరణ 25.6 : (a) $0\le x\le \pi$ అంతరంలో $f(x)=\cos x$ అవరోహిస్తుందని

(b) అన్ని 'x' లకు $f(x)=x-\cos x$ ఆరోహిస్తుందని చూపండి.

సాధన : (a) $f(x)=\cos x$

$$f'(x)=-\sin x$$

$f(x)$ అవరోహణమైతే, $f'(x)<0$

$\Rightarrow -\sin x < 0$

$\Rightarrow \sin x > 0$

మొదటి, రెండు పాదాలో $\sin x$ ధనాత్మకం కాబట్టి $0 \le x \le \pi$ లో $\sin x$ ధనాత్మకం.

$\therefore f(x)$ ప్రమేయం $0 \le x \le \pi$ లో అవరోహిస్తుంది.

(b) $f(x) = x - \cos x$

$f'(x) = 1 - (-\sin x)$

$= 1 + \sin x$

$\sin x$ కనిష్ఠవిలువ '-1' గరిష్ఠ విలువ '1' కావున

x యొక్క అన్ని విలువలకు $\sin x$ విలువ -1 మరియు 1 మధ్య వుంటుంది.

$-1 \le \sin x \le 1$

$1 - 1 \le 1 + \sin x \le 1 + 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le 1 + \sin x \le 2$

$\Rightarrow \quad 0 \le f'(x) \le 2$

$\Rightarrow \quad 0 \le f'(x) \quad \therefore f'(x) \ge 0$

$\therefore x$ యొక్క అన్ని విలువలకు $f(x) = x - \cos x$ ఆరోహణ ప్రమేయం అవుతుంది.

అభ్యాసం 25.2

క్రింది ప్రమేయాలు ఆరోహించే లేదా అవరోహించే అంతరాలను కనుక్కోండి.

1. (a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ (b) $f(x) = 3x^2 - 15x + 10$
2. (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ (b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$
3. (a) $y = -3x^2 - 12x + 8$ (b) $f(x) = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$
4. (a) $y = \frac{x-2}{x+1}, x \ne -1$ (b) $y = \frac{x^2}{x-1}, x \ne -1$ (c) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x \ne 0$
5. (a) $\log(\sin x)$ ప్రమేయం $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ అంతరంలో అవరోహిస్తుందని నిరూపించండి.

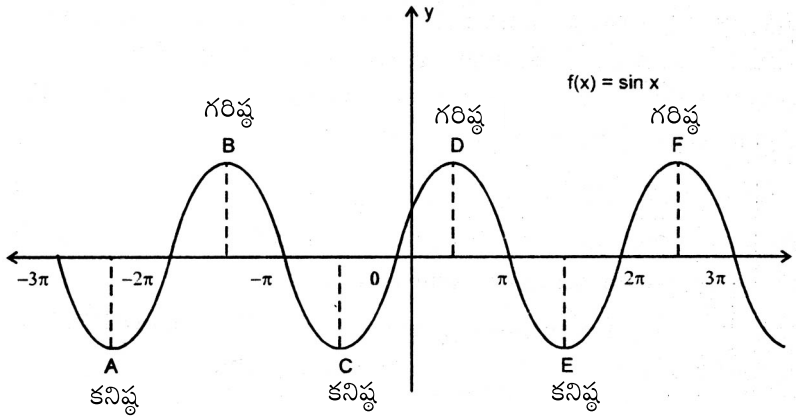
(b) $[\pi, 2\pi]$ అంతరంలో ప్రమేయం ఆరోహిస్తుందని నిరూపించండి.

(c) $0 \leq x \leq \pi$ అయి, $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ ప్రమేయం అవరోహించే లేదా ఆరోహించే అంతరాలను కనుక్కోండి.

స్పర్శరేఖలు x – అక్షానికి సమాంతరంపై వుండే బిందువులను ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద సూచించండి.

25.4 ప్రమేయపు గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు

ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయపు రేఖా చిత్రాన్ని పరిశీలిస్తే, ప్రమేయం ఒకటి వెంట ఒకటి ఆరోహణం అవరోహణం చెందుతుందని గమనించగలం. ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం విలువ ఒక బిందువు వరకు ఆరోహణ చెంది, ఆబిందువు నుండి అవరోహణం చెందడం మొదలిడితే, ఆ బిందువును గరిష్ఠ బిందువుగానూ, ఆ బిందువు వద్ద ప్రమేయం విలువను గరిష్ఠ విలువగానూ పరిగణిస్తాం. ఈ విధంగానే, ప్రమేయం విలువ ఒక బిందువు వరకు అవరోహణ చెంది, ఆ బిందువు నుండి ఆరోహణం చెందడం ప్రారంభం కాగానే, ఆ బిందువును కనిష్ఠ బిందువుగానూ, ఆ బిందువు వద్ద ప్రమేయం విలువను కనిష్ఠ విలువగానూ పరిగణిస్తాం.

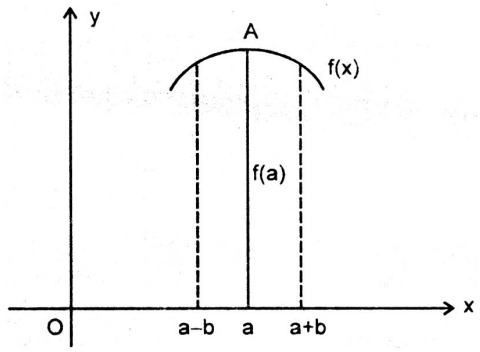


పటం 25.6

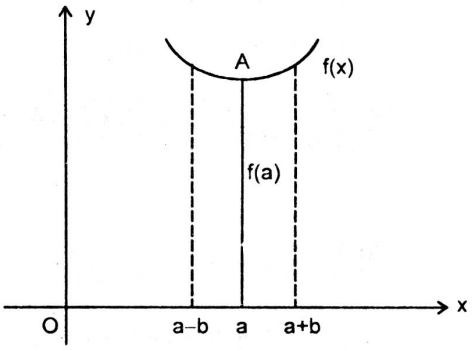
పటం 25.6 నుండి, ఒక ప్రమేయానికి గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువలు ఒకటి కంటె ఎక్కువ ఉండవచ్చునని గమనించగలం కాబట్టి ఒక అంతరంలో ఒక ప్రమేయానికి ఉండే గరిష్ఠ లేదా

కనిష్ఠ విలువలు నిర్దిష్ఠ విలువలు కాకపోవచ్చు. అందుకనే, వీటిని స్థానిక గరిష్ఠ లేదా స్థానిక కనిష్ఠ విలువలు అంటాం.

కింది పటం 25.7ను పరిశీలిస్తే, తగినంత కనిష్ఠ ధనాత్మక విలువ 'b' కు, $a-b<a+b$ అంతరంలో $x=a$ బిందువు వద్ద $f(a)\geq f(a\pm b)$ అయితే, $f(x)$ కు గరిష్ఠ లేదా స్థానిక గరిష్ఠ విలువ ఉంటుందంటాం.



పటం 25.7



పటం 25.8

ఒక దత్తబిందువు యొక్క తక్షణ సమీపతలో ఆ బిందువుకు యిరువైపులా వున్న విలువలకంటె ఆ బిందువు వద్ద గల విలువ గరిష్ఠంగా వుంటే, దానిని గరిష్ఠ (స్థానిక గరిష్ఠ) విలువ అంటాం.

పటం 25.8ను పరిశీలిస్తే, తగినంత కనిష్ఠ ధనాత్మక విలువ 'b' కు, $a-b<a+b$ అంతరంలో $x=a$ బిందువు వద్ద $f(a)\leq f(a\pm b)$ అయితే, $f(x)$ కు కనిష్ఠ లేదా స్థానిక కనిష్ఠ విలువ ఉంటుందంటాం.

ఒక దత్త బిందువు యొక్క తక్షణ సమీపతలో ఆ బిందువుకు యిరువైపులా వున్న విలువలకంటె ఆ బిందువు వద్ద గల విలువ కనిష్ఠంగా వుంటే, దానిని కనిష్ఠ (స్థానిక కనిష్ఠ) విలువ అంటాం.

గమనిక : $\in>0$, వివృతఅంతరం $]x-\in[$ చేత $x\in R$ బిందువు యొక్క సామిప్యత నిర్వచింపబడుతుంది.

25.5 గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠలకు నిబంధనలు

ఆరోహణ ప్రమేయానికి ప్రమేయపు అవకలజం ధనాత్మకమని, అవరోహణ ప్రమేయానికి ప్రమేయపు అవకలజం రుణాత్మకమని తెలుసుకున్నాము. ఇదే సూత్రాన్ని, ఒక ప్రమేయపు గరిష్ఠ,

కనిష్ఠ విలువలను కనుక్కోవటానికి ఉపయోగిస్తాం. పటం 25.6లో B, D, F లు గరిష్ఠ బిందువుల్ని A, C, E లు కనిష్ఠ బిందువుల్ని సూచిస్తాయి.

ఇంకనై, B కి ఎడమవైపు ప్రమేయం ఆరోహిస్తూ, $f'(x) > 0$ కావడాన్ని, మరియు B ని కుడివైపు ప్రమేయం అవరోహిస్తూ, $f'(x) < 0$ కావడాన్ని గమనించవచ్చు. రెండింటికీ మధ్య $f'(x)$ విలువ 'సున్న' గా ఉండటాన్ని కూ చూడవచ్చు. దీనిని కింది విధంగా తిరగరాద్దాం :

ఒక ప్రమేయ దత్త బిందువు వద్ద గరిష్ఠ విలువను పొందాలంటే (i) ఆ బిందువు వద్ద $f'(x) = 0$ మరియు (ii) ఆ బిందువు సామిప్యతలో $f'(x)$ ధనాత్మకం నుంచి రుణాత్మకం కావాలి.

ఇంకనూ c కి ఎడమవైపు $f(x)$ అవరోహిస్తూ $f'(x) < 0$ కావడాన్ని, మరియు c కి కుడివైపు $f(x)$ ఆరోహిస్తూ $f'(x) > 0$ కావడాన్ని గమనించగలం. ధనాత్మక విలువల్ని తీసుకోబోయే ముందు $f'(x)$ విలువ 'సున్న' కావడం కూడా చూడవచ్చు. దీనిని కింది విధంగా రాద్దాం.

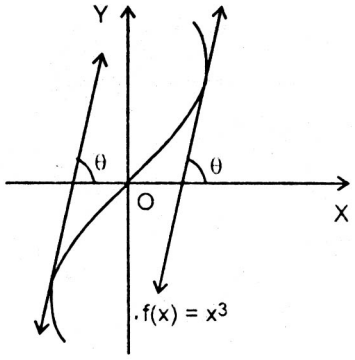
ఒక ప్రమేయము దత్తబిందువు వద్ద కనిష్ఠ విలువను పొందాలంటే

(i) ఆ బిందువు వద్ద $f'(x) = 0$ మరియు

(ii) ఆ బిందువు సామీప్యతలో $f(x)$ రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకం కావాలి.

$f(x)$ ప్రమేయానికి గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువలు ఉండటానికి $f'(x) = 0$ అనేది అవశ్యనియమమే కాని పర్యాప్తం కాదు. ఒక ప్రమేయం ఆరోహిస్తూ, తర్వాత స్థిరప్రమేయమై మరలా ఆరోహించవచ్చు. ఇలాంటి సందర్భంలో $f'(x)$ గుర్తు మారదు. అలాంటప్పుడు $f'(x) = 0$ అయ్యే బిందువు గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ బిందువు కాకపోవచ్చు. అటువంటి బిందువులను దోషబిందువులంటాం.

ఉదాహరణకు $f(x) = x^3$ ప్రమేయంలో $x = 0$ దోషబిందువు. ఎందుకంటే x విలువ సున్నగుండా పోతున్నప్పుడు $f'(x) = 3x^2$ గుర్తుమారదు. ఇంకనూ, '0' విలువకు యిరువైపులా $f'(x)$ ధనాత్మకం. (స్పర్శరేఖలు x-అక్షపు ధనదిశలో లఘుకోణాల్ని చేస్తాయి) (పటం. 35.9 చూడండి)



పటం 25.9

కాబట్టి, $f(x) = x^3$ ప్రమేయానికి $x = 0$ దోషబిందువు. $f'(x) = 0$ అయ్యే బిందువులు

నిశ్చల బిందువులు. ఈ బిందువుల దగ్గర ప్రమేయపు మార్పురేటు 'సున్న'. యీ విధంగా, గరిష్ఠ, కనిష్ఠ బిందువులు నిశ్చల బిందువులు.

గమనించాల్సిన అంశాలు :

ఒక ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువలనిచ్చే బిందువుల్ని అంత్యబిందువులంటూ, అట్టి స్థానిక గరిష్ఠ, కనిష్ఠవిలువల్ని అంత్యవిలువలంటాం. $f(a)$ స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువైతే $x = a$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయం అంత్యవిలువను కలిగివుందంటాం.

25.6 గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువల్ని కనుగొనే పద్ధతి

ఒక ప్రమేయం యొక్క గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువల్ని కనుగొనే పద్ధతి కింది విధంగా వుంటుంది.

(i) ముందుగా $f'(x)$ కనుక్కోండి.

(ii) $f'(x) = 0$ నుండి నిశ్చల బిందువులను కనుక్కోండి.

(iii) నిశ్చలబిందువుల సమీపతలో $f'(x)$ గుర్తు పరిశీలించండి. $f'(x)$ గుర్తు ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకం అయినపుడు ఆ బిందువు వద్ద గరిష్ఠ విలువ వుంటుందని, $f'(x)$ గుర్తు రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకం అయినపుడు, ఆ బిందువు వద్ద కనిష్ఠ విలువ ఉంటుందని గమనించండి.

(iv) బిందువు సమీపతలో $f'(x)$ గుర్తు మారనట్లయితే, అట్టి బిందువును దోషబిందువు అంటారని గమనించండి.

ఉదాహరణ 25.7 : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ప్రమేయానికి గరిష్ఠ (స్థానిక గరిష్ఠ) మరియు కనిష్ఠ (స్థానిక కనిష్ఠ) విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

సోపానం I : $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, -1.$$

$\therefore$ నిశ్చల బిందువులు $x = 3, x = -1.$

సోపానం II : $x < 3 \Rightarrow f'(x) < 0$ మరియు

$x > 3 \Rightarrow f'(x) > 0.$

$\therefore$ '3' సమీపతలో $f'(x)$ గుర్తు రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore$ $x = 3$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ఠ విలువ పొంది యున్నది.

సోపానం III : $x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0$ మరియు

$x > -1 \Rightarrow f'(x) < 0.$

$\therefore$ '-1' సమీపతలో $f'(x)$ గుర్తు ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore$ $x = -1$ వద్ద $f(x)$ గరిష్ఠ విలువ పొంది యున్నది.

$\therefore$ $x = -1, x = 3$ లు ప్రమేయానికి గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ బిందువులై యున్నవి.

గరిష్ఠ విలువ = $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$

$= -1 - 3 + 9 = 5$

కనిష్ఠ విలువ = $f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) = -27.$

$\therefore$ $(-1, 5), (3, -27)$ లు స్థానిక గరిష్ఠ, స్థానిక కనిష్ఠ బిందువులై యున్నవి.

ఉదాహరణ 25.8 : $f(x) = x^2 - 4x$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

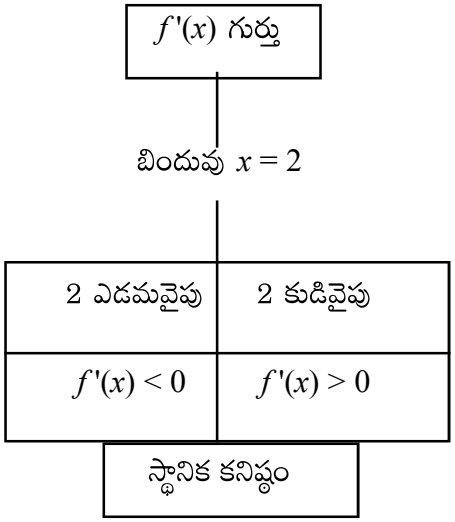
ప్రమేయానికి $x = 2$ అనేది స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు లేదా కనిష్ఠ బిందువు లేదా యేదీ కాదు అనేది పరిశీలిద్దాం.

$x = 2$ కు ఎడమవైపు $x = 1.9$ మరియు కుడివైపు $x = 2.1$ విలువల వద్ద $f'(x)$ ను కనుక్కోందాం.

$f'(1.9) = 2\,(1.9 - 2) < 0$

$f'(2.1) = 2\,(2.1 - 2) > 0$

యీ రెంటిని పరిశీలిస్తే, $x = 2$ వద్ద ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్ఠం వున్నదని చెప్పగలం. కింది పట్టిక ద్వారా వివరించగలం.



ఉదాహరణ 25.9: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ ప్రమేయానికి గల అన్ని స్థానిక గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువల్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$

$f'(x) = 0$ చేయగా, $6(x + 1)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, x = 2.$

అంటే $x = -1, x = 2$ ల వద్ద $f'(x) = 0$ అన్నమాట.

యీ బిందువులు స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ లేదా యేదీకావు అనేది పరిశీలిద్దాం.

$x = -1$ కు ఎడమవైపు విలువ $x = -1.1$ మరియు కుడివైపు విలువ $x = -0.9$ వద్ద $f'(x) = 0$ పరిశీలిద్దాం.

$f'(-1.1) = 6(-1.1 + 1)(-1.1 - 2) \Rightarrow f'(x) > 0$ కాబట్టి,

$f'(-0.9) = 6(-0.9 + 1)(-0.9 - 2) \Rightarrow f'(x) < 0$

$x = -1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం ఉన్నది.

$x = 2$ కు ఎడమవైపు విలువ $x = 1.9$ మరియు కుడివైపు విలువ $x = 2.1$ వద్ద

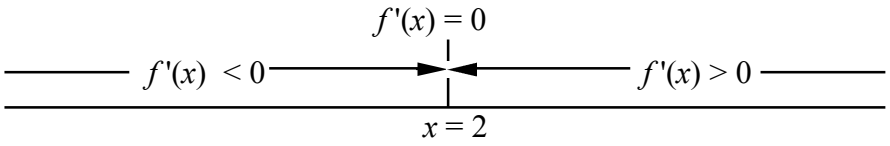
$f'(1.9) = 6(1.9 + 1)(1.9 - 2)$

= 6 (ధన సంఖ్య) (రుణసంఖ్య)

= రుణసంఖ్య . అంటే $f'(1.9) < 0$.

$f'(2.1) = 6(2.1 + 1)(2.1 - 2) =$ ధనసంఖ్య

అంటే $f'(2.1) > 0$.



యీ రెంటినుంచి, $x = 2$ అనేది స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు.

$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 8 = 15$

$f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 8 = -12.$

$f'(x)$ గుర్తు

$x = -1$ బిందువు		$x = 2$ బిందువు
-1 కి ఎడమ -1 కి కుడి		2కి ఎడమ 2కి కుడి
ధనాత్మకం రుణాత్మకం		రుణాత్మకం ధనాత్మకం
స్థానిక గరిష్ఠం		స్థానిక కనిష్ఠం

ఉదాహరణ: 25.10 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠం లేదా స్థానిక కనిష్ఠం, యేది ఉంటే అది కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(1) - (2x)(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x) = 0$ చేయగా, $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$

$\Rightarrow \quad 1 - x^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (1 + x)\,(1 - x) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -1,\ x = 1.$

$x = 1$ విలువకు కొద్దిగా తక్కువైన విలువలకు, ఆవిధంగానే కొద్దిగా ఎక్కువైన విలువలకు $f'(x)$ గుర్తు ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకంగా మారటాన్ని గమనించవచ్చు. ఫలితంగా, $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం వుండి, విలువ $= \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ అవుతుంది.

$x = -1$ సందర్భంలో $f'(x)$ గుర్తు రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకంగా మారటాన్ని చూస్తాం. ఫలితంగా, $x = -1$ వద్ద $f(x)$ స్థానిక కనిష్ఠ విలువను కల్గి యుంటుంది, మరియు విలువ $= -\frac{1}{2}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 25.11: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ కి $f(x) = \sin x + \cos x$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద $x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x > 0$

$x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x - \sin x < 0$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x < 0$

$\therefore$ $\frac{\pi}{4}$ సమీపతలో $f'(x)$ ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకంగా మారుతుంది కావున

$x = \frac{\pi}{4}$ అనేది స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు మరియు

గరిష్ఠ విలువ = $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు = $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

అభ్యాసం 25.3

క్రింది ప్రమేయాలకు స్థానిక గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువుల వద్ద స్థానిక గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువల్ని కూడా కనుక్కోండి.

1. $x^2 - 8x + 12$
2. $x^3 - 6x^2 + 9x + 15$
3. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$
4. $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$
5. $(x - 1)(x - 2)^2$
6. $\frac{x-1}{x^2+x+2}$

25.7 ప్రమేయపు గరిష్ఠ, మరియు కనిష్ఠ విలువల్ని కనుక్కునేందుకు రెండో తరగతి అవకలజం ఉపయోగం

ప్రమేయపు స్థానిక గరిష్ఠలేదా కనిష్ఠ విలువల్ని కనుగొనేందుకు రెండో తరగతి అవకలజాన్ని ఉపయోగించేవిధం కింద సూచించబడింది.

(i) దత్త ప్రమేయాన్ని $f(x)$ తో సూచించండి.

(ii) $f'(x)$ ను కనుగొని, $f'(x) = 0$ కు సమానం చేయండి.

(iii) $f'(x) = 0$ ను సూచించి ఒక విలువను $x = a$ అనుకోండి.

(iv) $f''(x)$ ను కనుగొని, $f''(a)$ గణించండి.

$f''(a) < 0$ అయితే $x = a$ స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు.

$f''(a) > 0$ అయితే $x = a$ స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు.

$f''(a) = 0$ అయితే 'a' కు ఎడమవైపు, కుడివైపు $f'(x)$ గుర్తు పరిశీలించి ఫలితాన్ని రాబడతాం.

ఉదాహరణ 25.12: $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్ఠ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ అనుకుందాం.

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$$

$$= 6(x^2 - 7x + 6)$$

$$= 6(x - 1)(x - 6)$$

స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠకు, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 6(x - 1)(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1,\ 6$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[f'(x)\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[6(x^2 - 7x + 6)\right]$$

$$= 12x - 42$$

$$= 6(2x - 7)$$

$x = 1 \Rightarrow f''(1) = 6(2.1 - 7) = -30 < 0$ కాబట్టి

$x = 1$ అనేది స్థానిక గరిష్ఠ బిందువు.

$f(1) = 2(1)^3 - 21(1)^2 + 36(1) - 20 = -3$ స్థానిక గరిష్ఠ విలువ.

$x = 6 \Rightarrow f''(6) = 6(2.6 - 7) = 30 > 0$ కాబట్టి

$x = 6$ అనేది స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు.

$f(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 36(6) - 20 = -128$ స్థానిక కనిష్ఠ విలువ.

ఉదాహరణ 25.13: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ లో $f(x) = \cos 4x$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ లను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \cos 4x$

$\Rightarrow f'(x) = -4 \sin 4x$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow -4\sin 4x = 0$

$\Rightarrow \sin 4x = 0$

$\Rightarrow 4x = 0, \pi, 2\pi$

$\Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

$\because \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \; x = \frac{\pi}{4}$ ను తీసుకుందాం.

$f''(x) = -16\cos 4x$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -16\cos\pi = -16(-1) = 16 > 0.$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ఠం

కనిష్ఠ విలువ = $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi = -1.$

ఉదాహరణ 25.14 : (a) $[-3, -1]$ అంతరంలో $2x^3 - 24x + 107$ యొక్క గరిష్ఠ విలువను కనుక్కోండి.

(b) $[1, 3]$ అంతరంలో పై ప్రమేయానికి కనిష్ఠ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: (a) $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$ అనుకుంటే

$f'(x) = 6x^2 - 24.$

గరిష్ఠ, కనిష్ఠలకు $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 6x^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow \quad x = -2, 2.$

-2 విలువ $[-3, -1]$ అంతరంలో వుంటుంది కావున $x = -2$ వద్ద మాత్రమే, వుంటే గరిష్ఠం వుంటుంది.

$f''(x) = 12x$

$f''(-2) = 12(-2) = -24.$

$\therefore \ f''(-2) < 0$

కాబట్టి $x = -2$ వద్ద గరిష్ఠం వుంటుంది.

$\therefore$ గరిష్ఠ విలువ $= 2(-2)^3 - 24(-2) + 107 = 139.$

యీవిధంగా, గరిష్ఠ బిందువు '-2' అనేది $[-3, -1]$ అంతరానికి చెందినదై, గరిష్ఠ విలువ 139ను కల్గి యున్నది.

(b) $f''(x) = 12x$

$[1, 3]$ అంతరంలో '2' వుంటుంది కాబట్టి

$f''(2) = 12(2) = 24 > 0.$

$\therefore \ x = 2$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ఠ విలువను కల్గి యుంటుంది.

కనిష్ఠవిలువ $= 2(2)^3 - 24(2) + 107 = 75.$

ఉదాహరణ 25.15 : $(0, \pi)$ లో $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$ ప్రమేయానికి గల గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువల్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \sin x \ = (1 + \cos x)$

$f'(x) = \cos x - (1 + \cos x) + \sin x\,(-\sin x)$

$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

నిశ్చలబిందువులకు, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1, \frac{1}{2}.$$

$$\therefore x = \pi, \frac{\pi}{3}$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(\pi) = 0$$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద $f(x)$ గరిష్ఠ విలువ = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$x = 0, x = \pi$ ల వద్ద కనిష్ఠవిలువ = 0.

అభ్యాసం 25.4

రెండో తరగతి అవకలజాలను ఉపయోగించి కింది వాటికి స్థానిక గరిష్ఠ మరియు స్థానిక కనిష్ఠ విలువలను కనుక్కోండి.

1. $2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$.
2. $-x^3 + 12x^2 - 5$
3. $(x - 1)(x + 2)^2$
4. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$
5. $\sin x \,.\, (1 + \cos x)\,.\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$
6. $\sin x + \cos x,\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$
7. $\sin 2x - x,\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

25.8 గరిష్ఠ, కనిష్ఠ అనువర్తనాలు

ఒక ప్రమేయానికి సంబంధించి గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల్ని కనుక్కునే సమస్యలను సాధించడంలో అవకలజం, దాని అనువర్తనం ఒక ప్రత్యేక సాధనంగా ఉపయోగపడతాయి. ఇటువంటి సమస్యలను సాధించేటప్పుడు కింది సోపానాలను క్రమపద్ధతిలో పాటిద్దాం :

(i) దత్తాంశంలో యివ్వబడిన చలరాశుల పదాల్లో ప్రమేయాన్ని యేర్పరచండి.

(ii) దత్తాంశం ఆధారంగా, ప్రమేయాన్ని ఏకచలరాశి ప్రమేయంగా మార్చండి.

(iii) ఇప్పటివరకు నేర్చుకున్నా గరిష్ఠ, కనిష్ఠ నియమాలను ఉపయోగించండి.

ఉదాహరణ 25.16: మొత్తం 70 మరియు లబ్ధం గరిష్ఠం అయ్యే రెండు ధనరాశుల్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఒక రాశి x అనుకుందాం. రెండు రాశుల మొత్తము 70 కాబట్టి రెండోరాశి $(70 - x)$ అవుతుంది. యీ రెండునూ ధనరాశులు కావున అని $x > 0$, $(70 - x) > 0$ అవుతాయి.

$$70 - x > 0 \Rightarrow x < 70$$

$$\therefore 0 < x < 70$$

వీటి లబ్ధం $f(x)$ అనుకుంటే

$$f(x) = x(70 - x) = 70x - x^2$$

గరిష్ఠం కొరకు $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 70 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 35.$$

$f''(x) = -2x$

$f''(35) = -2(35) =$ రుణాత్మకం.

$x = 35$ వద్ద $f(x)$ కు గరిష్ఠం ఉంటుంది.

$70 - x = 35$ రెండో సంఖ్య అవుతుంది.

$\therefore$ కావాల్సిన రాశులు లేదా సంఖ్యలు 35, 35.

ఉదాహరణ 25.17: దత్త వైశాల్యం గల దీర్ఘచతురస్రాలలో, కనిష్ఠ చుట్టు కొలతను కల్గి యుండేది చతురస్రమని చూపండి.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రం పొడవు, వెడల్పు వరసగా x, y అనుకుందాం.

$\therefore$ వైశాల్యం $\mathrm{A} = xy.$

$$y = \frac{\mathrm{A}}{x} \qquad \ldots(1)$$

దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత $\mathrm{P} = 2(x + y)$

$$= 2\left(x + \frac{\mathrm{A}}{x}\right)$$

$$\frac{dp}{dx} = 2\left(1 - \frac{\mathrm{A}}{x^2}\right)$$

కనిష్ఠకు, $\frac{dp}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 2\left(1 - \frac{\mathrm{A}}{x^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{A} = x^2$ లేదా $\sqrt{\mathrm{A}} = x$

$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{4\mathrm{A}}{x^3}$ ఇది ధనాత్మకం.

$\therefore x = \sqrt{\mathrm{A}}$ అయినప్పుడు చుట్టుకొలత కనిష్ఠం.

$$y = \frac{\mathrm{A}}{x}$$

$$= \frac{x^2}{x} = x \quad (\mathrm{A} = x^2 \text{ కావున})$$

$\therefore$ దీర్ఘచతురస్రం అనేది కనిష్ఠ చుట్టుకొలతకు చతురస్రం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 25.18: a^2 వైశాల్యం గల రేకుముక్క నుండి భూమి చతురస్రంగా గల ఒక మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. దాని గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ అని చూపండి.

సాధన: భూమి చతురస్రంగా వున్నది కావున చతురస్రం భుజం పొడవు 'x',

మరియు పెట్టె ఎత్తు 'y' అనుకుందాం.

$\therefore$ పెట్టె సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $x^2 + 4xy$.

$$x^2 + 4xy = a^2 \Rightarrow y = \frac{a^2 - x^2}{4x}.$$

పెట్టె ఘనపరిమాణం V = భూమి వైశాల్యం × ఎత్తు

$$= x^2 y = x^2 \left(\frac{a^2 - x^2}{4x} \right)$$

$$V = \frac{1}{4}(ax^2 - x^3) \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{4}(a^2 - 3x^2)$$

గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠకు $\frac{dV}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 - 3x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \ldots(2)$$

(1), (2) ల నుంచి, $V = \frac{1}{4}\left(\frac{a^3}{\sqrt{3}} - \frac{a^3}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ $\ldots(3)$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}\left(a^2 - 3x^2 \right) \right] = -\frac{3}{2}x$$

$x > 0$ కావున $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$.

$\therefore$ ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం, మరియు విలువ = $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$.

ఉదాహరణ 25.19 : దత్తవృత్తంలో అంతర్లిఖించబడిన గరిష్ఠ దీర్ఘచతురస్రం చతురస్రం అవుతుందని చూపండి.

సాధన: 'r' వ్యాసార్ధం గల వృత్తంలో ABCD దీర్ఘచతురస్రం అంతర్లిఖించబడిందనుకుందాం.

పటం 25.10 ప్రకారం, వృత్తవ్యాసం $AC = 2r$.

$AB = x,\ BC = y$ అనుకుంటే

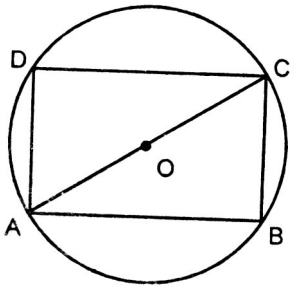
$AB^2 + BC^2 = AC^2$ లేదా $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2$

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $A = xy$

$$A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} + \sqrt{4r^2 - x^2}.1$$

$$= \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$



పటం. 25.10

గరిష్ఠ/ కనిష్ఠలకు $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}r$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}(-4x) - (4r^2 - 2x^2)\frac{(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}}}{(4r^2 - x^2)}$$

$$= \frac{-4x(4r^2 - x^2) + x(4r^2 - 2x^2)}{\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}\left(2r^2\right) + 0}{\left(2r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots(\because\ x = \sqrt{2}r)$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}r^3}{2\sqrt{2}r^3} = -4 < 0$$

కావున $x=\sqrt{2}r$ అయితే గరిష్ఠం

(i) నుండి : $y=\sqrt{4r^2-2r^2}=\sqrt{2}r$

కావున దీర్ఘచతురస్రం ABCD ఒక చతురస్రము.

ఉదాహరణ 25.20 : కొంత ఘనపరిమాణాన్ని కలిగి కనిష్ఠ ఉపరితల వైశాల్యం ఉన్న మూతగల లంబవృత్తాకార స్థూపం యొక్క ఎత్తు. దాని భూ వ్యాసానికి సమానమని చూపండి.

సాధన: స్థూపం ఘనపరిమాణం V, భూవ్యాసార్ధం r, ఎత్తు h అనుకుంటే.

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

ఉపరితలవైశాల్యం $S = 2\pi rh + 2\pi r2$

$$= 2\pi r.\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dS}{dr} = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r$$

కనిష్ఠ ఉపరితల వైశాల్యానికి, $\frac{dS}{dr}=0$

$$\frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$$V = 2\pi r^3$$

(i) మరియు (ii) ల నుంచి : $h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$

మరలా, $\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi$ ...(ii) ద్వారా

$h = 2r$ అయితే కనిష్ఠం.

$\therefore$ స్థూపం ఎత్తు = భూవ్యాసం.

ఉదాహరణ 25.21 : కొంత ఉపరితలాన్ని మరియు గరిష్ఠ ఘనపరిమాణాన్ని కలిగిన మూతగల లంబ వృత్తాకార స్థూపం ఎత్తు, దాని భూవ్యాసానికి సమానమని చూపండి.

సాధన : స్థూపం ఉపరితలం 'S', ఘనపరిమాణం 'V', ఎత్తు 'h', భూవ్యాసార్ధం 'r' అనుకొనుము.

$$\therefore \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad ...(i)$$

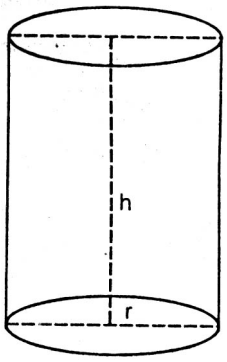
$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi r^2\left(\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right)$$

$$= \frac{r}{2}(S - 2\pi r^2)$$

$$V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - \pi(3r^2)$$



పటం 25.11

గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠకు, $\frac{dV}{dr} = 0$

$$\frac{S}{2} - \pi(3r^2) = 0$$

$$S = 6\pi r^2$$

(i) నుండి : $6\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2.$

$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 = 2\pi rh$$

$$\Rightarrow \quad 2r = h \qquad ...(ii)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left[\frac{S}{2} - 3\pi r^2\right]$$

$$= -6\pi r \qquad \left[\because \frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}\right) = 0\right]$$

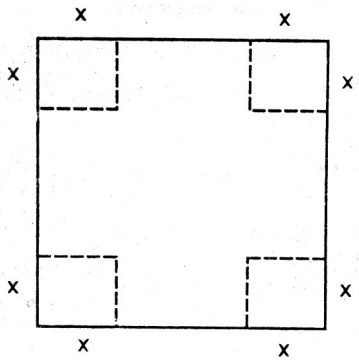
= రుణాత్మకం.

$\therefore$ లంబ వృత్తాకార స్థూప గరిష్ఠ ఘనపరిమాణానికి, ఎత్తు = భూవ్యాసం. అంటే $h = 2r$.

ఉదాహరణ 25.22: 48 సెం.మీ. భుజము కొలతగల చతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుండి నాలుగు చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే కత్తిరించిన చతురస్రాకారపు ముక్క భుజం కొలత కనుక్కోండి.

సాధన : కత్తిరించిన ముక్క భుజం కొలత 'x' అనుకుంటే,

పెట్టె ప్రతి భుజము పొడవు $(48 - 2x)$ మరియు ఎత్తు 'x' అవుతుంది.



పటం. 25.12

$x > 0,\ 48 - 2x > 0 \qquad \therefore\ x < 24$

ఇంకా $0 < x < 24.$

పెట్టె ఘనపరిమాణం $V = (48 - 2x)\,(48 - 2x)\,(x)$

$= (48 - 2x)^2\,(x)$

$$\frac{dV}{dx} = (48-2x)^2 + 2(48-2x)(-2)(x)$$

$= (48 - 2x)\,(48 - 6x)$

గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠకు, $\frac{dV}{dx} = 0$

$\Rightarrow\ (48-2x)\,(48-6x) = 0$

$\Rightarrow\ x = 24$ లేదా $x = 8$

$0 < x < 24$ కాబట్టి $x = 8$ ను పరిగణిద్దాం.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 384$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=8} = 192 - 384 = -192 < 0.$$

$\therefore$ $x = 8$ కు, ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం.

$\therefore$ కత్తిరించిన చతురస్రాకారపు ముక్క కొలత 8 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 25.23: రోజుకు 'x' ఉత్పత్తులను తయారుచేసే ఒక కంపెనీ లాభప్రమేయం $p(x)$ అనేది $p(x) = (150 - x)x - 1625$ గా యివ్వబడింది. గరిష్ఠ లాభం కోసం కంపెనీ తయారు చేసే ఉత్పత్తుల సంఖ్య మరియు గరిష్ఠ లాభాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: కంపెనీ తయారు చేసి, రోజువారీ అమ్మే ఉత్పత్తుల సంఖ్య 'x' గా యివ్వబడింది. గరిష్ఠ లాభం కోసం,

$$p'(x) = 0 \quad \text{లేదా} \quad \frac{dP}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[(150 - x)x - 1625\right] = 0$$

$$\Rightarrow 150 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 75$$

$$\frac{d}{dx}\left[p'(x)\right] = p''(x) = -2 = \text{రుణాత్మకరాశి.}$$

$\therefore$ $x = 75$ కి $p(x)$ గరిష్ఠం. అంటే గరిష్ఠ లాభం కోసం, కంపెనీ రోజువారీ 75 ఉత్పత్తులను తయారుచేయాల్సి వుంటుంది.

గరిష్ఠలాభం $= p(75) = (150 - 75)\ 75 - 1625$

$= \text{రు.}\ [(75)\ (75) - 1625]$

$= \text{రు.}\ [5625 - 1625]$

$= \text{రు.}\ 4000.$

ఉదాహరణ 25.24: 'r' సెం.మీ. వ్యాసార్ధంగల గోళంలో అంతర్లిఖించబడిన గరిష్ఠ స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన: అంతర్లిఖించబడిన స్థూపం ఎత్తు 'h' భూవ్యాసార్ధం 'R', ఘనపరిమాణం V అనుకుంటే

$$V = \pi R^2 h \qquad ...(i)$$

త్రిభుజము OCB నుంచి, $r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2$ ...($\because OB^2 = OC^2 + BC^2$)

$$R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$V = \pi\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi r^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$$

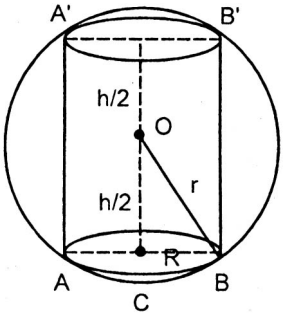
$$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$$

గరిష్ఠ / కనిష్ఠకు $\frac{dV}{dh} = 0$

$$\therefore \quad \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = \frac{4r^2}{3} \quad \Rightarrow h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi h}{2}$$



పటం. 25.13

$$\therefore \quad \frac{d^2V}{dh^2}\left(\text{at } h = \frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\pi \times 2r}{2 \times \sqrt{3}}$$

$$= -\sqrt{3}\pi r < 0$$

$h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ అయితే V గరిష్ఠం

$h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ను (ii)లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$R^2 = r^2 - \frac{4r^2}{4 \times 3} = \frac{2r^2}{3}$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}}r$$

$\therefore$ స్థూపం గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం $= \pi R^2 h$

$$= \pi.\left(\frac{2}{3}r^2\right)\frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}\text{cm}^3.$$

అభ్యాసం 25.5

1. రెండు సంఖ్యల మొత్తము 15 అయి, ఒక దాని వర్గము మరియు రెండో దాని ఘనముల లబ్ధము గరిష్ఠమైతే ఆ సంఖ్యలను కనుక్కోండి.
2. రెండు భాగాల వర్గాల మొత్తము కనిష్ఠం అయ్యేటట్లు 15ను రెండు భాగాలుగా విభజించండి.
3. కొంత చుట్టుకొలత కల్గిన దీర్ఘ చతురస్రాలన్నింటిలో, చతురస్రానికి గరిష్ఠ వైశాల్యం ఉంటుందని చూపండి.
4. త్రిభుజము సమద్విబాహువు అయినపుడు, కర్ణము పొడవు యివ్వబడిన ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క చుట్టుకొలత గరిష్ఠంగా ఉంటుందని చూపండి.
5. చుట్టుకొలత 30 మీ. ఉండేటట్లు దీర్ఘ చతురస్రంపై అర్ధవృత్తం ఉన్న ఆకారంలో నిర్మించగలిగే కిటికీలన్నింటిలోనూ, గరిష్ఠ కాంతి ప్రసరణ అయ్యే విధంగా ఉండే కిటికీ కొలతల్ని కనుక్కోండి.
6. 100 ఘ.సెం.మీ. ఘనపరిమాణం ఉన్న మూతగల లంబవృత్తాకార స్థూపానికి కనిష్ఠ సంపూర్ణతల వైశాల్యం ఉంటే భూవ్యాసార్ధం కనుక్కోండి.
7. భూవ్యాసార్ధము మరియు ఎత్తు కలిసి 6మీ. వుండేటట్లు ఒక లంబవృత్తాకార స్థూపాన్ని తయారుచేశారు. దాని గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.
8. లంబవృత్తాకార శంకువులో అంతర్లిఖించబడి గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం కల్గిన లంబవృత్తాకార స్థూపం ఎత్తు శంకువు ఎత్తులో 1/3వ వంతు ఉంటుందని చూపండి.
9. కొంత ఘనపరిమాణంలో శంకువు ఆకారంతో గుడారాన్ని నిర్మించాలి. తగినంత తక్కువ కాన్వాస్ గుడ్డ కావలసి యుంటే గుడారపుటెత్తు, భూవ్యాసార్ధాల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.
10. 16π ఘనపు మీటర్ల ఘనపరిమాణం కల్గిన లంబవృత్తాకార స్థూపం ఆకారంలో ఒక పాత్రను తయారుచేయాల్సి వుంది. తగినంత తక్కువ ఉపరితలం కల్గిన రేకుముక్క నుండి తయారయ్యే యీ పాత్ర కొలతల్ని కనుక్కోండి.

11. ఒక సినిమా థియేటరు యాజమాన్యం ప్రేక్షకులను ఆకర్షించటానికై రు. 55 టిక్కెట్టు ధరను తగ్గించాలనే యోచనలో ఉన్నది. అన్ని కోణాల ద్వారా పరిశీలించిన పిమ్మట రోజువారీ ప్రేక్షకుల సంఖ్య సగటున 'q' గా కనుగొన్నారు. తగ్గించిన టిక్కెట్టు ధర 'x' అయితే $q = 500 + 100x$ అనేది ప్రమేయము. గరిష్ఠ ఆదాయం వచ్చేలా టిక్కెట్టు ధర ఎంత అయ్యుంటుంది?

కీలకపదాలు

- ఆరోహణప్రమేయం : $f(x)$ ప్రమేయం $[a, b]$ అంతరంలో ఆరోహణం చెందితే ప్రతి $x_2 > x_1$ కి $f(x_2) \geq f(x_1)$ అవుతుంది.
- అవరోహణప్రమేయం : $f(x)$ ప్రమేయం $[a, b]$ అంతరంలో అవరోహణం చెందితే ప్రతి $x_2 > x_1$ కి $f(x_2) \leq f(x_1)$ అవుతుంది.
- అన్ని $x \in [a, b]$ లకు $f'(x) > 0$ అయితే $f(x)$ ప్రమేయం $]a, b[$ అంతరంలో ఆరోహిస్తుంది.
- అన్ని $x \in [a, b]$ లకు $f'(x) < 0$ అయితే $f(x)$ ప్రమేయం $]a, b[$ అంతరంలో అవరోహిస్తుంది.
- ఏకదిష్ఠ ప్రమేయం :

  (i) దత్త అంతరంలో ఆరోహించే ప్రమేయాన్ని ఏకదిష్ఠ (ఆరోహణ) ప్రమేయం అంటాం.

  (ii) దత్త అంతరంలో అవరోహించే ప్రమేయాన్ని ఏకదిష్ఠ (అవరోహణ) ప్రమేయం అంటాం.

  దత్త అంతరంలో ఆరోహించే, అవరోహించే ప్రమేయము ఏకదిష్ఠం కానేరదు.
- ఒక అంతరంలో $x = a$ బిందువుకు ఎడమవైపు $f'(x) > 0$, కుడివైపు $f'(x) < 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠం ఉంటుంది.
- ఒక అంతరంలో $x = a$ బిందువుకు ఎడమవైపు $f'(x) < 0$, కుడివైపు $f'(x) > 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్ఠం ఉంటుంది.
- $f(x)$ ప్రమేయం $x = a$ వద్ద అవకలనీయమై, $f'(a) = 0$ అయితే, $f(x)$ ప్రమేయానికి $x = a$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం లేదా కనిష్ఠం ఉంటాయి.

- x విలువ 'a' ద్వారా పోయినప్పుడు $f'(x)$ గుర్తు ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకానికి మారితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ స్థానిక గరిష్ఠ విలువను కల్గి యుంటుంది.
- x విలువ 'a' ద్వారా పోయినప్పుడు $f'(x)$ గుర్తు రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకానికి మారితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ స్థానిక కనిష్ఠ విలువను కల్గి యుంటుంది.
- రెండో తరగతి అవకలన పరీక్ష

  (i) $f'(a) = 0;\ f''(a) < 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ఠం ఉంటుంది.

  (ii) $f'(a) = 0;\ f''(a) > 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్ఠం ఉంటుంది.

  (iii) $f'(a) = 0,\ f''(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $x = a$ వద్ద గరిష్ఠ, కనిష్ఠలను నిర్ణయించటానికి x విలువ 'a' ద్వారా పోయినప్పుడు $f'(x)$ లో వచ్చే గుర్తు మార్పును పరిశీలిస్తాం.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. అన్ని $x \in R$ లకు $f(x) = x^2$ ఆరోహించదు మరియు అవరోహించదు అని చూపండి.

   కింది ప్రమేయాలకు ఆరోహణ లేదా అవరోహణ అంతరాలను కనుక్కోండి.

2. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
3. $\frac{x}{4} + \frac{4}{x},\ x \neq 0$
4. $x^4 - 2x^2$
5. $\sin x - \cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

కింది ప్రమేయాలకు స్థానిక గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠలను కనుక్కోండి.

6. (a) $x^3 - 6x^2 + 9x + 7$ (b) $2x^3 - 24x + 107$

   (c) $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ (d) $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$

7. (a) $\frac{1}{x^2+2}$ (b) $\frac{x}{(x-1)(x-4)}, 1 < x < 4$

   (c) $x\sqrt{1-x},\ x<1$

8. (a) $\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (b) $\sin 2x,\ 0 \le x \le 2\pi$

   (c) $-x + 2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

9. [0, 5] అనే సంవృత అంతరంలోని ఏ 'x' విలువకు $x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ కు గీసిన స్పర్శరేఖ వాలు గరిష్ఠం? అట్టి బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

10. $-x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ వక్రంపై ఒక బిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ యొక్క గరిష్ఠవాలును కనుక్కోండి. అట్టి బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

11. 24π చ.మీ. ఉపరితల వైశాల్యం గల లంబవృత్తాకార స్థూపాకారపు పాత్రను తయారు చేయాల్సి వుంది. తగినంత గరిష్ఠ ఘనపరిమాణాన్ని కల్గియుండే, అట్టి పాత్ర కొలతలను నిర్ణయించండి.

12. రెండు పడకగదులుండే 400 అపార్టుమెంట్లలో 300 అపార్టుమెంట్లు అద్దెకివ్వబడి, రోజుకు రు. 360.00లు అద్దె వసూలు చేయబడుచున్నది. హోటల్‌మేనేజిమెంట్ వారి సర్వే ఫలితంగా, అద్దెను 'x' రు.లు తగ్గించి, అద్దెకిచ్చే అపార్టుమెంట్ల సంఖ్యను 'q' గా మార్చి, q మరియు x ల మధ్య, $q = \frac{5}{4}x + 300,\ 0 \le x \le 80$ అనే సంబంధాన్ని రూపొందించారు. తద్వారా గరిష్ఠ ఆదాయం వచ్చేలా అద్దె నిర్ణయించండి. ఆగరిష్ఠ ఆదాయాన్ని కూడా కనుక్కోండి.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము

నోట్స్

జవాబులు

అభ్యాసం 25.2

1. (a) $x > \frac{7}{2}$ కి ఆరోహణం; $x < \frac{7}{2}$ కి అవరోహణం

   (b) $x > \frac{5}{2}$ కి ఆరోహణం; $x < \frac{5}{2}$ కి అవరోహణం

2. (a) $x > 6$ లేదా $x < -2$ కి ఆరోహణం; $-2 < x < 6$ కి అవరోహణం

   (b) $x > 4$ లేదా $x < 2$ కి ఆరోహణం; $]2, 4[$ లో అవరోహణం

3. (a) $x < -2$ ఆరోహణం; $x > -2$ కి అవరోహణం

   (b) $-1 < x < -2$ లో ఆరోహణం

   $x > -1$ లేదా $x < -2$ కి అవరోహణం

4. (a) ఎల్లప్పుడూ ఆరోహణం.

   (b) $x > 2$ కి ఆరోహణం; $0 < x < 2$ కి అవరోహణం

   (c) $x > 2$ లేదా $x < -2$ కి ఆరోహణం; $-2 < x < 2$ కి అవరోహణం

5. (a) ఆరోహణ అంతరం : $\frac{3\pi}{8} \le x \le \frac{7\pi}{8}$

   అవరోహణ అంతరం : $0 \le x \le \frac{3\pi}{8}$

   $x = \frac{3\pi}{8}; x = \frac{7\pi}{8}$ లు స్పర్శరేఖలు X-అక్షానికి సమాంతరముగ ఉండే బిందువులు.

అభ్యాసం 25.3

1. $x = 4$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '–4'.

2. $x = 3$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '15'; $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '19'.

3. $x = 6$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-128'; $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '-3'.
4. $x = -6$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-1647'; $x = 5$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '-316'.

   $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '68'.
5. $x = 0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-4'; $x = -2$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '0'.
6. $x = -1$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-1'; $x = 3$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '$\frac{1}{7}$'.

అభ్యాసం 25.4

1. $x = 2$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-34'; $x = -3$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '91'.
2. $x = 0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-5'; $x = 8$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '251'.
3. $x = 0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-4'; $x = -2$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '0'.
4. $x = 3$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం '-28'; $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం '0'.

   $x = 0$ వద్ద గరిష్ఠము లేదు; కనిష్ఠము లేదు.
5. $x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
6. $x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం $= \sqrt{2}$
7. $x = -\frac{\pi}{6}$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం $= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

   $x = \frac{\pi}{6}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$.

అభ్యాసం 25.5

1. సంఖ్యలు 6, 9.
2. భాగాలు 7.5, 7.5

5. కొలతలు ప్రతిదీ $\frac{30}{\pi+4}, \frac{30}{\pi+4}$ మీటర్లు.

6. వ్యాసార్ధం = $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ సెం.మీ.

ఎత్తు = $2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ సెం.మీ

7. గరిష్ఠ ఘ.ప. = 32π ఘ.మీ.

9. $h = \sqrt{2}\,r$

10. $r = 2$ మీ.

$h = 4$ మీ.

11. Rs. 30.00

సాధనా అభ్యాసం

2. $x > 2$ లేదా $x < -1$ కి ఆరోహణం ;

$-1 < x < 2$ లో అవరోహణం ;

3. $x > 4$ లేదా $x < -4$ కి ఆరోహణం ;

$]-4, 4[$ లో అవరోహణం ;

4. $x > 1$ లేదా $-1 < x < 0$ లో ఆరోహణం

$x > -1$ లేదా $0 < x < 1$ లో అవరోహణం

5. $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ లేదా $\frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$ లో ఆరోహణం ;

$\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$ లో అవరోహణం ;

6. (a) $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = 11

$x = 3$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = 7

(b) $x = -2$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = 139

$x = 2$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = 75.

(c) $x = -3$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = 20

$x = \frac{1}{3}$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = $\frac{40}{27}$

(d) $x = 1$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = 68

$x = 5$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = -316

$x = -6$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = -1647.

7. (a) $x = 0$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = $\frac{1}{2}$

(b) $x = 2$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = -1

(c) $x = \frac{2}{3}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

8. (a) $x = \frac{\pi}{6}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = $\frac{3}{4}$

$x = \frac{\pi}{2}$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = $\frac{1}{2}$

(b) $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = 1

$x = \frac{3\pi}{4}$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = -1

(c) $x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ఠం = $-\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}$.

$x = \frac{5\pi}{3}$ వద్ద స్థానిక కనిష్ఠం = $-\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3}$.

9. $x = 5$ వద్ద గరిష్ఠవాలు = 24

బిందువు = (5, 24).

10. $x = 1$ వద్ద స్పర్శరేఖ గరిష్ఠ వాలు = 5.

బిందువు = (1, −23).

11. భూవ్యాసార్ధం = 2మీ.; ఎత్తు = 4 మీ.

12. తగ్గించిన అద్దె రు. 300;

గరిష్ఠఆదాయము = రు. 1,12,500.

అధ్యాయం

26

సమాకలనం

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠం అభ్యసించిన తరువాత, నీవు గమనించగల విషయాలు.

- అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియ (ప్రత్యవకలజం)గా సమాకలనం అని విశదపరచగలవు.
- x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\sec^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x$, $\sec x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x \cot x$, $\frac{1}{x}$ e^x మొ॥ సరళ ప్రమేయాల సమాకలనాలను తెలుసుకొనెదవు.
- ఈ క్రింది ఫలితాలను వివరించడం

  (i) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

  (ii) $\int [\pm k \ \ f(x)]\, dx = \pm k \int f(x)\, dx$
- బీజీయ, త్రికోణ మితీయ, విలోమ త్రికోణ మితీయ, ఘాతిక ప్రమేయాల సమాకలనులను కనుక్కోండి
- ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా ప్రమేయాల సమాకలనం కనుక్కోవడం.
- ఈ మాదిరి సమాకలనులను గణించండి.

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}\,,\ \int \frac{dx}{a^2 - x^2}\,,\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,,\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}\,,\ \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,,\ \int \frac{(px+q)\, dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

- వ్యుత్పన్న ఫలితాన్ని ఉపయోగించడం

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\ |f(x)| + c$$

- విభాగ సమాకలన పద్ధతిని వివరించి, ఉపయోగించటం.

ఈ క్రింది రూపంలో ఉన్న సమాకలనులను గణించటం.

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx,\ \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx, \int e^{ax}\ \sin\ bx\ dx,\ \int e^{ax} \cos bx\ dx,$$

$$\int (px+q)\ \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx,\ \int \sin^{-1} x\ dx, \int \cos^{-1}\ x\ dx,$$

$$\int \sin^n x\ \cos^m\ x\ dx,\ \int \frac{dx}{a+b\ \sin\ x}, \int \frac{dx}{a+b\cos\ x}$$

- వ్యుత్పన్నం చేసిన ఫలితాన్ని ఉపయోగించడం

$\int e^x\ [f(x) + f'(x)]\ dx = e^x\ .f(x) + c$: మరియు

- పాక్షిక భిన్నాలను ఉపయోగించి అకరణీయ సమాసాల సమాకలనం చేయడం

పూర్వాకాంక్షితాలు

- వివిధ రకాల ప్రమేయాల అవకలనం
- రేఖాగణితం గురించి ముఖ్యమైన పరిజ్ఞానము
- బీజీయ సమాసాలను కారణాంకాలుగా విభజించుట
- విలోమ త్రికోణమితీయ పరిజ్ఞానము

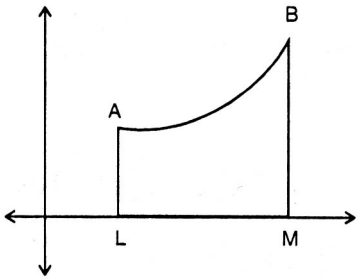
పరిచయం

అవకలన ప్రమేయం యొక్క భావనను పూర్వ పాఠ్య భాగాంశాలలో నేర్చుకొన్నాం. అవకలజాల అనువర్తనాలను వివిధ సందర్భాలలో నేర్చుకొన్నాం.

అవకలజం ఇవ్వబడినప్పుడు (ప్రమేయ రూపంలో ఆ ప్రమేయం యొక్క విలోమ పద్ధతిని పరిశీలిద్దాం. అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియయే సమాకలనం. సమాకలన వివిధ పద్ధతులను, ప్రమాణిక రూపాలను చదువుకొందాం

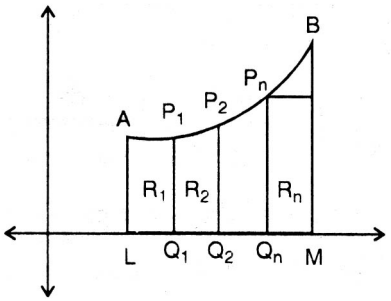
26.1 సమాకలనం

సమాకలనం అనగా "కూడడం" (సంకలనం) అని శబ్దార్థం. క్రింది పటం 26.1లో చూపించిన ABCB తో ఆవరించిన ప్రదేశ వైశాల్యాన్ని గురించి ఆలోచించండి.



పటం 26.1

ఈ వైశాల్యాన్ని కొన్ని అభ్యాస పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనడానికి ప్రయత్నిద్దాం. కాని అన్ని సార్లు అది కుదరక పోవచ్చు. అటువంటి సమస్యను సాధించుట కొరకు సమాకలనం (కూడడం లేదా మొత్తం చేయటం) సహాయంతో వైశాల్యం (ఆవరణ) కనుటనుట ద్వారా సాధిస్తాం. దాని కొరకు ఆ పటాన్ని సూక్ష్మ దీర్ఘ చతురస్రాలుగా విభజిస్తాం.



పటం 26.2

ఈ దీర్ఘ చతురస్రాల వెడల్పును సూక్ష్మాతి సూక్ష్మ భాగాలుగా చేస్తే తప్ప వైశాల్యాన్ని కనుక్కోలేము.

ఈ పాఠ్య భాగంలో మనం బహుపది, త్రికోణ మితీయ, ఘాతిక, సంవర్గమాన, అకరణీయ ప్రమేయాల సమాకలనులను గురించి వివిధ సాంకేతిక పద్ధతులనుపయోగించటం ద్వారా నేర్చుకుంటాం.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

26.2 అవకలనానికి విలోమంగా సమాకలనం

6.1.1 నిర్వచనం

$\boldsymbol{R}$ లో E ఒక ఉపసమితి. దీనిలో ప్రతి బిందువుకు ఒక ఎడమ సామీప్యంగాని, ఒక కుడి సామీప్యం గాని E లో ఉంటుందనుకొందాం. $f : E \to \boldsymbol{R}$ ఒక ప్రమేయం. E మీద ఒక ప్రమేయం F, ప్రతి $x \in E$ కి $F'(x) = f(x)$. అంటే E మీద F కు f అవకలని అయ్యేటట్లు ఉంటే F ని **f కి ప్రత్యవకలజం** లేదా **f యొక్క పూర్వగం** అంటాం.

ఉదాహరణ : $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల, ప్రమేయం f, F లను $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$; $F(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$ అనుకొంటే f కి F **ఒక ప్రత్యవకలజం** లేదా **పూర్వగం**.

E మీద f కు ప్రత్యవకలజం F అయితే, ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య k కి $(F + k)'(x) = f(x)$ $\forall\ x \in E$.

అందువల్ల $F + k$ కూడా f కు ఒక ప్రత్యవకలజం. కాబట్టి పై ఉదాహరణలో c ఒక వాస్తవ స్థిర సంఖ్య అయితే

$G(x) = \sin x + c, x \in \mathbf{R}$ అని G ని నిర్వచిస్తే, G కూడా $\cos x$ కు ఒక ప్రత్యవకలజం.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

(i) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(iii) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

పై ఉదాహరణలను వివిధ సందర్భాలలో పరిశీలిద్దాం.

(i) x^2 ను అవకలనం చేయగా $2x$ ప్రమేయం వస్తుంది.

$\Rightarrow x^2$ అనేది $2x$ కు ఒక ప్రత్యవకలజం లేదా పూర్వగం.

$\Rightarrow x^2$ కు $2x$ అవకలని (వ్యుత్పన్నము)



(ii) $\sin x$ ను అవకలనం చేయగా $\cos x$ అను అవకలజం వస్తుంది.

$\Rightarrow \cos x$ ప్రమేయం, $\sin x$ ను అవకలనం చేయగా వచ్చును.

$\Rightarrow \sin x$ అనేది $\cos x$ కు ప్రత్యవకలజం.

(iii) ఇదే విధంగా e^x అనేది e^x కు ప్రత్యవకలజం.

సాధారణంగా ప్రత్యవకలజం అనే (తలంపు) భావనను ఒక గణిత ప్రక్రియ ద్వారా వ్యక్తీకరిస్తాం. ఈ గణిత ప్రక్రియను సమాకలన గణిత ప్రక్రియగా చెప్పబడుతుంది.

(1) $2x$ కి సమాకలనం x^2

(2) $\cos x$ యొక్క సమాకలనం $\sin x$

(3) e^x కి సమాకలనం e^x. గా వ్రాస్తాం.

ఈ గణిత ప్రక్రియను $\int$ గుర్తుతో సూచిస్తాం.

(1) $\int 2x.dx = x^2$ (2) $\int \cos x.dx = \sin x$ (3) $\int e^x.dx = e^x$

చిహ్నం $\int$ తో dx చిహ్నం వెంట వచ్చునని గుర్తుంచుకోండి. దీనిని సమాకలన గణిత ప్రక్రియ అంటాం. సమాకలనం చేయవలసిన ప్రమేయాన్ని $\int$ మరియు dx ల మధ్యన ఉంచండి.

6.1.7 నిర్వచనం (అనిశ్చిత సమాకలని)

$f: I \to \boldsymbol{R}$ అనుకొందాం. I మీద f కు F ఒక ప్రత్యవకలజం అనుకొందాం. అప్పుడు I మీద f కు సమాకలని ఉందని అంటాం. ప్రతి వాస్తవ స్థిర సంఖ్య c కి $F + c$ ని I మీద f కు **'అనిశ్చిత సమాకలని'** అంటాం. దీనిని '$\int f(x)\,dx$' తో సూచిస్తాం. 'ఇంటెగ్రల్ $f(x)\,dx$' అని చదువుతాం. $\int f(x)\,dx$ ని $\int f$ తో కూడా సూచిస్తాం. అందువల్ల

$$\int f = \int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + c.$$

ఇక్కడ c ని **'సమాకలన స్థిరాంకం'** అంటాం.

అనిశ్చిత సమాకలని $\int f(x)\,dx$ లో f ను 'సమాకల్యం' అనీ, x ను 'సమాకలన చలరాశి' అనీ అంటాం.

నిర్వచనం : $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$, అందు $f(x)$ ను $f'(x)$ యొక్క "సమాకలని" (అనిశ్చిత సమాకలని) అని అంటాం. దీనిని

$$\int f'(x)\,dx = f(x) \text{ గా రాస్తాం.}$$

సమాకలనం చేయు ప్రమేయం $f'(x)$ ను "సమాకల్యం" అని పిలుస్తాం.

సమాకలన స్థిరాంకం

$y = x^2$ అయిన $\frac{dy}{dx} = 2x$ అవుతుంది.

$$\int 2x\,dx = x^2 \text{ అవుతుంది.}$$

- $\frac{d}{dx}(x^2+2)$ లేదా $\frac{d}{dx}(x^2+c)$ నందు 'c' ని ఒక వాస్తవ స్థిరసంఖ్యగా ఎంచుకోండి.

$2x$ యొక్క సమాకలనం ఏకైకము అని పరిగణించలేము. $\int 2x\,dx$ యొక్క విచ్ఛిన్నమైన విలువలు స్థిర సంఖ్యతో విచ్ఛిన్నంగా మారతాయి.

అందువలన $\int 2x\,dx = x^2 + c$, యందు 'c' ని "సమాకలన స్థిరాంకం" అంటాం.

కాబట్టి $\int e^x\,dx = e^x + c$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

సాధారణంగా $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

స్థిరాంకం 'c' ఏ విలువనైనను పొందవచ్చును.

సమాకలనం యొక్క అవకలని (వ్యుత్పన్నం అవకలజం) సమాకల్యంతో సమానమని గుర్తిస్తాం.

గమనిక: $\int f(x)dx$, $\int f(y)dy$, $\int f(z)dz$ లు

$\int f(z)dx$ వలె కాదు

ఉదాహరణ 26.1

క్రింది సమాకలనులను కనుక్కోండి.

(i) x^3 (ii) x^{30} (iii) x^n

సాధన:

(i) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$, since $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{4x^3}{4} = x^3$

(ii) $\int x^{30}\,dx = \frac{x^{31}}{31} + C$, since $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{31}}{31}\right) = \frac{31x^{30}}{31} = x^{30}$

(iii) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, since

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}.(n+1)x^n = x^n$$

ఉదాహరణ 26.2

(i) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ అయితే y ని కనుక్కోండి. (ii) $\frac{dy}{dx} = \sin x$ అయితే y ని కనుక్కోండి.

సాధన:

(i) $\int \frac{dy}{dx}dx = \int \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad y = \sin x + C$

(ii) $\int \frac{dy}{dx}dx = \int \sin x\,dx \quad \Rightarrow \quad y = -\cos x + C$

26.3 సరళ ప్రమేయాల సమాకలనం

$f(x)$ అనేది ఏదైనా $f'(x)$ యొక్క సమాకలని అని, అప్పుడు $f(x) + c$ ప్రమేయం కూడా $f'(x)$ యొక్క సమాకలని అని ఇదివరకే తెలుసుకున్నాం. "c" స్థిరాంకం "0" తో సహా ఏ విలువనైనా తీసుకోవచ్చు. కాబట్టి $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$ అనునది 'అనిచ్ఛిత సమాకలని' అవుతుంది. దీనిలో "c" విలువను నిర్వచిస్తే "నిశ్చిత సమాకలని" అవుతుంది.

ఉదాహరణ 26.3

$\int 4x^3\,dx$ కు 4 వివిధ విలువలను రాయండి.

సాధన: $\int 4x^3\,dx = x^4 + c$, 'c' స్థిరాంకం.

లేదా $\int 4x^3\,dx = x^4 + 1$ మరియు x^4+2, x^4+3 మరియు x^4+4 మొదలగునవి.

- కొన్ని సరళ ప్రమేయాల సమాకలనాలు కింద ఇవ్వబడినవి. సమాకలనము యొక్క వాస్తవికతను పరీక్షించుటకు సమాకలనం యొక్క వ్యుత్పన్నము, సమాకలనికి సమానమని చూపితే సరిపోతుంది.

	సమాకలని	సరిచూచుట
1.	$n \in \mathbf{R} - \{-1\}$ అయితే	$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$
	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	
2.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\because \frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x$
3.	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\because \int \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$
4.	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\because \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$
5.	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$	$\because \frac{d}{dx}(-\cot x + C) = \operatorname{cosec}^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\because \frac{d}{dx}(\sec x + C) = \sec x \tan x$
7.	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$	$\because \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x + C) = \operatorname{cosec} x \cot x$
8.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$	$\because \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \tan^{-1} x + C \quad \because \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x + C) = \frac{1}{1-x^2}$

10. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C \quad \because \quad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x + C) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

11. $\int e^x dx = e^x + C \quad \because \quad \frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$

12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad \because \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a} + C\right) = a^x = \frac{1}{x} \text{ if } x > 0$

13. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \quad \because \quad \frac{d}{dx}(\log|x| + C)$

అభ్యాసం 26.1

1. కింది సమాకలనులను గణించండి.

   a) x^5 b) $\cos x$ c) 0

2. గణించండి.

   a) $\int x^3 dx$ b) $\int x^{-7} dx$ c) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

   d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int \sqrt[3]{x^4} dx$ f) $\int \sqrt[9]{x^{-8}} dx$

3. గణించండి.

   a) $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} dx$ b) $\int \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$

26.4 సమాకలనుల ధర్మాలు

ఒక ప్రమేయం రెండు లేదా ఎక్కువ ప్రమేయాల మొత్తంగా ఉంటే ఆ ప్రమేయాలను సమాకలనుల మొత్తంగా రాయవలెను.

ఉదా: $f(x) = x^7 + x^3$

$$\int f(x) = \int \left[x^7 + x^3 \right] dx$$

$$= \int x^7 dx + \int x^3 \, dx$$

$$= \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} + c$$

రెండు ప్రమేయాల మొత్తం సమాకలనం ఆ ప్రమేయాల సమాకలనాల మొత్తానికి సమానం.

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) dx$$

అదేవిధంగా

$$f(x) = x^7 - x^3$$

ప్రమేయం అయితే

$$\int f(x) dx = \int [x^7 - x^3] dx$$

$$= \int x^7 dx - \int x^3 \, dx$$

$$= \frac{x^8}{8} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{C}$$

రెండు ప్రమేయాల బేధం సమాకలనం ఆ ప్రమేయాల సమాకలనాల బేధానికి సమానం.

$$\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) dx$$

$f(x)$ ప్రమేయం స్థిర సంఖ్య k మరియు $g(x)$ ల లబ్ధము అయితే

$$f(x) = k \, g(x)$$

$$\int f(x) \, dx = \int k \, g(x) \, dx$$

$$\int f(x) \, dx = k \int g(x) \, dx$$

ఉదాహరణ 26.3: $\int \left(e^x - \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) dx$ ను గణించండి.

$$= \int e^x dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx$$

$$= e^x - \log x + 2 \cosh^{-1} x + c$$

ఉదాహరణ 26.4: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ ను గణించండి.

$= \sin^{-1}x + \sinh^{-1}x + c$

ఉదాహరణ 26.5: $\int e^{\log(1+\tan^2 x)}\, dx$ ను గణించండి.

$= \int (1+\tan^2 x)\, dx$

$= \int \sec^2 x\, dx$

$= \tan x + c$

ఉదాహరణ 26.6: $\int 4^x\, dx = \frac{4^x}{\log 4} + C$ ను గణించండి.

ఉదాహరణ 26.7: $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ ను గణించండి.

$= -\cos x + \sin x + c$

ఉదాహరణ 26.8: $\int \frac{x^2+1}{x^3} dx$ ను గణించండి.

$= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} dx$

$= \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^3} dx$

$= \log x + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$

$= \log x - \frac{1}{2x^2} + C$

ఉదాహరణ 26.9: $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta$ ను గణించండి.

$= \int \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}\, d\theta$

$= \int \sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2}\, d\theta$

$\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta = \pm \int (\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = \pm (\sin\theta + \cos\theta) + c$

(లేదా)

If $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\ d\theta = \int \cos\theta - \sin\theta d\theta$

$= \sin\theta + \cos\theta + C$

If $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\ d\theta = -\int (\cos\theta - \sin\theta) d\theta$

$= -\int \cos\theta\ d\theta + \int \sin\theta d\theta$

$= -\sin\theta - \cos\theta + C$

ఉదాహరణ 26.10: Evaluate $\int \frac{1}{\cosh x + \sinh x}\ dx$

$= \int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh x + \sinh x}\ dx$

$= \int \frac{(\cosh x - \sinh x)\cancel{(\cosh x + \sinh x)}}{\cancel{(\cosh x + \sinh x)}}\ dx$

$= \int (\cosh x - \sinh x)\ dx$

$= \int \cosh x\, dx - \sinh x\ dx$

$= \sinh x - \cosh x + C.$

ఉదాహరణ 26.11: Evaluate $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x}\ dx$

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\ dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\int \sec^2 x\ dx - \int 1\ dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\tan x - x\right] + C$

ఉదాహరణ 26.12: Evaluate $\int \sec^2 x\ \text{cosec}^2 x\ dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx$$

$$= -\cot x + \tan x + C$$

ఉదాహరణ 26.13: $\int (x + \cos x) dx$ ను గణించండి.

$$= \int x \, dx + \int \cos x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \sin x + c$$

ఉదాహరణ 26.14: $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$ ను గణించండి.

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx$$

$$= -\cot x + \operatorname{cosec} x + C$$

ఉదాహరణ 26.15: $\int \left(\sec x \tan x + \frac{3}{x} - 4 \right) dx$ ను గణించండి.

$$= \int \sec x \tan x \, dx + 3\int \frac{1}{x} dx - 4\int 1 \, dx$$

$$= \sec x + 3\log x - 4x + c$$

ఉదాహరణ 26.16: $\int e^{x+7}dx$ ను గణించండి.

$$\int e^{x+7}dx = \int e^{x+7}.\, e^7 dx$$
$$= e^7 \int e^x\, dx$$
$$= e^7\ .\ e^x + C$$
$$= e^{x+7} + C$$

అభ్యాసం 26.2

1. గణించండి.

(i) $\int\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$ (ii) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

(iii) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ (iv) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)dx$

2. గణించండి.

(i) $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx$ (ii) $\int\tan^2 x\ dx$ (iii) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\ dx$

(iv) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\ dx$

26.5 సమాకలన పద్ధతులు

26.5.1 ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సమాకలనం

ఈ విభాగంలో తగిన ప్రతిక్షేపణ ద్వారా కొన్ని సమాకలనులను తెలిపిన ప్రామాణిక రూపాల్లోకి మారుద్దాం.

$\int f(ax+b)\,dx,\ a\neq 0$ లో తగిన ప్రతిక్షేపణ ద్వారా తెలిసిన ప్రామాణిక రూపం.

$\int f(x)\,dx$ లోకి మారుద్దాం.

ఉదాహరణ 26.17 గణించండి

(i) $\int \sin(ax + b)\, dx$ (ii) $\int \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

(iii) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) dx$

సాధన: (i) $\int \sin(ax + b)\, dx$

Put $ax + b = t.$

Then $a = \frac{dt}{dx}$ or $dx = \frac{dt}{a}$

$\therefore \int \sin(ax + b)\, dx = \int \sin t \frac{dt}{a}$ సమాకలన గుణకాన్ని dt తో మార్చగా

$$= \frac{1}{a}\int \sin t\, dt$$

$$= \frac{1}{a}(-\cot t) + C$$

$$= \frac{-\cos(ax + b)}{a} + C$$

(ii) $\int \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

$$7x + \frac{\pi}{4} = t \quad \Rightarrow 7dx = dt$$

$$\therefore \int \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \int \cos t \frac{dt}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{7}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{7}\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

(iii) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) dx$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = t$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{dt}{dx} \qquad \text{లేదా} \quad dx = -2dt$$

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) dx = -2\int \sin t\, dt$$

$$= -2(-\cos t) + C$$

$$= -2\cos t + C$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

ఇదే విధంగా క్రింది ప్రమేయాల సమాకలనులు

$$\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

$$\int \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) dx = -\frac{1}{3}\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$$

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) dx = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) + C$$

$$\int \cos(ax + b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

ఉదాహరణ 26.18 గణించండి

(i) $\int (ax + b)^n dx$, where $n \neq -1$ (ii) $\int \frac{1}{(ax + b)} dx$

సాధన: (i) $\int (ax + b)^n dx$, where $n \neq -1$

$$ax + b = t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dt}{dx} \text{ or } dx = \frac{dt}{a}$$

$$\therefore \int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a}\int t^n \, dt$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)} + C$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{ఇక్కడ } n \neq -1$$

(ii) $\int \frac{1}{(ax+b)} dx$

$$ax + b = t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{a} dt$$

$$\therefore \int \frac{1}{(ax+b)} \, dx = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{a} \log |t| + C$$

$$= \frac{1}{a} \log |ax + b| + C$$

ఉదాహరణ 26.19 గణించండి

(i) $\int e^{5x+7} \, dx$ (ii) $\int e^{-3x-3} \, dx$

సాధన: (i) $\int e^{5x+7} \, dx$

$$5x + 7 = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{5}$$

$$\therefore \int e^{5x+7} \, dx + \frac{1}{5}\int e^t \, dt$$

$$= \frac{1}{5} e^t + C$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x+7} + C$$

(ii) $\int e^{-3x-3}\, dx$

$$-3x - 3 = t \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{-3}\, dt$$

$$\therefore \qquad \int e^{-3x-3}\, dx = -\frac{1}{3}\int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{3}\, e^t + \mathrm{C}$$

$$= -\frac{1}{3}\, e^{-3x-3} + \mathrm{C}$$

అదే విధంగా $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax+b} + \mathrm{C}$

కింది ప్రమేయాలలో $ax + b = t$ ని ప్రతిక్షేపించగా, మారిన (వచ్చిన) సమాకలనులు

$$\int (ax + b)^n\, dx = \frac{1}{a}\frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}, \quad \mathrm{n} \neq -1$$

$$\int \frac{1}{(ax + b)}\, dx = \frac{1}{a}\log|ax + b| + \mathrm{C}$$

$$\int \sin(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + \mathrm{C}$$

$$\int \cos(ax + b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + \mathrm{C}$$

$$\int \sec^2(ax + b)\, dx = \frac{1}{a}\tan(ax + b) + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{cosec}^2(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a}\cot(ax + b) + \mathrm{C}$$

$$\int \sec(ax + b)\, \tan(ax + b)\, dx = \frac{1}{a}\sec(ax + b) + \mathrm{C}$$

$$\int \mathrm{cosec}(ax + b)\, \cot(ax + b)\, dx = -\frac{1}{a}\mathrm{cosec}(ax + b) + \mathrm{C}$$

ఉదాహరణ 26.20 గణించండి.

(i) $\int \sin^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin^3 x\, dx$ (iii) $\int \cos^3 x\, dx$

(iv) $\int \sin 3x \sin 2x\, dx$

సాధన త్రికోణ మితీయ సమానతలనుపయోగించి, దత్త ప్రమేయాలను x యొక్క గుణిజాల sine మరియు cosine లలో వ్యక్తీకరించగా

(i) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx \qquad \left[\because \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) $\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\, dx$

$\left[\because \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x\right]$

$$= \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right] + C$$

(iii) $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} dx \quad \left[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\right]$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sin 3x}{3} + \frac{3}{4}\sin x\, dx + C$$

(iv) $\int \sin 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 3x \sin 2x \, dx$

$\left[\because 2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)\right]$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 5x}{5}\right] + C$$

ఉదాహరణ 26.21: (1) $\int e^{3-8x} dx$ (ii) $\int (4x-5)^3 dx$ లను గణించండి.

(i) $\int e^{3-8x} dx$

$$= \frac{e^{3-8x}}{-8} + C$$

(ii) $\int (4x-5)^3 dx$

$$= \frac{(4x-5)^4}{4} + C$$

ఉదాహరణ 26.22: (i) $\int \cos(x+5) dx$

(ii) $\int \sec(3x+5)\ \tan(3x+5) dx$ లను గణించండి.

(i) $\int \cos(x+5) dx$

$= \sin(x + 5) + C$

(ii) $\int \sec(3x+5)\ \tan(3x+5) dx$

$$= \frac{\sec(3x+5)}{3} + C$$

అభ్యాసం 26.3

1. గణించండి.

(i) $\int \sin(4 - 5x)\, dx$ (ii) $\int \sec^2(2 + 3x)\, dx$

(iii) $\int \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ (iv) $\int \cos(4x+5)\, dx$

(v) $\int \text{cosec}\,(2+5x)\cot(2+5x)\, dx$

2. గణించండి.

(i) $\int \frac{1}{(3-4x)^4}\,dx$ (ii) $\int (x+1)^4\,dx$

(iii) $\int (4-7x)^{10}\,dx$ (iv) $\int \frac{1}{3x-5}\,dx$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{5-9x}}\,dx$ (vi) $\int (2x+1)^2\,dx$ (vii) $\int \frac{1}{x+1}\,dx$

3. గణించండి.

(i) $\int e^{2x+1}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{e^{7+4x}}\,dx$

4. గణించండి. $\int \cos^2 x.dx$

26.5.2 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ రూపంలో ఉన్న ప్రమేయాల సమాకలనం

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \text{ we put } f(x) = t$$

$$f'(x)\,dx = dt$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C$$

$$= \log|f(x)| + C$$

Similarly, $\int [f(x)]^n\ f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$\int f'(ax+b)\,dx = \frac{f(ax+b)}{a} + C$$

ఉదాహరణ **26.23:** $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ $f(x) = x^2+1$

$$f'(x) = 2x$$

$$= \log|1 + x^2| + C$$

ఉదాహరణ 26.24: $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx$ గణించండి. $f(x) = e^x - e^{-x}$

$f'(x) = e^x + e^{-x}$

$= \log | e^x - e^{-x} | + C$

ఉదాహరణ 26.25: $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$ గణించండి.

$= \log | x^2 + x + 1| + C$

అభ్యాసం 26.4

1. గణించండి.

(1) $\int \frac{x}{3x^2 - 2}\, dx$ (2) $\int \frac{2x+9}{x^2+9x+30}\, dx$

(3) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+3}\, dx$ (4) $\int \frac{1}{x(8+\log x)}\, dx$

2. గణించండి.

(1) $\int \frac{e^x}{2+be^x}\, dx$ (2) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx$

26.5.3 ప్రతిక్షేపణ ద్వారా సమాకలనం

ఉదాహరణ 26.21

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \sec x\, dx$ (iii) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\, dx$

(iv) $\int \frac{(1-\sin x)}{(1+\cos x)}\, dx$ (v) $\int \operatorname{cosec}^5 x \cot x\, dx$ (iv) $\int \frac{\sin x}{\sin (x-a)}\, dx$

సాధన : (i) $\int \tan x\, dx \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$

$= -\log |\cos x| + C$ ($\because$ $\cos x$ యొక్క వ్యుత్పనం $-\sin x$)

$= \log \left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$ or $= \log |\sec x| + C$

$\therefore \int \tan x\, dx = \log |\sec x| + C$

ఇంకో విధంగా

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x}$$

$\cos x = t$ అనుకొనిన

$-\sin x\, dx = dt$

$$\therefore \int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t}$$

$$= -\log |t| + C$$

$$= -\log |\cos x| + C$$

$$= \log \left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \log |\sec x| + C$$

(ii) $\int \sec x\, .dx$

$\sec x$ ను సమాకలనం చేయలేము. ఎందుకంటే $\sec x$ స్వయంగా ఏ ప్రమేయం యొక్క అవకలని (వ్యుత్పన్నము) కాదు. కాని $\sec^2 x$ మరియు $\sec^2 x$ విషయంలో వర్తించదు. ఇప్పుడు $\int \sec x\, .dx$ ని ఇలా రాయవచ్చు.

$$\int \sec x \frac{\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\, dx$$

$$= \int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$\sec x + \tan x = t$ అనుకొనిన

$(\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$

$$\therefore \quad \int \sec x\,dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log |t| + C$$

$$= \log |\sec x + \tan x| + C$$

(iii) $$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$\cos x + \sin x = t$ అనుకొనిన

$(-\sin x + \cos x)\,dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \log |t| + C$$

$$= \log |\cos x + \sin x| + C$$

(iv) $$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1+\cos x}\,dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$= \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx + \int \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int \tan\frac{x}{2}\,dx$$

$$\frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\,dx = dt$$

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int \sec^2 t\,dt + 2\int \tan t\,dt$$

$$= \tan t - 2\log|\cos t| + C$$

$$= \tan\frac{x}{2} - 2\log\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

(v) $$\int \operatorname{cosec}^5 x \cot x\,dx = -\int -\operatorname{cosec}^4 x \operatorname{cosec} x \cot x\,dx$$

$\operatorname{cosec} x = t$ అనుకొనిన

$-\text{cosec } x \cot x \, dx = dt$

$$\int \text{cosec}^5 x \cot x \, dx = -\int t^4 dt$$

$$= -\frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{-(\text{cosec } x)^5}{5} + C$$

(vi) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} \, dx$

$x - a = t$

$dx = dt$ మరియు $x = t + a$

$$\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} \, dx = \int \frac{\sin(t+a)}{\sin t} \, dt$$

$$= \int \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a}{\sin t} \, dt$$

($\because$ $\sin(A + B = \sin A \cos B + \cos A \sin B)$

$$= \cos a \int dt + \sin a \int \cot t \, dt$$

($\cos a$ మరియు $\sin a$ స్థిరరాశులు)

$$= \cos a \, . \, t + \sin a \log |\sin t| + C$$

$$= (x - a) \cos a + \sin a \log |\sin(x - a)| + C$$

26.5.4 ప్రత్యేక రూపాలలో ఉన్న బీజీయ ప్రమేయాల సమాకలనుల గణనం

కింది సమాకలనులలో, a ధన వాస్తవ సంఖ్య.

1. **R** మీద $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{Tan}^{-1} \frac{x}{a} + c$ అని చూపిద్దాం.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} dx + c$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot a \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad \text{(ఉపసిద్ధాంతం 6.2.6 నుంచి)}$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

$x = a \tan\theta$ ప్రతిక్షేపణ ద్వారా కూడా ఈ సమాకలనిని గణించవచ్చు.

2. $-a, a$ లు లేని ఏ అంతరంలోనైనా $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ అని చూపిద్దాం.

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right].$$

కనక $$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right] + c = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

3. $\mathbf{R}$ మీద $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ అని చూపిద్దాం.

$\mathbf{R}$ లో ప్రతి x కి $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx$

$$= \frac{1}{a} \cdot a \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

ఇంకా $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) + c.$$

($a > 0$, $\mathbf{R}$ లో ప్రతి x కి $x + \sqrt{x^2 + a^2}$ ధనాత్మకం కనక సమాసం $\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ కి మాపం రాయనక్కరలేదు).

ఈ సమాకలనినే ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ఉపయోగించి కూడా గణించవచ్చు.

ఉదాహరణకు, $\mathbf{R}$ మీద $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ని గణన చేయడానికి, $x = \varphi(\theta) = a \sinh\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$ ని ప్రతిక్షేపిద్దాం.

ఈ ఉదాహరణలో $I = \mathbf{R}$, $J = \mathbf{R}$ అని గ్రహిద్దాం.

$$dx = a \cosh\theta \, d\theta;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \cosh\theta}{a \cosh\theta} d\theta = \int d\theta = \theta + c = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= \log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) + c.$$

(లేదా)

$x = \varphi(\theta) = a \tan\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ప్రతిక్షేపిద్దాం. ఈ సందర్భంలో $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\theta : J \to \mathbf{R}$ అన్వేకం, సంగ్రస్తం. φ, φ^{-1} లు వరసగా వాటి ప్రదేశాల మీద అవకలనీయాలు.

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2\theta + a^2} = a \sec\theta;$$

$$dx = a \sec^2\theta \, d\theta.$$

కనక $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2\theta}{a \sec\theta} d\theta = \int \sec\theta \, d\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + c$

$$= \log\left|\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + c = \log\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}\right) + c.$$

4. $x \in (-a, a)$ అయితే $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + c$ అని చూపిద్దాం.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} + c = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

ఇక్కడ $x = a \sin\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ప్రతిక్షేపణ చేసి కూడా $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ను గణించవచ్చని గమనించండి.

5. $I = (a, \infty)$ లేదా $(-\infty, -a)$ మీద $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ను కనుక్కొందాం.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} + c$$

$$= \begin{cases} \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c, & (a, \infty) \\ -\cosh^{-1}\left(-\frac{x}{a}\right)+c, & (-\infty, -a) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+c, & (a, \infty) \\ -\log\left(\frac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+c, & (-\infty, -a) \quad (6.1.9\ (21)\ \text{నుంచి}) \end{cases}$$

మరో పద్ధతి : $a > 0, (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ మీద ప్రమేయం $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ నిర్వచితం.

$I \subset (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$. అంతరం I మీద సమాకలనిని గణిద్దాం.

$I \subset (a, \infty)$ అనుకొందాం. $x = \varphi(\theta) = a \cosh \theta,\ \theta \in (0, \infty)$ ప్రతిక్షేపిస్తే $\varphi : (0, \infty) \to (a, \infty)$ ద్విగుణ ప్రమేయం, φ, φ^{-1} లు అవకలనీయాలు; $dx = a \sinh \theta\, d\theta$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2\theta - a^2} = a\sqrt{\cosh^2\theta - 1} = a \sinh \theta.$$

కనక (a, ∞) మీద

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a \sinh \theta}{a \sinh \theta}\, d\theta = \int d\theta = \theta + c = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c.$$

ఇప్పుడు $I \subset (-\infty, -a)$ అనుకొందాం.

$x = -y,\ y \in (a, \infty)$ ప్రతిక్షేపిస్తే, $(-\infty, -a)$ మీద

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = -\cosh^{-1}\left(-\frac{x}{a}\right)+c.$$

అతిపరావలయ ప్రమేయాలు (ఇంటర్మీడియట్ గణితశాస్త్రం - I(ఎ)) నుంచి $x > 1$ అయినప్పుడు

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

కనక $x > a$ అయిన

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right).$$

$x < -a$ అయిన $-\frac{x}{a} > 1$.

కనక

$$\cosh^{-1}\left(-\frac{x}{a}\right) = \ln\left(-\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) = -\ln\left(\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right).$$

అందువల్ల

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+c, & \mathrm{I} \subset (a,\infty) \\ \ln\left(\frac{-x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+c, & \mathrm{I} \subset (-\infty,-a) \text{ అయిన} \end{cases}.$$

కనక $\mathrm{I} \subset \mathbf{R} \setminus [-a, a]$ మీద

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\frac{|x+\sqrt{x^2-a^2}|}{a}+c\ .$$

6. $(-a, a)$ మీద $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$ అని చూపిద్దాం.

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అయితే $x = a\sin\theta$ ప్రతిక్షేపిద్దాం.

ఇప్పుడు $dx = a\cos\theta\,d\theta$. కనక

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\ .\ a\cos\theta\ d\theta$$

$$= a^2\int\cos^2\theta\,d\theta = a^2\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\int d\theta + \int \cos 2\theta \, d\theta\right] + c \quad = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \sin\theta \cos\theta\right] + c \quad = \frac{a^2}{2}\left[\text{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right] + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\text{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c.$$

గమనిక : $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ని విభాగ సమాకలనాన్ని ఉపయోగించి కూడా సాధించవచ్చు. (6.2.26(1) చూడండి).

7. $[a, \infty)$ మీద $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$ అని నిరూపిద్దాం.

$\theta \in [0, \infty)$ అయితే $x = a\cosh\theta$ ప్రతిక్షేపిద్దాం.

$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2\theta - a^2} = a\sinh\theta$, $dx = a\sinh\theta\, d\theta$ కనక

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int a\sinh\theta \,.\, a\sinh\theta\, d\theta \quad = a^2\int \sinh^2\theta\, d\theta$$

$$= a^2\int\left(\frac{\cosh 2\theta - 1}{2}\right)d\theta \quad = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sinh 2\theta}{2} - \theta\right] + c$$

$$= \frac{a^2}{2}[\sinh\theta\,\cosh\theta - \theta] + c \quad = \frac{a^2}{2}\left[\sqrt{\cosh^2\theta - 1}\,.\,\cosh\theta - \theta\right] + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\,.\frac{x}{a} - \cosh^{-1}\frac{x}{a}\right] + c$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + c. \quad \text{(6.2.26(2) కూడా చూడండి.).}$$

ఇదే విధంగా $(-\infty, -a]$ మీద, $x = -a\cosh\theta$, $\theta \in [0, \infty)$ ప్రతిక్షేపించి

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(-\frac{x}{a}\right) + c$$ అని చూపవచ్చు.

8. Let us show that

8. **R** మీద $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$ అని చూపిద్దాం.

$x = a \sinh\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$ లేదా $x = a\tan\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ప్రతిక్షేపించి ఇచ్చిన సమాకలనిని గణన చేస్తాం. (6.2.26(3) కూడా చూడండి.).

ఉదాహరణ 26.27 : $I = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ మీద $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ ను గణించండి.

సాధన : $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(3x)^2}}$.

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అయితే $x = \varphi(\theta) = \frac{2}{3}\sin\theta$ ప్రతిక్షేపిద్దాం.

$dx = \frac{2}{3}\cos\theta\, d\theta$ కనక

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{\frac{2}{3}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4-9.\frac{4}{9}\sin^2\theta}} = \int \frac{\frac{2}{3}\cos\theta}{2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int d\theta = \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + c.$$

ఉదాహరణ 26.28: $x \in I = (-a, a)$ కి $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన : $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right)$.

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{a-x}\,dx + \int \frac{1}{a+x}\,dx\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\log|a-x| + \log|a+x|\right] + c = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$$

ఉదాహరణ 26.29: **R** మీద $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన : $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{dx}{4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2\right]} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2}$

$$= \frac{1}{4}\left[2\ \text{Tan}^{-1}\ 2x\right] + c \quad (6.2.18(1)\ \text{నుంచి})$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{Tan}^{-1}\ (2x) + c.$$

ఉదాహరణ 26.30: $(-2, 2)$ మీద $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన : $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx = \text{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$

ఉదాహరణ 26.31: **R** మీద $\int \sqrt{4x^2+9}\ dx$ ను గణించండి.

సాధన : $\int \sqrt{4x^2+9}\ dx = 2\int \sqrt{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}\,dx + c$

$$= 2\left[\frac{x\sqrt{(\frac{3}{2})^2+x^2}}{2} + \frac{(\frac{3}{2})^2}{2}\ \text{sinh}^{-1}\left(\frac{x}{(\frac{3}{2})}\right)\right] + c$$

(6.2.18(8) నుంచి)

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\ \text{sinh}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c.$$

ఉదాహరణ 26.32: $\left[\frac{5}{3}, \infty\right)$ మీద $\int \sqrt{9x^2-25}\ dx$ ను గణించండి.

సాధన: $\int \sqrt{9x^2-25}\ dx = 3\int \sqrt{x^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2}\ dx$

$$= 3\left[\frac{x\sqrt{x^2-(\frac{5}{3})^2}}{2} - \frac{(\frac{5}{3})^2}{2}\ \text{cosh}^{-1}\left(\frac{x}{(\frac{5}{3})}\right)\right] + c$$

(6.2.18(7)నుంచి)

$$= \frac{1}{2}\ x\sqrt{9x^2-25} - \frac{25}{6}\ \text{cosh}^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + c.$$

ఉదాహరణ 26.33: $\left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ మీద $\int \sqrt{16-25x^2}\ dx$ ను గణించండి.

సాధన : $\int \sqrt{16-25x^2}\,dx = 5\int \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 - x^2}\,dx$

$$= 5\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 - x^2} + \frac{(\frac{4}{5})^2}{2}\,\text{Sin}^{-1}\frac{x}{(\frac{4}{5})}\right] + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{16-25x^2} + \frac{16}{10}\,\text{Sin}^{-1}\left(\frac{5x}{4}\right) + c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{16-25x^2} + \frac{8}{5}\,\text{Sin}^{-1}\left(\frac{5x}{4}\right) + c.$$

26.5.5 a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు $a \neq 0$ అయితే $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ రూపంలో ఉన్న సమాకలనుల గణనం

సాధన నియమం:

$ax^2 + bx + c$ ను $a[(x+\alpha)^2 + \beta^2]$ రూపంలోనికి సూక్ష్మీకరించి $t = x + \alpha$ ప్రతిక్షేపణ ద్వారా సమాకలనం చేయాలి..

ఉదాహరణ 26.34: $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ ను గణించండి.

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\text{Hence} \quad \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx \qquad t = x + \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt \qquad dt = dx.$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \tan^{-1}\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

ఉదాహరణ 26.35: $\int \frac{1}{3x^2+x+1}\,dx$ ను గణించండి.

$$3x^2+x+1 = 3\left[x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right]$$

$$= 3\left[x^2+\frac{x}{3}+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2\right]$$

$$\text{Hence } \int \frac{1}{3x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}dx \qquad t = x+\frac{1}{6},\ dt = dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}/6}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{11}/6}\right)+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)+C$$

26.5.6 ***a, b, c*** **లు వాస్తవ సంఖ్యలు,** $a \neq 0$ **అయితే**

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ఉన్న సమాకలనుల గణనం

సాధన నియమం:

సందర్భం I : $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ అయితే $ax^2 + bx + c$ ని $a[(x + \alpha)^2 + \beta^2]$ రూపంలోకి సూక్ష్మీకరించి సమాకలనం చేయడం.

సందర్భం II: $a < 0, b^2 - 4ac > 0$ అయితే $ax^2 + bx + c > 0$ ని $ax^2 + bx + c$ ని $(-a)$ $[\beta^2 - (x + \alpha)^2]$ రూపంలోకి సూక్ష్మీకరించి సమాకలనం చేయడం.

ఉదాహరణ 26.36 : $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3x^2+1}}\,dx$ ను గణించండి.

$$2x-3x^2+1 = (-3)\left[x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right]$$

$$= (-3)\left[x^2-\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right]$$

$$= (-3)\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

$$= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

Hence $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3x^2+1}}\,dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right]}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)+C$$

ఉదాహరణ **26.37:** $\int \sqrt{1+3x-x^2}\,dx$ ను గణించండి.

$$1+3x-x^2 = (-1)\left[x^2-3x-1\right]$$

$$= (-1)\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-1\right]$$

$$= (-1)\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{Hence } \int \sqrt{1+3x-x^2}\;dx = \int \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\;dx$$

$$= \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{(\sqrt{13}/2)^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-3/2}{\sqrt{3}/2}\right)+C$$

$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$$

26.5.7 *a, b, c, p, q* లు వాస్తవ సంఖ్యలు $a \neq 0, p \neq 0$ అయితే

(i) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ (ii) $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$

(iii) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\;dx$

సాధన నియమం

$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$ రూపంలో రాసి, సమాకలనం చేయండి.

ఉదాహరణ 26.37: $\int \frac{x+1}{x^2+3x+12}dx$ ను గణించండి.

$x+1 = \text{A}.\frac{d}{dx}(x^2+3x+12)+\text{B}$ అని రాస్తం.

$x + 1 = \text{A}(2x + 3) + \text{B}.$

x యొక్క ఒక ఘాతం గల గుణకాలను పై సమీకరణం రెండు వైపులా పోలిస్తే

$$\text{A} = \frac{1}{2},\ \text{B} = \frac{-1}{2}$$

కనుక

$$x+1 = \frac{1}{2}(2x+3) - \frac{1}{2}$$

ఇప్పుడు $\int \frac{x+1}{x^2+3x+12}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+12)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+3x+12)}dx$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3x+12| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2}dx + \text{C}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3x+12| - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{39}}\tan^{-1}\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{39}/2}\right)+\text{C}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3x+12| - \frac{1}{\sqrt{39}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{39}}\right)+\text{C}$$

ఉదాహరణ 26.38: $\int (3x-2)\sqrt{2x^2-x+1}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన : $(3x-2) = \text{A}\frac{d}{dx}(2x^2-x+1)+\text{B} = \text{A}(4x-1)+\text{B}.$

పై సమీకరణం రెండు వైపులా x గుణకాలను పోలిస్తే, $\text{A} = \frac{3}{4},\ \text{B} = -\frac{5}{4}.$

కనక $\quad 3x-2 = \frac{3}{4}(4x-1) - \frac{5}{4}.$

అందువల్ల $\int (3x-2)\sqrt{2x^2-x+1}\,dx = \int\left[\frac{3}{4}(4x-1)-\frac{5}{4}\right]\sqrt{2x^2-x+1}\,dx$

$$= \frac{3}{4}\int (4x-1)\sqrt{2x^2-x+1}\,dx - \frac{5}{4}\int\sqrt{2x^2-x+1}\,dx + c$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(2x^2-x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{4}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\,dx + c$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2-x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}} + \frac{7}{32}\sinh^{-1}\left(\frac{(x-\frac{1}{4})}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)\right] + c$$

(6.2.26(3) నుంచి)

$$= \frac{1}{2}(2x^2-x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}} - \frac{35}{64\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c.$$

ఉదాహరణ 26.39: $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx$ ను గణించండి.

సాధన : $2x+5 = A\frac{d}{dx}(x^2-2x+10)+B = A(2x-2)+B.$

x గుణకాలను పై సమీకరణం రెండువైపులా పోలిస్తే $A=1,\ B=7$ కనక

$2x+5=(2x-2)+7.$ అందువల్ల

$$\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx = \int\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx + 7\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2-2x+10} + 7\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+3^2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x^2-2x+10} + 7\sinh^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + c.$$

26.5.8 a, b, p, q లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $a \neq 0,\ p \neq 0$ అయితే

$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px+q}}$ రూపంలో ఉన్న సమాకలనుల గణనం

సాధన నియమం : $t = \sqrt{px+q}$ ప్రతిక్షేపించి, సమాకలనం చేస్తాం.

ఉదాహరణ 26.40 : $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+4}}$ ను గణించండి.

సాధన : $t = \sqrt{x+4}$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే $dt = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}\,dx$.

$t^2 = x+4, \quad x+5 = t^2+1$ కనక

$$\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+4}} = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2 \operatorname{Tan}^{-1} t + c = 2 \operatorname{Tan}^{-1}(\sqrt{x+4}) + c.$$

26.5.9 a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $b \neq 0$ అయితే

(i) $\int \frac{1}{a+b\cos x}dx$ **(ii)** $\int \frac{1}{a+b\sin x}dx$

రూపంలో ఉన్న సమాకలనుల గణనం

సాధన నియమం

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}, \quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ ప్రతిక్షేపిస్తే, $dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx.$

అందువల్ల $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$

$$a + b\cos x = a + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{a(1+t^2)+b(1-t^2)}{1+t^2}.$$

కనక $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{(a+b\cos x)\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{2}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}\,dt$

$$= 2\int \frac{dt}{(a+b)+(a-b)t^2}.$$

తెలిసిన పద్ధతుల ద్వారా దీని సమాకలనం కనుక్కొంటాం.

(ii) లోని సమాకలనాన్ని, ఇదేవిధంగా $\sin x$ బదులు $\frac{2t}{1+t^2}$ సమాసాన్ని ఉపయోగించి గణిస్తాం.

ఉదాహరణ 26.41: $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$ ను గణించండి.

సాధన : $t = \tan\frac{x}{2}$ ప్రతిక్షేపిస్తే $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt.$

ఇప్పుడు $\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{(5+4\cos x)\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{2dt}{(5+4(\frac{1-t^2}{1+t^2}))\ (1+t^2)}$

$$= 2\int \frac{dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{9+t^2}$$

$$= \frac{2}{3}\ \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)+c = \frac{2}{3}\ \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{3}\right)+c.$$

ఉదాహరణ 26.42: $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x+6}$ ను గణించండి.

సాధన : $t = \tan\frac{x}{2}$ ప్రతిక్షేపిస్తే $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dt.$

ఇప్పుడు $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x+6} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{(3\cos x+4\sin x+6)\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}\,dx$

$$= \int \frac{2dt}{(3\,(\frac{1-t^2}{1+t^2})+4\frac{2t}{1+t^2}+6)\ (1+t^2)} = \int \frac{2dt}{3\,(1-t^2)+8t+6(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2+8t+9} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+\frac{4}{3})^2+\frac{11}{9}}+c$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{11}} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{(t+\frac{4}{3})}{(\frac{\sqrt{11}}{3})}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+4}{\sqrt{11}}\right) + c.$$

26.5.10 a, b, c, d, e, f లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $d \neq 0$, $e \neq 0$ అయితే $\int \frac{a\cos x + b\sin x + c}{d\cos x + e\sin x + f}\,dx$ రూపంలో ఉన్న సమాకలనుల గణనం

సాధన నియమం

$(a\cos x + b\sin x + c) = \lambda[d\cos x + e\sin x + f]' + \mu[d\cos x + e\sin x + f] + \gamma$ అయ్యేటట్లు వాస్తవ సంఖ్యలు λ, μ, γ లను కనుక్కొని, ఈ సమాసాన్ని సమాకలనిలో ప్రతిక్షేపించి, దత్త సమాకలనిని గణన చేస్తాం.

ఉదాహరణ 26.43: $\int \frac{dx}{d + e\tan x}$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{1}{d + e\tan x} = \frac{\cos x}{d\cos x + e\sin x}$.

$$\cos x \equiv \lambda(d\cos x + e\sin x)' + \mu(d\cos x + e\sin x) + \gamma$$

$$\equiv \lambda(-d\sin x + e\cos x) + \mu(d\cos x + e\sin x) + \gamma$$

అయ్యేటట్లు λ, μ, γ లను కనుక్కొందాం.

పై సమీకరణానికి రెండు వైపులా గుణకాలను పోలిస్తే ,

$$\lambda e + \mu d = 1,\ -2d + \mu c = 0,\ \gamma = 0.$$

ఈ సమీకరణాలను సాధిస్తే

$$\lambda = \frac{e}{d^2 + e^2},\ \mu = \frac{d}{d^2 + e^2},\ \gamma = 0.$$

అందువల్ల

$$\int \frac{dx}{d + e\tan x} = \lambda \int \frac{(d\cos x + e\sin x)'}{(d\cos x + e\sin x)}\,dx + \mu \int \frac{d\cos x + e\sin x}{d\cos x + e\sin x}\,dx + c_1$$

$$= \lambda \log|d\cos x + e\sin x| + \mu x + c_1.$$

$$= \frac{1}{d^2+e^2}[dx + e\log|d\cos x + e\sin x|] + c_1.$$

ఉదాహరణ 26.44:: $\int \frac{\sin x}{d\cos x + e\sin x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{d\cos x + e\sin x}\,dx$ *లను గణించండి.*

సాధన : $A_1 = \int \frac{\sin x}{d\cos x + e\sin x}\,dx$, $A_2 = \int \frac{\cos x}{d\cos x + e\sin x}\,dx$ అనుకొందాం.

ఇప్పుడు $eA_1 + dA_2 = \int \frac{e\sin x + d\cos x}{d\cos x + e\sin x}\,dx = \int dx = x + c_1.$ ...(i)

$-dA_1 + eA_2 = \int \frac{(-d\sin x + e\cos x)}{d\cos x + e\sin x}\,dx = \log|d\cos x + e\sin x| + c_2.$ ...(ii)

(i), (ii)ల నుంచి

$$A_1 = \frac{1}{d^2+e^2}[ex - d\log|d\cos x + e\sin x|] + c_3, \text{ ఇక్కడ } c_3 = \frac{ec_1 - dc_2}{d^2+e^2};$$

$$A_2 = \frac{1}{d^2+e^2}[dx + e\log|d\cos x + e\sin x|] + c_4, \text{ ఇక్కడ } c_4 = \frac{dc_1 + ec_2}{d^2+e^2}.$$

ఉదాహరణ 26.45: $\int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1}\,dx$ *ను గణించండి.*

సాధన : $\cos x + 3\sin x + 7 = \lambda(\cos x + \sin x + 1)' + \mu(\cos x + \sin x + 1) + \gamma$

$= \lambda(-\sin x + \cos x) + \mu(\cos x + \sin x + 1) + \gamma$

$= (\lambda + \mu)\cos x + (-\lambda + \mu)\sin x + (\gamma + \mu)$

అయ్యేటట్లు λ, μ, γ లను కనుక్కొందాం.

పై సమీకరణానికి రెండువైపులా గుణకాలను పోలిస్తే,

$\lambda + \mu = 1; \quad -\lambda + \mu = 3; \quad \mu + \gamma = 7.$

ఈ సమీకరణాలను సాధిస్తే, $\lambda = -1; \quad \mu = 2; \quad \gamma = 5.$

అందువల్ల $\int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1}\,dx$

$$= -\int \frac{(\cos x + \sin x + 1)'}{\cos x + \sin x + 1}\,dx + 2\int \frac{\cos x + \sin x + 1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx + 5\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx + c$$

$$= -\log|\cos x + \sin x + 1| + 2x + 5\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx + c. \qquad \text{... (A)}$$

ఇప్పుడు $\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx$ ను గణిద్దాం.

$$\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{(1+\tan\frac{x}{2})}\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{1+t} \quad (t = \tan\frac{x}{2} \text{ ప్రతిక్షేపిస్తే})$$

$$= \log|1+t| = \log|1+\tan\frac{x}{2}|.$$

కనక (A) నుంచి,

$$\int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1}dx = -\log|\cos x + \sin x + 1| + 2x + 5\log|1+\tan\frac{x}{2}| + c.$$

అభ్యాసం 26.5

1. గణించండి.

(i) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x + 5}dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$ (iv) $\int \sqrt{3+8x-3x^2}\,dx$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}dx$

(vi) $\int \frac{1}{3x^2+6x+21}dx$

2. గణించండి.

(i) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

(ii) $\int (6x+5)\sqrt{6-2x^2+x}\,dx$

(iii) $\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

(iv) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ on $(-1,\ 3)$

(v) $\int \sqrt{\frac{5-x}{x-2}}\,dx$ on $(2,\ 5)$

(vi) $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,dx$ on $(-1,\ \infty)$

(vii) $\int \frac{1}{(2x+3)\sqrt{x+2}}\,dx$ on $I \subset (-2,\ \infty) - \left(\frac{-3}{2}\right)$

3. గణించండి.

(i) $\int \frac{9\cos x - \sin x}{4\sin x + 5\cos x}\,dx$

(ii) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx$

(iii) $\int \frac{1}{4+5\sin x}\,dx$

(iv) $\int \frac{1}{4\cos x+3\sin x}\,dx$

(v) $\int \frac{1}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}\,dx$

(vi) $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

(vii) $\int \frac{2\sin x+3\cos x+4}{3\sin x+4\cos x+5}\,dx$

26.6 విభాగ సమాకలనం

అవకలనం చేయడంలో నీవు నేర్చుకొనిన విధంగా (లబ్ధసూత్రం)

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}(g) + g\frac{d}{dx}(f)$$

$$f\frac{d}{dx}(g) = \frac{d}{dx}(fg) - g\frac{d}{dx}(f)$$

లేదా $$f\frac{d}{dx}(g) = \frac{d}{dx}(fg) - g\frac{d}{dx}(f)$$

$f\frac{d}{dx}(fg)\,dx = fg$ అని నీకు తెలుసు.

(1) ని సమాకలనం చేయగా

$$\int f\frac{d}{dx}(g)\,dx = \int \frac{d}{dx}(fg)\,dx - \int g\frac{d}{dx}(f)\,dx$$

$$= fg - \int g\frac{d}{dx}(f)\,dx$$

$f = u(x)$: $\frac{d}{dx}(g) = v(x)$

$$\int u(x)\,v(x)\,dx$$

$$= u(x)\,.\int v(x)\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(u(x))\int v(x)\,dx\right]dx$$

I ప్రమేయం. II ప్రమేయ సమాకలనం – $\int$[I ప్రమేయ వ్యుత్పన్నం (అవకలని) . II ప్రమేయ
A B సమాకలనం]

ఇక్కడ ముఖ్యాంశమేమనగా, I మరియు II, ఈ రెండు లబ్ధ ప్రమేయాలలో ఏ ప్రమేయాన్ని I గాను, II గాను ఎన్నుకోవాలో సూచిస్తున్నాం. పై ఫలితంలో B విభాగం అసలు ఉన్న విషయాన్ని తెలుపుతుంది. మొదటిగా I ప్రమేయాన్ని ఎన్నుకోవాలి. ఎందుకంటే అవకలనం చేస్తూ పోతుంటే తరువాత వచ్చే పదాలు స్థిరపదం వచ్చే వరకు ఘాతం తగ్గుతూ పోతుంది.

సమాకలనం చేయవలసిన ప్రశ్నలలో $x\sin x$, $x\cos^2 x$, $x^2 e^x$ వలె ఉన్నప్పుడు

(1) మొట్ట మొదటి ప్రమేయంగా బీజీయ ప్రమేయాన్ని తీసుకోవాలి.

(2) బీజీయ ప్రమేయం లేనప్పుడు, B యొక్క లబ్ధమును సూక్ష్మీకరించే ప్రమేయాన్ని చూసుకోవాలి. దాని కొరకు మొదటి ప్రమేయానికి ప్రాముఖ్యతనిచ్చి ఒక క్రమ పద్ధతిలో ఎన్నుకోవాలి.

(i) విలోమ ప్రమేయం (ii) సంవర్గమాన ప్రమేయం

(iii) త్రికోణమితీయ ప్రమేయం (iv) ఘాత (ఘాతిక) ప్రమేయం.

మొదటి ప్రమేయ ఎంపికకు సంబంధించి ఈ కింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలు మంచి అభ్యాసమును చేకూర్చగలవు.

	I ప్రమేయం	II ప్రమేయం
1. $\int x \cos x \, dx$	x (being algebraic)	$\cos x$
2. $\int x^2 e^x \, dx$	x^2 (being algebraic)	e^x
3. $\int x^2 \log x \, dx$	$\log x$	x^2
4. $\int \frac{\log x}{(1+x^2)} \, dx$	$\log x$	$\frac{1}{(1+x)^2}$
5. $\int x \sin^{-1} x \, dx$	$\sin^{-1}x$	x
6. $\int \log x \, dx$	$\log x$	1 (In single function of logarithm and inverse trigonometric we take unity as II function)
7. $\int \sin^{-1}x \, dx$	$\sin^{-1}x$	1

ఉదాహరణ 26.46:

$\int x \cos dx$ ను గణించండి.

సాధన: బహుపది x (బీజీయ ప్రమేయం)ను మొదటి ప్రమేయంగాను మరియు త్రికోణమితీయ ప్రమేయం $\cos x$ ను రెండవ ప్రమేయంగాను తీసుకోవాలి.

$$\int \underset{\text{I}}{x} \underset{\text{II}}{\cos x} \, dx = x \int \cos x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) . \int \cos x \, dx \right] dx$$

(I ప్రమేయం × II ప్రమేయ సమాకలనం $-\int [\frac{d}{dx}$ (I ప్రమేయం). $\int$ (II ప్రమేయం) $dx] \, dx$)

$$= x \sin x - \int 1 . \sin x \, dx$$

$= x \sin x - [-\cos x] + c$

$= x \sin x + \cos x + c$

ఉదాహరణ 26.47:

$\int x^2 \sin x \, dx$ ను గణించండి

సాధన: బీజీయ ప్రమేయం x^2 ను I ప్రమేయంగాను, $\sin x$ ను II ప్రమేయంగాను తీసుకొంటే,

$$\int \underset{\text{I}}{x^2} \underset{\text{II}}{\sin x} \, dx = x^2 \int \sin x - \int \left[\frac{d}{dx}(x^2) \int \sin x \, dx \right] dx$$

$$= -x^2 \cos x - 2\int x(-\cos x)\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx \qquad ..(1)$$

మరల $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$

(2)ని (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\int x^2 \sin x \, dx = x^2 \cos x + 2[x \sin x + \cos x] + C$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

ఉదాహరణ 26.48:

$\int x^2 \log x \, dx$ ను గణించండి

సాధన: ప్రాముఖ్యతను బట్టి $\log x$ ను మొదటి ప్రమేయంగా తీసుకో

$$\int \underset{\text{I}}{\log x} \; \underset{\text{II}}{x^2} \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{1}{x} . \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} \right) + C$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C .$$

ఉదాహరణ **26.49:**

$\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$ ను గణించండి

సాధన : $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx = \int \log x \, \frac{1}{(1+x)^2} dx$

$$= \int \log x \left(-\frac{1}{1+x}\right) dx - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{1+x}\right) dx$$

$$= \frac{-\log x}{1+x} + \int \frac{1}{x(1+x)} dx$$

$$= \frac{-\log x}{1+x} + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right] dx$$

$$= \frac{-\log x}{1+x} + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \frac{-\log x}{1+x} + \log|x| - \log|1+x| + C$$

$$= \frac{-\log x}{1+x} + \log\left|\frac{x}{1+x}\right| + C$$

ఉదాహరణ **26.50**

$\int x\, e^{2x}\, dx$ ను గణించండి

సాధన : $\int x\, e^{2x}\, dx = x\frac{e^{2x}}{x} - \int 1.\frac{e^{2x}}{2} dx$

$$= x\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{x}\right) + C$$

$$= x\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

ఉదాహరణ 26.51

$\int \sin^{-1} x\ dx$ ను గణించండి

సాధన : $\int \sin^{-1} x\ dx = \int \sin^{-1} x.1\ .\ dx$

$$= x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x2}}dx$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x^2 = t$$

$$\Rightarrow \quad -2x\ dx = dt$$

$$\Rightarrow \quad x\ dx = \frac{-1}{2}dt$$

$$\therefore \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= -\sqrt{t} + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\therefore \quad \int \sin^{-1} x\ dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

అభ్యాసం 26.6

1. (a) $\int x\sin x\,dx$ (b) $\int (1+x^2)\cos 2x\ dx$ (c) $\int x\sin 2x\ dx$
2. (a) $\int x\tan^2 x\ dx$ (b) $\int x^2\sin^2 x\ dx$
3. (a) $\int x^3\log 2x\ dx$ (b) $(1-x^2)\log x\ dx$ (c) $\int (\log x)^2\ dx$
4. (a) $\int \frac{\log x}{x^n}dx$ (b) $\int \frac{\log(\log x)}{x}\ dx$
5. (a) $\int x^2\ e^{3x}\ dx$ (b) $\int x\ e^{3x}\ dx$

6. (a) $\int x(\log x)^2\,dx$

7. (a) $\int \sec^{-1} x\,dx$ (b) $\int x\cot^{-1} x\,dx$

26.7 సమాకలన $\int e^x\,[f(x)+f'(x)]\,dx$ రూపం

$f(x)$ యొక్క వ్యుత్పన్నం $f'(x)$.

(అవకలనం)

ఇచ్చిన సమాకలని గణనానికి, విభాగ సమాకలన సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.

సాధన : $e^x(f(x)+C$ వస్తుంది.

ఉదాహరణకు $\int e^x\left[\tan x+\log\sec x\right]dx$

$$f(x)=\log\sec x$$

అప్పుడు $$f'(x)=\frac{\sec x\,\tan x}{\sec x}=\tan x$$

(1)ని తిరిగి రాయగా

$$\int e^x\left[f'(x)+f(x)\right]dx=e^x\,(f(x))+C=e^x\log\sec x+C$$

కింది విధంగా గణించవచ్చు

$$\int e^x\left[\tan x+\log\sec x\right]dx=\int \underset{\text{I}}{e^x}\ \underset{\text{II}}{\tan x}\,dx+\int e^x\log\sec x\,dx$$

$$=e^x\log\sec x-\int e^x\log\sec x\,dx+\int e^x\log\sec x\,dx$$

$$=\int e^x\log\sec x+C$$

ఉదాహరణ 26.52 కింది వాటిని గణించండి

(a) $\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ (b) $\int e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$

(c) $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$ (d) $\int e^x\left[\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right]dx$

సాధన :

(a) $\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int e^x\left[\frac{1}{x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx = e^x\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\int e^x\left(\frac{1+x\ \log\ x}{x}\right)dx = \int e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)dx$

$= \int e^x\left(\log x + \frac{d}{dx}(\log x)\right)dx$

$= e^x\ \log x + C$

(c) $\int \frac{x\ e^x}{(x+1)^2}\ dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\ e^x\ dx$

$= \int e^x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$= \int e^x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)}\right)\right)dx$

$= e^x\left(\frac{1}{x+1}\right)+C$

(d) $\int e^x\left[\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right]dx = \int e^x\left[\frac{1+2\ \sin\frac{x}{2}\ \cos\ \frac{x}{2}}{2\ \cos^2\ \frac{x}{2}}\right]dx$

$= \int e^x\left[\frac{1}{2}\sec^2\ \frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right]dx$

$= \int e^x\left[\tan\frac{x}{2}+\ \frac{d}{x}\ \left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]dx$

$= e^x\ \tan\frac{x}{2}+C.$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

అభ్యాసం 26.7

గణించండి

1. (a) $\int e^x \sec x \left[1 + \tan x\right] dx$ (b) $\int e^x \left[\sec x + \log\left|\sec x + \tan x\right|\right] dx$

2. (a) $\int \frac{x-1}{x^2} e^x \, dx$ (b) $\int e^x \left(\sin^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

3. $\int e^x \frac{(x-1)}{(x+1)^3} dx$ 4. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

5. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$ 6. $\int e^x \sin 2x \, dx$

26.8 పాక్షిక భిన్నాలను ఉపయోగించి సమాకలనం చేయడం

సమాకలనానికి సంబంధించి అనేక పద్ధతులు ఇప్పటి దాకా నేర్చుకొని యున్నారు. ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి గాని, విభాగ సమాకలన పద్ధతిగాని పెద్దగా ఉపయోగపడని సమస్యలు $\frac{4x+5}{x^2+x+6}$ లాంటివి ఇంకా ఉన్నాయి. ఇటువంటి వాటికి పాక్షిక భిన్నాల సమాకలన పద్ధతి ఎక్కువ సహాయకారిగా ఉంటుంది.

అకరణీయ క్రమభిన్నం $\frac{p(x)}{q(x)}$ ల వంటి వాటిలో హారం $q(x)$ను కారణాంకములుగ విభజించి, అకరణీయ ప్రమేయాల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు. అటువంటి భిన్నాలను "పాక్షిక భిన్నాలు"గా పిలుస్తాం. పాక్షిక భిన్నాన్ని సులువుగా సమాకలనం చేయబడే చిన్న భిన్నాల మొత్తంగా విడదీస్తాం.

ఉదాహరణకు

$$\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1} = \frac{8x+7}{(x+2)\,(x-1)} = \frac{8x+7}{x^2+x-2}$$

ఇచ్చట $\frac{3}{x+2}, \frac{5}{x-1}$ లను $\frac{8x+7}{x^2+x-2}$ యొక్క పాక్షిక భిన్నాలుగా పిలుస్తాం.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ఒక క్రమభిన్నం అయితే $g(x)$ ను వాస్తవ కారణాంకాలుగా విడదీస్తాం.

(a) $(ax+b)$ వంటి పునరావృతం కాని సమఘాత కారణాంకం ఉంటే దానికి అనుగుణంగా $\frac{A}{ax+b}$ గా రాస్తాం.

(b) $(ax+b)^2$ ని రెండు పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా తీసుకుంటే $\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}$ వలె $(ax+b)^3$ ని మూడు పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా తీసుకుంటే, వాటి విభజన

$$\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3} \text{ గా}$$

అలాగే

(c) కారణాంకాలుగా విడదీయలేని వర్గబహుపది ax^2+bx+c ని $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ రూపంలో పాక్షిక భిన్నాన్ని రాస్తాం.

క్రమభిన్నం $\frac{f(x)}{g(x)}$ లో $g(x)$ ని వాస్తవ కారణాంకాలుగా విభజించగలిగినప్పుడు, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ను ఈ కింది విధంగా రాయవచ్చు.

హారములోని కారణాంకం	తదనుగుణ పాక్షిక భిన్నాలు
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^2$	$\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}$
$(ax+b)^3$	$\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^2$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

ఇచ్చట A, B, C, D లు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకాలు. అకరణీయ ప్రమేయంలోని హారంలో ఉన్న వర్గ సమాసాన్ని ఏకఘాత కారణాంకాలుగా విభజించి, సమాకలనం చేయడానికి ఉపక్రమించాలి.

ఉదాహరణ 26.53: $\int \frac{2x+5}{x^2-x-2}dx$ ను గణించండి.

సాధన : $\frac{2x+5}{x^2-x-2} = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$

$$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

రెండు వైపులా $(x-2)(x+1)$ తో గుణించగా

$$2x+5 = A(x+1) + B(x-2)$$

$x = 2, \Rightarrow 9 = 3A$ లేదా $A = 3$

$x = -1, \Rightarrow 3 = -3B$ లేదా $B = -1$

(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+5}{x^2-x-2}dx = \int \frac{3}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 3\log|x-2| - \log|x+1| + C$$

ఉదాహరణ 26.54: (a) $\int \frac{x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx$ (b) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}dx$ ను గణించండి.

సాధన : (a) $\frac{x^2-x-1}{x^3-x^2-6x} = \frac{x^2-x-1}{x(x-3)(x+2)}$

$$\therefore \quad \frac{x^2-x-1}{x(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}$$

రెండు వైపులా $x(x-3)(x+2)$, తో గుణించగా

$$x^2 - x - 1 = A(x-3)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-3)$$

$x = 3 \Rightarrow 15B = 5$ లేదా $B = \frac{1}{3}$

$x = 0 \Rightarrow -6A = -1$ లేదా $A = \frac{1}{6}$

$x = -2 \Rightarrow 10C = 5$ లేదా $C = \frac{1}{2}$

ఈ విలువలను (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\frac{x^2 - x - 1}{x(x-3)(x+2)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{3(x+3)} + \frac{1}{2(x+2)}$$

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - 6x}\,dx = \int \frac{1}{6x}\,dx + \int \frac{1}{3(x-3)}\,dx + \int \frac{1}{2(x+2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\log|x| + \frac{1}{3}\log|x-3| + \frac{1}{2}\log|x+2| + C$$

(b) $$\frac{1}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

రెండు వైపులా $(x^2-1)(x+1)$, తో గుణిస్తే

$$1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

$x = 1$, అనుకుంటే we get $A = \frac{1}{4}$ వస్తుంది

$x = -1$ తీసుకొంటే $C = -\frac{1}{2}$ వస్తుంది

$$0 = A + B$$

$$B = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \int \frac{1}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \frac{1}{4(x-1)}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + C$$

ఉదాహరణ 26.55: $\int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}$ ను గణించండి.

సాధన : $I = \int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\tan\theta(1+\tan^2\theta)}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$

$$= \int \frac{\tan\theta\sec^2\theta)}{1+\tan^3\theta}\,d\theta$$

$\tan\theta = t$, then $\sec^2\theta\, d\theta = dt$

$\therefore$ $$I = \int \frac{t\,dt}{1+t^3} = \int \frac{t\,dt}{(1+t)(1-t+t^2)}$$

$$\frac{t}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2}$$

అయితే $t = A(1-t+t^2) + (Bt+C)(1+t)$

t యొక్క గుణకాలను పోలిస్తే,

$$A + B = 0, -A + B + C = 1, A + C = 0$$

$\Rightarrow$ $A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{1-t+t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t} + \frac{1}{6}\int\frac{2t+2}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t} + \frac{1}{6}\int\frac{(2t-1)+3}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t} + \frac{1}{6}\int\frac{(2t-1)}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\log|1+t| + \frac{1}{6}\log|t^2-t+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\log|1+t| + \frac{1}{6}\log|t^2-t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\log|1+\tan\theta| + \frac{1}{6}\log|\tan^2\theta-\tan\theta+1|$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

అభ్యాసం 26.8

కింది వాటిని గణించండి.

1. (a) $\int\frac{x+1}{(x-2)\,(x-3)}\,dx$ (b) $\int\frac{x}{x^2-16}\,dx$

2. (a) $\int\frac{x^3}{x^2-4}\,dx$ (b) $\int\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

3. $\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}\,dx$

4. (a) $\int\frac{\sin x}{\sin 4x}\,dx$ (b) $\int\frac{1-\cos\,x}{\cos x(1+\cos x)}\,dx$

26.9 లఘూకరణ సూత్రాలు

చాలా ప్రమేయాల సమాకలనులను, తెలిపిన సమాకలన ప్రామాణిక రూపాలలో ఏదో ఒకదానికి సూక్ష్మీకరించలేం. కొన్ని సందర్భాలలో ఈ సమాకలనులను, ప్రత్యక్షంగా సమాకలనమయ్యే లేదా అసలైన ప్రమేయం కంటె సులభంగా సమాకలనం చేయగలిగిన ప్రమేయ బీజీయ సమాసంతో సంధానం చేయవచ్చు. అట్లా సంధానం చేసే భీజీయ సంబంధాలను "లఘూకరణ సూత్రాలు" అంటాం. ఈ సూత్రాలు సమాకలనాన్ని అదే రకమైన సమాకలనంతో గాని, తక్కువ తరగతి సమాకలనంతో గానీ, సులభంగా సమాకలనం చేయగలిగిన సమాకలనితో గానీ సంధానం చేస్తుంది. ఈ విభాగంలో పారంపరిక లఘూకరణ సమాకలన విధానాన్ని వివరిస్తాం.

26.9.1 $\int x^n e^{ax}\,dx$ కు లఘూ కరణ సూత్రం, n ధన పూర్ణాంకం

$I_n = \int x^n e^{ax}\,dx$ అనుకొందాం

విభాగ సమాకలన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, సమాకలన స్థిరాంకాన్ని కుడివైపు సమాకలనిలో ఇమడ్చగా

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \int n\, x^{n-1} \frac{e^{ax}}{a}\,dx$$

$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

దీనిని $\int x^n e^{ax}\,dx$ కు 'లఘూకరణ సూత్రం' అంటాము. ఇప్పుడు I_{n-1}, I_{n-2} తో ఇదే విధంగా సంధానం చేయడం జరుగుతుంది. పారంపరిక లఘూకరణలో I_n చివరిగా I_0 పై ఆధారపడుతుంది.

ఇక్కడ $I_0 = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$

ఉదాహరణ 26.56 : $\int x^3\ e^{5x}\ dx$ ను గణించండి.

సాధన: పై లఘుకరణ సూత్రంలో $a = 5$ గా తీసుకొని, వరసగా $n = 3, 2, 1$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$$I_3 = \int x^3\ e^{5x}\ dx = \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5} I_2$$

$$I_2 = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} I_1$$

$$I_1 = \frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} I_0$$

$$I_0 = \frac{e^{5x}}{5} + c$$

అందువల్ల $I_3 = \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5^2} x^2 e^{5x} + \frac{6}{5^3} x\ e^{5x} - \frac{6}{5^4} e^{5x} + c.$

1. సిద్ధాంతం: $\int \sin^n x\, dx$ కు లఘూకరణ సూత్రం, పూర్ణాంకం $n \geq 2$

ఉపపత్తి: $I_n = \int \sin^n x\, dx$ అనుకొందాం అప్పుడు

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x\ dx$$

$$= \int \sin^{n-1} x \frac{d}{dx}(-\cos x)\ dx$$

$$= \sin^{n-1} x\ (-\cos x) - \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos x\ (-\cos x)\ dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x\ (1 - \sin^2 x)\ dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\ dx - (n-1) \int \sin^n x\ dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1)\ I_n$$

కనక $I_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}$

ఇది $\int \sin^n x\, dx$ కు లఘుకరణ సూత్రం.

n సరిసంఖ్య అయితే, పారంపరిక లఘుకరణలో చివరికి

$$I_0 = \int (\sin x)^0\, dx = x + c_1$$

n బేసి సంఖ్య అయితే, పారంపరిక లఘూకరణలో చివరికి

$$I_1 = \int (\sin x)^1\, dx = -\cos x + c_2$$

ఉదాహరణ 26.57 : $\int \sin^4 x\, dx$ ను గణించండి.

సాధన: $n = 4, 2$ లను వరసగా పై లఘుకరణ సూత్రంలో దాస్తే

$$I_4 = \int \sin^4 x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} I_2$$

$$= -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} I_0\right]$$

$$= -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8} x + c.$$

గమనికలు:

(1) పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $\int \text{Tan}^n x\, dx$ కు లఘుకరణ సూత్రం

$$I_n = \int \text{Tan}^n x = \frac{\text{Tan}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$ ఇక్కడ n సరి సంఖ్య

అయితే I_0 చివరి పదము $I_0 = x + c_1$

n బేసిసంఖ్య అయితే, I_1 చివరిపదం

$$I_1 = \int \text{Tan} x\, dx = \log|\sec x| + c_2$$

(2) $n \geq 2, n$ పూర్ణాంకము, $\int \sec^n x\, dx$ కు లఘుకరణసూత్రం.

$$I_n = \int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x\ \text{Tan}\,x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

n సరిసంఖ్య అయితే, చివరి పదం $I_0 = \int dx = x + c_1$

n బేసి సంఖ్య అయితే, చివరిపదం I_1.

$$I_1 = \int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + c_2$$

ఉదాహరణ 26.58 : $\int \sec^5 x\,dx$ ను గణించండి.

సాధన : పై లఘూకరణ సూత్రంలో $n = 5$ రాయగా

$$I_5 = \int \sec^5 x\,dx = \frac{\sec^3 x\ \tan x}{4} + \frac{3}{4} I_3$$

$$= \frac{\sec^3 x\ \tan x}{4} + \frac{3}{4}\frac{\sec x\ \text{Tan}x}{2} + \frac{3}{8} I_1$$

$$= \frac{\sec^3 x\ \tan x}{4} + \frac{3}{8}\sec x\ \text{Tan}x + \frac{3}{8}\log|\text{Sec}\,x + \text{Tan}\,x| + c.$$

అభ్యాసం 26.9

I. కింది సమాకలనులను గణించండి.

1. $\int x^2\ e^{-3x}\,dx$
2. $\int x^3\ e^{ax}\,dx$

II 1. $\int \text{Tan}^4 x\,dx$ ను గణించండి.

2. $\int \cos^4 x\,dx$ ను గణించండి.
3. $\int \sec^3 x\,dx$ ను గణించండి.

III 1. పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $I_n = \int \cos^n x\,dx$ అయితే

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$ అని చూపండి.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

కీలకపదాలు

- అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియగా సమాకలనం.
- అనిశ్చిత సమాకలనుల కొన్ని ప్రామాణిక రూపాలు

(a) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log |x| + C$

(c) $\int \sin x\,ax = -\cos x + C$

(d) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(e) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(f) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

(g) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

(h) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$

(j) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$

(k) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + C$

(l) $\int e^x dx = e^x + C$

(m) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \ (a > 0 \text{ and } a \neq 1)$

- అనిశ్చిత సమాకలనుల ధర్మాలు

(a) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(b) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(i) $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$

(ii) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$

(iii) $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$

(iv) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

(v) $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

(vi) $\int \text{cosec}^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

(vii) $\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + C$

(viii) $\int \text{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\text{cosec}(ax+b) + C$

(xi) $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

- (i) $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C = \log|\sec| + C$

(ii) $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \text{cosec}\,x\,dx = \log|\text{cosec}\,x - \cot x| + C$

- (i) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

  (ii) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

  (iii) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

  (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

  (v) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

  (vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

- (i) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right) + C$

  (ii) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \left(\frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right) + C$

  (iii) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} \right) + \log \left(\frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right) \right] + C$

  (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C$

- (i) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$

(ii) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+C$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\cot x-1}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

(iv) $\int\left(\sqrt{\tan x}+\cot x\right)dx = \sqrt{2}\ \sin^{-1}(\sin x-\cos x)+C$

- రెండు ప్రమేయాల లబ్ధాల సమాకలనం. I ప్రమేయం × II ప్రమేయ సమాకలని – $\int$[I ప్రమేయ అవకలని × II ప్రమేయ సమాకలని] dx

- $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx = e^x f(x)+C$

- $\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+C$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\ dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{a^2-x^2}|+C$$

- అకరణీయ భిన్నాలు రెండు రకాలు

(1) క్రమభిన్నం, లవం తరగతి హారం తరగతి కంటే తక్కువ ∴ లవం తరగతి < హారం తరగతి.

(2) అపక్రమ భిన్నం. చలరాశి లవం తరగతి ≥ హారం తరగతి.

- క్రమ భిన్నం $\frac{f(x)}{g(x)}$ లో $g(x)$ ను వాస్తవ కారణాంకాలుగా విభజించ గలిగినప్పుడు, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ను ఈ కింది విధంగా రాయవచ్చు.

హారములోని కారణాంకాలు	సరియైన పాక్షిక భిన్నాలు
$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$
$(ax + b)^2$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2}$
$(ax + b)^3$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \frac{C}{(ax + b)^3}$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$
$(ax^2 + bx + c)^2$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2}$

A, B, C, D లు యాధృచ్ఛిక స్థిరరాశులు.

- n ధనపూర్ణాంకం, $I_n = \int x^n e^{ax}\, dx$, అయితే $I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$

- పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $I_n = \int \sin^n x\, dx$ అయితే

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

- పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $I_n = \int \cos^n x\, dx$ అయితే

$$I_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

- పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $I_n = \int \text{Tan}^n x\, dx$, అయితే $I_n = \frac{\text{Tan}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

కింది ప్రమేయాలను x దృష్ట్యా సమాకలనం చేయండి

1. $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
2. $\sqrt{1+\sin 2x}$
3. $\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}$
4. $(\tan x - \cot x)^2$
5. $\frac{4}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\frac{2\sin^2 x}{1+\cos 2x}$
7. $\frac{2\cos^2 x}{1-\cos 2x}$
8. $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$
9. $\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$
10. $\cos(7x-\pi)$
11. $\sin(3x+4)$
12. $\sec^2(2x+b)$
13. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$
14. $\int \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1} x}\, dx$
15. $\int \frac{\text{cosecx}}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}\, dx$
16. $\int \frac{\cot x}{3+4\log\sin x}\, dx$
17. $\int \frac{dx}{\sin 2x \log\tan x}\, dx$
18. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx$
19. $\int \sec^4 x \tan x\, dx$
20. $\int e^x \sin e^x\, dx$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము



21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

22. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx$

23. $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx$

24. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx$

25. $\int \sqrt{3x^2+4}\,dx$

26. $\int \sqrt{1+9x^2}\,dx$

27. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x+4\cos^2 x}}$

29. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

30. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$

31. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$

32. $\int \frac{x^2}{x^2-a^2}\,dx$

33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^4}}$

34. $\int \frac{\sin x}{\sin 3x}\,dx$

35. $\frac{dx}{1-4\cos^2 x}$

36. $\int \sec^2(ax+b)\,dx$

37. $\int \frac{dx}{x(2+\log x)}$

38. $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

39. $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

40. $\int \frac{\cot x}{\log \sin x}\,dx$

41. $\int \frac{\sec^2 x}{a+b\tan x}\,dx$

42. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

43. $\int \cos^2 x\,dx$

44. $\int \sin^2 x\,dx$

45. $\int \sin 5x \sin 3x\,dx$

46. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

47. $\int \sin^4 x\,dx$

48. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

49. $\int \tan^3 x \, dx$

50. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} \, dx$

51. $\int \frac{\text{cosec}^2 x}{1 + \cot x} \, dx$

52. $\int \frac{1 + x + \cos 2x}{x^2 + \sin 2x + 2x} \, dx$

53. $\int \frac{\sec \theta \, \text{cosec}\, \theta \, d\theta}{\log \tan \theta}$

54. $\int \frac{\cot \theta \, d\theta}{\log \sin \theta}$

55. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

56. $\int \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \, d\theta$

57. $\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \, dx$

58. $\int \frac{\sin x \cos x \, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$

59. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

60. $\int e^x \left(\cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

61. $\int e^x \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \right) dx$

62. $\int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \, dx$

63. $\int \cos \left[2 \cot^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right] dx$

64. $\int \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

65. $\int \sqrt{x} \log x \, dx$

66. $\int e^x (1+x) \log (x e^x) \, dx$

67. $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$

68. $\int e^x \sin^2 x \, dx$

69. $\int \cos (\log x) \, dx$

70. $\int \log (x+1) \, dx$

71. $\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2 (x+3)} \, dx$

72. $\int \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \cos \theta - 2} \, d\theta$

73. $\int \frac{dx}{x(x^5 + 1)}$

74. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2)(2x^2 + 1)} \, dx$

75. $\int \frac{\log x}{x(1 + \log x)(2 + \log x)} \, dx$

76. $\int \frac{dx}{1 - e^x}$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము



జవాబులు

అభ్యాసం 26.1

1. (a) $\frac{x^6}{6} + C$ (b) $\sin x + C$ (c) 0

2. (a) $\frac{x^4}{4} + C$ (b) $\frac{x^{-6}}{-6} + C$ (c) $\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$

   (d) $2\sqrt{x} + C$ (e) $\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$ (f) $9x^{\frac{1}{9}} + C$

3. (a) $-\frac{1}{\sin\theta} + C$ (b) $\tan\theta + C$

అభ్యాసం 26.2

1. (i) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C$ (ii) $x - \tan^{-1} x + C$

   (iii) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 4\sqrt{x} + C$ (iv) $6\sqrt{x} - 2\log x - \frac{1}{3x} + C$

2. (i) $\frac{1}{2}\tan x + C$ (ii) $\tan x - x + C$

   (iii) $-\sec x + C$ (iv) $\sqrt{2}\sin x + C$

అభ్యాసం 26.3

1. (i) $\frac{\cos(4-5x)}{5} + C$ (ii) $\frac{\tan(2+3x)}{3} + C$

   (iii) $\log\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$ (iv) $\frac{1}{4}\sin(4x+5) + C$

   (v) $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(3+5x) + C$

2. (i) $\frac{1}{12(3-4x)^3} + C$ (ii) $\frac{(x+1)^5}{5} + C$

(iii) $-\frac{(4-7x)^{11}}{77} + C$ (iv) $\frac{1}{3}\log|3x-5| + C$

(v) $-\frac{2}{9}\sqrt{5-9x} + C$ (vi) $\frac{(2x+1)^3}{6} + C$

(vii) $\log|x+1| + C$

3. (i) $\frac{e^{2x+1}}{2} + C$ (ii) $-\frac{1}{4e^{7+4x}} + C$

4. $\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$

అభ్యాసం 26.4

1. (i) $\frac{1}{6}\log|3x^2-2| + C$

(ii) $\log|x^2 + 9x + 30| + C$

(iii) $\frac{1}{3}\log|x^2+3x+3| + C$

(iv) $\log|8 + \log x| + C$

2. (i) $\frac{1}{b}\log|a+be^x| + C$

(ii) $\text{Tan}^{-1}(e^x) + C$

అభ్యాసం 26.5

1. (i) $\tan^{-1}(\sin x + 2) + C$

(ii) $\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$

(iv) $\frac{(3x-4)}{6}\sqrt{3+8x-3x^2}+\frac{25}{6\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{3x-4}{5}\right)+C$

(v) $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

(vi) $\frac{1}{3\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right)+C$

2. (i) $\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

(ii) $-(6-2x^2+x)^{3/2}+\frac{637}{32\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{7}\right)$

$+\frac{13}{16}(4x-1)\sqrt{6-2x^2+x}+C$

(iii) $-\frac{1}{3}(1+x-x^2)^{3/2}+\frac{5}{16}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2x-1}{8}\sqrt{1+x-x^2}+c$

(iv) $\frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}+C$

(v) $\sqrt{7x-x^2-10}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-7}{3}\right)+C$

(vi) $2\tan^{-1}(\sqrt{x+1})+C$

(vii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2x+4}-1}{\sqrt{2x+4}+4}\right|+C$

3. (i) $x+\log\left|4\sin x+5\cos x\right|+C$

(ii) $\log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$

(iii) $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2\left(\tan\frac{x}{2}+2\right)}\right|+C$

(iv) $\frac{1}{5}\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2\tan\frac{x}{2}-4}\right|+C$

(v) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-3}\right|+C$

(vi) $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}\right)+C$

(vii) $\frac{1}{25}\log\left|3\sin x+4\cos x+5\right|+\frac{18}{25}x-\frac{4}{5\left(\tan\frac{x}{2}+3\right)}+C$

అభ్యాసం 26.6

1. (a) $-x\cos x+\sin x+C$

   (b) $\frac{1}{2}(1+x^2)\sin 2x+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

   (c) $\frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+C$

2. (a) $x\tan x-\log|\sec x|-x+C$

   (b) $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$

3. (a) $\frac{x^4 \log 2x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$ (b) $\left(x - \frac{x^3}{3}\right) \log x - x + \frac{x^3}{9} + C$

(c) $x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C$

4. (a) $\frac{x^{1-n}}{1-n} \log x - \frac{x^{1-n}}{(1-n)^2} + C$ (b) $\log x \,.\, [\log (\log x) - 1] + C$

5. (a) $e^{3x}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right] + C$ (b) $x \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$

6. $\frac{x^2}{2}\left[(\log x)^2 - \log x + \frac{1}{2}\right] + C$

7. (a) $x \sec^{-1} x - \log \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C$

(b) $\frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cot^{-1} x + C$

అభ్యాసం 26.7

1. (a) $e^x \sec x + C$ (b) $e^x \log | \sec x + \tan x | + C$

2. (a) $\frac{1}{x} e^x + C$ (b) $e^x \sin^{-1} x + C$

3. (a) $\frac{e^x}{(1+x)^2} + C$ 4. $\frac{e^x}{1+x} + C$

5. $x \tan \frac{x}{2} + C$

6. $\frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C$

అభ్యాసం 26.8

1. (a) $4 \log |x-3| - 3 \log |x-2| + C$

   (b) $\frac{1}{2} \log |x-4 + \log |x+4| + C$

2. (a) $\frac{x^2}{2} - 2[\log |x-2| + \log |x+2|] + C$

   (b) $\frac{11}{9} \log |x-1| + \frac{7}{9} \log (x+2) - \frac{4}{3(x-1)} + C$

3. $\log |x-1| - \frac{3}{(x-1)} - \frac{3}{2(x-1)^2} + C$

4. (a) $\frac{1}{8} \log |1-\sin x| - \frac{1}{8} |1 + \sin x|$

   $-\frac{1}{4\sqrt{2}} \log |1-\sqrt{2} \sin x| + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log |1+\sqrt{2} \sin x| + C$

   (b) $\log |\sec x + \tan x| - 2 \tan \frac{x}{2} + C$

అభ్యాసం 26.9

I (1) $-\frac{e^{-3x}}{27} (9x^2 + 6x + 2) + c$

(2) $\frac{e^{ax}}{a^4} (a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6) + c$

II(1) $-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + c$

(2) $\frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + c$

సాధనా అభ్యాసం

1. $\sec x - \operatorname{cosec} x + C$
2. $\sin x - \cos x + C$
3. $-\cot x - \tan x + C$
4. $\tan x - \cot x - 4x + C$
5. $4\tan^{-1} x - \sin^{-1} x + C$
6. $\tan x - x + C$
7. $-\cot x - x + C$
8. $x - \cos x + C$
9. $x + \cos x + C$
10. $\frac{\sin(7x-\pi)}{7} + C$
11. $\frac{-\cos(3x+4)}{3} + C$
12. $\frac{\tan(2x+b)}{2} + C$
13. $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$
14. $\log |\tan^{-1} x| + C$
15. $\log \left| \log \tan \frac{x}{2} \right| + C$
16. $\frac{1}{4}\log |3 + 4\log \sin x| + C$
17. $\frac{1}{2}\log |\log \tan x| + C$

18. $2\log\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}\right| + C$

19. $\frac{1}{4}\sec^4 x + C$

20. $-\cos e^x | + C$

21. $\frac{\sqrt{2x^2+3}}{2} + C$

21. $2\sqrt{\tan x} + C$

23. $\frac{1}{6}x\sqrt{(25-9x^2)}\frac{25}{6}\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}x\right) + C$

24. $\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax-x^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

25. $\frac{x\sqrt{3x^2+4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{x^2+4}}{2}\right| + C$

26. $\frac{x\sqrt{9x^2+1}}{2} + \frac{1}{6}\log\left|3x+\sqrt{1+9x^2}\right| + C$

27. $\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} + \frac{1}{2}a^2\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right] + C$

28. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C$

29. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right] + C$

30. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

31. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x) + C$

32. $x + \frac{a}{2}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

33. $\frac{1}{12}\log\left|\frac{\sqrt{9+x^4}-3}{\sqrt{9+x^4}+3}\right| + C$

34. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right| + C$

35. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\tan x-\sqrt{2}}{\tan x+\sqrt{2}}\right| + C$

36. $\frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$

37. $\log|(2+\log x)| + C$

38. $\frac{1}{6}\log(1+x^6) + C$

39. $\log|\sin x + \cos x| + C$

40. $\log|\log(\sin x)| + C$

41. $\frac{1}{b}\log|a + b\tan x| + C$

42. $-\log|1 + \cos x| + C$

43. $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}x + C$

44. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

45. $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 8x}{8} + C$

46. $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

47. $\frac{1}{32}[12x - 8\sin 2x + \sin 4x] + C$

48. $\tan x - \sec x + C$

49. $\frac{\tan^2 x}{2} + \log|\cos x| + C$

50. $\frac{-1}{\cos x + \sin x} + C$

51. $\log\left|\frac{1}{1+\cot x}\right| + C$

52. $\frac{1}{2}\log\left|x^2 + \sin 2x + 2x\right| + C$

53. $\log|\tan\theta| + C$

54. $\log|\log\sin\theta| + C$

55. $\frac{1}{2}\tan^{-1} 2x$

56. $\log|\cos\theta + \sin\theta| + C$

57. $e^{-\frac{1}{x}} + C$

58. $\frac{1}{2(a^2 - b^2)}\log|a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x| + C$

59. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

60. $e^x \cos^{-1} x + C$

61. $e^x \sec x + C$

62. $\frac{1}{4}x^2 + C$

63. $-\frac{1}{2}x^2 + C$

64. $\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\log|1-x^2| + C$

65. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\log x - \frac{2}{3}\right) + C$

66. $xe^x\left[\log(xe^x) - 1\right] + C$

67. $-\frac{1}{1+x}\log|x| + \log|x| - \log|x+1| + C$

68. $\frac{1}{2}e^x - \frac{e^x}{10}(2\sin 2x + \cos 2x) + C$

69. $\frac{x}{2}[\cos(\log x) + \sin(\log x)] + C$

70. $x\log|x+1| - x + \log|x+1| + C$

71. $\frac{3}{8}\log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{8}\log|x+3| + C$

72. $-\frac{2}{8}\log|\cos\theta - 2| - \frac{1}{3}\log|\cos\theta + 1| + C$

73. $\frac{1}{5}\log\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + C$

74. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\tan^1 x\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \tan^{-1}(\sqrt{2}x)\right)\right] + C$

75. $\log\left|\frac{(2+\log x)^2}{1+\log x}\right| + C$

76. $\log\left|\frac{e^x}{1-e^x}\right| + C$

అధ్యాయం

27

నిశ్చిత సమాకలనం

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగల్గిన విషయాలు.

- రేఖీయంగా నిశ్చిత సమాకలనం అనగా వైశాల్యాల మొత్తం తాలూకు అవధిగా నిర్వచిస్తాం.
- పైన ఉదహరించిన నిర్వచనం ప్రకారం ఒక నిశ్చిత సమాకలనాన్ని గణించవచ్చు.
- సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని వివరించవచ్చు.
- నిశ్చిత సమాకలనం ధర్మాలను గణించడానికి ఈ క్రింది వాటిని ఉపయోగించి, వివరించండి.

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$ if $f(2a - x) = f(x)$

$= 0$ if $f(2a - x) = -f(x)$

(vii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$ x యొక్క సరి ప్రమేయం f అయితే

$= 0$ f బేసి ప్రమేయమయితే

- పరిబద్ధ ప్రదేశం (భాగం) యొక్క వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి నిశ్చిత సమాకలనాన్ని ఉపయోగించండి.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సమాకలనం గురించిన పరిజ్ఞానం
- పరిబద్ధ ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యం

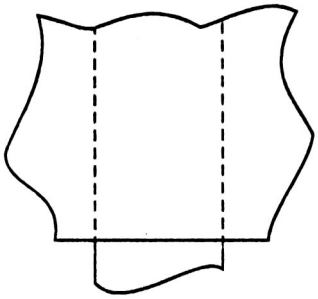
పరిచయం

కలన గణితం ప్రధానంగా రెండు జ్యామితీయ సమస్యలను చర్చిస్తుంది: వక్రానికి స్పర్శరేఖను కనుక్కోవడం, వక్రానికి దిగువన ఆవరించిన ప్రదేశ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవడం. మొదటిది అవధి భావన ద్వారా అవకలనం నుంచి కనుక్కోవడం ఇంటర్మీడియట్ మొదటి సంవత్సరంలో నేర్చుకొన్నాం. రెండోది మరో అవధి భావన – సమాకలనం ద్వారా కనుక్కోవడం ఇప్పుడు నేర్చుకొందాం.

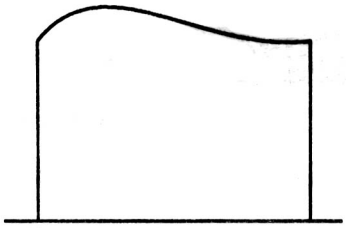
$[a, b]$ మీద నిర్వచితమైన ధనాత్మక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం f రేఖా చిత్రం (గ్రాఫ్) కింది భాగాన ఉన్న ప్రదేశం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవడానికి, $[a, b]$ ని పరిమిత సంఖ్య n, ఉపాంతరాలుగా విభజించి, k వ ఉపాంతరం పొడవు Δx_k అయితే $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$, (k వ ఉపాంతరంలో t_k ఏదైనా బిందువు) ను తీసుకొందాం. ఇది Δx_k వెడల్పు, $f(t_k)$ పొడవు గల దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం. ఈ మొత్తం, కావలసిన వైశాల్యానికి రమారమి సమానం మాత్రమే. ఉప అంతరాలను సూక్ష్మాతిసూక్ష్మంగా చేశామను కొందాం. అప్పుడు ఆయా మొత్తాల అనుక్రమం, $n \to \infty$ అయినప్పుడు, ఒక అవధిని పొందవచ్చు. మామూలుగా చెప్పాలంటే, నిశ్చిత సమాకలనికి రీమాన్ నిర్వచనం ఇదే. (స్పష్టమైన నిర్వచనాన్ని కింద ఇచ్చాం).

27.1 నిశ్చిత సమాకలని మొత్తం అవధి

ఈ భాగమునందు మనకు పరిచయం లేని సరిహద్దు లోపల ఆవరించిన ప్రదేశ వైశాల్యాలు కనుక్కొనే సమస్యల గురించి చర్చిద్దాం. (పటం 27.1 చూడండి)



పటం 27.1

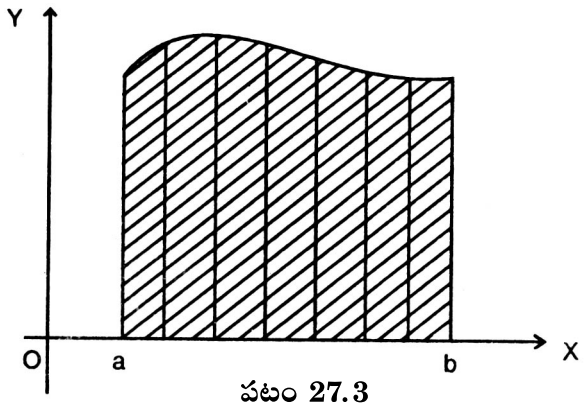


పటం 27.2

పటం 27.2లో చూపిన విధంగా x-అక్షములోని సరిహద్దు తెలియని ప్రదేశ వైశాలాన్ని కనుక్కొనే విధానం తెలుసుకొందాం

ఏ ప్రదేశాన్నైనా కొన్ని ఉపాంతరాలుగా విభజించుటకు అవకాశము కలదు. ఈ ఉపాంతర వైశాల్యాలను కనుగొని, తర్వాత వాటి వైశాల్యాల మొత్తాన్ని కలిపితే ఆ ప్రదేశం యొక్క సంపూర్ణ వైశాల్యం వస్తుంది. (పటం 39.1 చూడండి)

ఇప్పుడు, $[a, b]$ అనే సంవృతాంతరం మీద నిర్వచితమైన అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం $f(x)$, ప్రస్తుతం ఆ ప్రమేయానికి అన్ని ఋణేతర విలువలను తీసుకొందాం. అందువలన ఆ ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం (గ్రాఫ్) x-అక్షం మీద ఒక వక్రంగా ఏర్పడుతుంది. (పటం 39.3 చూడండి)



పటం 27.3

x-అక్షము, $x = a$ మరియు $x = b$ నిరూపకాల మధ్య ఉన్న వక్ర ప్రదేశం అనగా పటం 27.3లో గీతలు గీచిన ప్రదేశం (భాగం, ఆవరణాన్ని ఎంచుకోండి. గీతలు గీచిన భాగం యొక్క వైశాల్యం కనుక్కోవడం మన ప్రస్తుత సమస్య. ఈ సమస్యను సాధించడానికి, మనం 3 ప్రత్యేక దృష్టాంతాలను అనగా దీర్ఘచతురస్రాకార ప్రదేశంగా, త్రిభుజాకారం గల ప్రదేశంగా, సమలంబ చతుర్భుజ ప్రదేశంగా $f(x)$ ను తీసుకొని ఆలోచిస్తాం.

ఈ ప్రదేశ వైశాల్యము = ఆధారం × సరాసరి ఎత్తు

సాధారణంగా $[a, b]$ లో ఏదైనా ప్రమేయం $f(x)$ ను

(i) పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యము (పటం 39.3లో గీతలు గీచిన భాగం) = ఆధారం (base) × సరాసరి ఎత్తు. ఇక్కడ ఆధారం (base) అనేది అంతరం $[a, b]$ పొడవు. ఏదైనా బిందువు వద్ద, x యొక్క ఎత్తును $f(x)$ గా అదే బిందువు వద్ద తీసుకొంటాం. కావున సరాసరి ఎత్తును $[a, b]$ అంతరంలో $f(x)$ ల సరాసరి విలువగా తీసుకొంటాం. (ఇది అంత సులభంగా కనుగొనుటకు వీలుగాదు కారణం ఎత్తులు ఒకేమాదిరిగా (ఏక రూపంగా) ఉండవు). ఇక్కడి సమస్య ఏంటంటే, $[a, b]$ లో f యొక్క సరాసరి విలువ ఎలా కనుగొనదలం.

27.1.1 ఒక అంతరంలో ఒక ప్రమేయం సరాసరి విలువ

సంవృతాంతరం $[a, b]$ లో f కు పరిమిత సంఖ్యలో విలువలు ఉంటే, మనం సరాసరి విలువను ఈ సూత్రం ద్వారా రాబట్టవచ్చు.

$[a, b]$ లో f యొక్క విలువల

$$\text{సరాసరి} = \frac{[a, b] \text{ లో } f \text{ యొక్క విలువల మొత్తం}}{\text{విలువల సంఖ్య}}$$

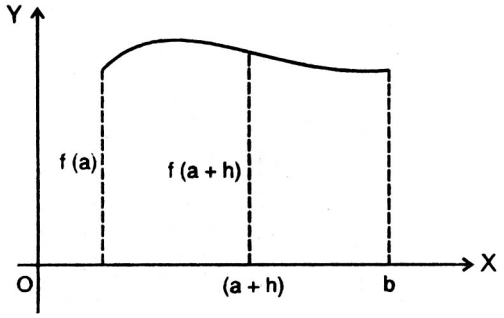
కాని $[a, b]$ లో f కు అనంతమైన విలువలు తీసుకొంటే, f యొక్క సరాసరి విలువను అటువంటి సందర్భంలో కనుక్కోవడం ఎలా అనేదే సమస్య.

పై సూత్రము మనకు ఉపయోగపడదు. కావున f యొక్క సరాసరి విలువను ఈ క్రింది విధంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు.

మొదటి అంచనా: f యొక్క విలువను 'a' వద్ద మాత్రమే తీసుకోండి. 'a' వద్ద f విలువ $f(a)$. $[a, b]$ లో f యొక్క సరాసరి విలువ $f(a)$ ను చిత్తు (స్థూల) కొలతగా అంచనా వేస్తాం.

$$[a, b] \text{ లో } f \text{ యొక్క సరాసరి (సగటు) విలువ (మొదటి అంచనా)} = f(a) \quad .....(1)$$

రెండవ అంచనా: $[a, b]$ ని రెండు సమానమైన భాగాలుగా లేదా ఉపాంతరాలుగా విభజిస్తాం. ప్రతి ఉపాంతరము యొక్క పొడవు h అనుకొనిన, $h = \frac{b-a}{2}$ ఉపాంతరాల యొక్క ఎడమ చివరి బిందువుల వద్ద f విలువను తీసుకొందాం. ఆ విలువలు $f(a)$ మరియు $f(a+h)$.



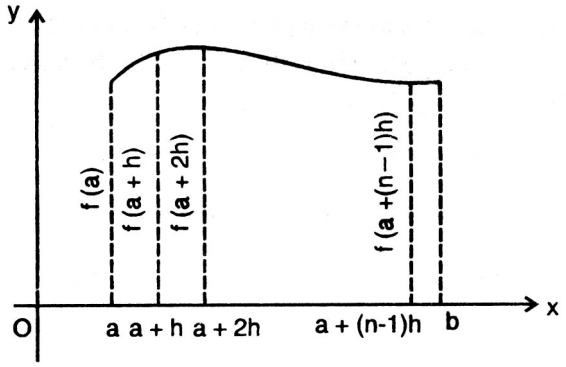
పటం 27.4

పై రెండు విలువల సగటు (సరాసరి) విలువని, $[a, b]$ లో f యొక్క సరాసరి విలువ (రెండవ అంచనా)

$$= \frac{f(a) + f(a+h)}{2}, \; h = \frac{b-a}{2} \qquad \ldots(ii)$$

ఈ అంచనా మొదటి అంచనా కన్నా మెరుగైనదని ఆశిద్దాం.

ఇదే విధంగా నిర్వహిస్తూ, $[a, b]$ అంతరాన్ని n సమాన పొడవు h గా గల ఉపాంతరాలుగా విభజించిన, (పటం 27.5) ఉపాంతరం పొడవు $h = \frac{b-a}{n}$.



పటం 27.5

n ఉపాంతరాలలోని ఎడమ చివరి బిందువుల వద్ద f విలువలను తీసుకొందాం.

ఈ విలువలు $f(a), f(a+h)$ ...., $f[a+(n-1)h]$ $[a, b]$. $[a, b]$ లో f యొక్క n విలువల సరాసరిని తీసుకొందాం.

$[a, b]$ లో f యొక్క సగటు (సరాసరి) విలువ (n వ అంచనా)

$$= \frac{f(a) + f(a+h) + ...+ f[a+(n-1)h]}{n}, \; h = \frac{b-a}{n} \qquad ...(iii)$$

n యొక్క పెద్దదైన విలువ కొరకు $[a, b]$ లో f కు ఇంతకు ముందు అంచనా వేసిన విలువల కన్నా (iii) పది మెరుగైన అంచనా.

$[a, b]$ లో f యొక్క సరాసరి అంచనా విలువల అనుక్రమము ఈ విధంగా ఉన్నది.

$f(a)$

$$\frac{1}{2}[f(a) + f(a+h)], \; h = \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{1}{3}[f(a) + f(a+h) + f(a+2h)], \quad h = \frac{b-a}{3}$$

.....

.....

$$\frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + ...+ f\{a+(n-1)h\}], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

ఈ అనుక్రమంలో మనం ముందుకు ముందుకు పోయే కొద్దీ మనకు కావలసిన ఫలితానికి అమిత దగ్గరగా వెళ్ళవచ్చు. అనగా$[a, b]$ లో f యొక్క సరాసరి విలువను పరిగణించవచ్చు. అందువలన $[a, b]$ లో f యొక్క అంచనాల సరాసరి విలువను దాని అవధిగా తీసుకోవచ్చు. ఇంకో విధంగా $[a, b]$ లో f యొక్క సగటు విలువ =

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + ... + f[a+(n-1)h]\}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

సంవృతాంతరం $[a, b]$ లో అవిచ్ఛిన్నప్రమేయంలు f అన్నింటికి, అవధి వ్యవస్థితమవుతుందని నిరూపించవచ్చు. ఇప్పుడు పటం 39.3లో ఉన్న రంగు వేసిన భాగం (గీతలు గీచిన) వైశాల్యం కనుగొనుటకు సూత్రము ఉన్నది. ఆధారము (base) $[b-a]$ మరియు సరాసరి ఎత్తును(iv) లో ఇవ్వబడినది.

వక్రం $y = f(x)$, x-అక్షం, నిరూపకాలు (సరళరేఖలు) $x = a, x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యం

$$= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h)+....+f[a+(n-1)h]\},$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) +....+ f\{a+(n-1)h]\}, \quad h=\frac{b-a}{n} \qquad \text{(v)}$$

(v) సమీకరణంలో కుడివైపు సమాసాన్ని "నిశ్చిత సమాకలనం" నిర్వచనంగా తీసుకొందాం. ఈ సమాకలనాన్ని

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

గా సూచిస్తాం. దీనిని a నుంచి b కి $f(x)$ యొక్క సమాకలని అని చదువుతాం. $\int_a^b f(x)\,dx$ గుర్తులో గల a, b సంఖ్యలను సమాకలనం యొక్క దిగువ, ఎగువ అవధులని పిలుస్తాం. $f(x)$ ను "సమాకల్యం" అని అంటాం.

గమనిక: $[a, b]$ లో f యొక్క సరాసరి విలువలను అంచనా వేయడానికి ఉపాంతరములలో చివరి ఎడమ బిందువులను తీసుకున్నాం. ఎడమ చివరి బిందువులనే ఎందుకు తీసుకోవాలి? ఉపాంతరాలలో కుడి చివరి బిందువులను ఎందుకు తీసుకోకూడదు? మరి తప్పనిసరిగా కుడి చివరి బిందువులను గూడా ఉపాంతరాలలో తీసుకోవచ్చు. ఆ సందర్భంలో మనం

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a+h)+f(a+2h) +....+ f(b)\}, \quad h=\frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{h\to 0} h[f(a+h)+f(a+2h) +....+ f(b)] \quad \text{అవుతుంది.} \qquad \text{(vi)}$$

ఉదాహరణ 27.1: $\int_1^2 x\,dx$ మొత్తం తాలూకు అవధిని కనుక్కోండి.

సాధన : నిర్వచనం నుండి

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h) +....+ f\{a+(n-1)h\}],.$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

Here $a = 1, b = 2, f(x) = x$ and $h = \frac{1}{n}$

$$\therefore \quad \int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{2}{n}\right) .... + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\underbrace{1+1+...+1}_{n\ times} + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{1}{n}(1+2) + ...+ (n-1))\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{(n-1).n}{n.2}\right]$$

$$\left[\sin ce\ 1+2+3+...+(n-1) = \frac{(n-1).n}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{3n-1}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}\right] = \frac{3}{2}$$

ఉదాహరణ 27.2: $\int_1^2 e^x\,dx$ మొత్తం తాలూకు అవధిని కనుక్కోండి.

సాధన. నిర్వచనాన్ని అనుసరించి

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + ... + f\{a+(n-1)\,h\}]$$

ఇక్కడ $h = \frac{b-a}{n}$

ఇక్కడ $a = 0, b = 2, f(x) = e^x$ మరియు $h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$$\int_0^2 e^x\,dx = \lim_{h\to 0} h[f(0) + f(h) + f(2h) + \ldots + f\{(n-1)\,h]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[e^0 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(n-1)h}]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^0\left(\frac{(e^h)^n - 1}{e^h - 1}\right)\right]$$

$$\left[\text{Since } a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[\frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}\right] \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\left[\frac{c^2 - 1}{\left(\frac{c^h - 1}{h}\right)}\right] \qquad (\because \quad nh = 2)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^2 - 1}{\frac{e^h - 1}{h}} = \frac{e^2 - 1}{1}$$

$$= e^2 - 1 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\right]$$

27.1, 27.2 ఉదాహరణలలో మొత్తం తాలూకు అవధిని నిశ్చిత సమాకలనంలో కనుక్కోవడం చాలా కష్టంగా ఉండటాన్ని గమనించాం. ఈ కష్టాన్ని అధికమించడానికి మనకు సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఉన్నది. దానిని ఇలా వివరిద్దాం.

1. సిద్ధాంతం $[a, b]$ లో f అవిచ్ఛిన్నం, f యొక్క ప్రత్యవకలజం F అయ్యేటట్లు $[a, b]$ లో f ఉంటే

అప్పుడు $$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \qquad \ldots(1)$$

సామాన్యంగా $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ భేదాన్ని $\left[\mathrm{F}(x)\right]_a^b$ గా సూచిస్తాం. అయితే (1) ని

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(x)]_a^b \text{ or } [\mathrm{F}(x)]_a^b$$ ఇలా రాస్తాం.

ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఇలా చెప్పవచ్చు.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{(ఎగువ అవధి } b \text{ వద్ద ప్రత్యవకలజం విలువ)} - \text{(దిగువ అవధి } a \text{ వద్ద ప్రత్యవకలజం విలువ)}$$

ఉదాహరణ 27.3: $\int_1^2 x\,dx$ కనుక్కోండి.

సాధన $\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ఉదాహరణ 27.4 : కింది వాటిని గణించండి.

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ (b) $\int_0^2 e^{2x}\,dx$

సాధన $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ అని మనకు తెలుసు

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

(b) $\int_0^2 e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2, \qquad \left[\because \int e^x dx = e^x\right]$

$$= \left(\frac{e^4 - 1}{2}\right).$$

2. సిద్ధాంతం $[a, b]$ లో f, g లు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు, మరియు e స్థిర సంఖ్యగా నిర్వచిస్తే

(i) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

ఉదాహరణ 27.5: $\int_0^2 (4x^2 - 5x + 7)\,dx$ గణించండి

సాధన $\int_0^2 (4x^2 - 5x + 7)\,dx = \int_0^2 4x^2\,dx - \int_0^2 5x\,dx + \int_0^2 7\,dx$

$$= 4\int_0^2 x^2\,dx - 5\int_0^2 x\,dx + 7\int_0^2 1\,dx$$

$$= 4.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 7\,[x]_0^2$$

$$= 4.\left(\frac{8}{3}\right) - 5\left(\frac{4}{2}\right) + 7(2)$$

$$= \frac{32}{3} - 10 + 14$$

$$= \frac{44}{3}.$$

అభ్యాసం 27.1

1. $\int_0^5 (x+1)\,dx$ మొత్తం తాలూకు అవధిని కనుక్కోండి.

2. $\int_{-1}^1 e^x.\,dx$ మొత్తం తాలూకు అవధిని కనుక్కోండి.

3. గణించండి

(a) $\int_0^{\pi/4} \sin x \, dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) \, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ (d) $\int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) \, dx$

27.2 ప్రతిక్షేపణ ద్వారా నిశ్చిత సమాకలనిని గణించుట

నిశ్చిత సమాకలనం గణించడంలో ముఖ్యమైన పడికట్టు (మెట్టు) దానికి సంబంధిత అనిశ్చిత సమాకలనిని కనుక్కోవడం. గత పాఠ్యాంశంలో అనిశ్చిత సమాకలనులను కనుగొనుటకు వివిధ పద్ధతులను చర్చించడం జరిగింది. ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా అనిశ్చిత సమాకలనులను కనుగొనుట ఒక ముఖ్యమైన పద్దతి, నిశ్చిత సమాకలనులను గణించడానికి కూడా ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాం. ఇలాంటివాటికి

$$\int_2^3 \frac{x}{1+x^2} dx, \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx,$$

కింది పడికట్టులను పాటిస్తాం.

(i) దత్తసమాకలనిని సరియైన ప్రతిక్షేపణ ద్వారా తెలిసిన రూపంలోకి మార్చి సమాకలనం చేయాలి.

(ii) క్రొత్త సమాకల్యమును, కొత్త చలరాశి దృష్ట్యా సమాకలనం చేయాలి.

(iii) అవధులను దాని ప్రకారం మార్పుచేసి, ఎగువ దిగువ అవధుల వద్ద విలువల భేదాన్ని కనుక్కోండి. (పరమ భేదాన్ని)

గమనిక: ఒక ప్రమేయాన్ని ఒక కొత్త చలరాశితో ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా సమాకలనం చేసినపుడు, ప్రతి పదాన్ని మార్పు చేయడం కొన్ని సార్లు కష్టం కనక అవధుల మధ్య సమాకలనం చేసినప్పుడు, అవధులను కొత్త చలరాశికి అనుగుణంగా మార్పు చేయడం ద్వారా, పాత చలరాశిని పునరుద్ధరించే అవసరం నుండి తప్పించుకోవచ్చు.

ఆ విధంగా పొందిన జవాబులను ఈ కింద ఉదహరించిన సమాకలని అవధుల వద్ద విలువలను కనుక్కోండి.

ఉదాహరణ 27.6 : $\int_2^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ గణించండి

సాధన : $1+x^2=t$

$2x\,dx = dt$ లేక $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

$x=2, t=5$ మరియు $x=3, t=10$. k చలరాశికి 5, 10లు అవధులు అగును.

కాబట్టి $$\int_2^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_5^{10}\frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log t\right]_5^{10}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log 10 - \log 5\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log 2$$

ఉదాహరణ 27.7: కింది వాటిని గణించండి.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{\sin^2\theta + \cos^4\theta}\,d\theta$ (c) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x}$

సాధన (a) Let $\cos x = t$ then $\sin x\,dx = -dt$

$x=0$ అయితే, $t=1$ and $x=\frac{\pi}{2}$ అయితే, $t=0$. 0 నుంచి $\frac{\pi}{2}$ కి x మారితే, నుంచి 0 కి t మారుతుంది.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\left[\tan^{-1} t\right]_1^0$$

$$= -\left[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1\right]$$

$$= -\left[0 - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(b)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta\, d\theta}{1 - 2\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)}$$

$\sin^2\theta = t$ అనుకొనుము.

అప్పుడు $2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dt$ i.e, $\sin 2\theta\, d\theta = dt$

$\theta = 0$ అయిన, $t = 0$ and $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$. 0 నుంచి $\frac{\pi}{2}$ కు θ మారితే, కొత్త చలరాశి k. 0 నుంచి 1 కి మారుతుంది.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 - 2t(1-t)}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\, dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}\, dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= \left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(c) మనకు తెలియునదేమనగా $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$ అని మనకు తెలుసు.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+\dfrac{4\left(1-\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)}{\left(1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{9+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\,dx \qquad (1)$$

$\tan\dfrac{x}{2} = t$ అయిన

$\sec^2\dfrac{x}{2}\,dx = 2dt$ అగును. $x = 0,\ t = 0$ అయినప్పుడు, మరియు $x = \dfrac{\pi}{2},\ t = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{9+t^2}\,dt \quad [\text{From (1)}]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$$

27.3 నిశ్చిత సమాకలని కొన్ని ధర్మాలు

a, b ల మధ్య అవధులుగా గల్గిన నిశ్చిత సమాకలని $f(x)$ ను ఇది వరకు నిర్వచించిన విధము

$$\int_a^b f(x)\,dx + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),\ \text{Where } \frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(x)\right] = f(x),$$

సమాకలని దిగువ, ఎగువ అవధులు వరుసగా a, b లు. అటువంటి నిశ్చిత సమాకలని ముఖ్యంగా ఉపయోగపడే ధర్మాలను కింద సూచిద్దాం.

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$ where $a < c < b$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^c f(2a-x)\,dx$

(vi) $\int_a^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{if } f(2a-x) = -f(x) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{if } f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

(viii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{if } f(x) \text{ బేసి ప్రమేయమైతే} \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{if } f(x) \text{ సరి ప్రమేయమైతే} \end{cases}$

నిశ్చిత సమాకలనిలో ఎక్కువ భాగం పైన ఉదహరించబడిన ధర్మాలతో తేలికగా గణనం చేయవచ్చు. లేనియెడల అవి చాలా కష్టమగును.

నిశ్చిత సమాకలనిని గణించడానికి పై ధర్మాలను ఉపయోగించే ఉదాహరణలు కింద ఇవ్వబడినవి.

ఉదాహరణ 27.8 :

(a) $\int_0^{\pi/2} \log|\tan x|\,dx = 0$ అని చూపుము.

(b) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx = \pi$ అని చూపుము.

సాధన (a) Let $I = \int_0^{\pi/2} \log|\tan x|\, dx$

$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx,$ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\cot x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\tan x)^{-1}\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \log \tan x\, dx$$

$$= -1$$

$2I = 0$ (i) వల్ల

i.e. $I = 0$ or $\int_0^{\pi/2} \log|\tan x|\, dx = 0$

(b) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\, dx \quad \ldots. (i)$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin(\pi - x)}\, dx \quad \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1 + \sin x}\, dx \qquad \text{.... (ii)}$$

(i) మరియు (ii) లను కలపగా

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x + \pi - x}{1 + \sin x}\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x}\, dx$$

or $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left(\sec^2 x - \tan x \sec x\right) dx$$

$$= \pi \left[\tan x - \sec x\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi \left[(\tan x - \sec \pi) - (\tan \theta - \sec \theta)\right]$$

$$= \pi \left[(0\ (-1) - (0 - 1)\right]$$

$$I = \pi$$

ఉదాహరణ 27.9 : గణించండి.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}}$ (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$

సాధన (a) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}}\, dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\, dx$$

(ధర్మాన్ని ఉపయోగించి) $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx \qquad \text{.... (ii)}$$

(i) మరియు (ii), లను కూడగా

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1.dx$$

$$= [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

i.e, $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

(b) Let $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx \right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x \sin x}\, dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) మరియు (ii), లను కూడగా

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x \cos x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x + \cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$$

$$= 0$$

$$I = 0$$

ఉదాహరణ **39.10** : (a) $\int_{-a}^{a} \frac{x e^{x^2}}{1+x^2}\ dx$ (b) $\int_{-3}^{3} |x+1|\ dx$

సాధన (a) $f(x) = \frac{xe^{x^2}}{1+x^2}$

$$f(-x) = -\frac{xe^{x^2}}{1+x^2}$$

$$= -f(x).$$

$\therefore$ $f(x)$, x యొక్క బేసి ప్రమేయము.

$$\int_{-a}^{a} \frac{x e^{x^2}}{1+x^2}\ dx = 0.$$

(b) $\int_{-3}^{3} |x+1|\ dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ if } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ if } x < -1 \end{cases}$$

$\therefore$ $\int_{-3}^{3} |x+1|\ dx = \int_{-3}^{-1} |x+1|\ dx + \int_{-3}^{3} |x+1|\ dx$, (iii) ధర్మాన్ని ఉపయోగిస్తే

$$= \int_{-3}^{-1} (-x-1)\ dx + \int_{-1}^{3} (x+1)\ dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} - x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1 = 10$$

ఉదాహరణ **27.11** : $\int_{0}^{\pi/2} \log(\sin x)\ dx$

సాధన: $I = \int_{0}^{\pi/2} \log(\sin x)\ dx$

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx, \text{ (iv ధర్మాన్ని ఉపయోగిస్తూ)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\, dx$$

(i) మరియు (ii) లను కూడగా

$$2I = \int_0^{\pi/2} [\log(\sin x) + \log(\cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\, dx - \int_0^{\pi/2} \log(2)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$

మరల $I_1 = \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\, dx$

$2x = t \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$

ఇక్కడ $x = 0, t = 0$ మరియు $x = \frac{\pi}{2}, t = \pi$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\, dt, \quad \text{(iv ధర్మాన్ని ఉపయోగిస్తూ)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx \qquad \text{(i ధర్మాన్ని ఉపయోగిస్తూ)}$$

$\therefore \quad I_1 = I,$ (i నుండి)

ఈ విలువను (iii) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2 \qquad \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

అందువల్ల, $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

అభ్యాసం 27.2

కింది సమాకలనులను గణించండి.

1. $\int_0^1 x e^{x^2}\, dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$
3. $\int_0^1 \frac{2x + 3}{5x^2 + 1}\, dx$
4. $\int_{-5}^{5} |x + 2|\, dx$
5. $\int_0^2 x\sqrt{2 - x}\, dx$
6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx$
8. $\int_{-a}^{a} \frac{x^3 e^{x^4}}{1 + x^2} dx$
9. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x\, dx$
10. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$

27.4 సమాకలనం - అనువర్తనాలు

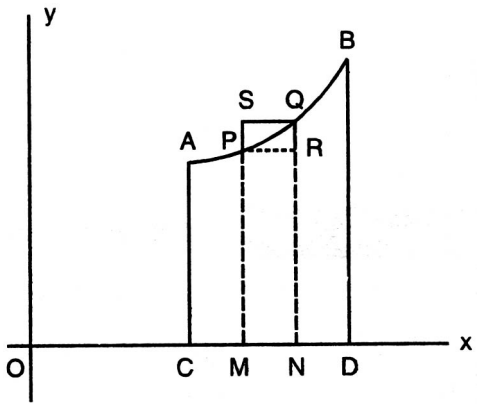
$[a, b]$ అంతరంపై f, g లు రెండు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు. $x \in [a, b]$ కు $f(x) \leq g(x)$ అయ్యేటట్లు వక్రం $y = f(x)$, మరియు $y = g(x)$ వక్రాలు $[a, b]$ పై ఖండించుకోవు. $[a, b]$ మీద $y = f(x)$, ఎగువ పరిబద్ధం, $y = g(x)$ దిగువ పరిబద్ధంగా గల రేఖా చిత్రం, మరియు $x = a$, $x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యాన్ని ఎలా కనుక్కోగలమనేదే ఇప్పటి ప్రశ్న.

ఎడమ హద్దు $x = a$ వద్దగాని లేదా కుడి హద్దు $x = b$ వద్దగాని లేదా రెండింటి వద్దగాని, ఎగువ వక్రం $y = f(x)$, దిగువ వక్రం $y = g(x)$ లు ఖండించుకుంటే ఏం సంభవిస్తుందో చూడండి.

27.4.1 వక్రం, x-అక్షం మరియు అక్షాంశాలతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

$y = f(x)$ అనే AB వక్రం, మరియు $x = a, x = b$ అనే రెండు నిరూపకాలు వరుసగా CA, DB లు.

$a \le x \le b$ అంతరంలో $y = f(x)$ ఒక ఆరోహణ ప్రమేయం అనుకోండి



పటం 27.6

ఆ వక్రం మీద $p(x, y)$ ఏదైనా బిందువు.

దాని సామీప్య బిందువు $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ అనుకోండి. x-అక్షానికి లంబంగా PM మరియు QN లను గీయండి.

ఇక్కడ మన పరిశీలనలో x మారిన ఎడల (ACMP) వైశాల్యం కూడా మారుతున్నదని గమనించండి.

$A = $ ACMP వైశాల్యం.

అప్పుడు ACNQ వైశాల్యం $= A + \delta A$, PMNQ వైశాల్యం $=$ ACNQ వైశాల్యం $-$ ACMP వైశాల్యం

$$= A + \delta A - A$$

$$= \delta A$$

PRQS దీర్ఘచతురస్రాన్ని పూర్తిచేద్దాం. PMNR మరియు SMNQ దీర్ఘచతురస్రాల మధ్య PMNQ వైశాల్యం ఇమిడి ఉన్నది.

δx మరియు $(y+\delta y)\,\delta x$ ల మధ్య δA ఉన్నది. $\Rightarrow$ y మరియు $(y+\delta y)$ ల మధ్య $\frac{\delta A}{\delta x}$ ఉంది.

$\delta x \to 0$ మరియు $\delta y \to 0$ అయినప్పుడు అవధి యొక్క స్థితి $Q \to P$ అవుతుంది.

y మరియు $\lim_{\delta y \to 0} (y+\delta y)$ ల మధ్య $\lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta A}{\delta x}$ ఉంటుంది.

$$\frac{dA}{dx} = y$$

$x = a$ నుంచి $x = b$ వరకు గల అవధుల మధ్య, x దృష్ట్యా రెండు వైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int_a^b y\, dx = \int_a^b \frac{dA}{dx}, dx = [A]_a^b$$

= ($x = b$ అయినప్పటి వైశాల్యం) – ($x = a$ అయినప్పుడు వైశాల్యం)

= (ACDB) వైశాల్యం – 0

= ACDB వైశాల్యం

అందువల్ల (AC BD) వైశాల్యం $= \int_a^b f(x)\, dx$

వక్రం $y = f(x)$, x-అక్షం, సరళ రేఖలు $x = a$, $x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యం

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{లేదా} \quad \int_a^b y\, dx\ .$$

$y = f(x)$ ఒకే ఒక విలువగల అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం, $a \le x \le b$ అంతరంలో y యొక్క గుర్తు మారదు.

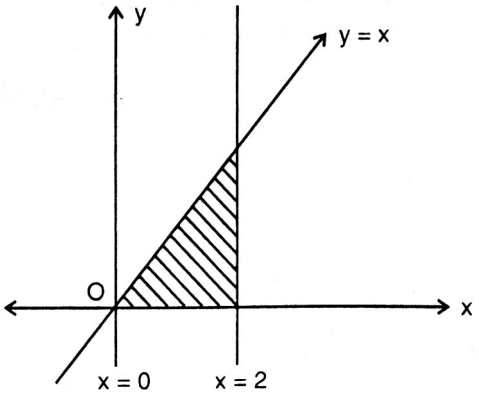
ఉదాహరణ 27.12 : $y = x$ వక్రంతోను, x-అక్షం, $x = 0, x = 2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన. దత్తవక్రంతోను, x- అక్షం, $x = 0, x = 2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం పటం 27.7లో చూపినట్లు ఉంటుంది.

కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^2 x\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$= 2 - 0 = 2$ చదరపు యూనిట్లు.



పటం 27.7

ఉదాహరణ 27.13 : $y = e^x$ వక్రంతోను, x-అక్షం, $x = 0, x = a > 0$ నిరూపకాలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తవక్రం $y = e^x$

x-అక్షం, $x = 0, x = a$ సమీకరణాలు సూచించే వక్రాలతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

$$\int_0^a e^x\, dx$$

$$= \left[e^x\right]_0^a$$

$= \left(e^a - 1\right)$ చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 27.14 $y = c\cos\left(\frac{x}{c}\right)$ వక్రంతోను, x-అక్షం మరియు $x = 0, x = a$ $2a \le c.\pi$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తవక్రం $y = c\cos\left(\frac{x}{c}\right)$

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^a y\, dx$

$$= \int_0^a c\cos\left(\frac{x}{c}\right) dx$$

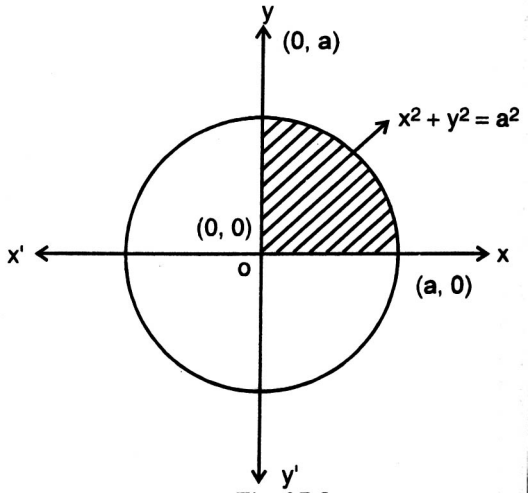
$$= c^2\left[\sin\left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^a$$

$$= c^2\left(\sin\left(\frac{a}{c}\right) - \sin 0\right)$$

$$= c^2 \sin\left(\frac{a}{c}\right)$$ చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 27.15 మొదటిపాదంలో x- అక్షం, $x^2 + y^2 = a^2$, వృత్తాలతో ఆ వృతమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తవక్రము $x^2 + y^2 = a^2$ ఒక వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. దాని కేంద్రము, వ్యాసార్ధాలు వరుసగా $(0,\ 0)$ మరియు 'a', x-అక్షము, 'a', 0 మరియు $x = a$ లతో పరిబద్ధమైన వృత్తం $x^2 + y^2 = a^2$ కు వైశాల్యం కనుక్కోవాలి.



పటం 27.8

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^a y\, dx$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx,$$

($\because$ y is positive in the first quadrant)

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \left(\because \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2},\ \sin^{-1}0 = 0\right)$$

$= \frac{\pi a^2}{4}$ చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 27.16 దిగువ ఇచ్చిన వక్రాలతోను, x-అక్షము. నిరూపకాలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

(i) $xy = c^2, x = a, x = b, a > b > 0$

(ii) $y = \log_e x, x = a, x = b, b > a > 1$

సాధన : ఇచ్చట మనం ఇచ్చిన వక్రంతోను, . అక్షము, నిరూపకాలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోబోతున్నాం.

$xy = c^2$ లేదా $y = \frac{c^2}{x}$

వైశాల్యం $= \int_b^a y\ dx$ $(\because a > b)$

$$= \int_b^a \frac{c^2}{x}\ dx$$

$$= c^2\ [\log x]_b^a$$

$$= c^2\ (\log a - \log b)$$

$$= c^2\ \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

(iii) ఇక్కడ $y = \log_e x$

వైశాల్యం $= \int_a^b \log_e x \, dx$ $(\because b > a > 1)$

$= \left[x \log_e x\right]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx$

$= b \log_e b - a \log_e a - \int_a^b dx$

$= b \log_e b - a \log_e a - \left[x\right]_a^b$

$= b \log_e b - a \log_e a - b + a$

$= b (\log_e b - 1) - a (\log_e a - 1)$

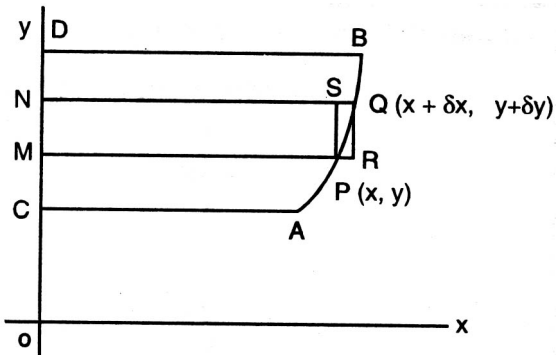
$= b \log_e \left(\frac{b}{e}\right) - a \log_e \left(\frac{a}{e}\right)$ $(\because \log_e e = 1)$

అభ్యాసం 27.3

1. $y = x^2$ వక్రంతోను, x-అక్షం, $x = 0$, $x = 2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.
2. $y = 3x$ వక్రంతోను, x-అక్షం, $x = 0, x = 3$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.
3. $y = e^x$ వక్రంతోను, x-అక్షం, $x = 0, x = a, a > 0$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.
4. x-అక్షంతోను, $y = c \sin\left(\frac{x}{c}\right)$ వక్రంతోను, $x = 0$, $x = 2a \leq c\ \pi$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

39.4.2 $x = f(y)$ వక్రంతోను, y–అక్షం, $y = c, y = d$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

కొన్ని ప్రదేశాలను x ని y లో ప్రమేయంగా పరిగణించవచ్చు. $x = f(y)$ అనే AB వక్రం, $y = e, y = d$ రేఖలు వరుసగా CA, DB లు x-అక్షానికి సమాంతరంగా సూచిస్తాయి. వక్రం మీద $p(x, y)$ ఏదైనా బిందువు. దాని సామీప్య బిందువు $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ అనుకోండి. P, Q ల నుంచి PM, QN లు y-అక్షానికి లంబంగా గీయండి. y మారే కొద్దీ, ACMP వైశాల్యం కూడా మారుతుంది. ACMP వైశాల్యాన్ని A తో సూచిస్తాం. అప్పుడు ACNQ వైశాల్యం $A + \delta A$ అవుతుంది.



పటం 27.9

PMNQ వైశాల్యం = ACNQ వైశాల్యం – ACMP వైశాల్యం

$= A + \delta A - A$

$= \delta A$

PQRS దీర్ఘచతురస్రాన్ని పూర్తి చేయండి.

అప్పుడు PMNS మరియు RMNQ ల మధ్య నున్న వైశాల్యం, PMNQ వైశాల్యం అవుతుంది. $x\ \delta y$ మరియు $(x + \delta x)\ \delta y$ ల మధ్య δA ఉంటుంది.

$\Rightarrow \frac{\delta A}{\delta y}$ ఇది $x, x + \delta x$ ల మధ్య ఉంటుంది. $\delta x \to 0,\ \delta y \to 0$ అయినప్పుడు అవధి యొక్క స్థితి $Q \to P$ అవుతుంది.

x మరియు $\underset{\delta x \to 0}{Lt}\ (x + \delta x)$ ల మధ్య $\underset{\delta y \to 0}{Lt} \frac{\delta A}{\delta y}$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{dA}{dy} = x$$

c నుంచి d అవధుల మధ్య రెండు వైపులా y దృష్ట్యా సమాకలనం చేయగా

$$\int_c^d x\, dy = \int_c^d \frac{dA}{dy}.\, dy$$

$$= [A]_c^d$$

$= (y = d$ అయినప్పుడు వైశాల్యం$) - (y = c$ అయినప్పుడు వైశాల్యం$)$

$=$ (ACDB వైశాల్యం) $- 0$

$=$ ACDB వైశాల్యం.

అందువల్ల (ACDB) వైశాల్యం $= \int_c^d x\, dy = \int_c^d f(y)\, dy$

$x = f(y)$ వక్రంతోను, y-అక్షం, $y = c, y = d$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

$$\int_c^d x\, dy \qquad \text{లేదా} \qquad \int_c^d f(y)\, dy$$

$x = f(y)$ ఒకే ఒక విలువగల అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం. మరియు $c \le y \le d$ అంతరంలో x యొక్క గుర్తు మారదు.

ఉదాహరణ 27.17 : $x = y$ వక్రంతోను, y-అక్షం, $y = 0, y = 3$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తవక్రము $x = y$

ఆవక్రం, y-అక్షం, $y = 0, y = 3$ సరళరేఖలతో పరిబద్ధ వైశాల్యం

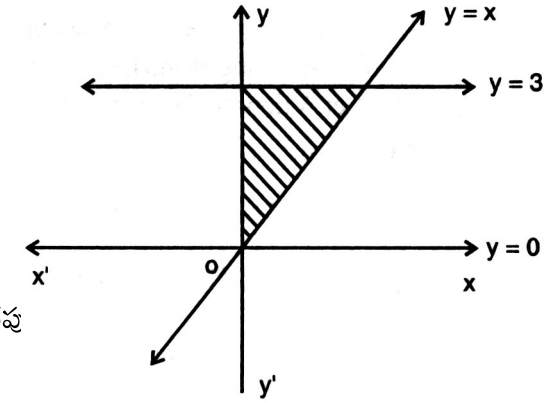
$$= \int_0^3 x\, dy$$

$$= \int_0^3 y\, dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3$$

$$= \frac{9}{2} - 0$$

$$= \frac{9}{2} \text{ చదరపు}$$



పటం 27.10

ఉదాహరణ 27.18 : $x = y^2$ వక్రంతోను, y-అక్షం, $y = 0, y = 2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : వక్రం సమీకరణం $x = y^2$

$\therefore$ ఆ వక్రం, y-అక్షం, $y = 0, y = 2$ రేఖల మధ్య పరిబద్ధ వైశాల్యం

$$= \int_0^2 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 0$$

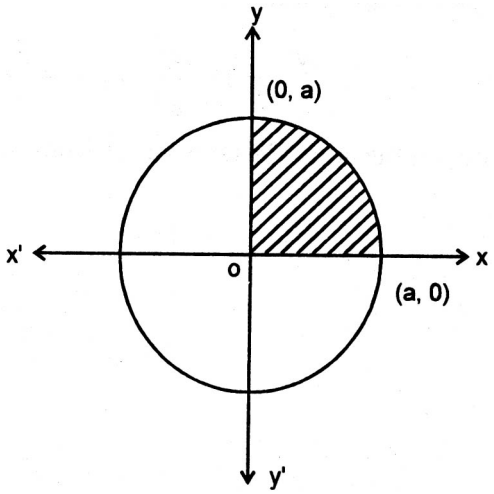
$$= \frac{8}{3} \text{ చదరపు యూనిట్లు.}$$

ఉదాహరణ 27.19 : $x^2 + y^2 = a^2$ అనువృతంతోను, మొదటి పాదంలో y-అక్షంతోను పరిబద్ధ ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తవక్రం $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. దాని కేంద్రం (0, 0) మరియు వ్యాసార్ధం "a" అందు వల్ల $x^2 + y^2 = a^2$ వక్రంతోను, y-అక్షం, $y = 0, y = a$ అక్షాలతోను పరిబద్ధ వైశాల్యం కనుక్కోవాలి.

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^a x \, dy$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy$$



పటం 27.11

(మొదటి పాఠంలో x ధనాత్మకం)

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ చదరపు యూనిట్లు.}$$

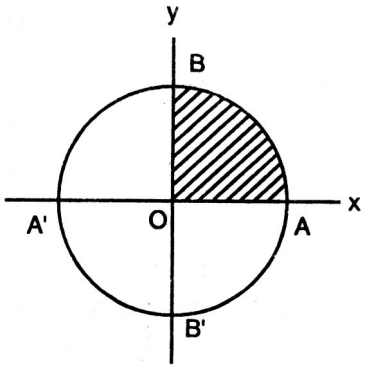
$$\left(\because \sin^{-1}0 = 0,\ \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}\right)$$

గమనిక. 39.15 ఉదాహరణలోని వైశాల్యంతో ఇది సమానం. కారణం ఏంటంటే దత్త వక్రం రెండు అక్షాల వద్ద సేష్ఠవంగా ఉంది. అటువంటి సమస్యలలో ఏ విధమైన నిబంధనలు ఇవ్వకపోతే, వైశాల్యాని మరొక పద్ధతిలో కనుక్కోవచ్చు.

ఉదాహరణ 27.20 : పరిబద్ధమైన వృత్తం

$x^2 + y^2 = a^2$ యొక్క సంపూర్ణ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్త వక్ర సమీకరణం $x^2 + y^2 = a^2$ ఈ వక్రం రెండు అక్షాలననుసరించి సౌష్ఠవంగా ఉన్నది. కనక మొదటి పాదంలో ఉన్న ప్రదేశ వైశాల్యానికి 4 రెట్లు చేస్తే వృత్తం యొక్క మొత్తం వైశాల్యం వస్తుంది.



పటం 39.12

వృత్త వైశాల్యం = 4 × OAB వైశాల్యం

$= 4 \times \frac{\pi a^2}{4}$ (39.15 మరియు 39.19 ఉదాహరణల నుంచి)

$= \pi a^2$ చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 27.21 : దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ యొక్క మొత్తం (సంపూర్ణ) ప్రదేశం వైశాల్యాని కనుక్కోండి.

సాధన దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

దీర్ఘవృత్తం రెండు అక్షాలను అనుసరించి సేష్ఠవంగా ఉంది. కనక మొదటి పాదంలోని వైశాల్యాన్ని 4 రెట్లుగా పెంచితే దీర్ఘవృత్తం మొత్తం ప్రదేశం వైశాల్యం వస్తుంది.

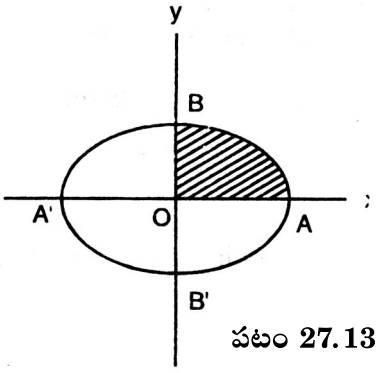
దీర్ఘవృత్తం మొత్తం ప్రదేశ వైశాల్యం

= 4 × OAB వైశాల్యం

మొదటి పాదంలో

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ or $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

OAB వైశాల్యంలో, x హద్దు 0 నుంచి a కు,



పటం 27.13

$\therefore$ వైశాల్యంలో $(OAB) = \int_0^a y\, dx$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right]$$

$$= \frac{ab\pi}{4}$$

అందువల్ల దీర్ఘవృత్తం మొత్తం వైశాల్యం

$$= 4 \times \frac{ab\pi}{4}$$

$= \pi\, ab$ చదరపు యూనిట్లు.

39.4.3 రెండు వక్రాల మధ్య గల వైశాల్యం

$[a, b]$ అంతరంలో $f(x) \geq g(x)$ అయ్యేటట్లు, $f(x), g(x)$ లు రెండు రుణేతర అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు ఉన్నాయనుకొందాం. $[a, b]$ లో ప్రతి x కు, $y = f(x)$ వక్రం, $y = g(x)$ వక్రం ఖండించుకోవు.

కుడి సరిహద్దు $x = b$ ని మరియు ఎడమ సరిహద్దు $x = a$ ల మధ్య మరియు $y = f(x)$ వక్రానికి దిగువన ఉన్న ప్రదేశం, మరియు $y = g(x)$ వక్రానికి పై భాగాన ఉన్న ప్రదేశంలతో పరిబద్ధమైన ప్రాంత వైశాల్యం కనుక్కోండి.

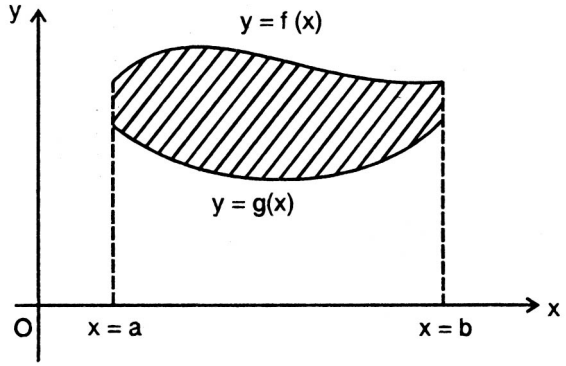
A = [$y = f(x)$ కిందనున్న వైశాల్యం] – [$y = g(x)$ కింద ఉన్న వైశాల్యం]

...(1)

$y = f(x)$ వక్రంతోను, x అక్షం, $x = a, x = b$ నిరూపకాలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం

వైశాల్యం నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి

కింది వైశాల్యం $y = f(x) = \int_a^b f(x)\,dx$ ...(2)



పటం 39.14

ఇదే విధంగా కింది వైశాల్యం $y = g(x) = \int_a^b g(x)\,dx$

...(3)

(1) సమీకరణంలో (2), (3) లను ఉపయోగించితే

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

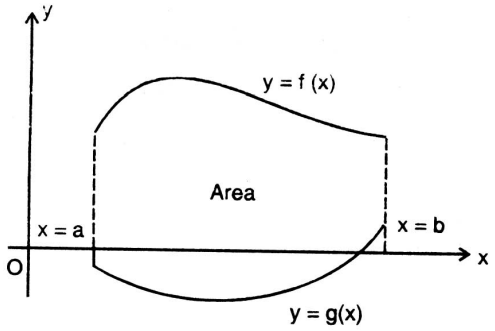
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad \ldots.(4)$$

ప్రమేయం 'g' రుణ విలువలు కూడా కలిగి ఉంటే ఏమి జరుగుతుంది? $f(x), g(x)$ ప్రమేయాల రెండింటిని x-అక్షం మీద ఉంటేటట్లుగా పరివర్తన చేస్తూ సూత్రాన్ని విస్తృత పరుద్దాం.

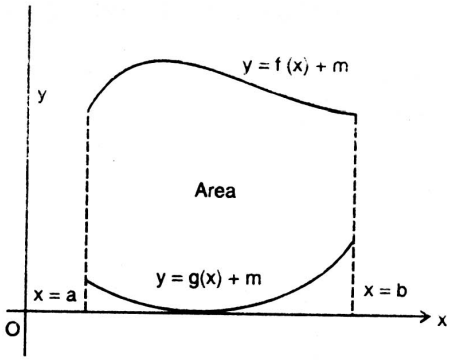
$[a, b]$ అంతరంలో $g(x)$ కు కనీస విలువ $(-m)$ కలప (పటం 39.15 చూడండి) వలెను. ఎందుకంటే

$$g(x) \geq -m \Rightarrow g(x) + m \geq 0$$

ఇప్పుడు $[a, b]$ మీద ఋణేతర ప్రమేయాలు $g(x) + m$ మరియు $f(x) + m$ లు ఉంటాయి. (పటం 39.16 చూడండి)



పటం 27.15



పటం 27.16

పరివర్తన వలన ఆ ప్రదేశం వైశాల్యంలో మార్పు ఏమీ ఉండదు. అందువల్ల $g(x) + m$ మరియు $f(x) + m$ ల మధ్య గల వైశాల్యం A, అంతకు ముందున్న g మరియు f ల మధ్య వైశాల్యంతో సమానం. మార్పు ఏమీ ఉండదు.

$A = [y = f(x) + m$ కింద వైశాల్యం$] - [y = g(x) + m$ కింద వైశాల్యం$]$ ...(5)

నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించుకొని,

వక్రం $y = f(x)$, x- అక్షం, $x = a, x = b$ నిరూపకాల మధ్య పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

$$y = f(x) + m = \int_a^b [f(x) + m]\, dx \qquad \ldots(6)$$

$$y = g(x) + m = \int_a^b [g(x) + m]\, dx$$

మరియు

$$A = \int_a^b [f(x) + m]\, dx - \int_a^b [g(x) + m]\, dx \qquad \ldots(7)$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

ఇది (4)తో సమానం. అందువల్ల

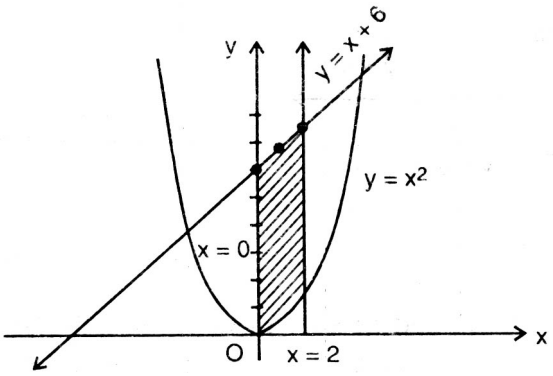
$[a, b]$ అంతరంలో $f(x), g(x)$ లు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలైతే $[a, b]$ లో ప్రతి x కి $f(x) \geq g(x)$ అయి, కుడి సరిహద్దు $x = b$ మరియు ఎడమ సరిహద్దు $x = a$ ల మధ్య, మరియు $y = f(x)$. వక్రానికి ఎగువ మరియు $y = g(x)$ కుడి హద్దుల మధ్య గల ప్రదేశం వైశాల్యం

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

ఉదాహరణ 27.22 : $y = x + 6$ కి ఎగువ బద్ధము, $y = x^2$ కి దిగువ బద్ధము, $x = 0, x = 2$ లు సరళ రేఖలతో ఆ వృతమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన సరళ రేఖా సమీకరణం $y = x + 6$ మరియు పరావలయ సమీకరణం $y = x^2$ లు y-అక్షం మూల బిందువు వద్ద సౌష్ఠవంగా ఉన్నది.

సరళరేఖలు $x = 0, x = 2$ ల చేత కూడా పరిబద్ధమైన ప్రదేశం



పటం 27.17

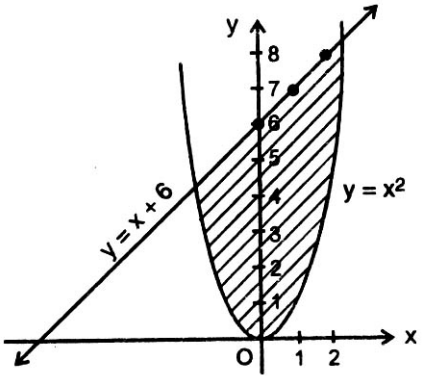
$$A = \int_0^2 (x+6)\, dx - \int_a^2 x^2\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3} \text{ చదరపు యూనిట్లు.}$$

ఉదాహరణ 27.23 : $y = x^2, y = x + 6$ వక్రాలతో ఆ వృతమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన $y = x + 6$ సరళ రేఖా సమీకరణం $y = x^2$ పరావలయాన్ని y-అక్షం మరియు మూల బిందువు వద్ద సౌష్ఠవంగా ఉన్నది. మరియు x-అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తూ x, y అక్షాలతో వరుసగా -6 మరియు 6 ల మధ్య అంతర ఖండం చేస్తున్నది. (పటం 27.18 చూడండి)



పటం 27.18

దిగువ హద్దు $y = x^2$ మరియు ఎగువ హద్దు $y = x + 6$ ల మధ్య ఆ ప్రదేశం ఉన్నదని చూచాం. A, B ల వద్ద రెండు వక్రాలు ఖండించు కొంటాయి. ఆ రెండు సమీకరణాలు సాధించగా

$$x^2 = x + 6 \quad \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3, -2$$

$x = 3$ అయిన $y = 9$ మరియు $x = -2$ అయితే $y = 4$

$$\therefore \text{ కావలసిన వైశాల్యం } = \int_{-2}^{3} \left[(x+6) - x^2 \right] dx$$

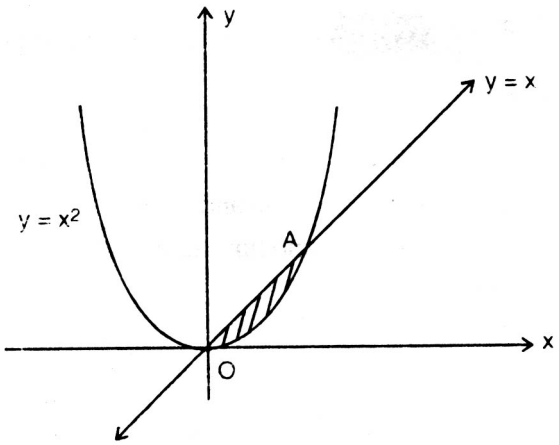
$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x}{3} \right]_{-2}^{3}$$

$$= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3} \right)$$

$$= \frac{125}{6} \text{ చదరపు యూనిట్లు.}$$

ఉదాహరణ 27.24 : $y = x^2, y = x$ వక్రాలతో ఆవృతమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = x$ సరళ రేఖ, $y = x^2$ పరావలయాన్ని ఖండించే బిందువుల x-నిరూపకాలు $x^2 = x$ తో నిర్ధిష్టం. కాబట్టి $x = 0, 1, [0, 1]$ లో ప్రతీ x కి, $x \leq x^2$ కావడంతో పరావలయం, ఇచ్చిన (దత్త) రేఖ, ఈ రెండింటితో ఆవృతమైన వైశాల్యం పటం 27.19 లో చూపినట్లు ఉంటుంది. సరళరేఖ x-అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తున్నది.



పటం 27.19

$$x^2 = x$$

$$\Rightarrow \quad x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0.1$$

ఇక్కడ $f(x) = x$. $g(x) = x^2$. $a = 0$ మరియు $b = 1$

కాబట్టి

$$\text{కావలసిన వైశాల్యం} = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

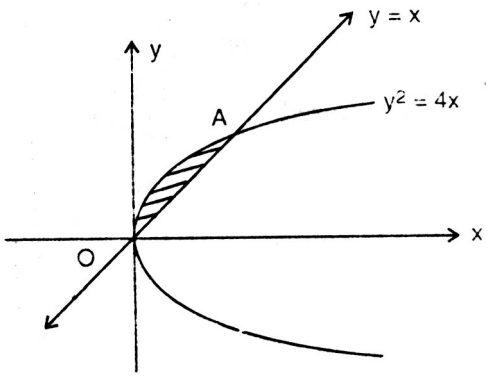
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{చదరపు యూనిట్లు.}$$

ఉదాహరణ 27.25 : $y^2 = 4x$, మరియు $y = x$ వక్రాలతో పరిబద్ధమైన వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : $y^2 = 4x$ పరావలయ సమీకరణం మూలబిందువు వద్ద x- అక్షం వద్ద సౌష్ఠవంగా ఉన్నది.

సరళరేఖా సమీకరణం $y = x$ మూల బిందువు గుండా పోతూ, x-అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తున్నది. (పటం 27.20 చూడండి)



పటం 27.20

పటంలో $y = x$ దిగువ హద్దును, $y^2 = 4x$ ఎగువ హద్దును సూచిస్తున్నది. ఈ రెండు వక్రాలు O మరియు A వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. ఈ రెండు సమీకరణాలు సాధించగా,

$$\frac{y^2}{4} - y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 0.4$$

$y = 0, x = 0$ మరియు $y = 4, x = 4$ అయితే

$f(x) = (4x)^{1/2}$. $g(x) = x.a = 0.b = 4$

కాబట్టి కావలసిన వైశాల్యము

$$= \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}} - x)\, dx$$

$$= \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

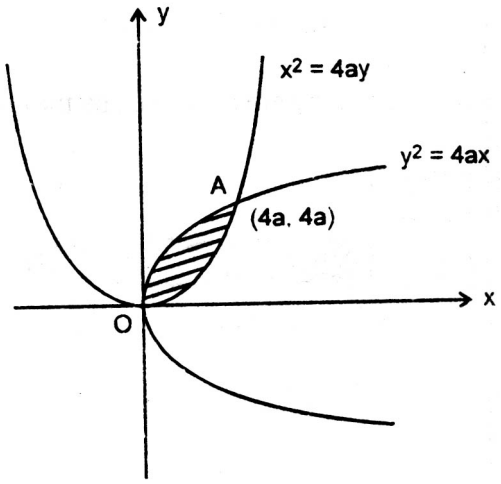
$$= \frac{32}{3} - 8$$

$$= \frac{8}{3} \text{ చదరపు యూనిట్లు.}$$

ఉదాహరణ 27.26 : $x^2 = 4ay$ మరియు $y^2 = 4ax$ రెండు పరావలయ మధ్య ఉమ్మడి ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : $y^2 = 4ax$ మరియు $x^2 = 4ay$ లు పరావలయ సమీకరణాలని మనకు తెలుసు. అవి x-అక్షం, y-అక్షాల వద్ద సౌష్ఠవంగా ఉంది.

ఆ రెండు పరావలయాల శీర్షాలు మూల బిందువు వద్ద ఉంటాయి. (పటం 27.19 చూడండి)



పటం 27.21

దిగువ హద్దు $x^2 = 4ay$, ఎగువ హద్దు $y^2 = 4ax$ లుగా గల్గిన ప్రదేశాన్ని పటంలో చూడగలం. ఆ రెండు వక్రాలు O, A అను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకొంటాయి. ఈ రెండు సమీకరణాలు సాధించగా,

$$\frac{x^4}{16a^2} = 4ax$$

$$\Rightarrow \quad x(x^3 - 64\ a^3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0.4a$$

(0, 0) మరియు (4a, 4a)

$f(x) = \sqrt{4ax}, g(x) = \frac{x^2}{4a}$, $a = 0$ మరియు $b = 4a$

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం

$$= \int_0^{4a} \left[\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a} \right] dx$$

$$= \left[\frac{2.2\sqrt{ax}^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{12a} \right]_0^{4a}$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3}$$

$$= \frac{16}{3} a^2$$ చదరపు యూనిట్లు.

అభ్యాసం 27.4

1. $x^2 + y^2 = 9$ వృత్త వైశాల్యం కనుక్కోండి

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ దీర్ఘవృత్త వైశాల్యం కనుక్కోండి

3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ దీర్ఘవృత్త వైశాల్యం కనుక్కోండి

4. $y^2 = 4ax$, మరియు $y = \frac{x^2}{4a}$ వక్రాలతో పరిబద్ధమైన వైశాల్యం కనుక్కోండి.

5. $y^2 = 4x$ మరియు $x^2 = 4y$ వక్రాలతో పరిబద్ధమైన వైశాల్యం కనుక్కోండి.

6. $y = x^2$ మరియు $y = x + 2$ లతో ఆవృతమైన వైశాల్యం కనుక్కోండి.

27.5 లఘుకరణ సూత్రాలు

ఈ విభాగంలో, ధన పూర్ణాంకాలు m, n లకు, $0, \frac{\pi}{2}$ ల మధ్య $\sin^n x, \cos^n x, \sin^m x, \cos^n x$ నిశ్చిత సమాకలనుల విలువ గణించడానికి లఘుకరణ సూత్రాలను రాబడతాం.

n ధన పూర్ణాంకం, $n \geq 2, 0, \frac{\pi}{2}$ ల మధ్య $\sin^n x$ నిశ్చిత సమాకలని విలువ గణించడం కోసం బాగా ఉపయోగకరమైన సూత్రాన్ని కింది సిద్ధాంతం ఇస్తుంది.

27.5.1 సిద్ధాంతం

n ధన పూర్ణాంకం, $n \geq 2$ అయినప్పుడు

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} \ldots\ldots \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, & n \text{ సరిసంఖ్య అయితే} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} \ldots\ldots \frac{2}{3}, & n \text{ బేసిసంఖ్య అయితే} \end{cases}$$

గమనిక : 1. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$

ఉదాహరణ 27.27 :

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx$ లను కనుక్కోండి

సాధన: (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx = \frac{4-1}{4} \cdot \frac{4-3}{4-2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx = \frac{7-1}{7} \cdot \frac{7-3}{7-2} \cdot \frac{7-5}{7-4}$

$$= \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}.$$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \frac{8-1}{8} \cdot \frac{8-3}{8-2} \cdot \frac{8-5}{8-4} \cdot \frac{8-7}{8-6} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{35}{256}\pi.$$

27.5.2 m, n పూర్ణాంకాలు అయినపుడు

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{2}{m+3} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot 1 & n \neq 1 \text{ బేసి సంఖ్య అయితే} \\ \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ సరి సంఖ్య, } m \text{ సరి సంఖ్య అయితే} \\ \frac{n-1}{m+n} \cdot \frac{n-3}{m+n-2} \cdots \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{2}{3} & n \text{ సరి సంఖ్య, } 1 \neq m \text{ బేసి సంఖ్య అయితే} \end{cases}$$

ఉదాహరణ 27.28 : కింది నిశ్చిత సమాకలనులను గణించండి.

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x\, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\,dx$

సాధన : పై సిద్ధాంతము నుండి

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x\,dx = \frac{5-1}{4+5} \cdot \frac{5-3}{4+5-2} \cdot \frac{1}{4+1}$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{315}$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^4 x\,dx = \frac{4-1}{5+4} \cdot \frac{4-3}{5+4-2} \cdot \frac{5-1}{5} \cdot \frac{5-3}{5-2}$

$$= \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{315}$$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\,dx = \frac{4-1}{6+4} \cdot \frac{4-3}{6+4-2} \cdot \frac{6-1}{6} \cdot \frac{6-3}{6-2} \cdot \frac{6-5}{6-4} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{512}\,\pi.$$

ఉదాహరణ 27.29 : $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^6 x\,dx$ కనుక్కోండి

$f(x) = \sin^4 x \cos^6 x$ అనుకొందాము

$f(2\pi - x) = f(\pi - x) = f(x)$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^6 x\,dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\,dx$$

$$= 4.\frac{6-1}{4+6}\cdot\frac{6-3}{4+6-2}\cdot\frac{6-5}{4+6-4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{128}\,\pi.$$

ఉదాహరణ 27.30 : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\ \cos^4 x\,dx$ కనుక్కోండి

సాధన : $f(x) = \sin^2 x\ \cos^4 x$ అనుకొందాం f సరి ప్రమేయము కనక

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} f(x)\,dx$$

అందువల్ల $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\cos^4 x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

$$= 2.\frac{4-1}{2+4}\cdot\frac{4-3}{2+4-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 2.\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

అభ్యాసం 27.5

I. కింది సమాకలనులను గణించండి.

1. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$
2. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$
3. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^7 x\sin^2 x\,dx$
4. $\int_{0}^{\pi/4} \sin^3\theta\,d\theta$

కీలక పదాలు

- $[a, b]$ లో f అవిచ్ఛిన్నం, మరియు F ని f కి ప్రత్యవకలజం (పూర్వగం) అంటాం. అప్పుడు

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

- $[a, b]$ లో f, g లు అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు $'c'$ స్థిరసంఖ్య, అప్పుడు

(i) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

- వక్రం $y = f(x)$, x-అక్షం, $x = a, x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

$$x = a, x = b \text{ is } \int_a^b f(x)\,dx \text{ or } \int_a^b y\,dx$$

$y = f(x)$ ఒకే ఒక విలువ గల అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం మరియు $a \le x \le b$ అంతరంలో y యొక్క గుర్తు మారదు.

- $[a, b]$ అంతరంలో $f(x), g(x)$ లు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలయి, $[a, b]$ లో ప్రతి x కి, $f(x) \ge g(x)$ అయి, కుడి సరిహద్దు $x = b$ మరియు ఎడమ సరిహద్దు $x = a$ ల మధ్య మరియు $y = f(x)$ వక్రానికి ఎగువ హద్దు మరియు $y = g(x)$ కు దిగువ హద్దు మధ్యగల ప్రదేశ వైశాల్యం

$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ అవుతుంది.

- n ధనపూర్ణాంకం, $n \geq 2$ అయినపుడు

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\ldots\ldots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ సరి ప్రమేయం అయితే} \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\ldots\ldots\frac{2}{3}\cdot & n \text{ బేసి ప్రమేయం అయితే} \end{cases}$$

- $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$, n ధన పూర్ణాంకం

- $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{m+n}\cdot\frac{n-3}{m+n-2}\ldots\frac{2}{m+3}\cdot\frac{1}{m+1}\cdot\ 1 \neq n$

బేసి సంఖ్య అయితే

$$\frac{n-1}{m+n}\cdot\frac{n-3}{m+n-2}\ldots\frac{1}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m}\ldots\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2}$$

n సరి సంఖ్య, m సరి సంఖ్య అయితే

$$\frac{n-1}{m+n}\cdot\frac{n-3}{m+n-2}\ldots\frac{1}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m}\ldots\frac{2}{3}$$

n సరి సంఖ్య, $1 \neq m$ బేసి సంఖ్య అయితే

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- *http:// www.wikipedia.org*
- *http:// mathworld.wolfram.com*

సాధనా అభ్యాసం

1. కింది సమాకలనులకు మొత్తం తాలూకు అవధిని (1 నుంచి 5 వరకు) గణించండి.

1. $\int_a^b x\, dx$ 2. $\int_a^b x^2\, dx$ 3. $\int_a^b \sin x\, dx$

4. $\int_a^b \cos x\, dx$ 5. $\int_0^2 (x^2 + 1)x\, dx$

2. కింది సమాకలనులను (6 నుంచి 25 వరకు) గణించండి

6. $\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\, dx$

8. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\, dx$

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

10. $\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

12. $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 4}\, dx$

13. $\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos\theta}\, d\theta$

14. $\int_0^{\pi/4} 2\tan^3 x\, dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$

16. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\, dx$

17. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\cos^5\theta\, d\theta$

18. $\int_0^{\pi} x \log\sin x\, dx$

19. $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x)\, dx$

20. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

21. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx$

22. $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)\, dx$

23. $\int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x\, dx$

24. $\int_0^2 x(x^2 + 1)^3\, dx$

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము



జవాబులు

అభ్యాసం 27.1

1. $\frac{35}{2}$
2. $e-\frac{1}{e}$
3. (a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ (b) 2 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{64}{3}$

అభ్యాసం 27.2

1. $\frac{e-1}{2}$
2. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{1}{3}$
4. 29
5. $\frac{24\sqrt{2}}{15}$
6. $\frac{\pi}{4}$
7. $-\frac{\pi}{2}\log 2$
8. 0
9. 0
10. $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\log 2\right]$

అభ్యాసం 27.3

1. $\frac{8}{3}$ sq.units
2. $\frac{27}{2}$ sq.units
3. $\frac{e^{2a}-1}{2}$ sq.units
4. $c^2\left(1-\cos\frac{a}{c}\right)$

అభ్యాసం 27.4

1. 9π sq.units
2. 6π sq.units.

3. 20π sq.units
4. $\frac{16}{3}a^2$ sq.units
5. $\frac{16}{3}$ sq.units
6. $\frac{9}{2}$ sq.units

అభ్యాసం 27.5

1. $\frac{63}{512}\pi$
2. $\frac{3}{256}\pi$
3. $\frac{16}{315}$
4. $\frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}$

సాధనా అభ్యాసం

1. $\frac{b^2 - a^2}{2}$
2. $\frac{b^3 - a^3}{3}$
3. $\cos a - \cos b$
4. $\sin b - \sin a$
5. $\frac{14}{3}$
6. $\frac{\pi a^2}{4}$
7. 1
8. $\frac{1}{2}\log 2$
9. $\frac{\pi}{4}$
10. $\frac{\pi}{2} - 1$
11. $\frac{\pi}{2}$
12. $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$

13. $\frac{\pi}{4}$

14. $1 - \log 2$

15. $\frac{2}{3}$

16. $\frac{16}{15}\left(2 + \sqrt{2}\right)$

17. $\frac{64}{231}$

18. $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$

19. $-\pi \log 2$

20. $\frac{\pi^2}{4}$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$

22. $\frac{\pi}{8}\log 2$

23. $\frac{1}{96}$

24. 78

అధ్యాయం

28

అవకలన సమీకరణాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తర్వాత, నీవు తెలుసుకొన గలిగిన విషయాలు :

- అవకలన సమీకరణ నిర్వచనం, దాని పరిమాణం మరియు తరగతి ;
- అవకల సమీకరణాల పరిమాణం, మరియు తరగతిని కనుగొనుట;
- యివ్వబడిన సంఘటనల క్రమము (పరిస్థితి) నుంచి అవకలన సమీకరణాన్ని రూపొందించటం;
- అవకలన సమీకరణాల "సాధారణ సాధన" మరియు "ప్రత్యేక సాధన"లు ఉదాహరణల ద్వారా వివరించుట
- క్రింది రూపంలో ఉన్న అవకలన సమీకరణాలను విశదపరచండి.

  (i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ (ii) $\frac{dy}{dx} = f(x)\ g(y)$ (iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$

  (iv) $\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = \mathrm{Q}(x)$ (v) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$
- దిగువ ఉదహరించబడిన పరిస్థితిని అనుసరించి అవకలన సమీకరణాల ప్రత్యేక సాధనను కనుగొనండి.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- బీజీయ ప్రయేయాలు, అకరణీయ ప్రమేయాలు, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలుకు సంబంధించిన సమాకలం.

పరిచయం

భౌతిక శాస్త్రం, రసాయన శాస్త్రం మొదలైన అనేక విభాగాలలో అవకలన సమీకరణాల ఉపయోగం ఉంటుంది.

ప్రస్తుత విభాగంలో ఒక సాధారణ అవకలన సమీకరణం నిర్వచనం, దత్తవక్రాలు లేదా ఉపరితలాల కుటుంబం నుంచి వీటిని రూపొందించే విధానాన్ని తెలుసుకుంటాం. అంతేగాక సాధానణ అవకలన సమీకరణపు తరగతి పరిమాణాన్ని నిర్వర్తిస్తాం.

ఒక అవకలన సమీకరణంలో ఒకేఒక స్వతంత్ర చలరాశి ఉంటే దానిని సాధారణ అవకలన సమీకరణంలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులు ఉంటే దానిని పాక్షిక అవకలన సమీకరణం అంటాం. కనుక ఒక సాధారణ అవకలన సమీకరణంలో సాధారణ అవకలజాలు ఉంటాయి. ఒక పాక్షిక అవకలన సమీకరణంలో పాక్షిక అవకలజాలు ఉంటాయి.

వ్యుత్పన్నం మార్పురేటు కనుక ఒకానొక వ్యవస్థ తాలుకు మార్పు గాని చలనం గాని వివరించే అవకలన సమీకరణాలు ఆవిర్భవించడం సహజం. రేడియో ధార్మిక క్షీణత న్యూటన్ శీతలీకరణ న్యాయం, రసాయనిక ప్రతిచర్యలు, కణగమనం, గృహగమనం వగైరా సమస్యలలో అవకలన సమీకరణాలు తటస్థపడతాయి.

28.1 అవకలన సమీకరణాలు

ముందు ఉదహరించిన పరిచయం ప్రకారం అనేక భౌతికశాస్త్ర, జీవ, సాంఘిక శాస్త్రాలలోని ముఖ్యసమస్యలను, బీజీయ పరిక్రియలు నిర్వచించినప్పుడు అవకలజవలలతో నిండి సమీకరణములకు దారితీయును.

మొ॥ ఒకటి, అంతకు మించిన అవకలన గుణకములతో సమీకరణాలు ఏర్పడతాయి.

నిర్వచనం : ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశుల దృష్ట్యా కలిగిన దాని అవకలజాలతో ఏర్పడిన సమీకరణాన్ని "అవకలన సమీకరణం" అంటాం. ఉదాహరణకు

(i) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(iii) $xdx + ydy = 0$

(iv) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$

(iv) $y = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

28.2 అవకలన సమీకరణ పరిమాణం, తరగతి

పరిమాణం : ఒక అవకలన సమీకరణంలోని అత్యధిక పరిమాణం ఉన్న అవకలజ పరిమాణాన్నే అవకలన సమీకరణ పరిమాణం అంటాం.

తరగతి : ఒక బహుపది సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణపు అవకలజపు గరిష్ఠ ఘాతాన్ని ఆ అవకలన సమీకరణపు తరగతి అంటాం.

ఉదాహరణ

అవకలన సమీకరణాలు	పరిమాణం	తరగతి
(i) $\frac{dy}{dx} = \sin x$	ఒకటి	ఒకటి
(ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y^2 = 5x$	ఒకటి	రెండు
(iii) $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + t^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 = 0$	రెండు	రెండు
(iv) $\frac{d^3v}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$	మూడు	ఒకటి
(v) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + x^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5 = \sin x$	నాలుగు	రెండు

ఉదాహరణ 28.1 : కింది అవకలన సమీకరణం పరిమాణం, మరియు తరగతి కనుక్కోండి.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=0$$

సాధన : ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=0 \quad \text{లేదా} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$$

ఈ $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$ పదం భిన్నాంక సూచిక ను కల్గి యున్నది. అందువలన భిన్నాంక సూచికను తొలగించటానికి మొట్టమొదటగా ఇరువైపులా వర్గము చేయ వలెను.

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

అందువల్ల అవకలన సమీకరణ పరిమాణం 2, తరగతి కూడా 2.

గమనిక : అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి కనుగొనే ముందు, వ్యుత్పన్నానికి సంబంధించిన భిన్నాలను, కరణులను తొలగించవలెను.

28.3 సరళ మరియు అసరళ అవకలన సమీకరణాలు

నిర్వచనం : ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశుల దృష్ట్యా కలిగిన దాని అవకలజాలతో ఏర్పడిన సమీకరణాన్ని అవకలన సమీకరణం అంటాం. అనగా అస్వతంత్ర చలరాశి, దాని అవకలజాలు ప్రథమ తరగతికి మాత్రమే చెందాయి. కనక ఇటువంటి సమీకరణాలను ఏకఘాతీయ సమీకరణాలు అంటాం.

సరళ (ఏకఘాతీయ) అవకలన సమీకరణం అనగా ఒక అవకలన సమీకరణంలో ఆధారపడిన చలరాశులు, దాని నుంచు వచ్చు అవకలజాలు ఒక ప్రథమ తరగతిలో మాత్రమే ఏర్పడునట్టివి. అవి గుణిజాలలో ఏర్పడవు.

సరళ సమీకరణులు కానటువంటి అవకలన సమీకరణాలను అసరళ ఘాతీయ సమీకరణాలు అంటాం.

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ మరియు

$\cos^2 x.\frac{d^3y}{dx^3} + x^3.\frac{dy}{dx} + y = 0$ లు సరళ (ఏకఘాతీయ) సమీకరణాలు.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{x} = \log x$ రూపంలో ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని అసరళ ఘాతీయ సమీకరణం అంటాం. ఇచ్చట $\frac{dy}{dx}$ యొక్క తరగతి 2.

ఇంకా $y\frac{d^2y}{dx^2} - 4 = x$ అను అవకలన సమీకరణం అసరళఅవకలన సమీకరణం అవుతుంది.

ఎందుకంటే అస్వతంత్ర చలరాశి y, దాని యొక్క అవకలని (వ్యుత్పన్నం) $\frac{d^2y}{dx^2}$ తో గుణించబడినది గనుక అసరళ అవకలన సమీకరణం అవుతుంది.

28.4 అవకలన సమీకరణ నిర్మాణం

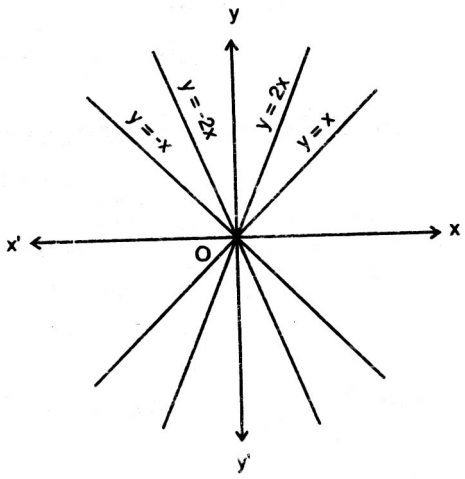
మూలబిందువు గుండా పోయే సరళ రేఖల కుటుంబాన్ని ఆలోచించండి. (పటం 28.1చూడండి) ఆరేఖల కుటుంబాన్ని $y = mx$ తో సూచిస్తాం ...(1)

రెండు వైపులా అవకలనం చేయగా,

$$\frac{dy}{dx} = m \quad ...(2)$$

(1), (2) ల నుంచి

$$y = x\frac{dy}{dx} \quad ...(3)$$



పటం 28.1

అందువల్ల $y = mx$, మరియు $y = x\frac{dy}{dx}$ లు ఒకే కుటుంబాన్ని సూచిస్తాయి. కనక (3)వ సమీకరణమే, అవకలన సమీకరణం అవుతుంది.

అనువర్తించే పద్ధతి :

a, b, c .... మొదలగు కొన్ని యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలు మరియు x, y లు రెండు చలరాశులుగా గల సమీకరణం నుంచి అవకలన సమీరణం నిర్మించాలంటే

(1) దత్త సమీకరణంలో ఎన్నైతే యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలుంటాయో, అన్నిసార్లు అవకలనం చేయవలసి ఉంటుంది.

(2) ఈ సమీకరణాల నుండి యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యను తొలగించండి.

గమనిక : n యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు కలిగిన సమీకరణానికి అనుగుణంగా వచ్చే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణం n అవుతుంది.

ఉదాహరణ 28.2 : $y = ax^2 + bx$ వక్రాల కుటుంబాలకు అనుగుణంగా ఉండే అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : రెండు వైపులా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \qquad \ldots(2)$$

మరల అవకలనం చేస్తే

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \qquad \ldots(3)$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

(1)వ సమీకరణం రెండు యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలు కలిగి ఉన్నది. అందువల్ల a, b లను తొలగించడానికి రెండుసార్లు అవకలనం చేయవలసి వచ్చింది.

'a' విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \ldots(5)$$

(4), (5) లో ఇవ్వబడిన a, b విలువలను (1) వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

లేదా $$y = \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

లేదా $$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

లేదా $$\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

మనకు కావలసిన అవకలన సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 28.3 : $y = a\cos(x + b)$ అను వక్రాల కుటుంబానికి అనుగుణంగా అవకలన సమీకరణాన్ని రాబట్టండి.

సాధన : $y = a\cos(x + b)$ ...(1)

రెండువైపులా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \qquad \ldots(2)$$

మళ్ళీ అవకలనం చేస్తే,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \qquad \ldots(3)$$

(1), (3) ల నుంచి

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

లేదా $\quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ఇది మనకు కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

ఉదాహరణ 28.4 : మూల బిందువు గుండాపోతూ కేంద్రాలు X- అక్షం మీద ఉన్న వృత్తాల కుటుంబానికి అనుగుణంగా అకవలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: మూలబిందువు గుండా పోతూ కేంద్రాలు x- అక్షం మీద ఉండటం వల్ల, దాని నిరూపకాలు $(a, 0)$, దాని వ్యాసార్ధము 'a' అగును.

అప్పుడు వృత్తము యొక్క సమీకరణం

$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \qquad \ldots(1)$

అనుగుణంగా ఉండే అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోవాలంటే (1) సమీకరణాన్ని అవకలనం చేస్తే,

$$2(x-a) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

లేదా $\quad x - a + y\frac{dy}{dx} = 0$

లేదా $\quad a = y\frac{dy}{dx} + x$

$$\left(x - y\frac{dy}{dx} - x\right)^2 + y^2 = \left(y\frac{dy}{dx} + x\right)^2$$

లేదా $\quad \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$

లేదా $\quad y^2 = x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$

ఇది మనకు కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

గమనిక : సమీకరణం ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య కలిగి ఉంటే, దానికి అనుగుణంగా ఉండే అవకలన సమీకరణ పరిమాణం 1 అవుతుంది. అలాగే దత్త సమీకరణం రెండు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు కలిగి ఉంటే, దాని అనుగుణంగా ఉండే అవకలన సమీకరణ పరిమాణం 2వ పరిమాణం గల సమీకరణంగా భావిస్తాం. అలాగే పొడిగించాయి.

ఉదాహరణ 28.5 : ఒక గోళాకారంలో గల వర్షపు నీటి బిందువు, దాని ఉపరితల వైశాల్యం మీద ఆవిరి అయిపోయే దానికి అనుపాతంలో ఉంటే, వర్షపు నీటి బిందువు యొక్క వ్యాసార్ధంలో మార్పురేటుకు కావలసిన అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : t నిమిషాలు తర్వాత వర్షపు బిందువు యొక్క వ్యాసార్ధం $r(t)$ (మి.మీ)గా సూచిస్తాం. t పెరిగుతుంటే, వ్యాసార్ధము తగ్గుచున్నది. r యొక్క మార్పురేటు రుణాత్మకం అవుతుంది.

వర్షపు బిందువు యొక్క ఘనపరిమాణము V తోను, వక్రతలీయావరణం (ఉపరితల వైశాల్యం) S తో సూచిస్తాం. దానిని

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \ldots(1)$$

మరియు $$S = 4\pi r^2 \qquad \ldots(2)$$

ఇలాగా కూడా $$\frac{dV}{dt} \propto S$$

లేదా $$\frac{dV}{dt} = -KS$$

లేదా $$\frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -KS \qquad \ldots(3)$$

(1), (2) మరియు (3)లను ఉపయోగించుకొంటే,

$$4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = -4K\pi r^2$$

లేదా $$\frac{dr}{dt} = K$$

ఇది మనకు కావలసిన అవకలన సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

మాడ్యూల్ - V
కలన గణితము


నోట్స్

అభ్యాసం 28.1

1. అవకలన సమీకరణం $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ పరిమాణం, తరగతి కనుక్కోండి.

2. కింది అవకలన సమీకరణాల పరిమాణం, తరగతి కనుక్కోండి.

(a) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

(b) $y = 2x\frac{dy}{dx} + x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

(c) $\sqrt{1-x^2}\,dx + \sqrt{1-y^2}\,dy = 0$

(d) $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 4 = 0$

3. కింది అవకలన సమీకరణాలు ఏకఘాతీయ సమీకరణాలు అవునా, కాదా వివరించండి.

(a) $(xy^2 - x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$

(b) $dx + dy = 0$

(c) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(d) $\frac{dy}{dx} + \sin^2 y = 0$

4. a, b లను తొలగిస్తూ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ కు అనుగుణంగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని ఏర్పరచండి.

5. (a) $y^2 = m(a^2 - x^2)$ కు అనుగుణంగా వచ్చే అవకలన సమీకరణం కనుక్కోండి.

(b) a ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య అయితే $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ కు అనుగుణంగా వచ్చే అకవలన సమీకరణం కనుక్కోండి.

(c) A, B లు యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలు అయితే $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ కు అనుగుణంగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

(d) (3, 2) బిందువు గుండాపోతూ ఉన్న సరళరేఖల కుంటుంబానికి అనుగుణంగా అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

(e) మూలబిందువు గుండాపోతూ కేంద్రాలు Y- అక్షం మీద ఉన్న వృత్తాల కుటుంబానికి అనుగుణంగా అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

28.5 సాధారణ మరియు ప్రత్యేక అవకలన సమీకరణం సాధనలు

తిరోగమన పద్ధతి ద్వారా అవకలన సమీకరణాలకు సాధనను కనుగొనవచ్చును. ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని ఒక పద్ధతి ద్వారా అవకలనం చేయడం వల్లను, యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలను తొలగించడం వల్ల అవకలన సమీకరణాన్ని నిర్మాణం చేయవచ్చును. ఈవిధంగా కనుక్కోబడిన సమీకరణాన్ని పూర్వగము లేదా అవకలన సమీకరణ సాధన అంటాం.

గమనికలు :

1. పూర్వగాన్ని అవకలనం చేస్తే అవకలన సమీకరణం వస్తుంది.

   అవకలన సమీకరణాన్ని సమాకలనం చేస్తే, మనకు పూర్వగం వస్తుంది.

2. అవకలన సమీకరణము యొక్క (జవాబు) ఒక సాధన దత్త అవకలన సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుంది.

ఉదాహరణ 28.6 : c_1, c_2 లు యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలు అయి దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ కు ఒక సాధన $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ అని చూపండి.

సాధన : $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ అని ఇవ్వబడింది ...(1)

(1)ని రెండువైపులా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cos x-c_2\sin x \quad \text{వస్తుంది} \qquad ...(2)$$

మళ్ళీ అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-c_1\sin x-c_2\cos x \quad \text{వస్తుంది} \qquad ...(3)$$

ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణంలో y మరియు $\frac{d^2y}{dx^2}$ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=c_1\sin x+c_2\cos x+(-c_1\sin x-c_2\cos x)$$

లేదా $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

సమాకనలం చేయడంలో యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలు ముఖ్యపాత్రను వహిస్తాయి. వివిధ యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలకు, ఇచ్చిన (దత్త) అవకలన సమీకరణానికి వివిధ రకాలైన సాధనలు వస్తాయి.

అవకలన సమీకరణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యల సంఖ్య అవకలన సమీకరణ పరిమాణానికి సమానమైతే ఆ సాధనను సాధారణ సాధన అంటాం.

సాధారణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలకు ప్రత్యేక విలువలు ప్రతిక్షేపించడం వల్ల వచ్చే సాధనను ప్రత్యేక సాధన అందాం.

గమనిక : సాధారణ సాధనలో అవకలన సమీకరణం యొక్క పరిమాణాన్ని బట్టి ఏదైనా యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు (ఆధారపడి) ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 28.7 : $y = x\frac{dy}{dx} + a\frac{dx}{dy}$ అవకలన సమీకరణానికి $y = cx + \frac{a}{c}$ (c ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య) సమీకరణం ఒక సాధన అని చూపండి.

సాధన : దత్తాంశం $y = cx + \frac{a}{c}$ (1)ని అవకలనం చేస్తే,

$$\frac{dy}{dx} = c \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{c}$$

కుడివైపు అవకలన సమీకరణంలో $\frac{dy}{dx}$ మరియు $\frac{dx}{dy}$ విలువను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$x(c)\ a\left(\frac{1}{c}\right) = cx + \frac{a}{c} = y$$

కుడివైపు = ఎడమవైపు

అందువల్ల దత్త అవకలన సమీకరణానికి $y = cx + \frac{a}{c}$ ఒక సాధన.

ఉదాహరణ 28.8 : $\frac{dy}{dx} - 6x = 0$ అవకలన సమీకరణానికి $y = 3x^2 + c$ సమీకరణం సాధారణ సాధనకు $y = 3, x = 2$ అనే ప్రత్యేక విలువలు ఇచ్చి, ప్రత్యేక సాధనను కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణానికి సాధారణ సాధన $y = 3x^2 + c$ అని ఇవ్వబడింది...(1)

పై సమీకరణంలో లను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$3 = 12 + c \text{ లేదా } c = -9$$

c విలువను సాధారణ సాధన (1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$y = 3x^2 - 9$$

ఇది దత్త సమీకరణ ప్రత్యేక సాధన.

28.6 అవకల సమీకరణం సాధన ప్రక్రియలు

28.6.1 విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతి

(i) దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = f(x)$ రూపంలో ఉన్నప్పుడు అవకలన సమీకరణ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ రూపంలో ఉన్నదని తలంచండి.

లేదా $dy = f(x)\,dx$

రెండువైపులా సమాకలనం చేస్తే

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

ఇక్కడ c ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్య. ఇది సాధారణ సాధన.

గమనిక : సాధారణ సాధనలో 'c' ని రాయడం చాలా అవసరం. లేనిచో అది ప్రత్యేక సాధన అవుతుంది.

ఉదాహరణ 28.9 : $(x+2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$$(x+2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$$

లేదా $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+4x-5}{x+2}$ లేదా $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+4x+4-4-5}{x+2}$

లేదా $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)^2}{x+2} - \frac{9}{x+2}$ లేదా $\frac{dy}{dx} = x+2-\frac{9}{x+2}$

లేదా $dy = \left(x+2-\frac{9}{x+2}\right)dx$

రెండువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int dy = \int\left(x+2-\frac{9}{x+2}\right)dx \text{ లేదా } y = \frac{x^2}{2}+2x-9\log|x+2|+c,$$

ఇచ్చట 'c' ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్య మరియు ఇది కావలసిన సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 28.10 : $x=0$ అయినప్పుడు $y=1$ అవుతూ $\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x$$

లేదా $dy = (2x^3 - x)dx$

(1)ని రెండువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$y = \frac{1}{2}\left(x^4 - x^2\right) + \mathrm{C} \quad \text{లేదా} \quad y = \frac{1}{2}x^2\left(x^2-1\right) + \mathrm{C}$$

ఇది మనకు కావలసిన ప్రత్యేక సాధన.

$y = 1, x = 0$ అయితే

$1 = 0 - 0 + \mathrm{C} \quad \Rightarrow \mathrm{C} = 1$

$$y = \frac{1}{2}x^2(x^2-1)+1$$

(ii) అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$ రూపంలో

అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$ రూపంలో ఉంటే

లేదా $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$

(1)వ సమీకరణంలో x, y లు ఒకదానితో ఒకటి వేరు చేయబడినవి. అనగా x కు x లు, y కి y లు వేరు చేయబడినవి. అందువల్ల, ఇలా అవకలన సమీకరణం సాధనను రాబట్టే విధానాన్నే విభజనీయ చలరాశుల పద్ధతి అంటాం. అటువంటి అవకలన సమీకరణాలను, రెండు వైపులా సమాకలనం చేసి, ఒకవైపున యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యను కలుపవలెను. అటువంటి పద్ధతులను విశదపరచుటకు కొన్ని ఉదాహరణలను తీసుకుందాం.

ఉదాహరణ 28.11 : $(1+x^2)dy = (1+y)^2$ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం $(1+x^2)dy = (1+y)^2$ను ఇలా రాయవచ్చు

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{(ఇచట చలరాశులు విభజించబడ్డాయి)}$$

(1)ని ఇరువైపులా సమాకలనం చేస్తే

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\tan^{-1}y = \tan^{-1}x + c$$

ఇక్కడ c ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్య ఇది కావలసిన సాధన.

ఉదాహరణ 28.12: $\left(x^2 - yx^2\right)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్తఅవకలన సమీకరణం $\left(x^2 - yx^2\right)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ ను

$$x^2(1-y)\frac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0 \quad \text{గా రాయవచ్చు.}$$

లేదా $$\frac{(1-y)}{y^2}dy = \frac{-(1+x)}{x^2}dx \quad \text{(చలరాశులు విభజించబడినవి)}$$

(1)ని ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = \int\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

ఇచ్చట 'c' ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్య

లేదా $$-\frac{1}{y}-\log|y|=\frac{1}{x}-\log|x|+C$$

లేదా $$\log\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+C$$

ఇది కావలసిన సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 28.13: $\frac{dy}{dx}=(3x+y+4)^2$ ను సాధించండి.

సాధన: $3x + y + 4 = t$ అనుకొనిన

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-3$$

దత్త అవకలన సమీకరణం

$$\frac{dt}{dx}-3=t^2$$

$$\frac{dt}{t^2+3}=dx$$

ఇక్కడ $$\int\frac{dt}{t^2+3}=\int dx$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+x+C$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+y+4}{\sqrt{3}}\right)=x+C$$

అభ్యాసం 28.2

1. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $\frac{dy}{dx}=e^{y-x}$ (ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$

(iii) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^x\,e^{-y}$ (iv) $(e^x+1)ydy+(y+1)\,dx=0$

2. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $(xy^2 + x)dy + (yx^2 + y)dy = 0$

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$

(iii) $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$

(iv) $\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$

28.6.2 సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు

కింది అవకలన సమీకరణాలను ఆలోచించండి.

(i) $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$ (ii) $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+xy^2}{y^2x}$.

పై వాటిలో (1) సమీకరణంలో $\frac{dy}{dx}$ తప్ప మిగతా పదాల తరగతి 2.

(y^2 తరగతి 2, x^2 యొక్క తరగతి 2 మరియు xy తరగతి 1 + 1 = 2)

(2)వ సమీకరణంలో తప్ప $\frac{dy}{dx}$ మిగతావి తరగతి 3గల పదాలు.

(3)వ సమీకరణంలో $\frac{dy}{dx}$ తప్ప మిగతా పదాల తరగతి 3, మరియు దానిని $y^2x\frac{dy}{dx} = x^2 + xy^2$ విధంగా రాయవచ్చు.

అటువంటి సమీకరణాలను 'సమఘాతీయ సమీకరణాలు' అని అంటాం.

గమనిక : సమఘాతీయ సమీకరణాలను స్థిర సంఖ్యలు ఉండవు.

ఉదాహరణకు, అవకలన సమీకరణం $(x^2 + 3yx)\,dx - (x^3 + x)dy = 0$

సమఘాతీయ సమీకరణం కాదు. దీనిలో $\frac{dy}{dx}$ తప్ప, మిగతా పదాల తరగతులు సమానం కావు.

(x^2 తరగతి 2, $3yx$ తరగతి 2, x^3 తరగతి 3, మరియు 1 తరగతిగా గల పదం)

28.6.3 సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాల సాధన

అటువంటి సమీకరణాల సాధనకు, కింది పద్ధతిని పాటిస్తాం.

(1) ఒక చలరాశిని ఇలా రాస్తాం = V (మరొక చలరాశి).

(అనగా $y = vx$ లేదా $x = vy$ రెండింటిలో ఒకటి వ్రాస్తాము).

(2) సమీకరణాన్ని విభజనీయ పద్ధతిలో లఘురూపంలో వ్రాస్తాము.

(3) ఇంతకు ముందు లాగా సమీకరణాన్ని సాధిస్తాయి.

ఉదాహరణ 28.14 : $f(x, y) = x - y \log y + y \log x$ ప్రమేయం x, y లలో సమఘాతీయ ప్రమేయం అని చూపండి.

సాధన: ప్రతీ స్థిరరాశి $k > 0$ కు

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= kx - ky\log(ky) + ky\log(kx) \\ &= k[x - y\log(ky) + y\log(kx)] \\ &= k[x - y\log k - y\log y + y\log k + y\log x] \\ &= k[x - y\log y + y\log x] = kf(x, y). \end{aligned}$$

అందువల్ల దత్త ప్రమేయం x, y లలో సమఘాతీయప్రమేయం. దీని తరగతి 1.

ఉదాహరణ 28.15 : $(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$ ను $\frac{dx}{dy} = \mathrm{F}\left(\frac{x}{y}\right)$ రూపంలో రాయండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

ఇది $\frac{dx}{dy} = \frac{e^{x/y}\left(\frac{x}{y} - 1\right)}{1 + e^{x/y}} = \mathrm{F}\left(\frac{x}{y}\right)$. ఇది కావలసిన రూపంలో ఉంది.

ఉదాహరణ 28.16 : $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y^2)dx + xy\,dy = 0$ ను $\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$ రూపంలో రాయండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ఇది $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ రూపంలో ఉంది.

ఉదాహరణ 28.17 : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + ye^{-\frac{2x}{y}}}$ ను $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ రూపంలో రాయండి.

సాధన: దత్త సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + ye^{-\frac{2x}{y}}}{y} = \frac{x}{y} + e^{-2(x/y)}$$

ఇది $\frac{dx}{dy} = F\left(\frac{x}{y}\right)$ రూపంలో ఉంది.

ఉదాహరణ 28.18 : $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - xy}$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త సమీకరణం ఒక సమఘాతీయ సమీకరణం. ఎందుకంటే దాని కుడివైపు లవ, హారాలు రెండూ తరగతి 2గా గల సమఘాతీయ ప్రమేయాలు.

$y = vx$ అనుకొందాం. అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

కనక దత్త సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 2v}{1 - v}.$$

అందువల్ల $x\frac{dv}{dx} = \frac{2v^2 - 3v}{1 - v}$, అంటే $\frac{1 - v}{2v^2 - 3v}dv = \frac{dx}{x}$.

అందువల్ల $\int \frac{1 - v}{2v^2 - 3v}\,dv = \int \frac{dx}{x}$, అంటే

$$-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{2v - 3}\right)dv = \log x - \log c$$

అందువల్ల $-\frac{1}{3}\left[\log v + \frac{1}{2}\log(2v - 3)\right] = \log x - \log c$,

అంటే $-\frac{1}{3}\log(v\sqrt{2v - 3}) = \log x - \log c$

అంటే $\log(v\sqrt{2v - 3}) = -3\log x + 3\log c = -\log x^3 + \log c^3$

అంటే $\log(x^3 v\sqrt{2v-3}) = \log c^3$.

అందువల్ల $x^3 v(\sqrt{2v-3}) = c^3$

అంటే $x^3 \frac{y}{x}\sqrt{\frac{2y}{x}-3} = c^3$ $\left(v = \frac{y}{x}\ \text{కనక}\right)$

అంటే $x^2 y\sqrt{\frac{2y}{x}-3} = c^3$

లేదా $xy\sqrt{2xy-3x^2} = c^3$.

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 28.19 : $(x^2 + y^2)dx = 2xy\,dy$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy} \qquad \ldots(1)$$

ఇది ఒక సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది. ఎందుకంటే (1) కుడివైపు లవ, హారాలు రెండూ x, y లలో తరగతి 2గా గల సమఘాతీయ ప్రమేయాలు.

$y = vx$ అనుకొందాం. అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

కనక (1) కిందివిధంగా మారుతుంది.

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2 v} = \frac{1+v^2}{2v}$$

అంటే $x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$ లేదా $\frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$. కనక $\int\frac{2v}{1-v^2}dv = \int\frac{dx}{x}$

అందువల్ల $-\log(1-v^2) = \log x + \log c$

అంటే $\log[xc(1-v^2)] = 0 = \log 1$.

కనక $xc(1-v^2) = 1$

అంటే $c(x^2-y^2) = x$ $\left(v = \frac{y}{x}\ \text{కనక}\right)$

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 28.20 : $xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0$ సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \quad \ldots (1)$$

ఇది ఒక సమఘాతీయ సమీకరణం.

$y = vx$ అనుకొందాం. అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.

అందువల్ల, (1) నుంచి

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^3}{v^2}.$$

కనక $\quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2} \quad$ లేదా $\quad v^2\,dv = \frac{dx}{x}$.

అందువల్ల $\int v^2 dv = \int \frac{dx}{x}$, కనక $\quad \frac{v^3}{3} = \log x + \log c$

అంటే $\quad \frac{y^3}{3x^3} = \log x + \log c$, అంటే $\quad y^3 = 3x^3 \log(cx)$

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 28.21 : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \quad \ldots (1)$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణం సమఘాతీయ సమీకరణం. $y = vx$ అనుకొందాం. అప్పుడు

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ కనక (1) కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2}, \text{ అంటే } \quad 2x\,dv = (1 + v^2 - 2v)dx.$$

అంటే $\frac{2dv}{(v-1)^2} = \frac{dx}{x}$ (చలరాశుల విభజనీయ పద్ధతి వల్ల).

అందువల్ల, సమాకలనం చేస్తే

$$\frac{-2}{v-1} = \log x + c.$$

కాని $\quad v = \frac{y}{x}$, కనక $\quad -\frac{2}{v-1} = \frac{-2}{\frac{y}{x}-1} = \frac{-2x}{y-x} = \frac{2x}{x-y}$.

అందువల్ల $\frac{2x}{x-y} = \log x + c.$

(లేదా) $2x = (x-y)(\log x + c)$. ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 28.22 : $(x^3 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^3)dy = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్తసమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3 - 3x^2y}. \qquad \ldots (1)$$

ఇది ఒక సమఘాతీయ సమీకరణం.

$y = vx$ అనుకొందాం. అప్పుడు $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

కనక, దత్త సమీకరణం (1) కింది విధంగా మారుతుంది.

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-3v^2}{v^3-3v}. \qquad \ldots (2)$$

అంటే $x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^4}{v^3-3v} = \frac{v^4-1}{3v-v^3}$.

కనక $\frac{3v-v^3}{(v+1)(v-1)(v^2+1)}dv = \frac{dx}{x}$

అంటే $\left[\frac{1}{2(v+1)} + \frac{1}{2(v-1)} - \frac{2v}{v^2+1}\right]dv = \frac{dx}{x}$ (పాక్షిక భిన్నాల ననుసరించి).

రెండువైపులా సమాకలనం చేస్తే,

$$\frac{1}{2}\log(v+1) + \frac{1}{2}\log(v-1) - \log(v^2+1) = \log x + \log c$$

అంటే $\log\left[\frac{\sqrt{v+1}\sqrt{v-1}}{v^2+1}\right] = \log(cx)$

కనక $\frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2+1} = cx$ లేదా $\frac{v^2-1}{(v^2+1)^2} = c^2x^2$.

$y = \frac{v}{x}$ కనక, $y^2 - x^2 = c^2(y^2+x^2)$. ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధారణ సాధన.

అభ్యాసం 28.3

I. 1. $\left(x - y\text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\right)dx + x\text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}dy = 0$ ని $\frac{dy}{dx} = \text{F}\left(\frac{y}{x}\right)$ రూపంలో రాయండి.

II. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

(ii) $(x^2 + y^2)\, dy = 2xy\ dx$

(iii) $y^2dx + (x^2 - xy)\ dy = 0$

(iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)^2}{2x^2}$

(v) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$

(vi) $(x^2 - y^2)\ \frac{dy}{dx} = xy$

3. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $\left(1 + e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(ii) $x\sin\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = y\sin\frac{y}{x} - x$

(iii) వాలు $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2\frac{y}{x}$, $(x > 0,\ y > 0)$ అవుతూ $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ బిందువు గుండా పోయే వక్రం సమీకరణం కనుక్కోండి.

28.6.4 అసమఘాతీయ అవకలన సమీకరణాలు

$a, b, c,\ a', b', c'$ లు స్థిర సంఖ్యలయి $c = c' = 0$ కానప్పుడు

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} \qquad \ldots (1)$$

రూపంలో ఉన్న అవకలన సమీకరణాలను **అసమఘాతీయ** సమీకరణాలంటాం. x, yలకు అనువయిన ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా (1)ని సమఘాతీయ సమీకరణం రూపంలోకి మార్చవచ్చు.

(1) కుడివైపు లవహారాలలో x, y ల గుణకాల స్వభావాన్ని బట్టి (1) ని మూడు పద్ధతులలో సందర్భం (i), సందర్భం (ii), సందర్భం (iii)) సాధించవచ్చు.

సందర్భం (i)

$b = -a'$ అయినప్పుడు (1) కింది రూపంలో ఉంటుంది.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax - a'y + c}{a'x + b'y + c'}.$$

అందువల్ల, $(a'x + b'y + c')dy - (ax - a'y + c)dx = 0$

అంటే, $a'(x\,dy + y\,dx) + b'y\,dy - ax\,dx + c'dy - c\,dx = 0$

అంటే, $a'd(xy) + b'd\left(\frac{y^2}{2}\right) - ad\left(\frac{x^2}{2}\right) + c'\,dy - c\,dx = 0.$

సమాకలనం చేస్తే, $a'xy + b'\frac{y^2}{2} - a\frac{x^2}{2} + c'y - cx = k.$

కనక పై సమీకరణం మనకు కావలసిన సాధన.

28.6.(సి)(i) గమనిక : పై సందర్భంలో సమీకరణంలోని పదాలను పునఃసమూహం చేసి ప్రతీ పదాన్ని సమాకలనం చేయడం ద్వారా సాధనను రాబట్టవచ్చు.

28.6.(సి)(ii) ఉదాహరణ : $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y + 7}{x - 7y - 3}$ ను సాధిద్దాం.

ఇక్కడ $b = -1 = -a'$. కనక సందర్భం (i) ఉపయోగించి సాధించవచ్చు. ఇప్పుడు

$$(x - 7y - 3)dy - (3x - y + 7)dx = 0$$

కనక, $(x\,dy + y\,dx) - 7y\,dy - 3\,dy - 3x\,dx - 7dx = 0$

అంటే $d(xy) - 7d\left(\frac{y^2}{2}\right) - 3dy - 3d\left(\frac{x^2}{2}\right) - 7dx = 0.$

సమాకలనం చేస్తే, $xy - \frac{7y^2}{2} - 3y - 3\frac{x^2}{2} - 7x = c$ లేదా

$$2xy - 7y^2 - 6y - 3x^2 - 14x = 2c.$$ ఇది కావలసిన సాధన.

సందర్భం (ii) : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = m$ అనుకొందాం.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} \quad \ldots (1)$$

అప్పుడు కింది విధంగా మారుతుంది.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\frac{1}{m}(ax+by)+c'} \quad \ldots (2)$$

$ax+by=v$ ప్రతిక్షేపిద్దాం. అప్పుడు $a+b\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$. కనక $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right)$

అందువల్ల (2) కింది రూపంలోకి మారుతుంది.

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right) = \frac{v+c}{\frac{v}{m}+c'}.$$

అంటే $\frac{dv}{dx} = \frac{bm(v+c)}{v+c'm} + a$ లేదా $\frac{v+c'm}{bm(v+c)+a(v+c'm)}dv = dx.$

దీనిని చలరాశుల విభజనీయ పద్ధతి ద్వారా సాధించవచ్చు.

28.6(సి)(iii) ఉదాహరణ : $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$ ను సాధిద్దాం.

ఇక్కడ $a=1,\ b=-1\ a'=2,\ b'=-2.$ కనక $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{1}{2}.$

కనక, సందర్భం (ii) ఉపయోగించి సాధించవచ్చు.

$x-y = v$ అనుకొందాం. అప్పుడు $1-\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

కనక, దత్త సమీకరణం కిందివిధంగా మారుతుంది.

$$1-\frac{dv}{dx} = \frac{v+3}{2v+5} \quad \text{అంటే} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v+2}{2v+5}$$

$$\text{కనక} \quad dx = \frac{2v+5}{v+2}dv = \left(2+\frac{1}{v+2}\right)dv.$$

సమాకలనం చేస్తే, $x = 2v + \log(v+2) + c$

అంటే $x = 2(x-y) + \log(x-y+2) + c.$

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధన.

28.6.(సి)(iv) గమనిక : $b=-a'$ అయి $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, కూడా అయినప్పుడు దత్త సమీకరణాన్ని రెండో సందర్భం కంటే మొదటి సందర్భం ఉపయోగించి సులభంగా సాధించవచ్చు.

సందర్భం (iii) : $b \neq -a'$, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ అనుకొందాం.

అప్పుడు $x = X+h,\ y = Y+k$, గా తీసుకొందాం. ఇక్కడ X, Y చలరాశులు, $h,\ k$ లు స్థిరరాశులు.

అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$. కనక (1) కింది రూపంలోకి మారుతుంది.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X+h)+b(Y+k)+c}{a'(X+h)+b'(Y+k)+c'}$$

అంటే $$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY+(ah+bk+c)}{a'X+b'Y+(a'h+b'k+c')} \quad \ldots(i)$$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ కనక h, k లను

$$ah+bk+c=0 \quad \ldots(ii)$$

$$a'h+b'k+c'=0 \quad \ldots(iii)$$

అయ్యే విధంగా ఎంపిక చేసుకోవచ్చు. అంటే (ii), (iii) లను సాధిస్తే $h,\ k$ విలువలు వస్తాయి.

అప్పుడు (1) $\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{a'X+b'Y}$ గా మారుతుంది. ఇది X, Y లలో సమఘాతీయ సమీకరణం కనక సమఘాతీయ పద్ధతి ద్వారా అంటే $Y = VX$ అనుకోవడం ద్వారా సాధించవచ్చు.

28.2(సి)(v) ఉదాహరణ : $(2x+y+3)dx = (2y+x+1)dy$ ను సాధిద్దాం.

దత్త సమీకరణాన్ని ఈ విధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+3}{2y+x+1} \quad \ldots(i)$$

ఇక్కడ $a=2,\ b=1,\ a'=1,\ b'=2$. అందువల్ల, $b \neq -a',\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

కనక సందర్భం (iii) ఉపయోగించి పై సమీకరణాన్ని సాధించవచ్చు.

(i) లో $x = X+h,\ y = Y+k$ అనుకొందాం. అప్పుడు $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X + Y + 2h + k + 3}{2Y + X + 2k + h + 1} \quad \ldots (ii)$$

$$2h + k + 3 = 0, \quad h + 2k + 1 = 0$$

అయ్యేవిధంగా h, k లను ఎంపిక చేసుకొంటే

$$h = -\frac{5}{3}, \; k = \frac{1}{3}.$$

కనక (ii) నుంచి $\frac{dY}{dX} = \frac{2X + Y}{2Y + X}$ ... (iii)

ఇది ఒక సమఘాతీయ సమీకరణం, $Y = VX$ అనుకొందాం.

$$\text{అప్పుడు } \frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}.$$

కనక, (iii) కింది విధంగా మారుతుంది.

$$V + X\frac{dV}{dX} = \frac{2 + V}{2V + 1} \quad \text{అంటే} \quad X\frac{dV}{dX} = \frac{2(1 - V^2)}{2V + 1}$$

$$\text{అంటే} \quad \frac{2V + 1}{(1 + V)(1 - V)}dV = \frac{2dX}{X} \quad \text{అంటే}$$

$$\frac{3}{2(1 - V)}dV - \frac{1}{2(1 + V)}dV = \frac{2dX}{X}.$$

సమాకలనం చేస్తే, $-\frac{3}{2}\log(1 - V) - \frac{1}{2}\log(1 + V) = 2\log X - \log c$

అంటే $3\log(1 - V) + \log(1 + V) + 4\log X = 2\log c,$

అంటే $\log[(1 - V)^3 (1 + V) X^4] = \log c^2$

కనక $X^4(1 - V)^3 (1 + V) = c^2.$

అంటే $X^4\left(1 - \frac{Y}{X}\right)^3 \left(1 + \frac{Y}{X}\right) = c^2 \qquad \left(V = \frac{Y}{X} \text{ కనక}\right)$

అంటే $(X + Y)(X - Y)^3 = c^2.$

X, Y లకు ప్రతిక్షేపిస్తే, $\left(x+\frac{5}{3}+y-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{3}-y+\frac{1}{3}\right)^3 = c^2$

లేదా $\left(x+y+\frac{4}{3}\right)(x-y+2)^3 = c^2$.

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధన.

అభ్యాసం 28.4

I. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x-2y+5}{2x+3y-5}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+2}{x+y-1}$

II. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $(2x+2y+3)\frac{dy}{dx} = x+y+1$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+6y+5}{3y+2x+4}$

III. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $(x-y-2)dx+(x-2y-3)dy=0$

(ii) $(x-y)dy=(x+y+1)dx$

28.6.4 ఏకఘాతీయ అవకలన అవకలన సమీకరణం

P, Q లు x ప్రమేయాలు అయి $\frac{dy}{dx}+py = Q$ ...(1)

రూపంలో ఉండే సమీకరణం గురించి ఆలోచించండి. ఇది ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ సమీకరణం. (1)వ సమీకరణాన్ని సాధించాలంటే, మొదటగా (1) సమీకరణాన్ని ఇరువైపులా $e^{\int P dx}$ చేత గుణిస్తే (దీనిని సమాకలన గుణకం అంటాం).

$$e^{\int P dx}\frac{dy}{dx} + Py\ e^{\int P dx} = Qe^{\int P dx}$$

లేదా $$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right) = Qe^{\int P dx} \quad \ldots(2)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right) = e^{\int P dx}\frac{dy}{dx} + Py.e^{\int P dx}\right]$$

సమాకలనం చేయగా

$$ye^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + C$$

e ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకం.

లేదా $$y = e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx + C\right]$$

గమనిక : $e^{\int P dx}$ ను సమీకరణం యొక్క "సమాకలన గుణకం" అంటాం. మరియు సాధారణంగా I.F గా సూచిస్తాం.

గమనిక :

(i) ఏకఘాతీయ అవకలన సమీకరణం (1) యొక్క ఎడమవైపును $e^{\int P dx}$ కారణాంకం చేత గుణించగా $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right)$ అవుతుందని గమనించండి.

(ii) P, Q లు స్థిరరాశులు లేదా x మాత్రమే ఉన్న ప్రమేయాలైనప్పుడు

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

రూపంలో ఉండే ఏకఘాతీయ అవకలన సమీకరణం యొక్క సాధన

$$y e^{\int P dx} = \int Q\left(e^{\int P dx}\right) dx + C$$

(iii) $\frac{dy}{dx}$ యొక్క గుణకము 1(ఏకము) కాకపోతే, ఏకము అయ్యేటట్లుగా సమీకరణం మొత్తాన్ని అదే గుణకముతో భాగించవలెను.

(iv) అస్వతంత్ర (పరతంత్ర) చలరాశి x, స్వతంత్ర చలరాశి y గా ప్రస్తావించితే, అవకలన సమీకరణం ఏకఘాతీయ సమీకరణంగా మారుతుంది.

ఉదాహరణకు P, Q లు స్థిరరాశులు లేదా y మాత్రమే చలరాశిగా ఉన్న ప్రమేయాలైనప్పుడు

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$$

రూపంలో ఉండే సమీకరణాలు కూడా x లో ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ సమీకరణాలే.

అటువంటి సమీకరణాలకు $\mathrm{I.F} = e^{\int \mathrm{P}dx}$, దాని సాధన

$$x(\mathrm{I.F}) = \int \mathrm{Q}\ (\mathrm{I.F.})dy + \mathrm{C}.$$

ఉదాహరణ 28.23 : $(\cos x)\frac{dy}{dx} + y\sin x = \tan x.$

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు

$$\frac{dy}{dx} + (\tan x)y = \sec x\,.\tan x.$$

అందువల్ల $\mathrm{P} = \tan x$ కాబట్టి $\int \mathrm{P}dx = \int \tan x\,dx = \log \sec x.$

కనక $\mathrm{I.F.} = e^{\int \mathrm{P}dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$

ఉదాహరణ 28.24 : $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని కిందివిధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{4x^2}{1+x^2} \qquad \ldots(1)$$

ఇక్కడ $\mathrm{P} = \frac{2x}{1+x^2},\ \mathrm{Q} = \frac{4x^2}{1+x^2}$

కనక $\mathrm{I.F.} = e^{\int \mathrm{P}dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1+x^2.$

(1) ని $1+x^2$ తో గుణకారం చేస్తే $\frac{d}{dx}\left[(1+x^2)\,y\right] = 4x^2.$

సమాకలనం చేస్తే, $(1+x^2)y = \frac{4x^3}{3} + c$

అంటే $3y(1+x^2) = 4x^3 + 3c$ ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధన.



ఉదాహరణ 28.25 : $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + ye^x = e^{(1-x)e^x}$

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{dy}{dx} + xe^x y = x\, e^{(1-x)e^x} \qquad ...(1)$$

ఇక్కడ $P = xe^x,\ Q = x\ e^{(1-x)e^x}.$

కనక $\text{I.F.} = e^{\int x\, e^x dx} = e^{(x-1)e^x}.$

(1)ని రెండు వైపులా $e^{(x-1)e^x}$ తో గుణకారం చేసి తరవాత సమాకలనం చేస్తే

$$y\, e^{(x-1)e^x} = \int x dx + c$$

అంటే $y\, e^{(x-1)e^x} = \frac{x^2}{2} + c$ లేదా $2y\, e^{(x-1)e^x} = x^2 + 2c$

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధన.

ఉదాహరణ 28.26: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ ను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చట $P = \frac{1}{x},\ Q = e^{-x}$ (P, Q లు రెండూ x యొక్క ప్రమేయాలు)

I.F. (సమాకలన గుణకం) $e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx}$

$$= e^{\log x} = x (x > 0)$$

ఇరువైపులా సమీకరణాన్ని I.F. తో గుణిస్తే,

$$x.\frac{dy}{dx} + y = x.e^{-x} \quad \text{లేదా} \quad \frac{d}{dx}(y\ .\ x) = x.e^{-x}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేస్తే,

$$yx = \int xe^{-x}\, dx + C$$

c ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్య

లేదా $xy = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx + C$

లేదా $xy = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

లేదా $xy = -e^{-x}(x+1) + C$

లేదా $y = -\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x} + \frac{C}{x}$

గమనిక : సాధనలో $x > 0$ అని.

ఉదాహరణ 28.27 : $\sin x \frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x \cos x$ ను సాధించండి.

సాధన : దత్త అవకలన సమీకరణం

$$\sin x \frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x \cos x$$

లేదా $$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\sin x \cos x \qquad \ldots(1)$$

ఇచ్చట $P = \cot x,\ Q = 2 \sin x \cos x$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

(1)ని రెండువైపులా I.F తో గుణిస్తే, $(\sin x > 0)$

$$\frac{d}{dx}(y \sin x) = 2\sin^2 x.\cos x$$

తర్వాత ఇరువైపులా సమాకలనం చేస్తే

$$y \sin x = \int 2\sin^2 x.\cos x dx + C$$

ఇచ్చట C ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య $(\sin x > 0)$

$$y \sin x = \frac{2}{3}\sin^3 x + C,$$

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధన.

ఉదాహరణ 28.28: $\left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$ ను సాధించండి.

సాధన : $\left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$

లేదా $\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2}$

లేదా $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$

ఇది P, Q లు y ప్రమేయాలుగా ఉండి, $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}x = \mathrm{Q}$ రూపంలో ఉంది.

$$\text{I.F.} = e^{\int \mathrm{P}dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

(1)సమీకరణాన్ని ఇరువైపులా I.F తో గుణిస్తే,

$$\frac{d}{dy}(xe^{\tan^{-1} y}) = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}(e^{\tan^{-1} y})$$

రెండువైపులా సమాకలనం చేస్తే

లేదా $(e^{\tan^{-1} y})x = \int e^t.tdt + \mathrm{C}$

C ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య $t = \tan^{-1} y$ మరియు $dt = \frac{1}{1+y^2}dy$

లేదా $(e^{\tan^{-1} y})x = te^t - \int e^t + \mathrm{C}$

లేదా $(e^{\tan^{-1} y})x = te^t - e^t + \mathrm{C}$

లేదా $(e^{\tan^{-1} y})x = \tan^{-1} y\, e^{\tan^{-1} y} - e^{\tan^{-1} y} + \mathrm{C}$ ($t = \tan^{-1}y$ లు ప్రతిక్షేపించగా)

లేదా $x = \tan^{-1} y - 1 + \mathrm{C}e^{\tan^{-1} y}.$

అభ్యాసం 28.5

I. కింది అవకలన సమీకరణాలను ఏకఘాతీయ సమీకరణాల రూపంలో రాసి, I.F లను కనుక్కోండి.

(i) $x\frac{dx}{dy} - y = 2x^2 \sec^2 2x$ (ii) $y\frac{dx}{dy} - x = 2y^3$

II. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $\frac{dx}{dy} + y\tan x = \cos^3 x$ (ii) $\frac{xdy}{dx} + 2y = \log x$

(iii) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1}x}$ (iv) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2x^2$.

III. కింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $x\log x\,.\,\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ (ii) $(x+y+1)\frac{dy}{dx} = 1$

కీలక పదాలు

- ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశుల దృష్ట్యా కలిగిన దాని అవకలజాలతో ఏర్పడిన సమీకరణాన్ని అవకలన సమీకరణం అంటాం.
- ఒక అవకలన సమీకరణంలోని అత్యధిక పరిమాణం ఉన్న అకవలజ పరిమాణాన్నే అకవలన సమీకరణ పరిమాణం అంటాం.
- బహుపది సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణపు అవకలజపు గరిష్ఠ ఘాతాన్ని ఆ అవకలన సమీకరణపు తరగతి అంటాం.
- అస్వతంత్ర చలరాశి, దాని అవకలజాలు ప్రథమ తరగతికి మాత్రమే చెందితే అటువంటి సమీకరణాలను ఏకఘాతీయ సమీకరణాలు అంటాం.
- ఏకఘాతీయ సమీకరణాలు ఎల్లప్పుడూ ప్రథమ పరిమాణంలోనే ఉంటాయి.
- అవకలన సమీకరణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యల సంఖ్య అవకలన సమీకరణ పరిమాణానికి సమానమైతే ఆ సాధనను సాధారణ సాధన అంటాం.
- సాధారణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలకు ప్రత్యేక విలువలు ప్రతిక్షేపించడం వల్ల వచ్చే సాధనను ప్రత్యేక సాధన అంటాం.

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ రూపంలో ఉండే అవకలన సమీకరణాన్ని రెండువైపులా సమాకలనం చేస్తే దాని సాధనను రాబట్టవచ్చు.

- దత్త అవకలన సమీకరణం

  $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $g(x)$ రూపంలో ఉన్నప్పుడు, ఆ సమీకరణంలోని చలరాశులను విడదీసి (x లకు, x లు, y లకు y లు), వాటిని సమాకలనం చేయడం వల్ల దాని సాధనను రాబట్టవచ్చు.

- అవకలన సమీకరణం $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ లో $M(x, y)$ మరియు $N(x, y)$ లు సమాన తరగతి గది సమఘాతీయాలైతే దానిని సమఘాతీయ ప్రమేయం అంటాం.

- సమఘాతీయ అవకలన సమీకరణం సాధించడానికి $y = vx$ లేదా $x = vy$ ని ప్రతిక్షేపించి, చలరాశులను విభజించి, సమాకలనం చేస్తే దాని సాధన వస్తుంది.

- ప్రథమ పరిమాణ ఏకఘాతీయ సమీకరణం $\frac{dy}{dx} + Py = \phi$ రూపంలో ఉంటే దాని సాధన

  $y\, e^{\int P dx} = \int Q\left(e^{\int P dx} \right) dx + C$, ఇచ్చట C ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య.

  $e^{\int P dx}$ ను అవకలన సమీకరణం యొక్క "సమాకలన గుణకం" అంటాం. దీనిని I.F. గా రాస్తాం.

- $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ రూపంలో ఉండే 2వ పరిమాణం గల అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించాలంటే, ఆ సమీకరణాన్ని 2 సార్లు సమాకలనం చేయాలి మరియు దాని సాధారణ సాధనలో రెండు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు ఉంటాయి.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. కింది అవకలన సమీకరణాల పరిమాణం, తరగతి కనుక్కోండి.

(a) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ (b) $xdx + ydy = 0$

(c) $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 5\cos 3x$ (d) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - xy\frac{dy}{dx} = y$ (f) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(g) $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (h) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = a\frac{d^2y}{dx^2}$

2. కింది వాటిలో ఏవి ఏకఘాతీయ సమీకరణాలు, ఏవి కావో కనుక్కోండి.

(a) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \log x$

(c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (d) $x\frac{dy}{dx} - 4 = x$

(e) $dx + dy = 0$

3. $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ లో a ను తొలగించి అవకలన సమీకరణాన్ని నిర్మించండి.

4. $y = ax^2 + bx + c$ లో a, b, c లను తొలగిస్తూ, కావలసిన అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. దాని పరిమాణాన్ని తరగతిని రాయండి.

5. సాధారణ సాధనలో ఎన్ని స్థిరసంఖ్యలు ఇమిడి ఉన్నాయో
(a) రెండవ పరిమాణ అవకలన సమీకరణం
(b) మూడవ పరిమాణ అవకలన సమీకరణం
(c) 5వ పరిమాణం గల అవకలన సమీకరణం

6. అవకలన సమీకరణం $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ కు $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ అనేది సాధన అవుతుందని చూపండి.

7. క్రింది అవకలన సమీకరణాలను సాధించండి.

(a) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = 3\cos x + 4$

(b) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x \sin y}{\cos y} = 0$

(d) $dy + xydx = xdx$

(e) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = x^m \cos mx$

(f) $(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$

జవాబులు

అభ్యాసం 28.1

1. పరిమాణం 1 మరియు తరగతి 2
2. (a) పరిమాణం 2, తరగతి 1
   (b) పరిమాణం 1, తరగతి 2
   (c) పరిమాణం 1, తరగతి 1
   (d) పరిమాణం 2, తరగతి 2
3. (a) అసరళ (b) (సరళ) ఏకఘాత (c) ఏకఘాత (సరళ)
   (d) అసరళ
4. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$
5. (a) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(b) $(x^2-2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4xy\frac{dy}{dx}-x^2=0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$ (d) $y=(x-3)\frac{dy}{dx}+2$

(e) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$

అభ్యాసం 28.2

1. (i) $e^{-y}=e^{-x}+C$ (ii) $\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+C$

(iii) $e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+C$ (iv) $e^y = k(y + 1)(1 + e^{-x})$

2. (i) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = C$ (ii) $\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + C$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)=C$

(iv) $x-y-\frac{1}{2}\sin\left[2(x+y)\right]=C$

అభ్యాసం 28.3

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-1}{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

2. (i) $x^2 - 2xy - y^2 = A$ (ii) $k(x^2 - y^2) = y$

(iii) $ky = e^{y/x}$ (iv) $\log\left(\frac{x+y}{c}\right)=\frac{-2xy}{(x+y)^2}$

(v) $y - 2x = kx^2y$ (vi) $x^2 + 2y^2(c + \log y) = 0$

3. (i) $x + ye^{x/y} = k$

   (ii) $kx = e^{\cos(y/x)}$

   (iii) $\tan\left(\frac{y}{x}\right) = 1 - \log x$

అభ్యాసం 28.4

1. (i) $4xy + 3(x^2 + y^2) - 10(x + y) = k$

   (ii) $y^2 - x^2 + 2xy - 2y - 4x = c$

2. (i) $6y - 3x + \log(3x + 3y + 4) = c$

   (ii) $y - 2x + \frac{3}{8}\log(24y + 16x + 23) = k$

3. (i) $x^2 - 2y^2 - 2x - 4y - 2 = c\left[\frac{x - y\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{x + y\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1}\right]^{1/\sqrt{2}}$

   (ii) $2\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{2x+1}\right) = \log\left|c^2\left(x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2}\right)\right|$

అభ్యాసం 28.5

1. (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{1}{y}$

2. (i) $2y = x\cos x + \sin x\cos^2 x + c\cos x$

   (ii) $yx^2 = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$ (iii) $2y\, e^{\tan^{-1}x} = e^{2\tan^{-1}x} + c$

   (iv) $yx^2 = \frac{2x^5}{5} + c$

3. (i) $y\log x = (\log x)^2 + c$ (ii) $x = ke^y - (y + 2)$

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) పరిమాణం 2, తరగతి 3.
   (b) పరిమాణం 1, తరగతి 1
   (c) పరిమాణం 4, తరగతి 1
   (d) పరిమాణం 1, తరగతి 1.
   (e) పరిమాణం 2, తరగతి 1.
   (f) పరిమాణం 2, తరగతి 1.
   (g) పరిమాణం 1, తరగతి 2.
   (h) పరిమాణం 2, తరగతి 1.

2. (a), (d), (e) లు (సరళ) ఏకఘాత

   (b), (c) లు అసరళ

3. $(x^2 - 2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^2 = 0$

4. $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, పరిమాణం 3, తరగతి 1.

5. (a) రెండు (b) మూడు (c) ఐదు

7. (a) $y + 3\operatorname{cosec} x + 4\cot x = C$

   (b) $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C$

   (c) $\sin y = Ce^{-\sin x}$

   (d) $\log(1-y) + \frac{x^2}{2} = C$

   (e) $y = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cos x + C\cos x$

   (f) $x = \tan^{-1} y - 1 + Ce^{-\tan^{-1} y}$

అధ్యాయం

29

విస్తరణ కొలతలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్య పఠనము వలన విద్యార్థికి క్రింది విషయాలు అవగతమవుతాయి.

- విస్తరణ కొలతల ప్రయోజనాన్ని వివరించగలుగుట
- వేరు వేరు విభజన కొలతలు, వ్యాప్తి, మధ్యమ విచలనము, విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనములను కనుగొనుట.
- వర్గీకరించని మరియు వర్గీకరించిన దత్తాంశముల మధ్యమం, మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనములు కనుగొనుట.
- వర్గీకరించని మరియు వర్గీకరించిన దత్తాంశములకు విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనము కనుగొనుట.
- విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాల ధర్మాలను ప్రవచించడం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- వర్గీకరించని మరియు వర్గీకరించిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యమం.
- వర్గీకరించని మరియు వర్గీకరించిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతం.

పరిచయం

మనము ఇంతకు ముందు కేంద్ర స్థాన కొలతల గురించి నేర్చుకొని యున్నాము. కేంద్ర స్థాన కొలతల యొక్క సూత్రాల వల్ల ఇచ్చిన దత్తాంశము ఒకే ఒక విలువ లాగా సూచింపవీలవుతుంది.

కేంద్ర స్థాన కొలతలు ఇవ్వబడ్డ దత్తాంశాన్ని సంపూర్ణంగా వివరిస్తాయా? లేదా?

పై విషయాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ కింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా : రెండు కర్మాగారాలలోని కార్మికుల వేతనాలు ఈ కింది విధంగా ఉన్నాయి.

కర్మాగారము A :	35	45	50	65	70	90	100
కర్మాగారము B :	60	65	65	65	65	65	70

పై రెండు దత్తాంశాలను పరిశీలించగా రెండు గ్రూపుల మధ్యమాలు (సరాసరులు) సమానము, అది 65.

1. గ్రూపు A లోని విషయాలు మధ్యమానికి దూరంగా నున్నవి.
2. గ్రూపు B లోని విషయాలు మధ్యమానికి దాదాపుగా సమీపంలో నున్నవి.

కావున పై రెండు గ్రూపుల మధ్యమాలు సమానంగా నున్ననూ, ఆ రెండు గ్రూపుల వేతనాలలో బేధము కలదు.

అందువల్ల, పై రెండు గ్రూపుల వ్యత్యాసాలు తొలగించుటకు మరియు మధ్యమానికి దూరంగా నున్న విషయాలను పరిగణనలోకి తీసుకొనుటకు ఇంకొక కొలతలు (సూత్రాలు) లేదా పద్ధతులు అవసరమవుతాయి. వీటినే 'విభజన కొలతలు' అంటారు.

29.1 విభజన అర్థము

విభజన అర్థమును వివరించుటకు ఈ కింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదా : ఒక పాఠశాలలోని 10 వ తరగతి చదువుతున్న రెండు సెక్షన్‌లలోని పదేసి మంది విద్యార్థులకు నిర్వహించిన లెక్కల సాధారణ పరీక్షలో, 40 మార్కులకుగాను వారు పొందిన మార్కులు ఈ కింది విధంగా ఉన్నాయి.

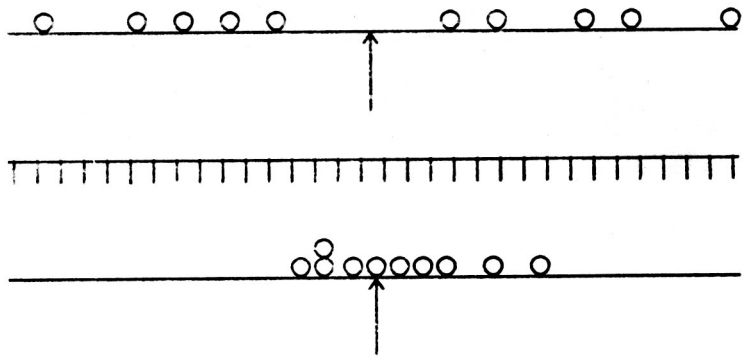
తరగతి A:	6	9	11	13	15	21	23	28	29	35
తరగతి B:	15	16	16	17	18	19	20	21	23	25

తరగతి A యొక్క సగటు (సరాసరి) : 19

తరగతి B యొక్క సగటు : 19

సెక్షన్ A, సెక్షన్ B లోని బిందు పటమును ఒకే స్కేలుపై నిర్మిద్దాము.

కింద బిందుపటములో మధ్యమ స్థానము బాణము గుర్తుతో సూచింపబడినది.



పటం 29.1

ఖచ్చితంగా, సెక్షన్ A మరియు B యొక్క విభజన ప్రదేశము వేరువేరుగా ఉన్నది. ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క విస్తరణ కొలతనే 'విభజన కొలత' అంటారు.

పై పాఠము ద్వారా నీవు కింది విభజన కొలతలు నేర్చుకొంటావు.

(a) వ్యాప్తి

(b) సరాసరి నుండి మధ్యమ విచలనము

(c) విస్తృతి

(d) క్రమవిచలనము

29.2 విభజన కొలతల నిర్వచనములు

(a) **వ్యాప్తి :** పైన పేర్కొన్న ఉదాహరణ నుండి కింది విషయాలు గమనించగలము.

(i) సెక్షన్ A లోని విద్యార్థుల మార్కులు 6 నుండి 35 మధ్య గలవు.

(ii) అదే విధముగా సెక్షన్ B లోని విద్యార్థుల మార్కులు 15 నుండి 25 మధ్య గలవు.

సెక్షన్ A లోని గరిష్ట, కనిష్ట విలువల బేధము : 29(35−6) అదే విధముగా సెక్షన్ B లోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల బేధము. 10(25 −15).

కావున దత్తాంశములోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల మధ్య బేధము ఆ దత్తాంశపు 'వ్యాప్తి' అవుతుంది.

(b) సరాసరి నుండి మధ్యమ విచలనము : పటము 29.1 ను పరిశీలించిన సెక్షన్ B లోని మార్కులు మధ్యమమునకు సమీపముగా (దగ్గరగా) నున్నవి. కాని సెక్షన్ A లోని మార్కులు మధ్యమమునకు దూరముగా నున్నవని గమనించవచ్చు. కాని ప్రతి అంశపు సరాసరి నుండి విచలనాలను కనుగొని, అలా వచ్చిన అన్ని విచలనాలను కలుపగా వచ్చిన మొత్తము పెద్దదియైన విభజన పెద్దదిగాను, చిన్నదైన విభజన చిన్నదిగాను ఉంటుంది.

కావున, సెక్షన్ A యొక్క మార్కుల విచలనాల మొత్తమును మధ్యమము నుండి కనుగొందాము ($\bar{x} = 19$).

పరిశీలనలు (x_i)	మధ్యమము నుండి విచలనాలను ($x_i - \bar{x}$)
6	−13
9	−10
11	−8
13	−6
15	−4
21	2
23	4
28	9
29	10
35	16
190	0

ఇక్కడ విచలనాల మొత్తం '0' గా వచ్చింది. అనగా అది ఎక్కువ కాదు, తక్కువ కాదు. ఇది యాదృచ్ఛికం?

అదే మాదిరిగా సెక్షన్ B ని కూడా పరిశీలించిన సరాసరి నుండి విచలనాల మొత్తము కనుగొందాము.

పరిశీలనలు (x_i)	మధ్యమము నుండి విచలనాలను ($x_i - \bar{x}$)
15	-4
16	-3
17	-2
18	-1
19	0
20	1
21	2
23	4
25	6
190	0

ఇక్కడ కూడా విచలనాల మొత్తము '0' గా వచ్చింది. ఇది యాదృచ్ఛికము కాదు. వాస్తవమేమనగా, ఇంతకు పూర్వం నిరూపించినట్లుగా ఎటువంటి దత్తాంశ సమితికైనా మధ్యమము నుండి తీసుకొనిన విచలనాల మొత్తము ఎల్లప్పుడు సున్నాగా యుంటుంది. ఎందువల్ల అది ఎల్లప్పుడు సున్నాగా ఉంటుంది.

సున్నితంగా పరిశీలించిన, కొన్ని విచలనాల సంజ్ఞలు ధనాత్మకంగానూ, మరికొన్ని రుణాత్మకంగానూ ఉన్నవి. అందుకోసమే వాటి మొత్తము ఎల్లప్పుడు సున్నా వస్తుంది కాబోలు.

రెండు సందర్భాలలోను విచలనాల మొత్తము 'సున్నా' అయింది. అందుకే విచలనాల మొత్తము నుండి మనము ఎటువంటి తుది నిర్ణయము చేయలేము.

ఈ కింది పద్ధతిని పరిగణించినచో మనము మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును పొందుటకు ఒక (సూత్రము) వివరణను నేర్చుకొనగలము.

(c) **విస్తృతి :** పై సందర్భములో, రుణ సంఖ్యలతో సంబంధము లేకుండా మధ్యమము నుండి తీసుకొనిన (పరమమూల్య) విచలనాల పరమ మూల్య విలువలను తీసుకొన్నాము.

ఇంకొక పద్ధతిలో క్రమ విచలనాల వర్గాలను ఉపయోగిస్తారు.

అందువల్ల మధ్యమము నుండి తీసుకొనిన విచలనాల వర్గము తీసుకొనుము. మరల వాటి మొత్తమును కనుగొనుము.

ఒకవేళ పై మొత్తమును పరిశీలనల సంఖ్యతో (పౌనపున్యాల మొత్తము)తో భాగించగా విచలనాల సరాసరి వస్తుంది. దీనినే 'విస్తృతి' అంటారు. దీనిని σ^2 తో సూచిస్తాము.

(d) **క్రమవిచలనము :** విస్తృతి యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమును క్రమవిచలనము అంటారు. దీనిని σ తో సూచిస్తారు.

29.3 వర్గీకరించని, వర్గీకరించిన మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనాలను కనుగొనుట

వర్గీకరించని దత్తాంశము నుండి మధ్యమ విచలన సూత్రము :

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} |}{N}$$

అదే మాదిరిగా వర్గీకరించిన దత్తాంశము నుండి మధ్యమ విచలన సూత్రము.

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} [f_i | x_i - \bar{x} |]}{N}$$

$$\because N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f | x_i |$$

మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును ఈ కింది సోపానాల ద్వారా కనుగొంటాం.

మొదటి సోపానము : మధ్యమము నుండి విచలనములను ఒక నిలువు వరుసలో తయారు చేయవలెను. అనగా $x_i - \bar{x}$ (వర్గీకరించిన దత్తాంశము యొక్క x_i ని తరగతి మధ్యమ విలువలుగా తీసుకొనవలెను).

రెండవ సోపానము : ప్రతి విచలనము యొక్క పరమూల్య విలువలను కనుగొని వాటిని $| x_i - \bar{x} |$ కల్గిన నిలువు వరసలో రాయవలెను.

వర్గీకరించబడని దత్తాంశపు మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనాలను లెక్కించుటకు కింది సూత్రమును ఉపయోగిస్తాము.

$$\text{మధ్యమము యొక్క విచలనము} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N}$$

వర్గీకరించిన దత్తాంశమునకు కింది సోపానమును చేయవలెను.

మూడవ సోపానము : 2వ సోపానము లోని ప్రతి అంశమును సంబంధిత పౌనఃపున్యముతో గుణించవలెను. దీనితో $f_i(x_i - \bar{x})$ కనుగొని దానిని సంబంధిత నిలువు వరుసలో రాయవలెను.

నాల్గవ సోపానము : 3వ సోపానములోని నిలువు వరుస మొత్తమును కనుగొనిన అది $\sum_{i=1}^{n}[f_i | x_i - \bar{x} |]$ గా వస్తుంది.

ఐదవ సోపానము : 4వ సోపానము లోని వచ్చిన మొత్తమును 'N' తో భాగించవలెను.

పై సోపానాలను ఉపయోగించి ఈ కింది ఉదాహరణలు చేద్దాము.

ఉదా 29.1 : ఈ కింది ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము.

అంశాల సైజులు(x_i)	5	7	9	10	12	15	16
పౌనఃపున్యము (f_i)	2	4	5	8	4	2	3

జవాబు :

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i(x_i - \bar{x})$
5	2	10	-5.3	5.3	10.6
7	4	28	-3.3	3.3	13.2
9	5	45	-1.3	1.3	6.5
10	8	80	0.7	0.7	5.6
12	4	48	1.7	1.7	6.8
15	2	30	4.7	4.7	9.4
16	3	48	5.7	5.7	17.1
	28	289			69.2

$$\text{మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనము} = \frac{\Sigma[f_i \mid x_i - \bar{x} \mid]}{N}$$

$$= \frac{62.7}{28} = 2.471$$

ఉదా 29.2 : ఈ కింది వర్గీకరణ యొక్క మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము?

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థుల సంఖ్య :	6	7	17	16	4

జవాబు :

మార్కులు	మధ్యమ విచలనము x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\mid x_i - \bar{x} \mid$	$f_i(x_i - \bar{x})$
0-10	5	6	30	-21	21	126
10-20	15	7	105	-11	11	77
20-30	25	17	425	-1	1	17
30-40	35	16	560	9	9	144
40-50	45	4	180	19	19	76
		50	1300			440

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1300}{50} = 26$$

$$\text{మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనము} = \frac{\Sigma[f_i \mid x_i - \bar{x} \mid]}{N} = \frac{440}{50} = 8.8$$

29.4 మధ్యగతము నుండి మధ్యమ విచలనము

విచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనంకి మధ్యగతం కనుగొనుట.

మొదటి సోపానము : దత్తపరిశీలనలను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చాలి.

రెండవ సోపానము : పౌనఃపున్యాల మొత్తము $\Sigma f_i = N$ ను కనుక్కోవాలి.

మూడవ సోపానము : సంచిత పౌనఃపున్యాలను కనుక్కోవాలి.

నాల్గవ సోపానము : $\frac{N}{2}$ కనుక్కోవాలి.

ఐదవ సోపానము : సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{N}{2}$ తో సమానం అయ్యే లేదా $\frac{N}{2}$ కంటే కొంచెం ఎక్కువ అయ్యే పరిశీలనను గుర్తిస్తాం. ఈ పరిశీలనే దత్తాంశానికి మధ్యగతం.

$$\text{మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం } n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \text{మధ్యగతం}| .$$

ఉదాహరణ 29.3 : కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం కనుక్కోండి.

x_i :	6	9	3	12	15	13	21	22
f_i :	4	5	3	2	5	4	4	3

సాధన: దత్తపరిశీలలను ఆరోహణ క్రమంలో రాస్తే కింది విభాజనం అవుతుంది.

x_i :	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i :	3	4	5	2	4	5	4	3
c.f.	3	7	12	14	18	23	27	30

$$N = 30 \qquad \therefore \frac{N}{2} = 15$$

సంచిత పౌనఃపున్యం 15 కంటే కొంచెం ఎక్కువ అయ్యే పరిశీలన 13 అవుతుంది. (పరిశీలన 13 యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం 18).

$\therefore$ మధ్యగతం = 13.

ఇప్పుడు మధ్యగతం నుండి విచలనాల పరమ మూల్యాలు $|x_i -$ మధ్యగతం$|$ గణనం చేసి కింది పట్టికలో చూపినట్లుగా $f_i |x_i -$ మధ్యగతం$|$ లను గణనం చేద్దాం.

$\lvert x_i -$ మధ్యగతం$\rvert$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i :	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i \lvert x_i -$ మధ్యగతం$\rvert$	30	28	20	2	0	10	32	27

ఇప్పుడు $\Sigma f_i |x_i - \text{మధ్యగతం}| = 149$

కావున మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i |x_i - \text{మధ్యగతం}|$$

$$= \frac{149}{30} = 4.97$$

ఉదాహరణ 29.4 : కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యం f_i	6	8	14	16	4	2

సాధన:

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం f_i	సంచిత పౌనఃపున్యం f_i	x_i	$\lvert x_i$-మధ్యగతం$\rvert$	$f_i \lvert x_i$-మధ్యగతం$\rvert$
0-10	6	6	5	22.86	137.16
10-20	8	14	15	12.86	102.88
20-30	14	28	25	2.86	40.04
30-40	16	44	35	7.14	114.24
40-50	4	48	45	17.14	68.56
50-60	2	50	55	27.14	54.28
	N = 50				517.16

నిక్కడ $N/2^{th}$ పరిశీలన $= \frac{50}{2} = 25,$

ఈ పరిశీలన 20-30 తరగతి అంతరంలో ఉంది. ఇదే మధ్యగత తరగతి

$$\text{మధ్యగతం} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \text{p.c.f}}{f}\right] i = 20 + \left(\frac{25-14}{14}\right)10 = 27.86$$

మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం = $\sum f_i \frac{|x_i - \text{మధ్యగతం}|}{N} = \frac{517.16}{50}$

$= 10.34$

అభ్యాసం 29.1

1. 10 మంది విద్యార్థినుల వయస్సులు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి

   3 5 7 8 9 10 12 14 17 18

   అయిన వ్యాప్తి ఎంత?

2. 9 మంది XII తరగతి విద్యార్థుల బరువులు (కేజీలలో) ఈ కింది ఇవ్వబడినవి.

   45 49 55 52 40 62 47 61 58 అయిన వ్యాప్తి ఎంత?

3. కింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశపు మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము? (వర్గీకరించని)

   45 55 63 76 67 84 75 48 62 65

   (మధ్యమము '64' గా ఇవ్వబడినది)

4. ఈ కింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము?

జీతము : (రూ॥లలో)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ఉద్యోగుల సంఖ్య :	4	6	8	12	7	6	4	3

   (మధ్యమము రూ. 157.2 గా ఇవ్వబడినది)

5. 40 మంది విద్యార్థులకు ఒక పరీక్షలో వచ్చిన మార్కుల వివరాలు ఈ కింది ఇవ్వబడినవి, దాని నుండి క్రమ విచలనమును కనుగొనుము?

పొందిన : మార్కులు	20	30	40	50	60	70	80	90	100
విద్యార్థుల సంఖ్య :	2	4	8	10	8	4	2	1	1

6. ఒక ఫ్యాక్టరీలోని 50 మంది కార్మికుల సంపాదన వివరాలు ఈ కింది దత్తాంశములో ఇవ్వడబడినవి. వాని మధ్యమ విచలనము కనుగొనుము?

సంపాదన (రూ॥లలో) :	1200	1300	1400	1500	1600	1800	2000
విద్యార్థుల సంఖ్య :	4	6	15	12	7	4 2	

7. 100 మంది విద్యార్థుల బరువుల వివరాలు పట్టికలో ఇవ్వబడినవి? వాని మధ్యమ విచలనము కనుగొనుము?

బరువులు : (కి.గ్రా. లలో)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
విద్యార్థుల సంఖ్య :	5	13	35	25	17	5

8. ఒకానొక పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థుల మార్కుల జాబితా కింది దత్తాంశమున ఇవ్వబడినది. దాని నుండి మధ్యమ విచలనము కనుగొనుము?

మార్కులు :	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
విద్యార్థుల : సంఖ్య	4	6	9	12	8	6	4	1

9. కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం కనుగొనుము.

x_i	25	20	15	10	5
f_i	7	4	6	3	5

10. కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం కనుగొనుము.

x_i	3	7	9	6	13	11
f_i	3	11	8	9	6	9

29.4 వర్గీకరించని దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుట

$x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_n$ లు n పరిశీలనలు అయిన

$$\text{విస్తృతి } (\sigma^2) = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+....+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$\text{లేదా} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}; \quad \left(\because \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)$$

క్రమ విచలనమును 'σ' తో సూచిస్తాము. σ^2 యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమే క్రమవిచలనము

$$\text{అందువల్ల,} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

ఇచ్చిన వర్గీకరించని దత్తాంశము యొక్క విస్తృతి మరియు దాని నుండి వచ్చే క్రమ విచలనాలను కనుగొనుటకు ఈ కింది సోపానాలను ఉపయోగించాలి. (ఇందు కావల్సిన మధ్యమము అంతకుపూర్వమే కనుగొనినదై ఉంటుంది).

మొదటి సోపానము : మధ్యమము నుండి కనుగొనిన విచలనాలను ఒక నిలువు వరుసలో రాయవలెను. దానిని $x_i - \bar{x}$ తో సూచించవలెను.

రెండవ సోపానము : (సరిచూడుము) అట్టి విచలనాల మొత్తము 'శూన్యమై' ఉండును. అనగా

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = 0$$

మూడవ సోపానము : $(x_i-\bar{x})^2$ కల్గిన నిలువు వరసలోని ప్రతివిచలనమును వర్గము చేసి రాయవలెను

నాల్గవ సోపానము : సోపానము 3 లోని నిలువు వరసలోని విషయాల మొత్తము కనుగొనుము.

ఐదవ సోపానము : σ^2 ను పొందుటకు, సోపానము 4 లో వచ్చిన విషయాల మొత్తమును పరిశీలనల సంఖ్యతో భాగించవలెను.

అరవ సోపానము : తదుపరి σ^2 యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమును తీసుకొనవలెను. అదియే σ (క్రమ విచలనము)

ఉదాహరణ 29.5 : ఒక కిరాణా కొట్టులోని 'చక్కెర' అమ్మినట్టి రోజువారి వివరములు ఈ కింది ఇవ్వబడినవి.

	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
(కి.గ్రా.లలో)	75	100	12	50	70.5	140.5

మరియు

రోజువారి సగటు అమ్మకము 78 కి.గ్రా. అయిన పై దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

సాధన : $\bar{x}$ = 78 కి.గ్రా. గా ఇవ్వబడినది.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
75	-3	9
100	42	1764
12	-66	4356
50	-28	784
70.5	-7.5	56.25
140.5	62.5	3906.25
	0	10,875.50

$$\text{విస్తృతి } (\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{10875.50}{6} = 1812.58 \text{ (సుమారుగా)}$$

మరియు క్రమవిచలనము (σ) = 42.57 (సుమారుగా)

ఉదాహరణ 29.6 : సెక్షన్ Aలోని 10 మంది విద్యార్థులకు ఇంగ్లీషు నికషలో వచ్చిన మార్కులు ఈ కింది ఇవ్వబడినవి. అవి

7 10 12 13 15 20 21 28 29 35

అయిన విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

సాధన : ఇక్కడ $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{10} = \frac{190}{10} = 19$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
7	-12	144
10	-9	81
12	-7	49
13	-6	36
15	-4	16
20	1	1
21	2	4
28	9	81
29	10	100
35	16	256
	0	768

విస్తృతి $\sigma^2 = \frac{768}{10} = 76.8$ మరియు $\sigma = \sqrt{76.8} = 8.76$ (సుమారుగా)

అభ్యాసం 29.2

1. ఒక కర్మాగారములో పనిచేయు 10 మంది ఉద్యోగుల వేతనాలు (ఒక రోజుకుగాను)

   50 60 65 70 80 45 75 90 95 100

   అయిన విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనములను కనుగొనుము?

2. 10 మంది 10వ తరగతి విద్యార్థులకు 'ఇంగ్లీషు'లో వచ్చిన మార్కులు ఈ కింది ఇవ్వబడినవి. వాటి విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము.

   9 10 15 16 18 20 25 30 32 35

3. ఒక పట్టణము యొక్క 10 రోజుల సాపేక్ష ఆర్ద్రతలు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి.

90 97 92 95 93 95 85 83 85 75

అయిన వాని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

4. ఈ కింది దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

4 6 8 10 12 14 16

5. ఈ కింది దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలు కనుగొనుము?

4 7 9 10 11 13 16

6. ఈ కింది దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలు కనుగొనుము?

40 40 40 60 65 65 70 70 75
75 75 80 85 90 90 100

29.6 వర్గీకరించని దత్తాంశపు క్రమవిచలనము మరియు విస్తృతిని కనుగొనుట

(మరొక పద్ధతి)

$\bar{x}$ దశాంశాలతో ఇచ్చినచో, $\bar{x}$ నుండి తీసుకొనిన విచలనాలు మరియు వాటి యొక్క వర్గాలు ఇంకా ఎక్కువ దశాంశాలు కలిగి లెక్కించుటకు కఠినతరము అవుతుంది. అందుకు 'σ^2' ను కనుగొనుటకు మరొక పద్ధతిని సూచించినాము. ఇందులో $\bar{x}$ ను ఉపయోగించకుండా సమస్యను సాధిస్తాము.

$$\therefore \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 \quad \left(\because \ \overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \right)$$

అనగా $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}{n}$$

మరియు $$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

σ^2 ను లెక్కించుటకు ఈ కింది సోపానాలను ఉపయోగించవలెను. తద్వారా σ ను కనుగొనవచ్చు.

మొదటి సోపానము : పరిశీలనాంశాల వర్గాలను ఒక నిలువువరసలో x_i^2 గా తయారు చేయవలెను.

రెండవ సోపానము : సోపానము 1 లోని విలువల మొత్తమును కనుగొనవలెను. అది $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

మూడవ సోపానము : σ^2 సూత్రములో $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, n మరియు $\sum_{i=1}^{n} x_i$ విలువలను ప్రతిక్షేపించి కనుగొనవలెను.

నాల్గవ సోపానము : 'σ' ను కొనుగొనుటకు σ^2 యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమును చేయవలెను.

ఐదవ సోపానము : σ^2 ను పొందుటకు, సోపానము 4లో వచ్చిన విషయాల మొత్తమును పరిశీలనల సంఖ్యతో భాగించవలెను.

ఆరవ సోపానము : తదుపరి σ^2 యొక్క ధనాత్మక వర్గమూలమును తీసుకొనవలెను. σ^2 అదియే (క్రమ విచలనము)

ఉదా 29.7 : 29.5లోనిఉదాహరణను తీసుకొని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను మరల కనుగొనుము.

సాధన :

x_i	x_i^2
7	49
10	100
12	144
13	169
15	225
20	400
21	441
28	784
29	841
35	1225
190	4378

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}{n} = \frac{4378 - \left(\frac{190}{10}\right)^2}{10}$$

$$= \frac{4378 - 3610}{10} = \frac{768}{10} = 76.8$$

మరియు $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{76.8} = 8.76$ (సుమారుగా)

ఇలా కనుగొన్న σ^2 మరియు σ లు కూడా ఇంతకు ముందులాగే ఒకే విలువలు వచ్చినవని గమనించగలము.

29.7 వర్గీరించిన దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము మరియు విస్తృతులు కనుగొనుట

పద్ధతి 1

దత్తాంశపు తరగతుల సంఖ్య k మరియు సంబంధిత పౌనఃపున్యాలు మనకు ఇచ్చినపుడు వర్గీకృత దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను వరసగా σ_g^2 మరియు σ_g తో సూచిస్తాము.

సూత్రము ఈ కింద ఇవ్వబడినది.

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}[f_i(x_i - \bar{x})^2]}{N}, \quad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

మరియు $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

σ_g^2 మరియు σ_g లు కొనుగొను క్రమములో ఈ కింది సోపానాలు పాటించవలెను. (సంబంధిత 'మధ్యమము'

ఇచ్చినప్పుడు)

మొదటి సోపానము : ఇచ్చిన తరగతుల తరగతి మార్కులను (మధ్య విలువలు) x_i తో సూచిస్తూ ఒక నిలువు వరుసలో రాయవలెను.

రెండవ సోపానము : మధ్యమము నుండి తరగతి మార్కుల (మధ్య విలువలు) విచలనాలు తయారు చేసి, వాటిని $x_i - \bar{x}$ కల్గిన నిలువు వరసలో రాయవలెను. (విచలనాల మొత్తము శూన్యము కాని సందర్భములో).

మూడవ సోపానము : సోపానము 2 తో వచ్చిన విచలనాల మొత్తమును $(x_i - \bar{x})^2$ తో సూచించిన నిలువు వరసలో తయారు చేయవలెను.

నాల్గవ సోపానము : సోపానము 3లోని ప్రతి అంశమును దాని పౌనఃపున్యముతో గుణించి రాయవలెను. దానితో మనకు $f_i(x_i - \bar{x})^2$ వస్తుంది.

ఐదవ సోపానము : సోపానము 4లో వచ్చిన వాటి మొత్తమును కనుగొనిన అది $\sum_{i=1}^{k}[f_i(x_i - \bar{x})^2]$ గా తీసుకొనుము.

ఆరవ సోపానము : సోపానము 5లో వచ్చిన మొత్తమును N తో (అనగా పౌనఃపున్యాల మొత్తము) భాగించిన σ_g^2 వస్తుంది.

ఏడవ సోపానము : $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$ గా కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 29.8 : ఒక పరిశోధనలోని నూతన గోధుమ వంగడముపై జరిగిన పరీక్షలో 50 పరీక్షాక్షేత్రాలలో గోధుములపై నిర్వహించిన అధ్యయనంలో ఈ కింది ఫలితాలు నమోదు అయినాయి.

ఒక హెక్టారుకు వచ్చిన దిగుబడి	క్షేత్రాల సంఖ్య
31–35	2
36–40	3
41–45	8
46–50	12
51–55	16
56–60	5
61–65	2
66–70	2

పై క్షేత్రాలలోని సరాసరిగా వచ్చిన దిగుబడి 50 క్వింటాళ్ళు అయిన వాని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము.

సాధన :

హెక్టారుకు పొందిన దిగుబడి	క్షేత్రాల సంఖ్య	తరగతి మధ్య విలువ	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
31–35	3	33	–17	289	578
36–40	3	38	–12	144	432
41–45	8	43	–7	49	392
46–50	12	48	–2	4	48
51–55	16	53	3	9	144
56–60	5	58	8	64	320
61–65	2	63	13	169	338
66–70	2	68	18	324	648
	50				2900

$$\therefore \quad \sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_i - \bar{x})^2]}{N} = \frac{2900}{50} = 58$$

మరియు $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2} = +\sqrt{58} = 7.61$ (సుమారుగా)

29.8 వర్గీకృత దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము మరియు విస్తృతులు కనుగొనుటకు - రెండవ పద్ధతి

$\bar{x}$ ఇవ్వకుంటే లేదా $\bar{x}$ దశాంశాలలో ఇచ్చినప్పుడు లెక్కించుట కష్టతరమైనప్పుడు ఈ కింది పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాము.

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n}[f_i x_i]^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}(f_i\ x_i)\right)^2}{N}, \quad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

మరియు $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

పై పద్ధతిన, σ_g^2 మరియు σ_g లు కనుగొనుటలో ఈ కింది సోపానాలను ఉపయోగించవలెను.

మొదటి సోపానము : ఇచ్చిన తరగతుల తరగతి మధ్య విలువలు తయారు చేసి వాటిని x_iగల నిలువు వరసలో రాయవలెను.

రెండవ సోపానము : వచ్చిన తరగతి మధ్య విలువలను (x_i) సంబంధిత పౌనఃపున్యముతో గుణించి వాటిని $f_i x_i$ గా రాసిన నిలువు వరసలో వేయవలెను.

మూడవ సోపానము : సోపానము 2లోని అంశాల మొత్తమును కనుగొని దానిని $\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)$ విలువలను ప్రతిగా రాయుము.

నాల్గవ సోపానము : తరగతి మధ్య విలువల (x_i) వర్గాలను చేసి వానిని x_i^2 గుర్తించిన నిలువు వరసలో రాయవలెను.

ఐదవ సోపానము : సోపానము 4లోని ప్రతి అంశమును సంబంధిత పౌనఃపున్యముతో గుర్తించి వానిని $f_i x_i^2$ కలిగిన నిలువు వరసలలో రాయవలెను.

ఆరవ సోపానము : సోపానము 5లోని అంశాల మొత్తమును అనగా $\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i^2)$ ను కనుగొనవలెను.

ఏడవ సోపానము : ఇలా కనుగొనిన $\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i^2)$, N మరియు $\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i^2)$ లను సూత్రమున ప్రతిక్షేపించుము.

ఎనిమిదవ సోపానము : $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$ గా కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 29.9 : ఉదా 29.8లో ఇచ్చిన ఉదాహరణకు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను పైపద్ధతిన కనుగొనుము?

సాధన :

హెక్టారుకు పొందిన దిగుబడి	f_i	x_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
31-35	2	33	66	1089	2178
36-40	3	38	144	1444	4332
41-45	8	43	344	1849	14792
46-50	12	48	576	2304	27648
51-55	16	53	848	2809	44944
56-60	5	58	290	3364	16820
61-65	2	63	126	3969	7938
66-70	2	68	136	4624	9248
మొత్తము	50		2500		127900

$\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i^2)$, N మరియు $\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i^2)$ విలువలను సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా

$$\sigma_g^2 = \frac{127900 - \left(\frac{2500}{50}\right)^2}{50}$$

$$\sigma_g^2 = \frac{2900}{50} = 58$$

మరియు $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2} = +\sqrt{58} = 7.61$ (సుమారుగా)

పై రెండు పద్ధతుల ద్వారా σ_g, σ_g^2 ల విలువలు సమానముగా వచ్చినవని గమనించుదుము.

అభ్యాసం 29.3

1. ఒక పరిశోధనలో, ఒక రోగుల సమూహముపై ఒకనొక ఔషధము యొక్క ప్రభావము, ఈ కింది విధమైన ఫలితాల నిచ్చింది.

ఉపశమనాల శాతము :	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
రోగుల సంఖ్య :	10	10	25	15	40

అయిన విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

2. ఒక అధ్యయనములో, ఒక గ్రామములోని తొలికాన్పు మహిళల వయస్సులు ఈ కింది విధంగా లభించినవి.

వయస్సు(తొలికాన్పు) :	18–20	20–22	22–24	25–26	26–28	28–30	30–32
తల్లుల సంఖ్య :	130	110	80	74	50	40	16

అయిన విస్తృతి, క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

3. 30 మంది కార్మికుల రోజువారి వేతనాలు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి.

రోజువారి వేతనం : (రూ॥లలో)	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300
కార్మికుల సంఖ్య :	3	4	5	7	8	3

అయిన పై దత్తాంశపు విస్తృతి, క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

29.9 సోపాన విచలన పద్ధతిన క్రమవిచలనము మరియు విస్తృతులు కనుగొనుట

42.7 లో చూసేట్టుగా మనకు సమస్య సాధన కొంత కఠినమనిపించింది. దానిని, సులభతరము చేయుటకు మనము ఇంకొక పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాము. దీనినే సోపాన విచలన పద్ధతి అంటారు. ఇందులో సమాన తరగతులను పరిగణలోకి తీసుకొంటాము. ఇందులో తరగతి అంతరమును h తో సూచిస్తాము. ఇప్పుడు మనము ముందుగా నిర్ణయించుకొనిన మధ్య విలువను a తో సూచిస్తాము. తరగతి మధ్య విలువ యొక్క విచలనమే కాకుండా దానిని h తో భాగిస్తాము.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \text{ అనుకొందాము.} \quad \ldots (1)$$

అయిన $x_i = hu_i + a$ .... (2)

కాని, $\bar{x} = h\bar{u} + a$ .... (3)

సమీకరణము (2) నుండి (3)ను తీసివేయగా

$$x_i - \bar{x} = h(u_i - \bar{u}) \quad \ldots (4)$$

సమీకరణము (4)ను రెండువైపులా వర్గము చేసి f_i తో గుణించి k తరగతుల వరకు మొత్తమును ఈ కింది విధముగా చూపుతాము.

$$\sum_{i=1}^{k}[f_i(x_i - \bar{x})^2] = h^2\sum_{i=1}^{k}[f_i(u_i - \bar{u})^2] \quad \ldots (5)$$

$$\sigma_x^2 = h^2.\sigma_u^2 \quad \ldots (6)$$

ఎప్పుడైతే, σ_x^2 ను యదార్థ దత్తాంశపు విస్తృతి అని σ_u^2 ను కోడెడ్ ( ) దత్తాంశపు విస్తృతి లేదా కోడెడ్ ( ) విస్తృతి అని తెలియును. σ_u^2 ను కనుగొనుటలో 'మధ్యమము'తో అవసరమైన సూత్రమును ఉపయోగించుదుము.

అదే $\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}[f_i(u_i - \bar{u})^2]; \quad \because N = \sum_{i=1}^{k} f_i$ .... (7)

(లేదా) మధ్యమము అవసరములేని సూత్రమును ఉపయోగించవచ్చును.

$$\text{అదే} \qquad \sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}[f_i u_i^2] - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}(f_i u_i)\right]^2}{N}}{N}; \; N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

ఉదాహరణ 29.10 : ఉదా 29.9 ను మరొకమారు ఉపయోగించి విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలను కోడెడ్ ( ) విస్తృతి నుపయోగించి కనుగొందాము.

సాధన : ఇక్కడ $h = 5$ మరియు $a = 48$ అనుకొందాము.

హెక్టారుకు పొందిన దిగుబడి (క్వింటాళ్ళలో)	క్షేత్రాల సంఖ్య	మధ్య విలువ x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
31–35	2	33	–3	–6	9	18
36–40	3	38	–2	–6	4	12
41–45	8	43	–1	–8	1	08
46–50	12	48	0	0	0	0
51–55	16	53	1	16	1	16
56–60	5	58	2	10	4	20
61–65	2	63	3	6	9	18
66–70	2	68	4	8	16	32
	50				20	124

$$\text{అందువల్ల} \qquad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}[f_i u_i'^2] - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)^2}{N}}{N}$$

$$= \frac{124 - \frac{(20)^2}{50}}{50}$$

$$= \frac{124 - 8}{50} = \frac{58}{25}$$

అయిన యదార్థ దత్తాంశపు విస్తృతి $\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2 = 25 \times \frac{58}{25} = 58$ (సుమారుగా)

మరియు క్రమవిచలనము $\sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2} = +\sqrt{58} = 7.61$(సుమారుగా)

పై ఉదాహరణలో పొందిన విస్తృతి, క్రమవిచలనాల విలువలనే తిరిగి పొందినాము.

ఉదాహరణ 29.11 : ఈ కింది విభజనలో ఇచ్చిన 230 వేతనాల విస్తృతి, క్రమ విచలనాలను కనుగొనుము?

వేతనాలు (రూ॥లలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య
70–80	12
80–90	18
90–100	35
100–110	42
110–120	50
120–130	45
130–140	20
140–150	08

సాధన :

వేతనాలు (రూ॥లలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య	తరగతి మధ్య విలువ x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	f_iu_i	u_i^2	$f_iu_i^2$
70–80	12	75	–3	9	–36	108
80–90	18	85	–2	4	–36	72
90–100	35	95	–1	1	–35	35
100–110	42	105	0	0	0	0
110–120	50	115	1	1	50	50
120–130	45	125	2	4	90	180
130–140	20	135	3	9	60	180
140–150	08	145	4	16	32	128
	230				125	753

అందువల్ల $\sigma^2 = h^2\left[\frac{1}{N}\Sigma(f_i u_i^2) - \left(\frac{1}{N}\Sigma(f_i u_i)\right)^2\right]$

$$= \left[\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)\right]$$

$$= 100(3.27 - 0.29) = 298$$

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{298} = 17.3 \text{ (సుమారుగా)}$$

అభ్యాసం 29.4

1. ఒక పిండి మిల్లులో పనిచేయుచున్న 400 మంది కూలీల రోజువారి కూలీలు ఈ కింది దత్తాంశమున ఇవ్వబడినవి.

రోజువారి వేతనాలు (రూ॥లలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య
80–100	16
100–120	20
120–140	25
140–160	40
160–180	80
180–200	65
200–220	60
220–240	35
240–260	30
260–280	20
280–300	09

అయిన సోపాన విచలన పద్ధతిన విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలు కనుగొనుము?

2. ఒక పట్టణములోని ఒక పాఠశాలలో పనిచేయుచున్న ఉపాధ్యాయుల వయస్సుల పట్టిక ఈ కింద ఇవ్వబడినవి.

వయస్సు (సం॥లలో) :	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య :	25	110	75	120	100	90	50	30

అయిన సోపాన విచలన పద్ధతిన విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలు కనుగొనుము?

3. ఈ కింది దత్తాంశమునకు సోపాన విచలన పద్ధతిన విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలు గణించుము?

వయస్సు (సం॥లలో) :	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
వ్యక్తుల సంఖ్య :	70	51	47	31	29	22

కీలకపదాలు

- వ్యాప్తి : ఇచ్చిన దత్తాంశములో అతిపెద్ద, అతిచిన్న విలువల బేధము.
- మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనము (MD) $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}[f_i \mid x_i - \bar{x} \mid]}{\mathrm{N}}$

$$\because \mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i , \qquad \bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} (f_i x_i)$$

- విస్తృతి : $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$ (వర్గీకరించని దత్తాంశమునకు)
- క్రమవిచలనము : $(\sigma) = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}$
- వర్గీకరించిన దత్తాంశమునకు విస్తృతి

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_i - \bar{x})]^2}{\mathrm{N}}, \; x_i = \text{తరగతి మధ్య విలువ}$$

అలాగే $\sigma_x^2 = h^2\ \sigma_u^2$ మరియు $\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}[f_i(u_i - \bar{u})^2],\ \because N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

లేదా $\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}[f_i u_i^2] - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}(f_i u_i)\right]}{N}}{N};\ N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

- వర్గీకరించిన దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము

$$\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- http:// www.wikipedia.org
- http:// mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. ఒక పరీక్షలో 100 మార్కులకుగాను, 10 మంది విద్యార్థుల పొందిన మార్కులు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి. అయిన వాని మధ్యమ విచలనము కనుగొనుము?

   55 45 63 76 67 84 75 48 62 65

2. ఒక కార్మాగారములోని 50 మంది కార్మికుల వేతనాలు ఈ కింది దత్తాంశములో ఇవ్వబడినవి, వాని మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము?

వేతనాలు (రూ॥లలో) :	1200	1300	1400	1500	1600	1800
కార్మికుల సంఖ్య :	4	7	15	12	7	5

3. ఒక ఫ్యాక్టరీలో పనిచేసే 50 మంది ఉద్యోగుల రోజువారి వేతనాలు ఈ కింద దత్తాంశమున ఇవ్వబడినవి, వాని మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము.

వేతనము (రూ॥లలో) :	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
ఉద్యోగుల సంఖ్య :	4	6	8	12	7	6	4	3

4. ఒక క్రికెట్ క్రీడాకారుని 50 ఇన్నింగ్స్‌లలో చేసిన పరుగుల వివరాలు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి. అయిన వాని బ్యాటింగ్ సరాసరి మరియు మధ్యమ విచలనాలను కనుగొనుము?

చేసిన పరుగులు :	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
ఇన్సింగ్స్ సంఖ్య :	6	10	12	18	3	1

5. 10 మంది విద్యార్థులు లెక్కల పరీక్షలోని మార్కులు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి అయిన వాని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనుము?

6 10 12 13 15 20 24 28 30 32

6. 10 గ్రుడ్ల బరువుల నమూనాగా దగ్గర గ్రామాలకు ఈ కింది దత్తాంశము ఇవ్వబడినవి.

46 51 48 62 54 56 60 71 75

అయిన పై నమూనా బరువుల క్రమవిచలనము కనుగొనుము?

7. ఒక ఫ్యాక్టరీలో పనిచేయు 50 మంది కార్మికుల యొక్క ఒక వారంలో వచ్చిన భత్యములు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి. అయిన వాని విస్తృతి, క్రమ విచలనాలను కనుగొనుము.

భత్యాలు (రూ॥లలో) :	400	425	450	500	550	600	650
కార్మికుల సంఖ్య :	5	7	9	12	7	6	4

8. ఈ కింది దత్తాంశమునకు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలు కనుగొనుము?

తరగతి :	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
పౌనఃపున్యము :	7	8	25	15	45

9. ఒక విభజనలోని x విలువలు 1, 2, ..., N, మరియు ప్రతి అంశపు పౌనఃపున్యము '1' అయిన దాని క్రమవిచలనము కనుగొనుము.

జవాబులు

అభ్యాసం 29.1

1. 15
2. 22
3. 9.4
4. 15.44
5. 13.7
6. 136
7. 5.01
8. 14.4
9. 6.2
10. 2.36

అభ్యాసం 29.2

1. విస్తృతి = 311, క్రమ విచలనము = 17.63
2. విస్తృతి = 72.9, క్రమ విచలనము = 8.5
3. విస్తృతి = 42.6, క్రమ విచలనము = 6.53
4. క్రమ విచలనము = 4
5. విస్తృతి = 13.14, క్రమ విచలనము = 3.62
6. క్రమ విచలనము = 17.6

అభ్యాసం 29.3

1. విస్తృతి = 734.96, క్రమ విచలనము = 27.1
2. విస్తృతి = 12.16, క్రమ విచలనము = 3.49
3. విస్తృతి = 5489, క్రమ విచలనము = 74.09

అభ్యాసం 29.4

1. విస్తృతి = 2194, క్రమ విచలనము = 46.84
2. విస్తృతి = 86.5, క్రమ విచలనము = 9.3
3. విస్తృతి = 67.08, క్రమ విచలనము = 8.19

సాధనా అభ్యాసం

1. 9.4
2. 124.48
3. 15.44

4. 5219.8

5. విస్తృతి = 74.8, క్రమ విచలనము = 8.6

6. 8.8

7. విస్తృతి = 5581.25, క్రమ విచలనము = 74.7

8. విస్తృతి = 840, క్రమ విచలనము = 28.9

9. క్రమ విచలనము $= \sqrt{\frac{N^2-1}{1-2}}$

అధ్యాయం

30

సంభావ్యత

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ అధ్యాయము చదివిన తరువాత విద్యార్థులకు కింది విషయాలు అవగతమవుతాయి.

- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము, శాంపుల్ ఆవరణములను నిర్వచించగలుగుతారు.
- ప్రయోగము యొక్క వివిధ రకాల ఫలితాలను కనుగొనగలుగుతారు.
- వివిధ రకాల ఘటనలు అనగా సమసంభవ ఘటనలు, పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు, పూర్ణ ఘటనలు, స్వతంత్ర మరియు అస్వతంత్ర ఘటనల మధ్య వ్యత్యాసాన్ని గుర్తించగలుగుతారు.
- సంభావ్యతను వివరించగలుగుతారు.
- సంభావ్యతా సంకలన మరియు గణన సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించి సంభావ్యతలను కనుగొన గలరు.
- బేయి సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించగలరు.

పూర్వకాంక్షితాలు

సమితులు, సిద్ధాంతాలు, ప్రస్తారాలు మరియు సంయోగాలు

పరిచయం

'సంభావ్యత' లేదా అవకాశం అనేది మన దైనందిన జీవితంలో తరచుగా ఎదుర్కొనే పదం. ఈ రాత్రి వర్షం కురిసే అవకాశం ఉందని మనం తరచూ చెబుతుంటాం. అనగా మనం ఈ రాత్రి వర్షం కురుస్తుందని ఆశించవచ్చు. B జిల్లా కంటే A జిల్లా వరి మంచి దిగుబడి వచ్చే అవకాశం ఉంది అని చెపితే B నుండి కంటే A జిల్లా నుండి మంచి దిగుబడిన ఆశించవచ్చు. ఇలా ఆశించడం అనేది మనకు వివిధ రుతువులలో ఉండే వాతావరణంపై ఉండే పరిజ్ఞానం వలన వస్తుంది. సాధారణంగా అంచనా అనేది ప్రస్తుత పరిజ్ఞానం మరియు నమ్మకాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. మునుపటి అనుభవం, ప్రస్తుత పరిజ్ఞానం మరియు విశ్లేషణాత్మకత ద్వారా అంచనాలు వేసిన కూడ అంచనాలను లెక్కించడానికి మనకు పరిమాణాత్మక కొలత అవసరం. దీనికోసం సంభావ్యత సిద్ధాంతం ఫ్రాన్స్‌లో 17వ శతాబ్దంలో ఉద్భవించింది.

క్లుప్తంగా చెప్పాలంటే, సంభావ్యత సిద్ధాంతము అనేది అవకాశం యొక్క ప్రభావాన్ని అధ్యయనం చేసే గణితశాస్త్ర విభాగం. అందువల్ల సంభావ్యత అనేది సంఘటన సంభవించడం లేదా సంభవించక పోవడం యొక్క ఖచ్చితత్వం స్థాయిని కొలుస్తుంది. ఈ అధ్యాయంలో మనం వివిధ యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు వాటి ఫలితాలను చర్చిస్తాము. సంభావ్యత, నియత సంభావ్యతలను నిర్వచిస్తాము. సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము, గణన మరియు బేయిసిద్ధాంతములను నిర్వచించి నిరూపిస్తాము మరియు ఉదాహరణల ద్వారా అనువర్తనాలను వివరిస్తాము.

30.1 యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము

ఈ కింది పరిస్థితులను పరిశీలిద్దాము.

(i) ఒక నాణాన్ని ఎగురవేయండి ఫలితాలను రాయండి. ఇక్కడ రెండు రకాల అవకాశాలు గలవు. ఒకటి బొమ్మ రెండోది బొరుసు.

(ii) ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించగా ఆరు రకాల అవకాశాలు గలవు.
ఇక్కడ ఆరు ముఖాలలో [1, 2, 3, 4, 5, 6] ఏ ముఖమైన పైకి రావచ్చు.

(iii) ఇప్పుడు రెండు నాణాలను ఎగురవేయండి. వాటి ఫలితాలను రాయండి. ఇక్కడ నాలుగు రకాల అవకాశాలు వున్నాయి. HH, HT, TH, TT

(iv) ఇప్పుడు రెండు పాచికలను దొర్లించగా 36 లఘు ఘటనలు గలవు.

అవి మొత్తము లఘు ఘటనలు = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1,6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
⋮ ⋮
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

పైన చూపించిన ప్రతి సందర్భం కింది నియమాలను పాటిస్తుంది.

(a) ఒకే విధమైన పరిస్థితుల్లో ఆ ప్రయోగాన్ని ఎన్నిసార్లైనా చేయడానికి వీలుండాలి.

(b) ఏ ఫలితము వస్తుందో ముందే చెప్పలేనిదై ఉండాలి. ఆ ప్రయోగ ఫలితాల జాబితా ముందే తెలిసి ఉన్నట్టయితే ఆ ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటాము.

నిర్వచనం:

ఒకే విధమైన పరిస్థితుల్లో ఆ ప్రయోగాన్ని ఎన్నిసార్లైనా చేయడానికి వీలుండి

(i) ఆ ప్రయోగ ఫలితాల జాబితా ముందే తెలిసి ఉండాలి.

(ii) ఏ ఫలితము వస్తుందో ముందే చెప్పలేనిదై ఉన్నట్లయితే ఆ ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటాము.

ఉదాహరణ 30.1 : బాగా కలిపిన పేక ముక్కల కట్ట నుంచి ఒక పేకముక్కను తీయడం అనేది యాదృచ్ఛిక ప్రయోగమా?

(a) ఈ ప్రయోగాన్ని ఎన్నిసార్లయినా చేయడానికి వీలుండి పేక ముక్కల కట్టనుంచి పేకముక్కను తీసే ప్రయోగంలో పేకముక్కలను ఎన్ని సార్లయిన కలుపవచ్చు.

(b) 52 పేకముక్కల నుంచి ఏదైన పేకముక్కను తీసే ప్రయోగంలో ఫలితము ముందే చెప్పలేనిదై ఉంటుంది.

అందువల్ల దీనిని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము అంటాము.

ఉదాహరణ 30.2 : 50 మంది విద్యార్థుల నుంచి నిష్పాక్షికంగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనే ప్రయోగము ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అని చూపండి.

సాధన: (a) ఈ ప్రయోగాన్ని ఎన్నిసార్లయిన చేయడానికి వీలుంది.

(b) ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకొనే తీసే ప్రయోగములో ఏ విద్యార్థికైన సమాన అవకాశం ఉంది. కావున ఫలితము ముందే చెప్పలేనిదై ఉంటుంది.

మీరు యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము గాని చర్య గురించి గాని ఆలోచించగలుగుతారా.

మనము యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం కాని కృత్యాలను గమనిద్దాము.

(i) మనిషి యొక్క జననము : ఇది మళ్ళీ జరగటానికి అవకాశము లేదు. కావున ఇది యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము కాదు.

(ii) క్యాలిక్ లేటర్ పైన 4 మరియు 8ని గుణించడం ఈ ప్రయోగము ఎన్ని సార్లయిన చేయడానికి వీలున్నప్పటికీ దాని ఫలితము ఎల్లప్పుడు 32 మాత్రమే కావున ఇది యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము కాదు.

30.2 శాంపుల్ ఆవరణ

మనము ఒక పాచికను దొర్లించే ప్రయోగములో వచ్చే అవకాశమున్న లఘు ఘటనలు. ప్రతి ముఖముపై ఉన్న సంఖ్యరావడానికి అవకాశముంది. ఇప్పుడు మనము ఫలితము రావడానికి ఆస్కారము ఉన్న లఘు ఘటనల జాబితా S అనుకొంటే

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

మరల మనము నాణాన్ని ఎగిర వేసే ప్రయోగంలో రెండు లఘు ఘటనలకు ఆస్కారం ఉంది. వీటి జాబితా S అనుకొంటే

$$S = \{H, T\}$$

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములోని ఫలితాలన్నింటితో కూడిన సమితిని ఆ యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి సంబంధించి శాంపుల్ ఆవరణ అంటాం. దీనిని S తో సూచిస్తాము. S లోని మూలకాలను శాంపుల్ బిందువులు అంటాము. S లోని ప్రతి మూలకము, యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క ఒక ఫలితము.

ఉదాహరణ 30.3 : ఒక నాణాన్ని రెండు సార్లు ఎగుర వేసే ప్రయోగములో శాంపుల్ ఆవరణను రాయండి.

సాధన : H ను బొమ్మతో T ని బొరుసుతో సూచిస్తాము.

శాంపుల్ ఆవరణం

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

గమనిక: రెండు నాణాలను ఒకేసారి ఎగరవేసే ప్రయోగంలో శాంపుల్ ఆవరణను ఈ కింది విధముగా రాస్తాము.

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

ఉదాహరణ 30.4 : ఈ కింది ప్రయోగాలకు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

(i) ఒక నాణాన్ని మూడు సార్లు ఎగురవేయండి ప్రతిసారి ఫలితాన్ని రాయండి.

(ii) అయిదుగురు ఆటగాళ్ళు A, B, C, D మరియు E నుండి ఇద్దరు ఆటగాళ్ళను మ్యాచ్ కొరకు ఎన్నుకొండి.

(iii) ఆరు విత్తనాలు వేయండి ఎన్ని విత్తనాలు మొలకెత్తాయో రాయండి.

(iv) ఒక నాణాన్ని రెండు సార్లు ఎగురవేయండి రెండవ సారి బొమ్మ వచ్చినచో పాచికను దొర్లించండి లేనిచో మళ్ళీ నాణాన్ని ఎగుర వేయండి.

సాధన : (i) S = {TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH}

శాంపుల్ ఆవరణలోని మూలకాల సంఖ్య = $2 \times 2 \times 2 = 8$

(iii) S = {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE}

$n(S) = 10$

(iii) S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

$n(S) = 7$

30.3 వివిధ పదాల నిర్వచనాలు

ఘటన : శాంపుల్ ఆవరణ (S) యొక్క ఉపసమితి (E) ను ఘటన అంటాము.

i.e., $E \subseteq S$.

మనము ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసే సందర్భాన్ని తీసుకొందాము. ఈ ప్రయోగంలో మనకు బొమ్మ రావడం అనే సందర్భాన్ని తీసుకొంటే అప్పుడు 'బొమ్మ' అనే ఘటన.

పాచిక దొర్లించే సందర్భంలో 'సరి సంఖ్య రావడం' అనే ఆసక్తి ఉంటే అప్పుడు అవకాశాలు 2, 4 మరియు 6 లు ఒక ఘటన ముందు నేర్చుకొన్నదాని ప్రకారం ఒక ప్రయోగం చాలా సార్లు చెసినట్టయితే ఒకే ఫలితం రాకపోవచ్చు. కాని వచ్చే ఫలితం శాంపుల్ ఆవరణలోనిదై ఉంటుంది.

శాంపుల్ ఆవరణలోని కొన్ని లఘు ఘటనలు ఇచ్చిన నియమాలను తృప్తిపరిస్తే దానిని ఘటన అంటాము.

ఈ ఘటనలను A, B, C, ,,,, అనే పెద్ద అక్షరాలతో సూచిస్తాము.

ఉదాహరణ 30.5 : ఒకే సమయంలో మూడు నాణాలను ఎగురవేసే ప్రయోగాన్ని E అనుకొందాము. ఈ కింది నియమాలను తృప్తిపరిచే ఘటనలను మరియు లఘు ఘటనలను రాయండి.

(i) బొరుసుల కంటే బొమ్మలు ఎక్కువగా ఉండటానికి

(ii) రెండు బొమ్మలు రావడానికి

సాధన :

శాంపుల్ ఆవరణ S

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

బొమ్మలు, బొరుసుల కంటే ఎక్కువ ఉండే ఘటనను E_1 అనుకొంటే రెండు బొమ్మలు ఉండే ఘటనను E_2 అనుకొందాము.

$$E_1 = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

$$E_2 = \{HHT,, HTH, THH\}$$

30.3.1 సమసంభవ ఘటనలు

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఏ ఘటన అయిన మిగతా ఘటనల కంటే ఎక్కువగా సంభవిస్తుందనడానికి కారణం ఏమి లేకపోతే అటువంటి ఘటనలను సమసంభవ ఘటనలు అంటాము.

ఉదాహరణ (i) : ఒక నిష్పాక్షిక నాణాన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు పడటం అనేది సమసంభవ ఘటనలు.

(ii) ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించినప్పుడు అన్ని ఆరు ముఖాలు రావడానికి సమాన అవకాశాలు కలవు.

(iii) బాగా కలిపిన 52 పేక ముక్కల నుండి ఒక పేక ముక్క తీసే ప్రయోగములో అన్ని 52 పేక ముక్కలకు సమాన అవకాశాలు కలవు.

30.3.2 పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఏదైనా ఘటనలలో ఏదైనా ఒక ఘటన సంభవించడం మిగతా ఘటనల సంభవాన్ని నిరోధించేటట్టు ఉంటే అటువంటి ఘటనలను పరస్పర

వివర్జిత ఘటనలు అంటాము. $E_1, E_2 .... E_K$ ఘటనలను ప్రతి $i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k$ లకు $E_i \cap E_j = \phi$ అయిన పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అంటాము

ఉదాహరణ (i): ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు పాచిక ముఖాలు (1 నుండి 6) రావడం పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

ఆరు ముఖములలో ఏదైనా ఒక ముఖం పైకి వస్తే మిగిలిన ముఖాలు అదే ప్రయోగంలో పైకి వచ్చే అవకాశం లేదు.

(ii) రెండు నాణాలను ఎగురవేసినప్పుడు రెండు బొరుసులు వచ్చే ఘటన మరియు కనీసం ఒక బొమ్మ రావడం అనే ఘటన పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

గణితాత్మకంగా ఘటనలను పరస్పర వివర్జితమంటే వాటి ఛేదనము ఒక శూన్య సమితి.

30.3.3 పూర్ణఘటనలు

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఆ ప్రయోగ ఫలితము వాటిలో ఒక దానికైన చెందేటట్లు ఉంటే అటువంటి ఘటనలను పూర్ణ ఘటనలు అంటాము. $E_1 \cup E_2 \cup E_3 .... \cup E_k = S$ అయిన $E_1, E_2 .... E_K$ ఘటనలను పూర్ణ ఘటనలు అంటాము.

ఉదాహరణకు ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు సరిసంఖ్య రావడం అనే ఘటన మరియు బేసి సంఖ్య రావడం అనే ఘటనలు పూర్ణఘటనలు. రెండు నాణేలను ఎగురవేసినప్పుడు కనీసం ఒక బొమ్మ పడే ఘటన మరియు కనీసం ఒక బొరుసు పడే ఘటనలు పూర్వఘటనలు.

ఉదాహరణలు:

(i) ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు1, 2, 3, 4, 5, 6 పడే ఘటనలు పూర్ణ ఘటనలు.

(ii) నిష్పాక్షిక నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు పడే ఘటనలు పూర్ణ ఘటనలు.

గణితాత్మకంగా ఘటనలు పూర్ణఘటనలు కావాలంటే వాటి సమ్మేళనం శాంపుల్ ఆవరణ అవ్వాలి.

30.3.4 స్వతంత్ర మరియు అస్వతంత్ర ఘటనలు

ఘటనల సముదాయంలో ఒక ఘటన ప్రభావము ఇతర ఘటనలపై లేనట్టయితే అలాంటి ఘటనలను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాము. ఒక ఘటన ప్రభావం ఇతర ఘటనలపై ఉన్నట్టయితే అలాంటి ఘటనలను అస్వతంత్ర ఘటనలు అంటాము.

ఉదాహరణలు

(i) ఒక నిపాక్షిక నాణాన్ని ఎగురవేసినప్పుడు మొదటిసారి బొమ్మరావడం అనే ఘటన మరియు తర్వాత ప్రయత్నాలలో బొమ్మరావడం అనే ఘటన స్వతంత్ర ఘటనలు.

(ii) బాగా కలిపిన పేక ముక్కల నుంచి ఒక పేకముక్కను తీసి, మరల చేర్చి రెండవసారి పేకముక్కను తీస్తే దాని ఫలితం మొదటి దానిపై ఆధారపడి ఉండదు. కాని మరల చేర్చక పోతే రెండవ దాని ఫలితం మొదటి దానిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. (మొదటి సారి తీసిన పేక ముక్క రెండవ సారి తీయలేము).

అభ్యాసం 30.1

1. పాఠశాల నుండి ఒక విద్యార్థిని నిష్పాక్షికంగా తీసుకోవడం ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అని నిరూపించండి.
2. గణన పరికరము (Calculator) మీద రెండు సంఖ్యలను కూడడం యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం కాదు. నిరూపించండి.
3. మూడు నాణాలను ఒకేసారి ఎగుర వేసే ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణను రాయండి.
4. ఒక నాణాన్ని ఎగుర వేసి మరల పాచికను దొర్లించే ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణను రాయండి.
5. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించండి. మొదటి పాచికపై ఆరు వచ్చే ఘటన మరియు రెండవ పాచికపై ఆరు వచ్చే ఘటన పూర్ణఘటననా, కాదా?
6. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించగా A, B, C, D అనే ఘటనలు కింద వివరించబడినవి.

   A: మొదటి పాచికపై సరిసంఖ్య రావడం.

   B: మొదటి పాచికపై బేసి సంఖ్య రావడం.

   C : రెండు పాచికలపై మొత్తము 7 కంటే తక్కువ రావడం

   D : రెండు పాచికలపై మొత్తము 7 కంటే ఎక్కువ రావడం.

   ఈ కింద ప్రవచనాలు సత్యమా కాదా నిర్ణయించండి.

   1. A మరియు B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

2. A మరియు B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు మరియు పూర్ణ ఘటనలు.

3. A మరియు C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

4. C మరియు D లు పరస్పర వివర్జిత మరియు పూర్ణ ఘటనలు.

7. 6 ఎర్ర బంతులు, 4 తెల్లబంతులు మరియు 5 నీలి బంతులు కలిగిన పెట్టెలోనుంచి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినది. ఈ ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణలో ఎన్ని మూలకాలు ఉంటాయి.

8. ఒకేసారి రెండు పాచికలను దొర్లించే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

9. ఇద్దరు పిల్లలు కలిగిన వేరు వేరు కుటుంబాలను తీసుకొని వారి లింగత్వాన్ని అడిగే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

30.4 సంభావ్యత

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం జరిపినప్పుడు n పూర్ణ, పరస్పర వివర్జిత, సమసంభవ లఘు ఘటనలు ఫలితమై A అనే ఘటన జరగడానికి వాటిలో ఏవైనా m అనుకూల ఫలితాలుంటే, ఆ ఘటన సంభావ్యతను P(A) తో సూచిస్తూ

$$p = \mathrm{P(A)} = \frac{\text{A దృష్ట్యా సఫలాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగ లఘుఘటనల సంఖ్య}} = \frac{m}{n}.$$

ఈ ప్రయోగంలో ఘటన A కి ప్రతికూల ఫలితాలు $(n - m)$ కాబట్టి, ఘటన A జరగకపోయే సంభావ్యత

$$q = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$= 1 - p$$

$$p + q = 1$$

ఈ నిర్వచనం నుంచి, p మరియు qల విలువలు ఋణేతరము మరియు ఒకటి కంటే తక్కువ.

$$0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1$$

కాబట్టి ఏదైనా ఘటన సంభావ్యత 0 మరియు 1 మధ్య ఉండును. (0 మరియు 1లతో సహా)

గమనిక:

1. ఒక ఘటన సంభవించుటకు సంభావ్యత p ని సఫల సంభావ్యత అని, ఘటన సంభవించకుండుటకు సంభావ్యత q ని విఫల సంభావ్యత అంటాం.
2. అసంభవ ఘటన సంభావ్యత 0 మరియు నిశ్చిత ఘటన సంభావ్యత 1.

   $p(A) = 1$ అయిన A నిశ్చిత ఘటన

   $p(A) = 0$ అయిన A అసంభవ ఘటన
3. ఏదైన ఘటన అనుకూల ఘటనలు (m), మొత్తం లఘుఘటనలు (n) కంటే తక్కువగా ఉండును.

ఉదాహరణలు 30.6: పాచికను ఒకసారి దొర్లించడమైనది అయిన 5 వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : పాచికను దొర్లించినపుడు 6 ముఖాలలో ఏముఖమైన పైకి రావచ్చును. వీటిలో ఒకటి మాత్రమే అనుకూల ఘటన. $\therefore\ P(5) = \frac{1}{6}$

ఉదాహరణలు 30.7: ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ (H) రావడం సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ (H) లేది బొరుసు (T) పడే అవకాశమున్నది. వీటిలో ఒకటి మాత్రమే అనుకూల ఘటన.

$$\text{కావున } P(H) = \frac{1}{2}$$

ఉదాహరణలు 30.8: ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు, బేసి సంఖ్య దొర్లించగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 6 ముఖాలలో ఏ ముఖమైన దొర్లవచ్చును.

వీటిలో 1, 3 మరియు 5లు మాత్రమే సఫలాలు.

$$P(\text{బేసి సంఖ్య}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ఉదాహరణలు 30.9: ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు, 7 వున్న ముఖము దొర్లే సంభావ్యత ఎంత? 7 కంటే చిన్న సంఖ్య గల ముఖం దొర్లించగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు మొత్తం లఘుఘటనలు 6.

పాచికపై 7 గల ముఖం ఉండదు.

కావున $P(7) = \frac{0}{6} = 0$

గమనిక : అసంభవ ఘటన సంభావ్యత 0.

పాచికపై గల ప్రతిముఖముపై గల సంఖ్య 7 కంటే చిన్నదే

కావున అనుకూల ఘటనలు 6.

$$P(\leq 7) = \frac{6}{6} = 1$$

గమనిక : నిశ్చిత ఘటన సంభావ్యత 1.

ఉదాహరణ 30.10: రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగరవేసినప్పుడు వాటిపై (i) 2 బొమ్మలు (ii) సరిగ్గా 1 బొమ్మ వచ్చే సంభావ్యతలు కనుగొనుము.

సాధన : రెండు నాణేలను ఎగరవేసినప్పుడు లఘుఘటనలు సంఖ్య = 2^2 = 4.

అవి HH, HT, TH, TT

(i) 2 బొమ్మలు ఉండే ఘటన సఫలాల సంఖ్య = 1(HH)

$$P(2 \text{ బొమ్మలు}) = \frac{1}{4}$$

(ii) సరిగ్గా 1 బొమ్మ ఉండే ఘటన సఫలాల సంఖ్య = 2 (HT, TH)

$$P(\text{సరిగ్గా 1 బొమ్మ}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ఉదాహరణ 30.11: మూడు నాణేలను ఏకకాలంలో ఎగుర వేసిన ఒక బొమ్మ రెండు బొరుసులు వచ్చే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన: మూడు నాణేలను ఎగురవేసినప్పుడు వచ్చే లఘు ఘటనలు

HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT

లఘు ఘటనల సంఖ్య = 8

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య

(రెండు బొరుసులు ఒక బొమ్మ) = 3 (i.e., HTT, THT, TTH)

$\therefore$ P(రెండు బొరుసులు ఒక బొమ్మ)

$$= \frac{3}{8}.$$

ఉదాహరణ 30.12: 200 పేజీలున్న ఒక పుస్తకాన్ని యాదృచ్ఛికంగా తెరిచినప్పుడు వచ్చే పేజిపై సంఖ్య ఖచ్చిత వర్గమయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన: లఘు ఘటనల సంఖ్య = 200

$1, 2, 3, \ldots. 200$

మొత్తం ఘటనల సంఖ్య $= 200$

(ఖచ్చిత వర్గము) $= \{1, 4, 9, \ldots 196\}$

$= 14$

$$\therefore \text{P(ఖచ్చిత వర్గము)} = \frac{14}{200} = \frac{7}{100}$$

ఉదాహరణ 30.13: రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లిస్తే, వాటి ముఖాలపై ఉన్న సంఖ్యల మొత్తం 9 అయ్యే సంభావ్యత ఎంత ?

సాధన : రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు మొత్తం లఘుఘటనల సంఖ్య $= 6 \times 6 = 36$

అవి

$(1, 1), (1, 2), (1, 3)\ (1, 4), (1, 5), (1, 6)$

$(2, 1), (2, 2), (2, 3)\ (2, 4), (2, 5), (2, 6)$

$(3, 1), (3, 2), (3, 3)\ (3, 4), (3, 5), (3, 6)$

$(4, 1), (4, 2), (4, 3)\ (4, 4), (4, 5), (4, 6)$

$(5, 1), (5, 2), (5, 3)\ (5, 4), (5, 5), (5, 6)$

$(6, 1), (6, 2), (6, 3)\ (6, 4), (6, 5), (6, 6)$

వీటిలో మొత్తము 9 అయ్యే ఘటనలను

$3 + 6 = 9$

$4 + 5 = 9$

$5 + 4 = 9$

$6 + 3 = 9$

(3, 6), (4, 5), (5, 4) మరియు (6, 3)లు ఇచ్చిన ఘటనకు అనుకూల ఘటనలు

కావున P(మొత్తం 9) = $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

ఉదాహరణ 30.14 : ఒక సంచిలో 10 ఎర్రని, 4 తెల్లని మరియు 6 నల్లని బంతులు ఉన్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసినచో, ఆ బంటి (i) ఎర్రనిబంతి (ii) తెల్లని బంతి (iii) నల్లని బంతి కాకుండుటకు, సంభావ్యత కనుగొనుము.

సాధన : సంచిలో గల మొత్తం బంతుల సంఖ్య = 10 + 4 + 6 = 20

మొత్తం లఘుఘటనల సంఖ్య = $^{20}C_1$ = 20

(i) ఎర్రబంతుల సంఖ్య = 10

$$P\text{ (ఎర్రని బంతి)} = \frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

(ii) తెల్లని బంతుల సంఖ్య = 4

$$P\text{(తెల్లని బంతి)} = \frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

(iii) నల్లని బంతులుకాని బంతుల సంఖ్య = 10 + 4 = 14

$$P\text{(నల్లబంతి కాని)} = \frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

ఉదాహరణ 30.15: ఒక చీట్ల పేక కట్టనుంచి యాధృచ్ఛికంగా ఒక పేక ముక్కను తీసే ప్రయోగంలో రాణి ముక్కను తీసే ఘటనను A తోను, 4 కంటె ఎక్కువ, 10 కంటే తక్కువ సంఖ్య గల ముక్కను తీసే ఘటనను B తోనూ సూచిస్తే, P(A) మరియు P(B) లను కనుగొనుము.

సాధన : బాగా కలిపిన చీట్ల పేక కట్టలో సమ సంభవఘటనలు

మొత్తం లఘుఘటనల సంఖ్య = 52

(i) చీట్ల పేక కట్టలో 4 రాణులు ఉండును.

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) చీట్లపేక కట్టలో 4 కంటే ఎక్కువ 10 కంటె తక్కువ సంఖ్యను కలిగిన కార్డులు 5, 6, 7, 8 మరియు 9.

ప్రతి సెట్‌లో 5 కార్డులు ఉండును.

చీట్ల పేకకట్టలో గల నాలుగు సెట్లలో గల కార్డులు = 5×4 = 20

$$P(B) = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}.$$

ఉదాహరణ 30.16: బాగా కలిపిన 32 చీట్ల పేక కట్ట నుండి యాధృచ్ఛికంగా ఒక పేక ముక్కను తీసిన అది

(i) ఇస్పేటు (ii) రాజు (iii) ఇస్పేటు లోని రాజు

అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: బాగా కలిపిన చీట్ల పేకకట్టలో సమ సంభవ ఘటనలు

$\therefore$ మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య = 52

(i) ఇస్పేటు ముక్క తీసే ఘటనను A అనుకొనుము.

చీట్ల పేక కట్టలో 13 ఇస్పేట్లు ఉంటాయి.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

(ii) రాజు తీసే ఘటనను B అనుకొనుము.

చీట్ల పేక కట్టలో 4 రాజులుంటాయి.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

(iii) ఇస్పేటు రాజును తీసే ఘటనను C అనుకొనుము.

చీట్ల పేక కట్టలో ఒక ఇస్పేటు రాజు ఉండును.

$$\therefore \quad P(C) = \frac{1}{52}.$$

ఉదాహరణ 30.17 : యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకున్న ఒక లీపు సంవత్సరంలో 53 ఆదివారాలు ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: లీపు సంవత్సరములో 366 రోజులు ఉండును.

366 రోజులు అనగా 52 వారాల 2 రోజులు.

ఈ రెండు రోజులు ఈ క్రింది జతలలో ఏదైనా కావచ్చును.

(i) ఆదివారము మరియు సోమవారము

(ii) సోమవారము మరియు మంగళవారము

(iii) మంగళవారము మరియు బుధవారము

(iv) బుధవారము మరియు గురువారము

(v) గురువారము మరియు శుక్రవారము

(vi) శుక్రవారము మరియు శనివారము

(vii) శనివారము మరియు ఆదివారము

పైన తెలిపిన 7 అవకాశాలలో రెండింటిలో మాత్రమే మనకు కావలసిన ఆదివారము ఉన్నది.

కావున P(53 ఆదివారాలు) = $\frac{2}{7}$

అభ్యాసం 30.2

1. ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు, 5 గల ముఖముపైకి వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
2. ఒక నాణేన్ని ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొరుసు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
3. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 3 కంటే పెద్ద సంఖ్య గల ముఖము పైకి వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
4. రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు, కనీసం ఒక బొరుసు వచ్చే ఘటన సంభావ్యతను కనుగొనుము.
5. ఒక సంచిలో 15 ఎర్రని బంతులు మరియు 10 నల్లనిబంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీస్తే అది (i) ఎర్రని బంతి (ii) నల్లని బంతి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
6. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు వాటి ముఖలపై గల అంకెల మొత్తం (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 12 అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
7. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు వాటి ముఖాలపై వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 3చే లేదా 4చే భాగింపబడే సంఖ్య అగుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

8. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు వాటి ముఖాలపై వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 10 కంటె ఎక్కువ అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. బాగా కలిపిన 52 చీట్ల పేకముక్కల కట్ట నుంచి ఒక ముక్కను తీస్తే అది ఎర్రని ముక్కఅయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

10. బాగా కలిపిన 52 చీట్ల పేకముక్కల కట్టనుంచి ఒక ముక్కను తీస్తే అది (i) ఇస్పేటు (ii) రాజు (iii) ఇస్పేటులోని రాజు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

11. ఒక జత పాచికలను దొర్లించినపుడు వాటి ముఖాలపై గల సంఖ్యల మొత్తం (i) ప్రధాన సంఖ్య (ii) రెండు పాచికల ముఖాలపై ఒకే సంఖ్య (iii) ఒక పాచిక ముఖముపై 2 యొక్క గుణిజం మరొక పాచిక ముఖముపై 3 యొక్క గుణిజం వచ్చేసంభావ్యతను కనుగొనుము.

12. మూడు నాణాలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు (i) బొమ్మరాకుండ (ii) కనీసం ఒక బొమ్మ వచ్చే (iii) మూడు బొమ్మలు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

30.5 ప్రస్తారాలు-సంయోగాలనుపయోగించి సంభావ్యతను కనుగొనుట

కిందటి విభాములో, మనము ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత కనుగొనుటకు, మొత్తము అవకాశమున్న ఘటనల నన్నింటిని వ్రాసి వాటి నుండి ఇచ్చిన ఘటనకు సఫలాలను కనుగొనే వాళ్ళము. ఈ పద్ధతి తక్కువ అవకాశా లున్నప్పుడు మాత్రమే ఉపయోగకరంగా ఉండును. లేనిచో కాలము వృధా అగును. కావున మీరు ఇదివరకే నేర్చుకొని ఉన్న ప్రస్తారాలు – సంయోగాలనుపయోగించి, సంభావ్యతను సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

ఈ క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 30.18 : ఒక సంచిలో 3 ఎర్రని, 6 తెల్లని మరియు 7 నీలం రంగు బంతులు కలవు. వీటి నుండి రెండు బంతులను తీసినచో అవి తెల్లనిది మరియు నీలం రంగు బంతులు అయ్యే సంభావ్యత కనుగొనుము.

సాధన : మొత్తం బంతుల సంఖ్య = 3 + 6 + 7 = 16

16 బంతుల నుండి 2 బంతులను తీసే విధానాల సంఖ్య = $^{16}C_2$

మొత్తం లఘుఘటనల సంఖ్య = $^{16}C_2$

$$= \frac{16\times15}{2} = 120$$

6 తెల్ల బంతుల నుండి ఒక బంతిని $^6C_1$ విధాలుగా మరియు 7 నీలం రంగు బంతుల నుండి ఒక బంతిని $^7C_1$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

మొత్తం సఫలాల సంఖ్య = $^6C_1 \times {}^7C_1 = 6 \times 7 = 42$

కావలసిన సంభావ్యత = $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$.

గమనికలు :

ఒక సంచిలో గల బంతులను తీయుటలో రెండు సందర్భములు ఉత్పన్నమగును.

(i) తిరిగి బంతిని సంచిలో వేయకుండుట :

రెండో బంతిని తీసేముందు మొదట తీసిన బంతిని సంచిలో చేర్చకుండ ఉండడం.

(ii) తిరిగి బంతిని సంచిలో చేర్చేవిధము.

రెండో బంతిని తీసేముందు మొదట తీసిన బంతిని సంచిలో తిరిగి ఉంచే విధము.

సాధారణంగా సమస్యలో ఏమీ ఇవ్వనిచో, తీసిన బంతిని తిరిగి సంచిలో చేర్చని విధంగానే భావించవలెను.

ఉదాహరణ 30.19 : ఒక సంచిలో 5 ఎర్రని మరియు 4 నల్లని బంతులు కలవు. ఆసంచి నుండి రెండు బంతులను (i) తీసిన బంతిని తిరిగి చేర్చే విధముగా (ii) తీసిన బంతిని తిరిగి చేర్చని విధముగా, ఆ రెండు బంతులు ఎర్రనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : (i) సంచిలోని మొత్తం బంతుల సంఖ్య = 5 + 4 = 9

మొత్తము సంభవాల సంఖ్య = 9 × 9 = 81

ఘటనకు అనుకూల సంభావాల సంఖ్య = 5 × 5 = 25

రెండు బంతులు ఎర్రనివి అయ్యే సంభావ్యత = $\frac{25}{81}$.

(ii) మొత్తం సంభవాల సంఖ్య, 9 బంతుల నుండి 2 బంతులను ఎన్నుకునే విధానాల సంఖ్యకు సమానము.

$\therefore$ మొత్తము సంభవాల సంఖ్య = ${}^{9}C_{2}$

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య, 5 ఎర్రని బంతుల నుండి 2 ఎర్రని బంతులను ఎన్నుకునే విధానాల సంఖ్యకు సమానము = ${}^{5}C_{2}$

తీసిన రెండు బంతులు ఎర్రనివి అయ్యే సంభావ్యత = $\frac{{}^{5}C_{2}}{{}^{9}C_{2}} = \frac{5\times4}{9\times8} = \frac{5}{18}$.

ఉదాహరణ 30.20 : బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల పేక కట్టనుండి 3 కార్డులను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ మూడు కార్డులు రాజు, రాణి మరియు జాకీ అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : 52 పేక కట్టనుండి 3 ముక్కలను ${}^{52}C_{3}$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చును.

మొత్తం లఘుఘటలనల సంఖ్య = ${}^{52}C_{3}$

పేక కట్టలో 4 రాజులు, 4 రాణులు, 4 జాకీలు ఉండును.

4 రాజుల నుండి ఒక రాజును ${}^{4}C_{1}$ విధాలుగా,

4 రాణుల నుండి ఒక రాణిని ${}^{4}C_{1}$ విధాలుగా మరియు

4 జాకీల నుండి ఒక జాకీని ${}^{4}C_{1}$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

$\therefore$ అనుకూల ఘటనల సంఖ్య = ${}^{4}C_{1} \times {}^{4}C_{1} \times {}^{4}C_{1}$

కావలసిన సంభావ్యత = $\frac{{}^{4}C_{1}\times{}^{4}C_{1}\times{}^{4}C_{1}}{{}^{52}C_{3}}$

$= \frac{4\times4\times4}{\frac{52\times51\times50}{3\times2\times1}}$

$= \frac{16}{5525}$

ఉదాహరణ 30.21 : 1 నుంచి 25 వరకు సంఖ్యలను వేసిన 25 టికెట్ల నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక టికెట్టును ఎంపిక చేస్తే ఆ టికెట్టుపై గల సంఖ్య 5 యొక్క గుణిజం అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : 25 టికెట్లనుండి ఒక టికెట్టును ${}^{25}C_{1}$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య = ${}^{25}C_{1}$

25 టికెట్లలో 5 యొక్క గుణిజాలు సంఖ్యగా గల టికెట్లు 5, 10, 15, 20, 25.

ఈ ఐదు టికెట్ల నుండి ఒక టికెట్టును ${}^5C_1$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

అనుకూల ఘటనలు = ${}^5C_1$

కావలసిన సంభావ్యత $= \frac{{}^5C_1}{{}^{25}C_1} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

ఉదాహరణ 30.22 : యాదృచ్ఛికంగా ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ కూర్చొన్న 20 మంది వ్యక్తులలో A, B లు ఉన్నారు. A, B ల మధ్య ఎవరైనా ఆరుగురు వ్యక్తులుండే సంభావ్యత కనుక్కోండి.

సాధన: గుండ్రని బల్లచుట్టూ ఏ ఆసనంపైనైనా A కూర్చోవచ్చు. అప్పుడు

B కి అందుబాటులో ఉన్న ఆసనాల సంఖ్య 19. కాని A, B ల మధ్య ఆరుగురు వ్యక్తులు ఉండాలంటే, B కూర్చోగల అవకాశాలు 2 మాత్రమే కాబట్టి, కావలసిన సంభావ్యత = $\frac{2}{19}$.

అభ్యాసం 30.3

1. ఒక సంచిలో 3 ఎర్రని, 6 తెల్లని మరియు 7 నీలి రంగు బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన రెండు బంతులు తెల్లనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
2. ఒక సంచిలో 3 ఎర్రని, 8 నీలిరంగు బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుండి యాధృచ్ఛికంగా రెండు బంతులు తీస్తే అవి ఒకటి ఎర్రని మరొకటి నీలిరంగు బంతి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
3. ఒక సంచిలో 20 తెల్లని మరియు 30 నల్లని బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన రెండు బంతులు (i) తీసిన బంతిని తిరిగి సంచిలో చేర్చే విధంగా (ii) తీసిన బంతిని తిరిగి సంచిలో చేర్చని విధంగా తెల్ల బంతులు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
4. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్టనుండి 3 ముక్కలను యాధృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ మూడు ముక్కలు జాకీలు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
5. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్టనుండి రెండు ముక్కలను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ రెండు ముక్కలు ఆఠీనులయ్యే సంభావ్యత 1/221 అని చూపుము.

6. ఒక పాఠశాలలో ప్రతిభావంతులైన విద్యార్థుల సమూహములో 6గురు బాలురు మరియు నలుగురు బాలికలు గలరు. వీరి నుండి వాక్చాతుర్య పోటీలకై ముగ్గురిని యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసినారు. ఎంపిక చేసిన వారిలో

(i) ఒక బాలుడు మరియు ఇద్దరు బాలికలు

(ii) అందరూ బాలురు

(iii) అందరూ బాలికలు

ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

7. 1 నుండి 21 వరకు సంఖ్యలకు వేసిన 21 టికెట్ల నుంచి యాదృచ్ఛికంగా 3 టికెట్లను తీసినారు. ఆ టికెట్లపై గల సంఖ్యలు A.P లో ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

8. 1 నుంచి 8 వరకు సంఖ్యలను వేసిన 8 టికెట్ల నుంచి యాదృచ్ఛికంగా 2 టికెట్లను తీసినారు. రెండు టికెట్లను ఒకేసారి తీసినప్పుడు, ఆ రెండు టికెట్ల పై గల సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. 6గురు బాలురు, 8మంది బాలికలు గల సమూహము నుండి, 5గురు ఆటగాళ్ళ టీమ్‌ను ఎంపిక చేసినారు. అయిన ఆ టీమ్‌లో 2 బాలురు మరియు 3గురు బాలికలు ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

10. మొదటి 200 ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్యల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పూర్ణ సంఖ్యను ఎన్నుకున్నారు. ఆ పూర్ణ సంఖ్య 6 లేదా 8చే భాగించబడే సంఖ్య అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

30.6 సంభావ్యతా స్వీకృతాలు

స్వీకృత పద్ధతిలో సంభావ్యతకు నిర్వచనం

సంభావ్యత అనేది యాధృచ్ఛిక ప్రయోగంలో ఘటనల సమితిలోని ప్రతి ఘటనకు కేటాయించబడే సంఖ్య.

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవకణం S మరియు E ఏదేని ఘటన అయితే

1. $0 \leq P(E) \leq 1, \ \forall \ E \subseteq S$
2. $P(S) = 1$
3. E_1, E_2 లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలయితే, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

30.7 ఘటనల సంభావ్యతలపై కొన్ని ఫలితాలు

ఫలితం 1: అసంభవ ఘటన సంభావ్యత 0.

సాధన : అసంభవ ఘటనలో శాంపుల్ బిందువులు ఉండవు.

S అనే ఒక ఘటన మరియు అసంభవ ఘటన ϕ లు

పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు

కావున $S \cup \phi = S$

$\Rightarrow \quad P(S \cup \phi) = P(S)$

$P(S) + P(\phi) = P(S)$

$P(\phi) = 0$

ఫలితం 2: A యొక్క పూరక ఘటన $\bar{A}$ యొక్క సంభావ్యత

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

సాధన : A మరియు $\bar{A}$ లు వియుక్త ఘటనలు.

$$A \cup \bar{A} = S \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతం నుండి

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

ఫలితం 3: ఏదైన ఘటన $A \in S$ కు $0 \leq P(A) \leq 1$ అని చూపుము.

సాధన : $A \subset S$ అని మనకు తెలుసు. $\Rightarrow \quad P(A) \leq P(S)$

$\Rightarrow \quad P(A) \leq 1$

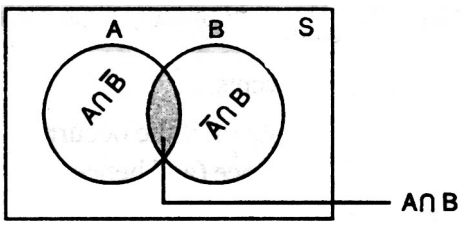
$P(A) \geq 0$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $0 \leq P(A) \leq 1.$

ఫలితం 4: A మరియు B లు ఏవైన రెండు ఘటనలయితే

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

సాధన :



పటం 30.1

పై పటం నుండి $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$

$$P(A \cup B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] \quad ...(1)$$

A మరియు $\bar{A} \cap B$ లు వియుక్త ఘటనలు

$$P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

లేదా $P(A \cup B) = P(A) + [P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)] - P(A \cap B)$ ...(2)

పటం 31.6 నుండి

$$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) = B$$

మరియు $(\bar{A} \cap B), (A \cap B)$ లు వియుక్త ఘటనలు

కావున సంకలన సిద్ధాంతం నుండి

$$P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = p(B)$$

ఈ విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ఫలితం 5: A మరియు Bలు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అయితే

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

సాధన: సంకలన సిద్ధాంతము నుండి

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad ...(1)$$

A మరియు B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

$$\therefore A \cap B = \phi$$

$$P(A \cap B) = P(\phi)$$

$$P(A \cap B) = 0$$

ఈ విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

దీనినే పరస్పర వివర్జిత ఘటనలకు సంకలన సిద్ధాంతము అంటాం.

ఉదాహరణ 30.23 : బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల పేక కట్టనుండి ఒక కార్డును తీసారు. అయితే తీసిన కార్డు స్పేడ్ లేదా రాజు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల పేక కట్టనుండి ఒక ముక్కను తీసే ఘటనలో మొత్తం లఘు ఘటనులు 52. శాంపుల్ ఆవరణ 52 శాంపుల్ బిందువులను కలిగి ఉండును.

స్పేడ్ మరియు రాజు కార్డులు పొందే ఘటనలు వరసగా A మరియు B అయిన A ఘటన 13 శాంపిల్ బిందువులను మరియు B ఘటన 4 శాంపుల్ బిందువులను కలిగి వుండును కావున

$$P(A) = \frac{13}{52}, \qquad P(B) = \frac{4}{52}$$

మిశ్రమఘటన $(A \cap B)$, ఒకే ఒక శాంపిల్ బిందువును కలిగి వుండును. అది స్పేడ్ రాజు.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

కావున తీసిన కార్డు స్పేడ్ లేదా రాజు కార్డు అయ్యే సంభావ్యత

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

ఉదాహరణ 30.24 : రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో

A : రెండు పాచికలపై ముఖాల సంఖ్యల మొత్తం 8

B : రెండు పాచికలపై ఒకే సంఖ్య రావడం

A, B లు రెండు ఘటనలైన A లేదా B సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపుల్ ఆవరణలో గల శాంపిల్ బిందువుల సంఖ్య = 6 × 6 = 36.

A కు అనుకూల ఘటనలు

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

B కు అనుకూల ఘటనలు

$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$A \cap B = \{(4, 4)\}.$$

$$P(A) = \frac{5}{36},\ p(B) = \frac{6}{36},\ p(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

A లేదా B సంభావ్యత

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

ఉదాహరణ 30.25: ఒక విద్యార్థి పొందే గ్రేడులు A, B, C లేదా D లు సంభావ్యతలు వరుసగా 0.30, 0.35, 0.20 మరియు 0.15. అయిన, ఒక విద్యార్థికి కనీసం B గ్రేడు పొందే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : కనీసం B గ్రేడు పొందే సంభావ్యత అనగా విద్యార్థి A గ్రేడు లేదా B గ్రేడు పొందుట అర్థం.

P(కనీసం B గ్రేడు) = P(B గ్రేడు) + P (A గ్రేడు)

$$= 0.35 + 0.30 = 0.65.$$

ఉదాహరణ 30.26: నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఎగురవేసినప్పుడు, కనీసం ఒక బొరుసు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: నాలుగు నాణేలను ఎగురవేసినప్పుడు శాంపుల్ ఆవరణలో 16 శాంపిల్ బిందువులుండును.

P (కనీసం ఒక బొరుసు) = P(1 లేదా 2 లేదా 3 లేదా 4 బొరుసులు)

$= 1 - P(0 \text{ బొరుసు})$

$= 1 - P(HHHH)$

4 బొమ్మలు వచ్చే ఘటనకు అనుకూల ఘటన ఒకటి.

కావున $P(HHHH) = \frac{1}{16}$.

$\therefore$ P (కనీసం ఒక బొరుసు) $= 1 - \frac{1}{16}$

$= \frac{15}{16}$

సంఘటనానుకూల్యం, సంఘటన ప్రాతికూల్యత.

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ఫలితంగా ఒక ఘటన E కి m ఫలితాలు అనుకూలంగాను, n ఫలితాలు ప్రతికూలంగాను ఉంటే,

E కి అనుకూలంగా అనుకూల్యత $= m : n$

E కి ప్రతికూలంగా అనుకూల్యత $= n : m$ అంటాం.

E సంఘటనానుకూల్యం $= \frac{\text{అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య}}{\text{ప్రతికూల ఫలితాల సంఖ్య}}$

E కి ప్రతికూల అనుకూల్యత $= \frac{\text{ప్రతికూల ఫలితాల సంఖ్య}}{\text{అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య}}$

ఉదాహరణ 30.27: వర్షం రావడానికి సంభావ్యత 0.3 అయిన సంఘటనానుకూల్యం, సంఘటన ప్రాతికూల్యత కనుగొనుము.

సాధన: వర్షం వచ్చే ఘటన A అనుకుంటే

$P(A) = 0.3$

పూరక నియమం నుండి

$P(\bar{A}) = 1 - 0.3$

$= 0.7$

వర్షం రావడానికి అనే ఘటన అనుకూల్యత $= \frac{0.3}{0.7}$ లేదా $3 : 7$

వర్షం రావడానికి అనే ఘటన ప్రతికూల అనుకూల్యత $= \frac{0.7}{0.3}$ లేదా $7:3$

ఒక ఘటన యొక్క సంఘటనానుకూల్యం లేదా సంఘటన ప్రాతికూల్యత ఇచ్చినపుడు, ఆ ఘటన సంభావ్యత కనుగొనుటకు సూత్రం

A సంఘటనానుకూల్యం a నుండి b అయిన

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

A సంఘటన ప్రాతికూల్యత a నుండి b అయిన

$$P(A) = \frac{b}{a+b}$$

దీనిని చాలా సులభంగా రుజువు చేయవచ్చును.

A యొక్క సంఘటనానుకూల్యం a నుండి b అయిన,

నిర్వచనం నుండి $\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{a}{b}$

పూరకన్యాయం నుండి

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{a}{b} \text{ లేదా}$$

$$b(P(A)) = a(1 - P(A))$$

$$b(P(A)) = a - a\,P(A)$$

$$P(A)\,(a+b) = a$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

అదేవిధముగా A యొక్క సంఘటన ప్రాతికూల్యత a నుండి b అయిన $P(A) = \frac{b}{a+b}$ అని చూపవచ్చును.

ఉదాహరణ 30.28: ఒక నిర్దేశ ఘటనా (i) అనుకూల్యాలు 3 నుండి 1 (ii) Aకు ప్రాతికుల్యాలు 7 నుండి5 అయిన Aయొక్క సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: (i) $P(A) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

(ii) $P(A) = \frac{5}{7+5} = \frac{5}{12}$

ఉదాహరణ 30.29: రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు, రెండు పాచికల పై ముఖాల సంఖ్యల మొత్తం (a) 8 కంటే ఎక్కు (b) 7 గాని 11 గాని కాని సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: (a) రెండు పాచికల పై ముఖాల సంఖ్యల మొత్తంను S చే సూచించిన మనము $P(S > 8)$ కనుగొనవలెను.

సంబంధిత ఘటన ఈ క్రింది పరస్పర వివర్జిత విధాలుగా సంభవించును.

(i) $S = 9$ (ii) $S = 10$ (iii) $S = 11$ (iv) $S = 12$

కావున పరస్పర వివర్జిత ఘటనలకు సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతము నుండి

$P(S > 8) = P(S = 9) + P(S = 10) + P(S = 11) + P(S = 12)$ ...(1)

రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు

శాంపుల్ ఆవరణం $6 \times 6 = 36$ బిందువులను కలిగి ఉండును. అనుకూల ఘటనలు క్రింది విధముగా ఉండును.

$S = 9 : (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$

4 శాంపుల్ బిందువులు

$P(S = 9) = \frac{4}{36}$

$S = 10 : (4, 6), (5, 5), (6, 4)$

3 శాంపుల్ బిందువులు.

$P(S = 10) = \frac{3}{36}$

$S = 11 : (5, 6), (6, 5)$

2 శాంపుల్ బిందువులు

$$P(S = 11) = \frac{2}{36}$$

$S = 12 : (6, 6)$

1 శాంపుల్ బిందువులు

$$P(S = 12) = \frac{1}{36}$$

ఈ విలువలను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$P(S > 8) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

(b) రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు మొత్తం 7 మరియు 11లు వచ్చే ఘటనలు వరుసగా A మరియు B అనుకొనుము.

$S = 7 : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$

6 శాంపుల్ బిందువులు

$$P(S = 7) = \frac{6}{36} \text{ లేదా } P(A) = \frac{6}{36}$$

$S = 11 : (5, 6), (6, 5)$

2 శాంపుల్ బిందువులు

$$P(S = 11) = \frac{2}{36} \text{ లేదా } P(B) = \frac{2}{36}.$$

A మరియు B లు వియుక్త సమితులు

కావున $P(A \text{ లేదా } B) = P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36}$$

$$= \frac{8}{36}$$

$$P(\text{A కాదు B కాదు}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{8}{36}$$

$$= \frac{28}{36}$$

$$= \frac{7}{9}$$

ఉదాహరణ 30.30 : ఈ క్రింది సంభావ్యతలు సరియైనవేనా ? నీ యొక్క జవాబును సరిచూడుము.

(a) $P(A) = P(B) = 0.6,\ P(\text{A మరియు B}) = 0.05$

(b) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.4,\ P(\text{A మరియు B}) = 0.1$

(c) $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.7,\ P(\text{A మరియు B}) = 0.4$

సాధన : (a) $P(\text{A లేదా B}) = P(A) + P(B) - P(\text{A మరియు B})$

$$= 0.6 + 0.6 - 0.05$$

$$= 1.15$$

$P(\text{A లేదా B}) > 1$ ఇది సాధ్యం కాదు.

కావున ఇచ్చిన సంభావ్యతలు సరియైనవి కావు.

(b) $P(\text{A లేదా B}) = P(A) + P(B) - P(\text{A మరియు B})$

$$= 0.5 + 0.4 - 0.1$$

$$= 0.8$$

ఇది ఒకటి కంటె తక్కువ.

కావున ఇచ్చిన సంభావ్యతలు సరియైనవి.

$P(\text{A మరియు B}) \leq P(A)$

$P(\text{A మరియు B}) \leq P(B)$ అయినపుడు సరియైనవిగా ఉండును.

(c) P(A మరియు B) = 0.4

P(A) = 0.2

ఇక్కడ P(A మరియు B) ≤ P(A) ను తృప్తి పరచుట లేదు.

కావున ఇచ్చిన సంభావ్యతలు సరియైనవి కావు.

ఉదాహరణ 30.31: ఒక సంచిలో 8 తెల్లని మరియు 2 ఆకుపచ్చని బంతులు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా 3 బంతులను తీసినారు. తీసిన 3 బంతులలో కనీసం ఒక ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: సంచిలో 8 తెల్లని, 2 ఆకుపచ్చని బంతులు కలవు.

సంచిలో గల మొత్తం బంతుల సంఖ్య = 8 + 2 = 10

3 బంతులను తీసే విధానాల సంఖ్య $^{10}C_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$ = 120 విధాలు.

కనీసం ఒక ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటన A అనుకొనుము.

A ఘటనకు అనుకూల ఘటనల గురించి మనము చర్చించుకుందాం.

అనుకూల ఘటనలలో 1 ఆకుపచ్చ బంతి లేదా 2 ఆకుపచ్చ బంతులు ఉండే అవకాశం ఉన్నది.

1 ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటనలు అనగా

1 ఆకుపచ్చ బంతి మరియు 2 తెల్లని బంతులు అని అర్థం.

1 ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటనకు అనుకూల ఘటనలు = $^{2}C_1 \times {}^{8}C_2$

$= 2\times\frac{8\times7}{2\times1}$

$= 56$

అదేవిధముగా 2 ఆకుపచ్చ బంతులు ఉండే ఘటనకు అనుకూల ఘటనలు

$= {}^{2}C_2 \times {}^{8}C_1$

$= 1 \times 8$

$= 8$

కావున కనీసం ఒక ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటనకు సంభావ్యత

P(కనీసం 1 ఆకుపచ్చ బంతి) = P(1 ఆకుపచ్చ బంతి) + P(2 ఆకుపచ్చ బంతులు)

$$= \frac{56}{120} + \frac{8}{120}$$

$$= \frac{64}{120} = \frac{8}{15}.$$

ఉదాహరణ: 30.33: ఒక సంచిలో 5 నీలిరంగు బంతులు మరియు 10 ఎర్రని బంతులు కలవు. వీటి నుండి 2 బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తిరిగి చేర్చే విధముగా తీసినచో ఆ రెండు బంతులు నీలిరంగువి లేదా ఎర్రని బంతులు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: రెండు బంతులు నీలి రంగు బంతులు అయ్యే ఘటన A, రెండు బంతులు ఎర్రని బంతులు అయ్యే ఘటన B అనుకొనుము. A, B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

లెక్కించే ప్రాథమిక సిద్ధాంతం నుండి

A కు అనుకూల ఘటనల సంఖ్య = 5 × 5 = 25

అదేవిధముగా B కు అనుకూల ఘటనల సంఖ్య = 10 × 10 = 100

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య = 15 × 15 = 225

$$P(A) = \frac{15}{225} = \frac{1}{9} \quad \text{మరియు} \quad P(B) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$$

A మరియు B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు కావున

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}.$$

అభ్యాసం 30.4

1. బాగా కలిపిన చీట్లపేక కట్ట నుండి ఒక కార్డును తీసినారు. తీసిన కార్డు రాణి లేదా ఆఠీను కార్డు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
2. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లిస్తే, మొత్తం 7 లేదా 12 అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

3. 2010 ప్రపంచ క్రికెట్ కప్ భారతదేశం గెలవడానికి సంఘటనానుకూల్యం 9 నుండి 7. అయిన భారతదేశం గెలిచే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

4. టీము A లీగు మ్యాచ్‌లో గెలవడానికి సంఘటన ప్రాతికూల్యత 5 నుండి 7 అయిన లీగు మ్యాచ్‌లో టీము A గెలిచే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

5. రెండు పాచికలు దొర్లించడమైనది. సంఖ్యల మొత్తం 4 లేదా 5 చే భాగింపబడిన సఫలంగా భావిస్తే, సఫల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

6. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్టనుండి రెండు ముక్కలు తిరిగి చేర్చే విదముగా తీసినారు. అయిన ఆ రెండు ముక్కలు నల్లనివి లేదా ఎర్రనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

7. బాగా కలిపిన చీట్ల పేక కట్ట నుండి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ కార్డు ఆసుగాని లేదా నల్లని కార్డు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

8. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించారు. మొదటి పాచికపై 3 యొక్క గుణిజం లేదా మొత్తం 8 వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. (a) రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించారు. మొత్తం 5 లేదా 7 అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

   (b) $P(A) = 0.3$ మరియు $P(B) = 0.4$, A, B లు రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అయిన P(A లేదా B)ని కనుగొనుము.

10. ఒక పెట్టెలోని 12 బల్బులలో 5 పనిచేయనివి. పెట్టెలో నుంచి 3 బల్బులను యాదృచ్ఛికంగా తీసినప్పుడు, వాటిలో కనీసం 2 బల్బులు పనిచేయనివి ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

11. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినారు.

   (a) రెండు పాచికలపై వేరు, వేరు సంఖ్యలు

   (b) సంఖ్యల మొత్తం కనీసం 3 అయ్యే సంభావ్యతలను కనుగొనుము.

12. ఒక జంటకు ముగ్గురు పిల్లలు కలరు. ఆ ముగ్గురి పిల్లలలో కనీసం ఒక బాలుడు లేదా కనీసం ఒక బాలిక ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

13. ఈ క్రింది సంభావ్యతలకు సంఘటనానుకూల్యం, సంఘటన ప్రాతికూల్యతలను కనుగొనుము.

   (a) $P(A) = 0.7$ (b) $P(A) = \frac{4}{5}$

14. క్రింది సంఘటనలకు A యొక్క సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(a) సంఘటనానుకూల్యం 7 నుండి 2

(b) సంఘటన ప్రాతికూల్యత 10 నుండి 7.

15. రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు

(a) సంఖ్యల మొత్తము 4 కంటే ఎక్కువ 9 కంటే తక్కువ

(b) సంఖ్యల మొత్తం 5 కాదు, 8 కాదు అయ్యే సంభావ్యతలను కనుగొనుము.

16. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి సరియైన సంభావ్యతలో తెలిపి కారణాలను తెలుపుము.

(a) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.3$ $P(A$ మరియు $B) = 0.4$

(b) $P(A) = P(B) = 0.4$ $P(A$ మరియు $B) = 0.2$

(c) $P(A) = 0.85,\ P(B) = 0.8$ $P(A$ మరియు $B) = 0.61$

17. ఒక సంచిలో గల 5 తెల్లని మరియు 10 ఆకుపచ్చ బంతుల నుండి యాదృచ్ఛికంగా రెండు బంతులను తీసినారు. అయితే ఆ రెండు బంతులలో కనీసం ఒక తెల్ల బంతి ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

18. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలుగల చీట్ల పేక కట్టనుండి, తిరిగి మళ్ళీ చేర్చే పద్ధతిన రెండు ముక్కలను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ రెండు కార్డులు ఒకే సెట్‌కు చెందినవి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

30.8 స్వతంత్ర ఘటనలకు, సంభావ్యతా లబ్ధ సిద్ధాంతము

మొదట స్వతంత్ర ఘటనల గురించి తెలుసుకుందాం.

A మరియు B లు రెండు ఘటనలు, ఒక ఘటన సంభవిచడం లేదా సంభవించకపోవడం అనేది ఇంకొక ఘటన సంభవముపై ఆధారపడి లేకపోయినచో A మరియు B లను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాం.

స్వతంత్ర ఘటనలను కొన్ని ఉదాహరణలు చెప్పుకుందాం.

రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు ఒక నాణేంపై బొమ్మ కావడం, మరొక నాణేంపై బొరుసు రావడం అనే ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలు ఒకే నాణేన్ని వరుసగా రెండుసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు మొదటి సారి బొమ్మరావడం రెండవసారి బొరుసురావడం. ఇవి కూడా రెండు స్వతంత్ర ఘటనలే.

బాగా కలిపిన చీట్ల పేక కట్టనుండి, తీసిన కార్డును తిరిగి చేర్చని విధంగా మొదట తీసిన కార్డు ఆసుకావడం, రెండవసారి తీసిన కార్డు రాజు అయ్యే ఘటనలు, స్వతంత్ర ఘటనలేనా?

ఇవి స్వతంత్ర ఘటనలు కావు. ఎందుకనగా చీట్లపేక కట్టనుండి ఆసు తీసే సంభావ్యత $\frac{4}{52}$, ఈ కార్డును తిరిగి కట్టలో చేర్చుట లేదు కావున సంభావ్యత $\frac{4}{51}$ అగును. ఇవి స్వతంత్ర ఘటనలు కావు.

స్వతంత్ర ఘటనలు అని చెప్పడానికి ఏదైనా పద్ధతి ఉందా?

రెండు వరుస స్వతంత్ర ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనడము ఎలా?

A మరియు B లు రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు వరుసగా సంభవించే సంభావ్యత, వాటి విడి విడి సంభావ్యతల లబ్ధానికి సమానము.

గమనిక : పై సూత్రాన్ని రెండు కంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర ఘటనలకు కూడా నిర్వచించవచ్చును.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$$

ఇంకొక విధంగా, A మరియు B ఘటన సంభావ్యత, వాటి సంభావ్యతల లబ్ధానికి సమానము. అయిన A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

ఉదాహరణ 30.33 : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగపు ఘటనలు A, B లు స్వతంత్ర ఘటన లయిన $\bar{A}$, $\bar{B}$ లు కూడ స్వతంత్ర ఘటనవులుతాయి.

సాధన : A, B లు స్వతంత్ర ఘటనయిన

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P\left[\overline{(A \cup B)}\right]$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)]$$
$$= 1 - [P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$
$$= (1 - P(A)) - P(B)\,(1 - P(A))$$
$$= [1 - P(A)]\ [(1 - P(B)]$$

$= P(\bar{A}) - P(\bar{B})$.

$\therefore \bar{A}, \bar{B}$ లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

ఉదాహరణ 30.34: ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించినారు. ప్రతిసారీ 4 కంటె పెద్ద సంఖ్య వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటిసారి పాచికను దొర్లించినపుడు 4 కంటె పెద్ద సంఖ్య వచ్చే ఘటన A అనుకొనుము. రెండవసారి 4 కంటె పెద్ద సంఖ్య వచ్చే ఘటన B అనుకొనుము.

A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలని తెలియుచున్నది.

మొదటిసారి పాచికను దొర్లించినపుడు A కు అనుకూల ఘటనలు 5, 6.

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

అదేవిధముగా $P(B) = \frac{1}{3}$

కావున $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{9}.$$

ఉదాహరణ 30.35: రెండు ఖాళీ ఉద్యోగాలకు గాను, అరుణ్ మరియు తరుణ్ మౌఖిక పరీక్షకు హాజరైనారు. అరుణ్ ఎంపిక కావడానికి సంభావ్యత $\frac{1}{3}$ మరియు తరుణ్ ఎంపిక కావడానికి సంభావ్యత $\frac{1}{5}$. అయిన

(a) ఇద్దరూ ఎంపిక అగుటకు

(b) ఎవరూ ఎంపిక కాకుండుటకు

(c) కనీసం ఒకరు ఎంపిక అగుటకు

(d) ఒక్కరు మాత్రమే ఎంపిక అగుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : అరుణ్ ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యత = $P(A) = \frac{1}{3}$

తరుణ్ ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యత = $P(A) = \frac{1}{5}$

(a) P(ఇద్దరూ ఎంపిక అగుటకు) = P(A) P(T)

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{15}$$

(b) P(ఎవరూ ఎంపిక కాకుండుటకు) = $P(\overline{A})\, P(\overline{T})$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{8}{15}.$$

(c) P (కనీసం ఒకరు ఎంపిక అగుటకు) = 1 – P (ఎవరూ ఎంపిక కాకుండుటకు)

$$= 1 - P(\overline{A})\, P(\overline{T})$$

$$= 1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 1-\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= 1-\frac{8}{15}$$

$$= \frac{7}{15}$$

P(ఒక్కరు మాత్రమే ఎంపిక అగుటకు) = $P(A)\, P(\overline{T}) + P(\overline{A})\, P(T)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{6}{15} = \frac{2}{15}.$$

ఉదాహరణ 30.36 : సాంఖ్యకశాస్త్రంలో ఒక సమస్యను సాధించుటకు ముగ్గురు విద్యార్థుల సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{4}$. అయిన ఆ సమస్య సాధించుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: P_1, P_2, P_3 లు ముగ్గురు విద్యార్థులు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు అనుకొనుము.

$$P_1 = \frac{1}{2}, P_2 = \frac{1}{3} \text{ మరియు } P_3 = \frac{1}{4}$$

కనీసం ఒకరైనా సమస్యను సాధిస్తే, సమస్య సాధింపబడును.

కావున P(కనీసం ఒకరైనా సమస్యను సాధించుట)

= 1 – P(ఎవరూ సమస్యను సాధించకుండుట)

ఎవరూ సమస్యను సాధించకుండ ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనవలెను.

$\therefore$ P(ఎవరూ సమస్యను సాధించకుండుట) $= (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3)$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\therefore$ P (కనీసం ఒకరైనా సమస్యను సాధించుట) $= 1 - \frac{1}{4}$

$$= \frac{3}{4}$$

కాబట్టి, సమస్యను సాధించే సంభావ్యత $= \frac{3}{4}$.

ఉదాహరణ 30.37 : ఒక సంచిలో 15 ఎర్రని మరియు 10 తెల్లని బంతులు కలవు. వాటిలో నుండి యాదృచ్ఛికంగా, మొదట తీసిన బంతిని మళ్ళీ చేర్చేవిధముగా రెండు బంతులను తీస్తే, అవి

(a) రెండూ ఎర్రని బంతులు

(b) మొదటి బంతి ఎర్రనిది రెండవ బంతి తెల్లనిది

(c) వాటిలో ఒకటి ఎర్రని మరొకటి తెల్లని బంతి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన :(a) మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన A, మరియు రెండవసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన B అనుకొనుము.

మొదటి తీసిన బంతిని తిరిగి సంచిలో చేర్చే విధముగా జరుగుతున్నది.

కావున $P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$P(B) = \frac{3}{5}$

A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు

P (రెండూ ఎర్రని బంతులు) = P(A మరియు B)

$= P(A) \cdot P(B)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{9}{25}.$

(b) A : మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది

B : రెండవసారి తీసిన బంతి తెల్లనిది

$P(A \text{ మరియు } B) = P(A) \times P(B)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{6}{25}.$

(c) మొదటిసారి తెల్లని బంతి, రెండవసారి ఎర్రని బంతి వచ్చే ఘటన WR మరియు మొదటిసారి ఎర్రని బంతి, రెండవసారి తెల్లని బంతి వచ్చే ఘటన RW అనుకొనిన

WR మరియు RW లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు. కావున

P(ఒక తెల్లని మరియు ఒక ఎర్రని బంతి)

$= P(WR \text{ లేదా } RW)$

$= P(WR) + P(RW)$

$= P(W)\,P(R) + P(R)\,P(W)$

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$

$= \frac{6}{25} + \frac{6}{25}$

$= \frac{12}{25}.$

ఉదాహరణ 30.38 : X మేనేజరు, పనివారి కూలీకి సంబంధించి తగాదాను పరిష్కరించు సంఘటన ప్రాతికూల్యత 8:6 మరియు Y మేనేజరు పరిష్కరించు సంఘటన అనుకూల్యత 14:16 అయిన

(i) ఇద్దరు వేరు వేరుగా సమస్యను పరిష్కరించుటకు ప్రయత్నిస్తే, ఏ ఒక్కరు సమస్యను పరిష్కరించకుండుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(ii) సమస్య పరిష్కరించు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : సమస్యను మేనేజరు పరిష్కరించే ఘటన A మరియు మేనేజరు Y పరిష్కరించే ఘటన B అనుకొనుము.

(i) $P(A) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

$P(B) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}, \quad P(\bar{B}) = 1 - \frac{14}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

ఏ ఒక్క మేనేజరు సమస్యను పరిష్కరించకుండ ఉండుటకు సంభావ్యత

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})\ P(\bar{B})$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{15} = \frac{32}{105}$$

(A మరియు B స్వతంత్రాలు కావున $\bar{A}$ మరియు $\bar{B}$ లు కూడా స్వతంత్ర ఘటనలు)

(ii) X మరియు Y లలో కనీసం ఒకరు సమస్యను పరిష్కరించగలిగిన, సమస్య పరిష్కారమగును. కావున కావలసిన సంభావ్యత

$P(A \cup B) =$ P(X మరియు Y లలో కనీసం ఒకరు సమస్యను పరిష్కరించుటకు)

$= 1 -$ P (సమస్యను పరిష్కరించుట)

$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$= 1 - \frac{32}{105} = \frac{73}{105}$$

ఉదాహరణ 30.39 : $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.4$ తో A, B లు ఘటనలయితే కింది సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

(i) $P(A$ జరుగకపోవడం$) = P(\bar{A})$

$= 1 - P(A)$

$= 1 - 0.5$

$= 0.5$

(ii) $P(A, B$ లు రెండూ జరుగక పోవడం$) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$= P(\overline{A \cup B})$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - [0.5 + 0.4 - 0.3]$

$= 0.4.$

ఉదాహరణ 30.40: A, B, C లు ఏవేని మూడు ఘటనలయినా

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$

$- P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ అని చూపండి.

సాధన: $B \cup C = D$

$$(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$$
$$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$
$$= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

ఉదాహరణ 30.41: ఒకపాచికను మూడుసార్లు దొర్లించారు. 5 లేదా 6 వచ్చినచో సఫలం అయిన

(a) 3 సఫలాలు (b) 2 సఫలాలు మాత్రమే (c) గరిష్ఠంగా 2 సఫలాలు

(d) కనీసం 2 సఫలాలకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: సఫలాన్ని S చే మరియు విఫలాన్ని F చే సూచిద్దాం.

అపుడు $P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(a) ప్రయత్నాలు స్వతంత్రాలు, కావున స్వతంత్రఘటనలకు సంభావ్యతా లబ్ధిసిద్ధాంతము నుండి

$P(SSS) = P(S)\,P(S)\,P(S)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$P(SSS) = P(S)\,P(S)\,P(F)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

రెండు సఫలాలు సంభవించే విధానాల సంఖ్య = ${}^3C_2$

$\therefore$ P(సరిగ్గా 2 సఫలాలు) = ${}^3C_2 \times \frac{2}{27} = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$

(c) P(గరిష్ఠంగా 2 సఫలాలు) = 1 – P(3 సఫలాలు)

$$= 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

(d) P (కనీసం 2 సఫలాలు) = P(సరిగ్గా 2 సఫలాలు) + P(3 సఫలాలు)

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}.$$

ఉదాహరణ 30.42 : 52 ముక్కలుగల ఒక చీట్లపేక కట్టనుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీసినారు. అయితే ఈ క్రింది ఘటనలలో ఏవి స్వతంత్రాలు?

(i) A : తీసిన కార్డు స్పేడ్ అగుట

B : తీసిన కార్డ ఏసు అగుట

(ii) A : తీసిన కార్డు నల్లనిది

B: తీసిన కార్డు రాజు

(iii) A : తీసిన కార్డు రాజు లేదా రాణి అగుట

B: తీసిన కార్డు రాణీ లేదా జాకీ అగుట

సాధన: (i) పేకముక్కల కట్టలో స్పేడ్‌లో 13 కార్డులు ఉండును.

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

చీట్ల పేక కట్టలో మొత్తం 4 ఏసులుండును.

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$A \cap B =$ స్పేడులోని ఏసు

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

ఇపుడు $P(A)\,P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$

కావున $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

కాబట్టి మరియు ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలు.

(ii) చీట్ల పేక కట్టలో మొత్తం 26 నల్లని కార్డులు ఉండును.

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

చీట్ల పేక కట్టలో మొత్తం 4 రాజులు ఉండును.

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$A \cap B = \{\text{నల్లని రాజులు } 2\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

ఇపుడు $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{26}$

కావున $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

కాబట్టి A మరియు B ఘటనలు స్వతంత్రఘటనలు.

(iii) చీట్లపేక కట్టలో 4 రాజులు మరియు 4 రాణులు ఉండును.

A ఘటనకు అనుకూల ఘటనలు = 8

$$P(A) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

అదేవిధముగా $P(B) = \frac{2}{13}$

$$A \cap B = \{4 \text{ రాణులు}\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{2}{13} \times \frac{2}{13} = \frac{4}{169}.$$

ఇక్కడ $P(A \cap B) \neq P(A)\ P(B)$

కాబట్టి A మరియు B ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలు కావు.

ఉదాహరణ 30.43: 36 విద్యార్థులు గల ఒక సమూహములో A మరియు B లు రెండుఘటనలు

A : నీలి రంగు కళ్ళు ఉండే విద్యార్థులు

B : విద్యార్థి బాలుడు అగుట

36 విద్యార్థులలో 12 మంది బాలురు మరియు 24 మంది బాలికలు మరియు వారిలో సగము మందికి నీలిరంగు కళ్ళు ఉండును. అయిన A మరియు B ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలా ?

సాధన : 36 మంది విద్యార్థులు ఈ క్రింద తెలిపిన పట్టికలో విధముగా గలరు.

	నీలి రంగు కళ్ళు A	నీలి రంగు కళ్ళు కాని వారు ($\bar{A}$)	మొత్తం
బాలురు (B)	6	6	12
బాలికలు ($\bar{B}$)	12	12	24
మొత్తం	18	18	36

యాదృచ్ఛికంగా ఒక విద్యార్థిని ఎన్నుకుంటే, A మరియు B ఘటనల సంభావ్యతలు

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

కావున $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

కాబట్టి A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

ఉదా 44.44 : ఒక నాణేన్ని మూడు సార్లు ఎగురవేసి వచ్చే ఫలితాల క్రమము బొమ్మ మరియు బొరుసులను రికార్డు చేయడమైనది. గరిష్ఠంగా ఒక బొమ్మ వచ్చే ఘటన A మరియు రెండు బొమ్మలు మరియు బొరుసు వచ్చే ఘటన B అనుకుంటే, ఈ ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలా?

సాధన : ఒక నాణేన్ని మూడు సార్లు ఎగురవేస్తే శాంపుల్ ఆవరణం

$$S = \{HHH,\ HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT\}$$

మరియు $A \cap B = \{TTH, THT, HTT\}$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

కాబట్టి A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

అభ్యాసం 30.5

1. ఒక విభాగములో గల రెండు ఉద్యోగాల ఖాళీలకు భార్యభర్తలు మౌఖిక పరీక్షకు హాజరైనారు. భర్త ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యత $\frac{1}{7}$ మరియు భార్య ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యత $\frac{1}{5}$ అయిన

   (a) వారిలో ఒకరు ఎంపిక అగుటకు

   (b) ఇద్దరూ ఎంపిక అగుటకు

   (c) ఎవరూ ఎంపిక కాకుండుటకు

   (d) కనీసం ఒకరు ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

2. రాజు మరియు సోము స్వతంత్రంగా ఒక సమస్యకు సాధించే సంభావ్యతలు వరసగా $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{3}$. ఇద్దరు స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించే ప్రయత్నం చేస్తే

(i) సమస్యను సాధింపబడే

(ii) సరిగ్గా ఒక్కరు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

3. ఒక పాచికను రెండుసార్లు దొర్లించినారు. దొర్లించిన ప్రతీసారి 3 కంటే పెద్ద సంఖ్య వచ్చే సంభావ్యత కనుగొనుము.

4. A మరియు B అనే రెండు ఉద్యోగాలకు గాను సీత మౌఖిక పరీక్షకు హాజరైనది. వీటి ఎంపిక స్వతంత్రము. A ఉద్యోగానికి ఆమె ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యత $\frac{1}{5}$ మరియు B ఉద్యోగానికి $\frac{1}{7}$ అయిన

(a) A మరియు B రెండింటికీ ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

(b) కనీసం ఒక ఉద్యోగానికి ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

5. ఒక సమస్యను ముగ్గురు విద్యార్థులు A, B, C లకు ఇచ్చారు. దాన్ని వారు సాధించే సంభావ్యతలు వరసగా $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$ మరియు $\frac{3}{8}$. వారిలో ఒక్కరు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

6. బాగా కలిపిన చీట్లపేక కట్ట నుండి A రెండు కార్డులను, మొదట తీసిన కార్డు తిరిగి కట్టలో చేర్చే విధంగా యాదృచ్ఛికంగా తీసెను. B రెండు పాచికలను దొర్లించెను.

(a) రెండు కార్డులు ఒకే సెట్టుకు సంబంధించినవి. A పొందటం మరియు మొత్తం 6 B పొందటానికి గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

(b) రెండు జాకీలు A పొందటం మరియు రెండు పాచికలపై ఒకే సంఖ్య B పొందటానికి సంభావ్యతను కనుగొనుము.

7. A అనే వ్యక్తి ప్రస్తుత వయస్సు 35 సం॥రాలు, అతను 65 సం॥రాల వయసు వరకు జీవించగల సంఘటన ప్రాతికూల్యత 9 నుండి 7 మరియు B అనే వ్యక్తి ప్రస్తుత వయస్సు 45 సం॥రాలు అతను 75 సం॥రాలు వయసు వరకు జీవించగల సంఘటన ప్రాతికూల్యత 3 : 2. అయిన వీరిలో ఒకనీసం ఒకరు 30 సం॥ జీవించగల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

8. 1 నుండి 13 వరకు సంఖ్యలు కలిగిన 13 బంతులు ఒక సంచిలో కలవు. సరిసంఖ్య వస్తే సఫలం. మొదట తీసిన బంతిని తిరిగి సంచిలో చేర్చే విధంగా 2 బంతులను తీసినారు.

(a) రెండు సఫలాలు

(b) సరిగ్గా ఒక సఫలం

(c) కనీసం ఒక సఫలం

(d) సఫలాలు లేని సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్లపేక కట్టనుండి ఒక కార్డును తీసినారు. అయిన ఈ కింది ఘటనలలో ఏవి స్వతంత్రాలు?

(a) A : తీసిన కార్డు ఎర్రనిది అగుట

(b) B : తీసిన కార్డు రాణి అగుట

(c) A : తీసిన కార్డు ఆఠీను అగుట

(d) B : తీసిన కార్డు ఫేస్ కార్డు అగుట

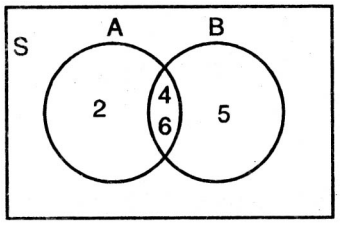
30.9 నియత సంభావ్యత

ఒక పాచికను ఎగురవేసి ఫలితమును రాసుకుంటున్నాం అనుకోండి. Aఅనేది సరిసంఖ్యలో వచ్చే ఘటన అనుకుంటే

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

పాచికను దొర్లించినప్పుడు 3 కంటే పెద్ద సంఖ్య రావడం అప్పుడు P(A) ఎంత? స్కోరు 3 కంటే పెద్దది అయ్యే ఘటన B అనుకొనుము. అప్పుడు $B = \{4, 5, 6\}$. B సంభవించినదని ఇవ్వడమైనది. అప్పుడు P(A) విలువ $\frac{2}{3}$ ఉండి ఉండును. దీనినే B జరిగింది అని తెలిస్తే A యొక్క నియత సంభావ్యత అంటాం. దీనిని P(A/B) చే సూచిస్తాం.



పటం 30.2

52 ముక్కలు చీట్లపేక కట్ట నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒకకార్డును తీసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాన్ని పరిశీలిద్దాం.

తీసిన కార్డు నల్లని ఏసు అయ్యే ఘటన A అనుకొనుము.

చీట్లపేక కట్టలో 2 నల్లని ఏసులు ఉండును.

కావున $P(A) = \frac{2}{52}$

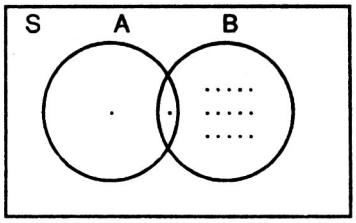
ఒక కార్డు తీసిన అది స్పేడ్ అని తెలిసినప్పుడు, A ఘటన సంభావ్యత ఎంత?

స్పేడు తీసే ఘటన B అనుకుంటే

A అనే ఘటనకు, B అనే ఘటన శాంపుల్ ఆవరణం అవుతుంది.

అప్పుడు A లో ఒక శాంపుల్ బిందువు ఉండును.

B లో 13 శాంపుల్ బిందువులు ఉండును



పటం 30.3

ఇక్కడ $A \cap B$ ని పరిశీలించిన

B జరిగింది అని తెలిస్తే A యొక్క సంభావ్యత, $A \cap B$ లోని శాంపుల్ బిందువులకు మరియు B అని శాంపుల్ బిందువులకు గల నిష్పత్తికి సమానము.

$n(A \cap B) = 1$ మరియు $n(B) = 13$

అప్పుడు $P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{13}$

$n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$n(B) = 13 \Rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$

$$P(A/B) = \frac{1}{13} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ఇవి అన్నియు, నియత సంభావ్యతను కింద విధముగా నిర్వచింపవచ్చునని తెలియుచున్నది.

A, B అనేవి ఒక శాంపుల్ ఆవరణం S లోని రెండు ఘటనలు అయి $P(A) \neq 0$ అయి, A జరిగింది అని తెలిస్తే B యొక్క నియత సంభావ్యత అంటారు. దీనిని $P(B/A)$ తో సంకేతపరిచి కింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

ఇదే విధముగా $P(B) \neq 0$ అయితే

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే $P(B/A) = P(B)$ మరియు $P(A/B) = P(A)$ అవుతాయి.

ఉదా 30.45 : ఇద్దరు పిల్లలు గల ఒక కుటుంబాన్ని తీసుకుంటే, శాంపుల్ ఆవరణం కలిగి ఉండే మూలకాలు {BB, BG, GB, GG} ఇవి అన్నియు సమసంభవములు. ఇద్దరు పిల్లలు BB అయ్యే ఘటన A, ఇద్దరిలో కనీసం ఒక B ఉండే ఘటన B అనుకుంటే P(A/B) ని కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ $A = \{BB\}$

$B = \{BB, BG, GB\}$

$A \cap B = \{BB\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ఉదా 30.46: ఒక పాఠశాలలో బాల, బాలికలు సమాన సంఖ్యలో ఉన్నారని అనుకొందాము. జనాభాలో 5% పుట్‌బాల్ ఆటగాళ్ళు గలరు. యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకున్న విద్యార్థి పురుష పుట్‌బాల్ ఆటగాడు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : M = మగ

F = పుట్‌బాల్ ఆటగాడు అనుకొనుము.

మనము ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి $P(M \cap F)$ కనుగొనవలెను.

పాఠశాలలో బాలురు, బాలికల సమాన సంఖ్యలో గలరు.

కావున $P(M) = \frac{1}{2}$

$P(F/M) = 0.05$

నియత సంభావ్యత నిర్వచనం నుండి $P(F/M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)}$

$P(M \cap F) = P(M)\ P(F/M)$

$= \frac{1}{2} \times 0.05$

$= 0.025$

ఉదాహరణ 30.47 : $P(A) = 0.8,\ P(B) = 0.6,\ P(A \cap B) = 0.5$ అయ్యే విధముగా A, B లు రెండు ఘటనలు అయిన

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B/A)$ (iii) $P(A/B)$

సాధన : (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

(ii) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.8} = \frac{5}{8}$

(iii) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}$

ఉదా 30.48 : 5 ఎర్రని మరియు 7 తెల్లని బంతులు గల సంచి నుండి తీసిన బంతిని మళ్ళీ సంచిలో చేరే విధముగా, వరుసగా 2 తెల్లని బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీసే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటిసారి తీసిన బంతి తెల్లనిది అయ్యే ఘటన A మరియు రెండవసారి తీసిన బంతి తెల్లనిది అయ్యే ఘటన B అనుకొనుము.

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)$$

$$P(A) = \frac{7}{12}$$

$$P(B) = \frac{6}{11}$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

ఉదా 30.49 : ఒక నాణేన్ని బొమ్మ వచ్చేవరకు ఎగురవేయటం తేది మూడు సార్లు ఎగురవేయడం. మొదటిసారి ఎగుర వేసినప్పుడు బొమ్మ రాలేదని ఇచ్చినపుడు నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగుర వేయుటకు గల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటిసారి నాణేన్ని ఎగుర వేసినపుడు బొమ్మ పడలేదని ఇచ్చెను. రెండవసారి బొమ్మ రావచ్చు లేదా మూడవసారి బొమ్మ రావచ్చు లేదా మొదటిసారి బొమ్మపడక పోవచ్చును.

మొదటిసారి బొమ్మ పడని ఘటన అనుకొనుము.

అప్పుడు $B = \{TH, TTH, TTT\}$

ఈ ఘటనలన్నియు పరస్పర వివర్జితాలు

$$P(B) = P(TH) + P(TTH) + P(TTT) \quad \ldots. (1)$$

ఇప్పుడు $P(TH) = \frac{1}{4}$ (ఈ ఘటన 4 లఘు ఘటనలను కలిగి ఉండును)

మరియు $P(TTH) = P(TTT) = \frac{1}{8}$ ($\therefore$ ఈ ఘటన 8 శాంపుల్ బిందువులు కలిగి ఉండును)

వీటిని (1) లో ప్రతిక్షేపించిన

$$P(B) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

"నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేయటం" అనే ఘటనను అనుకొనుము.

అప్పుడు $A = \{TTH, TTT\}$ $\qquad P(A) = \frac{1}{4}$

మనము $P(A/B)$ ని కనుగొనవలెను.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ఇక్కడ $A \cap B = A \quad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

అభ్యాసం 30.6

1. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలుగల చీట్లపేక కట్ట నుండి, (తీసిన కార్డును తిరిగి కట్టలో చేర్చని విధంగా) యాదృచ్ఛికంగా రెండు ముక్కలును తీస్తే, మొదటి తీసిన కార్డు ఎర్రనిది, రెండవసారి తీసిన కార్డు నల్లనిది అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

2. ముగ్గురు పిల్లలు గల కుటుంబమును తీసుకొనిన, శాంపుల్ ఆవరణం

   {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG}

   ఆ కుటుంబంలో సరిగ్గా ఇద్దరు బాలురు ఉండే ఘటన A మరియు మొదటి బాలుడు అయ్యే ఘటన B. ఆ కుటుంబంలో 2 బాలురు ఉండే సంభావ్యత మొదటగా బాలుడు అని ఇచ్చినప్పుడు కనుగొనుము.

3. 52 ముక్కలు గల చీట్లపేక కట్ట నుండి, తీసిన ముక్క తిరిగి కట్టలోకి చేర్చని విధంగా రెండు కార్డులు తీసినారు. మొదటి కార్డు డైమండ్ మరియు రెండవ కార్డు ఎర్రనిది అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

4. $P(A) = 0.4.,\ P(B) = 0.2,\ P(A \cap B) = 0.1$ అగునట్లుగా A మరియు B లు రెండు ఘటనలు. B ఇచ్చినప్పుడు A సంభావ్యత అనగా $P(B/A)$ కనుగొనుము.

5. 4 తెల్లని, 3 పసుపు పచ్చని, 1 ఆకుపచ్చని బంతులు గల పెట్టె నుండి, యాదృచ్ఛికంగా రెండు బంతులను ఒక్కొక్కసారి ఒక బంతి చొప్పున తీయడమైనది. తీసిన బంతిని తిరిగి పెట్టెలో చేర్చని విధముగా ఉన్నది. అయిన తీసిన బంతులు ఒకటి తెల్లనిది మరొకటి పసుపు పచ్చని బంతి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

30.10 సంభావ్యతా లబ్ద సిద్ధాంతము మరియు నియత సంభావ్యత

సిద్ధాంతము 1 : A మరియు B రెండు ఘటనలకు

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

మరియు $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

ఇక్కడ $P(B/A)$ అనగా A ఇచ్చినప్పుడు B నియత సంభావ్యత అంటాం.

$P(A/B)$ అనగా B ఇచ్చినప్పుడు A నియత సంభావ్యత అంటాం.

ఉపపత్తి : సమసంభవ ఘటనల మొత్తము $n(S)$ చే సూచిస్తాము.

$n(A) = A$ ఘటనకు అనుకూల ఘటనల సంఖ్య

$n(B) = B$ ఘటనకు అనుకూల ఘటనల సంఖ్య

$n(A \cap B) = A$ మరియు B రెండింటికీ అనుకూల ఘటనలు.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

A/B నియత ఘటనకు శాంపుల్ ఆవరణం B మరియు అనుకూల ఘటనలు $A \cap B$ ఘటనలోని శాంపుల్ బిందువులు.

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$= P(B) \cdot P(B/A)$$

అదే విధముగా

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)$ అని కూడ రుజువు చేయవచ్చును.

గమనిక : A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే $P(A/B) = P(A)$ మరియు $P(B/A) = P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

సిద్ధాంతము 2 : శాంపుల్ ఆవరణం S లో A మరియు B లు రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

ఉపపత్తి : A మరియు B స్వతంత్ర ఘటనలు అయిన

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

కావున A మరియు B లు రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు అయిన, A మరియు B సంభావ్యత A యొక్క సంభావ్యత మరియు B యొక్క సంభావ్యతల లబ్దానికి సమానం

విపర్యయంగా $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ అయిన

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

కాబట్టి A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

సిద్ధాంతము 3 : (Theorem of Total Probability)

ఒక శాంపుల్ ఆవరణ Sలోని n ఘటనలు $E_1, E_2 \ldots E_n$ లు పరస్పర వివర్జిత పూర్ణఘటనలు మరియు ప్రతి $i = 1, 2, \ldots n$ నకు $P(E_i) > 0$. A, S లోని ఏదేని ఘటన అయినా

$$P(A) = P(E_1)\ P(A/E_1) + P(E_2)\ P(A/E_2) + \ldots + P(E_n)\ P(A/E_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)$$

ఉపపత్తి : $E_1, E_2 \ldots E_n$ లు S లోని పరస్పర వివర్జిత మరియు పూర్ణఘటనలు. కావున

$S = E_1 \cup E_2 \ldots E_n$ మరియు $i \neq j$ నకు $E_i \cap E_j = \phi$

$$A = A \cap S \qquad (\because A \subset S)$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$$

$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)$$

$E_1, E_2 \ldots E_n$ లు పరస్పర వివర్జితాలు కావున $A \cap E_1, A \cap E_2, A \cap E_n$ .... లు కూడ పరస్పర వివర్జితాలు అవుతాయి.

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n)$$

$$= P(E_1)\ P(A/E_1) + P(E_2)\ P(A/E_2) + \ldots + P_n\ P(A/E_n)$$

(సంభావ్యత లబ్ధి సిద్ధాంతము నుండి)

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\,P(A/E_i)$$

30.11 బేయీ సిద్ధాంతము

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో $E_1, E_2, \ldots E_n$ లు n పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణఘటనలు; $P(E_i) \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ అనుకోండి. అప్పుడు యాదృచ్ఛి ప్రయోగంలో $P(A) \neq 0$ అయ్యే ఏదైన ఘటన Aకు

$$P(E_K/A) = \frac{P(E_i)\ P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\ P(A/E_i)},\ i = 1, 2, \ldots n.$$

ఉపపత్తి: దత్తాంశము నుండి $i = 1, 2, \ldots n$ లకు $P(E_i) > 0$,

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \text{ మరియు } i \neq j \text{ నకు } E_i \cap E_j = \phi$$

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం శాంపుల్ ఆవరణం ఏ ఘటన A కైనా $A \subseteq S$ కావున

$$A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)$$

అంతేకాక $i \neq j$, $(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = A \cap (E_i \cap E_j)$

$$= A \cap \phi$$
$$= \phi.$$

కాబట్టి $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A / E_i)$$

(లబ్ధ సిద్ధాంతము నుండి)

అందువల్ల $P(E_k / A) = \dfrac{P(E_k \cap A)}{P(A)}$

$$= \frac{P(E_k)\, P(A / E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A / E_i)}$$

ఉదాహరణ 30.50: ఒక దుకాణదారుడు ఒకే రకమైన విద్యుత్ బల్బులను ముగ్గురు తయారిదారులు M_1, M_2, M_3 ల నుండి కొనుగోలు చేస్తాడు. తన సరుకులను 25% M_1 నుండి, 45% M_2 నుండి 30% M_3 నుండి కొంటాడు. గతానుభవం నుండి అతడు కనుకొన్న దేమిటంటే M_3 నుండి కొనుగోలు చేసిన బల్బులలో 2% లోపం ఉన్నవి కాగా, M_1, M_2 ల నుండి కొనుగోలు చేసిన బట్టలలో ఒకేదాంట్లో 1% లోపం ఉన్నవి ఉన్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొన్న ఒక బల్బు లోపం ఉన్నదిగా గమనిస్తే, అది M_3 నుంచి కొనుగోలు చేసిన బల్బు అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన: ఎంచుకొన్న బల్బు లోపం ఉన్నది అయ్యే ఘటన E అనుకుంటే $P(M_3/E)$ అనేది కావలసిన సంభావ్యత

దత్తాంశం ప్రకారం $P(M_1) = 0.25 P(M_2) = 0.45,\ P(M_3) = 0.3$

$P(E/M_1) = 0.01,\ P(E/M_2) = 0.01,\ P(E/M_3) = 0.02$

కాబట్టి బేయీ సిద్ధాంతాన్ని అనుసరించి

$$P(M_3/E) = \frac{P(E/M_3)P(M_3)}{P(E/M_1)P(M_1) + P(E/M_2)P(E/M_3)P(M_3)}$$

$$= \frac{0.02 \times 0.3}{(0.01 \times 0.25) + (0.01 \times 0.45) + (0.2 \times 0.3)}$$

$$= 0.46.$$

కీలక పదాలు

- **ఘటనల సంబంధము :** A ఘటన జరగడానికి దోహదం చేసే ఫలితాలను అనుకూల ఫలితాలు అంటాం. A ఘటన జరగడానికి అనుకూలంగా లేని ఫలితాలను ప్రతికూల ఫలితాలు అంటాం. దీనిని A చే సూచిస్తాం.
- **ఘటన A లేదా B ఘటన జరగడం :** $A \cup B$ ఘటన సంభవించవలెనన్న A జరగడం లేదా B జరగడం లేదా A, B లు రెండూ జరగడం. కావలెను.
- **ఘటన A మరియు B :** A మరియు B ఘటనలకు రెండింటికీ అనుకూల ఘటనలు.
- **సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతం :** శాంపుల్ ఆవరణం S లో A మరియు B లు రెండు ఘటనలు అయితే

$$P(\text{A లేదా B}) = P(A) + P(B) - P(\text{A మరియు B})$$

- **పరస్పర వివర్జిత ఘటనలకు సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతము :** A మరియు B లు రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అయితే

$$P(\text{A లేదా B}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- **సంఘటనాను కూల్యం :** అనే ఘటనకు అనుకూలంగా అనుకూల్యత a నుండి b అయితే

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

A ఘటనకు ప్రతికూలంగా అనుకూలత a నుండి b అయితే

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

- **పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు :** రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఏ ఘటన సంభవమైనా, మిగతా ఘటనలలో మరో దాని సంభవాన్ని నిరోధించేటట్లుగా ఉంటే, అటువంటి ఘటనల సమితిని పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అంటాం.

- **స్వతంత్ర ఘటనలు :** రెండు ఘటనలు A, B లలో ఒక ఘటన సంభవించడం లేదా సంభవించకపోడం, రెండో ఘటన సంభవించడం లేదా సంభవించకపోవడంపై ప్రభావమేమి లేకపోతే A, B లను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాం.

- A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

- A మరియు B రెండు ఘటనలకు

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(A/B),\ P(A) > 0$$

లేదా $\quad P(A \cap B) = P(A)\ P(A/B), P(B) > 0$

ఇక్కడ $\quad P(B/A)$ అనగా A జరిగినప్పుడు B నియత సంభావ్యత,

$P(A/B)$ అనగా B జరిగినప్పుడు A నియత సంభావ్యత అని అర్థం

- బేయీ సిద్ధాంతం :

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో $E_1, E_2, ... E_n$ లు n పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణఘటనలు; $P(E_i) \neq 0, (i = 1, 2, ... n)$ అనుకోండి. అప్పుడు యాదృచ్ఛి ప్రయోగంలో $P(A) \neq 0$ అయ్యే ఏదైన ఘటన Aకు

$$P(E_K / A) = \frac{P(E_i)\ P(A / E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\ P(A / E_i)},\ i = 1, 2, ...n.$$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. నాలుగు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేస్తే (ఎ) సరిగ్గా మూడు బొమ్మలు, (బి) కనీసం మూడు బొమ్మలు, (సి) గరిష్టంగా మూడు బొమ్మలు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
2. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించారు. మొదటి పాచికపై బేసిసంఖ్య లేదా సంఖ్యల మొత్తం ఏడు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
3. మొదటి రెండు వందల పూర్ణసంఖ్యల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక సంఖ్యను ఎన్నుకోబడెను. ఎన్నుకొన్న సంఖ్య 6 లేదా 8 చే భాగింపబడేది అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
4. ఒక సంచిలో 1 నుండి 13 వరకు సంఖ్యలను కలిగిన 13 బంతులు కలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని ఎంపిక చేస్తే, ఆ సంఖ్య 2 లేదా 3 చే భాగింపంబడే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
5. ఒక నాణేన్ని నాలుగు సార్లు ఎగురవేస్తే 2 లేదా 3 బొమ్మలు పడే సంభావ్యతను కనుగొనుము.
6. ఈ కింది సంభావ్యతలు సరియైనవేనా? మీ జవాబును సరిచూడుము.

   (a) $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.5,\ P(A \text{ మరియు } B) = 0.4$

   (b) $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.3,\ P(A \text{ మరియు } B) = 0.4$

   (c) $P(A) = P(B) = 0.7,\ P(A \text{ మరియు } B) = 0.2$
7. ఒక సంచిలో 1 నుండి 25 వరకు సంఖ్యలు కలిగిన 25 టికెట్లు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా రెండు టికెట్లను తీస్తే, ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్ధం సరిసంఖ్య అయ్యే సంభావ్యత కనుగొనుము.
8. ఒక పెట్టెలో 50 బోల్టులు మరియు 150 నట్లు గలవు. వాటిలో సగం బోల్టులు మరియు సగం నట్లు త్రుప్పుపట్టినవి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక వస్తువును తీసినప్పుడు అవి త్రుప్పుపట్టినవి లేదా బోల్టు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

9. ఒక స్త్రీ కొన్న ఒక డజను గ్రుడ్లలో, 2 గ్రుడ్లు చెడిపోయినవి. ఆమె ఉదయం టిఫిన్ తయారీకై నాలుగు గ్రుడ్లును యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే అవి

(a) అన్ని మంచి గ్రుడ్లు

(b) మూడు మంచిగ్రుడ్లు మరియు ఒక చెడిపోయిన గ్రుడ్డు

(c) రెండు మంచి గ్రుడ్లు మరియు రెండు చెడిపోయినగ్రుడ్లు

(d) కనీసం ఒక చెడిపోయిన గ్రుడ్డు ఉండే విధంగా సంభావ్యత కనుగొనుము.

10. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్లపేక కట్ట నుండి, తీసిన కార్డును తిరిగి కట్టలో చేరని విధముగా, యాదృచ్ఛికంగా రెండు కార్డులను ఎన్నుకుంటే అవి రెండూ ఎర్రని కార్డులు లేదా రెండూ రాజులు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

11. మూడు పిల్లల సమూహాలలో వరసగా (3 బాలికలు, 1 బాలుడు), (2 బాలికలు, 2 బాలురు) (1, బాలిక, 3 బాలురు) గలరు. ప్రతి సమూహం నుండి ఒక పిల్లవాన్ని ఎంపిక చేస్తే, ఎంపిక చేసిన పిల్లలలో 1 బాలిక మరియు 2 బాలురు ఉండే సంభావ్యత 13/32 అని చూపుము.

12. ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించారు. ప్రతిసారీ ప్రధాన సంఖ్య వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

13. రెండు ఉద్యోగ ఖాళీలకు గాను కమల్ మరియు మౌనిఖలు పరీక్షకు హాజరైనారు. కమల్ ఎంపికయ్యే సంభావ్యత 1/3 మరియు మౌనిఖ ఎంపికయ్యే సంభావ్యత 4/5. అయిన వారిలో ఒక్కరు మాత్రమే ఎంపికయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

14. ఒక సంచిలో 7 తెల్లని, 5 నల్లని మరియు 8 ఎర్రని బంతులు ఉన్నవి. తీసిన బంతిని తిరిగి చేర్చని విధంగా, యాదృచ్ఛికంగా తీసిన 4 బంతులు, నల్లనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

15. A మరియు B రెండు ఘటనలకు

$P(A) = 0.4,\ P(B) = P$ మరియు $P(A \cup B) = 0.6$ అ

(a) A మరియు Bలు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే P ని కనుగొనుము.

(b) A మరియు B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అయితే P ని కనుగొనుము.

16. A నిజం మాట్లాడే ఘటనకు ప్రతికూలంగా అనుకూల్యత 3 : 2 మరియు B నిజం మాట్లాడే ఘటనకు ప్రతికూలంగా అనుకూల్యత 5 : 3 అయిన ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించడానికి సంభావ్యత కనుగొనుము.

17. A మరియు B లు రెండు ఘనలు

$P(\bar{A}) = \frac{1}{2},\ P(\bar{B}) = \frac{2}{3},\ P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ అయిన

P(A/B) మరియు P(B/A) లను కొనుగొనుము.

18. ఒక పాత్ర B_1 లో 2 తెల్లటి, 3 నల్లటి బంతులున్నాయి, మరోపాత్ర B_2లో 3 తెల్లటి, 4 నల్లటి బంతులున్నాయి. ఈ రెండింటిలో ఒక పాత్రను యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొని అందులో నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. అట్లా తీసిన బంతి నల్లటిది అయితే, ఎన్నుకొన్న పాత్ర B_1 అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబులు

అభ్యాసం 30.1

1. రెండు నియమాలు తృప్తిపరుచబడ్డాయి.
2. ఫలితం ఊహించబడగలదు.
3. S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}
4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
5. లేదు
6. (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) అసత్యము (iv) సత్యము
7. 15
8. {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1,6)
   (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2,5) (2, 6)
   (3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
   (4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
   (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
   (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)}
9. {MM, MF, FM, FF}

అభ్యాసం 30.2

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{3}{4}$

5. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{5}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$ (iii) $\frac{1}{12}$ (iv) $\frac{1}{36}$

7. $\frac{5}{9}$ 8 $\frac{1}{12}$ 9. $\frac{1}{2}$

10. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{52}$

11. (i) $\frac{5}{12}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{11}{36}$

12. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{8}$

అభ్యాసం 30.3

1. $\frac{1}{8}$ 2. $\frac{20}{39}$ 3. (a) $\frac{4}{25}$ (b) $\frac{38}{245}$

4. $\frac{1}{5525}$

6. (i) $\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{1}{30}$

7. $\frac{10}{133}$ 8 $\frac{4}{7}$ 9. $\frac{60}{143}$ 10. $\frac{1}{4}$

అభ్యాసం 30.4

1. $\frac{4}{13}$ 2. $\frac{7}{36}$ 3. $\frac{9}{16}$ 4. $\frac{7}{12}$

5. $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{7}{13}$ 8. $\frac{5}{12}$

9. (a) $\frac{5}{18}$ (b) 0.7 10. $\frac{4}{11}$

11. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{35}{36}$ 12. $\frac{3}{4}$

13. (a) A కి అనుకూలంగా అనుకూల్యత 7 నుండి 3, A కి ప్రతికూలంగా అనుకూల్యత 3 నుండి 7.

(b) A కి అనుకూలంగా అనుకూల్యత 4 నుండి 1, A కి ప్రతికూలంగా అనుకూల్యత 1 నుండి 4.

14. (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{7}{17}$ 15. (a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{3}{4}$

16. (a), (c)

17. $\frac{4}{7}$ 18. $\frac{1}{4}$

అభ్యాసం 30.5

1. (a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{1}{35}$ (c) $\frac{24}{35}$ (d) $\frac{11}{35}$

2. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. (a) $\frac{1}{35}$ (b) $\frac{11}{35}$

5. $\frac{1}{2}$ 6. (a) $\frac{5}{144}$ (b) $\frac{1}{1014}$ 7. $\frac{53}{80}$

8. (a) $\frac{36}{169}$ (b) $\frac{84}{169}$ (c) $\frac{120}{169}$ (d) $\frac{149}{169}$

9. (a) స్వతంత్రాలు (b) స్వతంత్రాలు

అభ్యాసం 30.6

1. $\frac{13}{51}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{25}{204}$

4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 5. $\frac{3}{7}$

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{5}{16}$ (c) $\frac{15}{16}$

2. $\frac{7}{12}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{8}{13}$

5. $\frac{5}{8}$ 6. (a) మాత్రమే సరియైనది

7. $\frac{436}{625}$ 8. $\frac{5}{8}$

9. (a) $\frac{14}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ (c) $\frac{1}{11}$ (d) $\frac{19}{33}$

10. $\frac{55}{221}$ 12. $\frac{1}{4}$ 13. $\frac{2}{15}$

14. $\frac{1}{969}$ 15, $\frac{1}{3}$ 16. $\frac{19}{40}$

17. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ వరసగా 18. $\frac{21}{41}$

అధ్యాయం 31

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు ఘటనలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్య పఠనము తరువాత విద్యార్థికి కింది విషయాలు అవగతమవుతాయి.

- విచ్ఛిన్న మరియు అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశులు.
- సంభావ్యతా విభాజనాల అంకమధ్యమం, విస్తృత మరియు క్రమ విచలనము కనుగొనుట.
- ద్విపద చలరాశి మరియు పాయిజాన్ చలరాశుల సంభావతలను కనుగొనుట.

పూర్వాకాంక్షితాలు

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు ఘటనలు, సంభావ్యత, ద్విపద గణకాలు

పరిచయం

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో మనం తరచుగా సంఖ్యాత్మక ఫలితాల పైననే ఆసక్తి చూపుతాము. వాస్తవంగా కొన్ని ప్రయోగాలలో ఫలితాలు నేరుగా పరిమాణాత్మకంగా వ్యక్తీకరించబడతాయి. ఉదాహరణకు, నిష్పాక్షిక నాణెలను ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ, బొరుసు అనేవి రెండు సాధ్యమయ్యే సంఖ్యను తెలుసుకోవడానికి ఆసక్తి చూపుతాము. ఈ సంఖ్యను యాదృచ్ఛిక చలరాశిని ఉపయోగించి కనుక్కొంటాము. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క ఫలితాన్ని పరిమాణాత్మకంగా చెప్పే ప్రమేయాన్ని యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటారు.

31.1 నిర్వచనం - యాదృచ్ఛిక చలరాశి

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంతో సాహచర్యమైన శాంపుల్ ఆవరణను S అనుకొందాము. $X : S \to R$ అనే ప్రమేయాన్ని యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటాం.

గమనిక: X ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, $X^{-1}(P(R)) = P(S)$

ఇక్కడ P సంభావ్యతా ప్రమేయాన్ని, P(S), S యొక్క ఘాత సమితిని తెలుపుతాయి.

ఉదాహరణ 31.1

ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణను S అనుకొందాము.

అప్పుడు n సరి సంఖ్య అయితే, $X(n) = 0$

n బేసి సంఖ్య అయితే, $X(n) = 1$

గా తెలిపే $X : S \to R$ ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి ఇక్కడ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ మరియు $X(1) = X(3) = X(5) = 1; X(2) = X(4) = X(6) = 0.$

ఉదాహరణ 31.2

రెండు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఏకకాలంలో ఎగురవేసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణను S అనుకొందాము. అప్పుడు

$$S = \{HH. HT, TH, TT\}$$

X అనేది పడే బొమ్మల సంఖ్య అనుకొంటే, X ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది.

ఇక్కడ X విలువలు 0, 1, 2

$X(TT) = 0$, $X(HT) = 1$, $X(TH) = 1$, $X(HH) = 2.$

31.1.1 నిర్వచనం

$X : S \to R$ ను ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనుకొందాము. అప్పుడు X యొక్క వ్యాప్తి పరిమితం లేదా సంఖ్యాక అపరిమితం (countable infinite)అయితే X ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి (discrete random variable)అంటాం.

ఒక అంతరం (a, b)లోని అన్ని వాస్తవ విలువలను తీసుకోగల యాదృచ్ఛిక చలరాశిని అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి (continuous random variable)అంటాం.

31.1.2 యాదృచ్ఛిక చలరాశులు సంభావ్యతా విభాజనాలు

$E = \{x_i / i \geq 1\}$ వ్యాప్తితో X ఒక విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనుకొందాం. E పరిమితం లేదా సంఖ్యాక అపరిమితం కావచ్చు. సాధ్యమయ్యే ప్రతి ఫలితం x_i తోను, x_i యొక్క సంభావ్యత అని పిలుస్తూ $P(X = x_i) = p(x_i)$, అనే సంఖ్యను మనం జోడిస్తాం. $P(x_i)$, $i = 1, 2, 3, ...$ అనే సంఖ్య కింది షరతులను తృప్తిపరుస్తుంది.

(i) ప్రతి i కి $P(x_i) \geq 0$ (ii) $\sum_{i \geq 1} P(x_i) = 1$

$\{P(X = x_i) = P(x_i)\}$ సమితిని, యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క సంభావ్యతా విభాజనం అని అంటాము. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కింది పట్టికలో ఇవ్వడమైంది.

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	...	$P(x_n)$

ఉదాహరణ 31.3 : రెండు నాణేలను ఎగురవేసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి S = {HH, HT, TH, TT} శాంపుల్ ఆవరణ ప్రతి x కు $X(x)$ ను బొమ్మల సంఖ్యగా నిర్వచించిన, అప్పుడు $X(x)$ ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి అవుతుంది.

X యొక్క వ్యాప్తి = {0, 1, 2}.

$P(X = 0)$ = బొమ్మలు పడని సంభావ్యత
$= P(\{TT\}) = 1/4$

$P(X = 1)$ = బొమ్మలు పడే సంభావ్యత
$= P(\{HT, TH\}) = 2/4 = 1/2.$

$P(X = 2)$ = రెండు బొమ్మలు పడే సంభావ్యత
$= P(\{HH\}) = 1/4$

ఈ యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కింది పట్టికలో ఇవ్వడమైంది.

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

31.1.3 నిర్వచనం (యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంక మధ్యమం, విస్తృతి)

ఒక విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క అంకమధ్యమం μ విస్తృతి (σ^2) లు,

$$\mu = \sum x_n \, p(X = x_n), \quad \sigma^2 = \sum (x_n - \mu)^2 \; p(X = x_n)$$

$$\sigma^2 = \sum \left[x_n^{\,2} \, p(X = x_n) \right] - \mu^2$$

క్రమ విచలనము σ , విస్తృతి యొక్క వర్గమూలం.

ఉదాహరణ 31.4

$X = x_i$	–2	–1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనం, X అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

సాధన : X అంకమధ్యమం $= \mu = \sum_{i=-2}^{2} x_i \; P(X = x_i)$

$$= (-2).\frac{1}{8} + (-1).\frac{2}{8} + 0.\frac{3}{8} + 1.\frac{1}{8} + 2.\frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(-2 - 2 + 0 + 1 + 2)$$

$$= -\frac{1}{8}$$

X విస్తృతి $= \sigma^2 = \sum_{i=-2}^{2} x_i^2 \, P(X = x_i) - \mu^2$

$$= 4\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{2}{8}\right) + 0\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right)^2$$

$$= \frac{11}{8} - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{87}{64}.$$

ఉదాహరణ 31.5

ఒక పాచికను దొర్చించారు. దాని ముఖంపై కనబడే సంఖ్య X యొక్క అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుక్కోండి

సాధన : శాంపుల్ ఆవరణను S, దీనితో అనుబంధమయ్యే యాదృచ్ఛిక చలరాశి X అనుకొందాం. P(X) ను కింది పట్టిక ద్వారా తెలుపుదాం.

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{X అంకమధ్యమం} = \mu = \sum_{i=1}^{6} X_i \, P(X = x_i)$$

$$= 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{6 \times 7}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\text{X విస్తృతి} = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \, P(X = x_i) - \mu^2$$

$$= 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{6} + 3^2.\frac{1}{6} + 4^2.\frac{1}{6} + 5^2.\frac{1}{6} + 6^2.\frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{6 \times 7 \times 13}{6}\right) - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

ఉదాహరణ 31.6

ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కింది ఇవ్వడమైంది.

$X = x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	K	2K	3K	4K	5K

K విలువను, X యొక్క అంకమధ్యమం, విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

సాధన: $\sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = 1$

$\Rightarrow \quad K + 2K + 3K + 4K + 5K = 1$

$\Rightarrow \quad 15K = 1$

$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{15}$

X అంకమధ్యమం $\mu = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X = x_i)$

$= 1(K) + 2(2K) + 3(3K) + 4(4K) + 5(5K)$

$= 55K.$

$= 55 \times \frac{1}{15}$

$= \frac{11}{3}$

X విస్తృతి $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2$

$= 1(K) + 4(2K) + 9(3K) + 16(4K) + 25(5K) - \left(\frac{11}{3}\right)^2$

$= K + 8K + 27K + 64K + 125K - \left(\frac{11}{3}\right)^2$

$= 225K - \left(\frac{11}{3}\right)^2$

$= 225\left(\frac{1}{15}\right) - \frac{121}{9}$

$= 15 - \frac{121}{9}$

$= \frac{14}{9}.$

31.2 సైద్ధాంతిక విచ్ఛిన్న విభాజనాలు. ద్విపద,పాయిజాన్ విభాజనాలు

ఒక ప్రయోగం రెండు సాధ్యమయ్యే ఫలితాలను కలిగి ఉందనుకొందాం. ఉదాహరణకు ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ, బొరుసు అనేవి రెండు సాధ్యమయ్యే ఫలితాలు ఇలా, ఒక ప్రయోగం ప్రతిసారి జరిపినపుడు రెండూ సాధ్యమయ్యే ఫలితాలను ఇచ్చే ప్రయోగం 'బెర్నౌలీయత్నం'. ఈ సాధ్యమయ్యే ఫలితాలను గెలుపు, ఓటమి అని పేరు పెడదాం. గెలుపుకు సంభావ్యత p, ఓటమికి సంభావ్యత q అని తీసుకొంటే, $p + q = 1$ అనువరిస్తుంది. ఒక ప్రయోగం n స్వతంత్ర బెర్నౌలీ యత్నాలను కలిగి ఉన్నప్పుడు x గెలుపుల సంబావ్యతను కనుక్కోవడం ద్వారా చాలా సమస్యలను సాధించగలం.

ఈ విభాగంలో మనం రెండు సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్యవిభాజనాలను చర్చిస్తాం. ఒకటి ద్విపద విభాజనం, రెండోది పాయిజాన్ విభాజనం.

31.2.1 ద్విపద విభాజనం

నిర్వచనము

$P(X = x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$, $x \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ అయితే, $0 < p < 1$ కు యాదృచ్ఛిక చలరాశి X, ఒక ద్విపద విభాజనాన్ని $(n, p$ పరామితులతో, ఒక ద్విపద చలరాశి) అనుసరిస్తుంది. n, p పరామితులతో X ఒక ద్విపద చలరాశి అయితే, దీనిని $X \sim B(n, p)$ గా కూడ వర్ణిస్తారు.

X విభాజనాన్ని కింది పట్టికలో ఇవ్వడమైంది.

x	0	1	2	...	r ...	n
$P(X = x)$	${}_nC_0\ p^0q^n$	${}_nC_1\ pq^{n-1}$	${}_nC_2\ p^2q^{n-2}$	...	${}_nC_r pq^{n-r}$ ...	${}_nC_n\ p^nq^0$

1. సిద్ధాంతము

$X \sim B(n, p)$ అయితే, X అంకమధ్యమం μ, విస్తృతి σ^2 లు వరసగా np, npq లకు సమానం.

ఇక్కడ యత్నాల సంఖ్య n తోను, గెలుపు సంభావ్యత p తోను ఓటమి సంభావ్యత q తోను సూచిస్తాము.

31.3 పాయిజాన్ విభాజనం

పాయిజాన్ విభాజనం ఒక విచ్ఛిన్న సంభావ్యతా విభాజనం. S.D. పాయిజాన్, అరుదైన సంఘటనల అరుదైన విభాజనంగా ప్రవేశపెట్టాడు. అనగా సంఘటన జరగడానికి దారితీసే పరీక్షల సంఖ్యల చాలా ఎక్కువగా ఉండి సంఘటన సంభవించే సంభావ్యత చాలా తక్కువగా ఉండడం.

కింది సందర్భాలలో పాయిజాన్ విభాజనాన్ని, ద్విపద విభాజనాన్ని పరిమితం చేయడం ద్వారా పొందవచ్చు.

(i) ఘటన సంభవించే సంభావ్యత p, చాలా చిన్నది అయినప్పుడు

(ii) ప్రయత్నాల సంఖ్య n నిరవధికంగా పెద్దది అయినప్పుడు, i.e., $n \to \infty$

(iii) $np = \lambda$ (అనుకొనుము) పరిమితం, ఇక్కడ λ ఒక ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య. λ ను పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి అంటారు.

మరోమాటలో చెప్పాలంటే, యత్నాల సంఖ్య (n) చాలా పెద్దదిగా ఉండి మరియు సంభావ్యత బహుస్వల్పంగా ఉన్నప్పుడు, ఘటన ఒక దత్తకాలంలో ఒక టెలిఫోన్ ఎక్ఛేంజి అందుకొనే టెలిఫోను కాల్స్‌సంఖ్య, ఒక పుస్తకంలోని పేజిలో ముద్రణ దోషాల సంఖ్య, దత్త కాలం వ్యవధిలో ఒక రోడ్డులో వెళ్ళే వాహనాల సంఖ్య మొదలైనవి. అయినప్పుడు ద్విపద సంభావ్యతలను ఉజ్జాయింపుగా పాయిజాన్ విభాజనాన్ని ఉపయోగించి గణనం చేస్తాము.

31.3.1 నిర్వచనం

ఒక నిర్ధిష్ట $\lambda > 0$ కు $p(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{\lfloor x}$, $x = 0, 1, 2 \ldots\ldots$ అయ్యేటట్లు, 0, 1, 2, 3 .... విలువలను తీసుకోగలిగే X ఒక విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, λ పరామితితో X ఒక పాయిజాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తుంది. ఇట్లాంటి Xను పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటాం.

λ పరామితిగా X ఒక పాయిజాన్ చలరాశి అయితే, X కు అంకమధ్యమం μ, విస్తృతి $\sigma^2 = \lambda$.

ఉదాహరణ 31.7

ఒక పాచికను మూడు సార్లు దొర్లించారు. బేసి సంఖ్య రావడాన్ని సఫలంగా భావిస్తే కింది వాటి సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

a) 3 సఫలాలు

b) కనీసం 2 సఫలాలు

c) అత్యధికంగా ఒక సఫలం

సాధన: X: ఒక బేసి సంఖ్య

సఫల సంభావ్యత p = P(బేసి సంఖ్య)

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

q = P (బేసి సంఖ్య కానిది)

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ఇక్కడ $n = 3$

a) P(3 సఫలాలు) $= 3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) P(కనీసం రెండు సఫలాలు)

= P(2 సఫలాలు లేదా 3 సఫలాలు)

= P(2 సఫలాలు) + p(3 సఫలాలు)

$$= 3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 3.\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) P(అత్యధికంగా ఒక సఫలం) = P(0 సఫలం లేదా 1 సఫలం)

= P (0 సఫలం) + p(1 సఫలం)

$$= 3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ఉదాహరణ 31.8

8 నాణేలను ఏకకాలంలో ఎగుర వేశారు. ఒక బొమ్మ వచ్చే చలరాశిని X తో సూచిస్తే X అంకమధ్యమం, విస్తృతులను కనుక్కోండి.

సాధన : ఒక నాణాన్ని ఒకసారి ఎగురవేస్తే బొమ్మ వచ్చే సంభావ్యత $p = \frac{1}{2}$

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1 - p = \frac{1}{2},\ n = 8$$

X ద్విపద విభాజనాన్ని పాటిస్తుంది.

X అంకమధ్యమం $np = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

X విస్తృతి $= npq = 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

ఉదాహరణ 31.9

6 నాణెలను ఏక కాలంలో ఎగురవేసారు. కనీసం ఐదు బొమ్మలు పడే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన : ఇక్కడ n = 6 బొమ్మపడే సంభావ్యత

$$P = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1 - p = \frac{1}{2}.$$

6 నాణేలను ఎగురవేసినప్పుడు 'r' బొమ్మలు పడే సంభావ్యత

$$P(X = r) = {}^6C_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}$$

$$= {}^6C_r \left(\frac{1}{2}\right)^6, \quad r = 0,1,....,6$$

కనీసం ఐదు బొమ్మలు పడే సంభావ్యత

$$\Rightarrow p(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= {}^6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}^6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= (6+1)\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64}.$$

ఉదాహరణ 31.9

ఒక ద్విపద చలరాశి మధ్యమం, విస్తృతులు వరుసగా 4, $\frac{4}{3}$ అయ్యేటట్లు ఆ చలరాశి పరామితులను కనుక్కోండి.

సాధన : X ద్విపద చలరాశి. పరామితులు n, p లు మధ్యమం $= np = 4$

$$\text{విస్తృతి} = npq = \frac{4}{3}$$

$$\frac{npq}{np} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{3}, \qquad \because p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad np = 4$$

$$\Rightarrow n\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \Rightarrow n = 12$$

$$\therefore \quad \text{పరామితులు } n = 12,\ p = \frac{1}{3}.$$

ఉదాహరణ 31.11

X ఒక ద్విపద చలరాశి, $16\,P(X = 4) = P(X = 2)$, $n = 6$ అయితే పరామితి p ని కనుక్కోండి.

సాధన : సఫల సంభావ్యత p, విఫల సంభావ్యత q అనుకుంటే $p + q = 1$

$\because \quad 16\,(X = 4) = P(X = 2)$

$\Rightarrow \; 16({}^6C_4)\; q^2 \,.\, p^4 = {}^6C_2\; q^4\; p^2$

$$\Rightarrow \; 16 = \frac{q^4 p^2}{p^4 q^2} = \left(\frac{q}{p}\right)^2$$

$$\Rightarrow \; \frac{q}{p} = 4 \Rightarrow 1 - p = 4p$$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \; q = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ పరామితి $\quad p = \frac{1}{5}$

ఉదాహరణ 31.12

X ఒక పాయిజాన్ చలరాశి $P(X = 0) = P(X = 1) = k$ అయితే $k = e^{-1}$ అని చూపండి.

సాధన : X పాయిజాన్ చలరాశి. పరామితి λ అనుకుంటే

$p(X = 0) = p(X = 1) = k$ కనుక

$$\frac{e^{-\lambda} \,.\, \lambda^0}{0!} = \frac{e^{-\lambda} \,.\, \lambda^1}{1!} = k$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \,.\, \lambda \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{e^{-1} \lambda^0}{0!} = e^{-1}$$

$$\therefore \quad k = e^{-1}.$$

ఉదాహరణ 31.13

X ఒక పాశ్వాన్ విభాజనాన్ని అనుసరిస్తూ, $P(X = 1) = 3\,P(X = 2)$ అయితే X విస్తృతి కనుక్కోండి.

సాధన : $\lambda > 0$ పరామితి

$$\therefore \quad P(X = 1) = 3(P(x = 2))$$

$$\frac{e^{-\lambda}.\lambda^1}{1!} = 3.\frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \text{విస్తృతి } \lambda = \frac{2}{3}$$

అభ్యాసం 31.1

1. 8 నాణేలను ఏక కాలంలో ఎగురవేశారు. కనీసం 6 బొమ్మలు పడటానికి గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.
2. ఒక ద్విపద విభాజనం అంకమధ్యమం, విస్తృతి వరుసగా 4, 3. ఆ విభాజనాన్ని సంధానించి, $p(X \geq 1)$ ను కనుక్కోండి.
3. $X - B(n, p)$, $\mu = 20$, $\sigma^2 = 10$ అయితే n, p లను కనుక్కోండి.
4. ఒక పాయిజాన్ చలరాశి, X కు $p(X = 2) = p(X = 3)$ అయితే X విస్తృతి కనుక్కోండి.
5. ఒక పాయిజాన్ చలరాశి $p(X = 1) = p(X = 2)$ ను తృప్తిపరుస్తుంది. $p(X = 5)$ ను కనుక్కోండి.

కీలకపదాలు

1. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనం. $p(X = k) = n_{C_k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ అని ఇస్తే, ఈ విభాజనాన్ని ద్విపద విభాజనం (X ద్విపద చలరాశి) అంటాం. దీనిలో $p + q = 1$ అయ్యేటట్లు p ఒక సఫల సంభావ్యత, q ఒక విఫల సంభావ్యత, n బెర్నౌలీ యత్నాలు సంఖ్య. n, p లను X యొక్క పరామితులు అంటాం. ఈ సందర్భంలో $X - B(n, p)$ గా రాస్తాం.

2. n, p పరామితులలో X ఒక ద్విపద చలరాశి అంటే $X \sim B(n, p)$ అయినపుడు, ఆ విభాజనం అంకమధ్యమం $\mu = np$, విస్తృతి $\sigma^2 = npq$ ఈ విభాజనం క్రమ విచలనం $\sqrt{npq}$.

3. ఒక విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతో విభాజనం $p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, k $= 0, 1, 2, ... \lambda = 0$ అయినపుడు, ఈ విభాజనాన్ని పాయిజాన్ విభాజనం (X ను పాయిజాన్ చలరాశి) అంటాం. ఇక్కడ λ ని X పరామితి అంటాం.

4. λ పరామితిగా X ఒక పాయిజాన్ చలరాశి అయితే, X కు అంకమధ్యమం μ = విస్తృతి $\sigma^2 = \lambda$.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- http:// www.wikipedia.org
- http:// mathworld.wolfram.com.

జవాబులు

అభ్యాసం 31.1

(1) $\frac{37}{256}$ (2) $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{16}$ (3) $n = 40, p = \frac{1}{2}$

(4) 3 (5) $\frac{e^{-2} 2^5}{5!}$

ఇంటర్మీడియట్ (TOSS)

మాదిరి ప్రశ్నాపత్రం

నోట్స్

గణితశాస్త్రం

సూచనలు :

(i) అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(ii) ఈ ప్రశ్నాపత్రం విభాగం A, B మరియు C లను కలిగి ఉన్నది.

విభాగం - A

(ప్రతి ప్రశ్నకు 2 మార్కులు) **$10 \times 2 = 20$ M**

1. $3 - 4i$ సంకీర్ణ సంఖ్యకు సంకీర్ణ సంయుగ్మాన్ని కనుక్కోండి.

2. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ సమీకరణానికి 1, 1, α లు మూలాలైన α విలువను కనుక్కోండి.

3. (6, 3) మరియు (4, 10) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ వాలును కనుక్కోండి.

4. దీర్ఘవృత్తము $x^2 + 8y^2 = 33$ నకు $(-1, 2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

5. $2x - y + z = 6$ మరియు $x + y + 2z = 3$ తలాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

6. $y = \sqrt{6 - x}$, $x \in \mathbf{R}$ ప్రమేయానికి ప్రదేశాన్ని కనుక్కోండి.

7. $y = \text{Tan } 3x$ ప్రమేయానికి ఆవర్తనాన్ని కనుక్కోండి.

నోట్స్

8. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\ \frac{e^{2x}-1}{x}$ విలువను కనుక్కోండి.

9. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}=0$ అవకలన సమీకరణానికి పరిమాణం మరియు తరగతిని కనుక్కోండి.

10. ఒక పాయిజాన్ చలరాశి P(X = 1) = P(X = 2)ను తృప్తి పరుస్తుంది P(X = 5) ను కనుక్కోండి.

విభాగం - B

(ప్రతి ప్రశ్నకు 4 మార్కులు) **8×4 = 32 M**

11. గణితానుగమన సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $\frac{1}{4\cdot 1}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ n పదాల వరకు $=\frac{n}{3n+1}$, $n\in N$ అని నిరూపించండి.

12. $(2x+3)^7$ విస్తరణలో 4వ పదాన్ని కనుక్కోండి.

13. $2x-3y+k=0$, $3x-4y-13=0$ మరియు $8x-11y-33=0$ సరళరేఖలు అనుషక్తాలు అయితే k విలువను కనుక్కోండి.

14. a, b, c లు అతలీయాలు అయితే $3a-7b-4c$, $3a-2b+c$ మరియు $a+b+2c$ సదిశలు సతలీయాలు అని చూపండి.

15. $\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]$ ను కనుక్కోండి.

16. $y=\log(\sec x+\tan x)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

17. ఒక వృత్తంలో అంతర్లిఖిత దీర్ఘచతురస్రాలలో చతురస్రానికి గరిష్ఠ వైశాల్యం ఉంటుందని చూపండి.

నోట్స్

18. ఏవేని రెండు ఘటనలు A, B లకు P(A) = 0.8, P(B) = 0.6, P(A $\cap$ B) = 0.5 అయినా (i) P(A $\cup$ B) (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ లను కనుక్కోండి.

విభాగం - C

(ప్రతి ప్రశ్నకు 8 మార్కులు) **$6\times8 = 48$ M**

19. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ అని నిరూపించండి.

20. బిందువులు (1, −6), (5, 2), (7, 0), (−1, C) లు చక్రీయాలయితే C విలువను కనుక్కోండి.

21. $r = (6i + 2j + 2k) + t(i - 2j + 2k)$ మరియు $r = (-4i - k) + s(3i - 2j + 2k)$ అసౌష్ఠవ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరాన్ని కనుక్కోండి.

22. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ అని నిరూపించండి.

23. $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$ విలువను కనుక్కోండి.

24. కింది పౌనఃపున్య విభాజనానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

x_i	5	7	9	10	12	15	16
f_i	2	4	5	8	4	2	3


నోట్స్