311

గణితశాస్త్రము

(బీజగణితం, నిరూపక జ్యామితి, త్రిపరిమాణ జ్యామితి)

1

గౌరవ సలహాదారులు

శ్రీమతి వాకాటి కరుణ, IAS,
ప్రభుత్వ కార్యదర్శి, విద్యాశాఖ, ప్రభుత్వం తెలంగాణ,
హైదరాబాద్.

సంపాదకులు

డాక్టర్ కె. శ్రీరామ్ రెడ్డి
అసోసియేట్ ప్రొఫెసర్ ఆఫ్ మ్యాథమెటిక్స్, డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ మ్యాథమెటిక్స్,
UCS, ఉస్మానియా విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాద్

పాఠ్యపుస్తకాల ప్రింటింగ్ కౌన్సిల్

శ్రీమతి ఎ. శ్రీదేవసేన, IAS,
డైరెక్టర్, స్కూల్ ఎడ్యుకేషన్, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ పి.వి. శ్రీహరి, డైరెక్టర్,
TOSS, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ ఎస్. శ్రీనివాసా చారి
డైరెక్టర్, టెక్స్‌బుక్ ప్రెస్, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

ముఖ్య సమన్వయకర్త

శ్రీ ఎం. సోమిరెడ్డి
జాయింట్ డైరెక్టర్, TOSS, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

ప్రచురణ

తెలంగాణ ఓపెన్ స్కూల్ సొసైటీ (TOSS), హైదరాబాద్.

© Telangana Open School Society

First Published : 2023

All Rights Reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means without the prior permission, in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover.

Printed in India
at the **Telangana Govt.Text Book Press,**
Mint Compound, Khairathabad, Hyderabad, Telangana.

ముందుమాట

విద్యను పొందడం పిల్లల ప్రాథమిక హక్కు, సమాజ సమగ్రాభివృద్ధికి ఇది ఎంతగానో అవసరం. అటువంటి విద్యను ప్రజలందరికి అందించాలనే దృఢసంకల్పంతో తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం ఉంది. అనేక కారణకాలతో అధికారిక విద్యను పొందలేని పిల్లల కోసం, వారిని విద్యాపరంగా తీర్చిదిద్దడం కోసం 'తెలంగాణ ఓపెన్ స్కూల్ సొసైటీ' (TOSS) వంటి సంస్థలు ఏర్పాటు అయ్యాయి. ఇందులో విద్యను పొందే అభ్యాసకులకు – 2023 – 2024 విద్యా సంవత్సరానికి గాను మారుతున్న సామాజిక పరిస్థితులకు అనుగుణంగా, జాతీయ విద్యావిధానం – 2020 యొక్క ప్రాథమిక సూత్రాలను పొందుపరుస్తూ పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించబడ్డాయి. ఈ విధానం మొత్తం – అభ్యాసకులకు విభిన్న అవసరాలను, వారి అభ్యాస అనుభవాన్ని మెరుగుపరచడంపై దృష్టి సారించింది. ఇంతకు పూర్వం, ఈ సంస్థల పాఠ్యపుస్తకాలు ప్రశ్నలు, సమాధానాలతో కూడిన మార్గదర్శకాలుగా ఉండేవి. TOSS ఈసారి విద్యార్థి కేంద్రంగా పాఠ్యపుస్తక రూపకల్పన చేయడం ఒక మైలురాయి. అభ్యాస ప్రక్రియలో ఈ విధానం క్రియాశీల నిమగ్నతనే కాక భాగస్వామ్యాన్ని కూడ ప్రోత్సహిస్తుంది. ఈ పాఠ్యపుస్తకాలు విద్యార్థులకు సమర్థవంతం మరియు ఆకర్షణీయము అయిన పాఠాలను అందిస్తూనే అధ్యాపకులకు అనుబంధ బోధన సామగ్రిని కూడ అందిస్తుందని చెప్పడానికి మేము సంతోషిస్తున్నాము.

ఈ గణిత పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఆరు మాడ్యుల్స్‌గా విభజించాము. బీజగణితం, నిరూపక జ్యామితి, త్రిపరిమాణ జ్యామితి, ప్రమేయాలు, కలనగణితం మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం. ఒటవ పాఠ్యపుస్తకంలో మూడు మాడ్యుల్స్ ఉన్నాయి. మొదటి మాడ్యుల్ బీజగణితంలో సంకీర్ణ సంఖ్యలు, వర్గసమీకరణాలు, మాత్రికలు మరియు వాటి అనువర్తనాలను గురించి నేర్చుకొంటారు. రెండవ మాడ్యుల్ నిరూపక జ్యామితి నిరూపకాలు, సరళరేఖలు, వాటి వివిధ రూపాలు, వృత్తాలు మరియు శాంఖవాల గురించి మీకు పరిచయం చేస్తుంది. మూడవ మాడ్యుల్ త్రిపరిమాణపు జ్యామితి తలాలు మరియు సదిశలను కలిగి ఉంటుంది. గణితశాస్త్రాన్ని సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ అధ్యాయాలన్ని చాలా అవసరం.

తెలంగాణ ప్రభుత్వానికి మరియు తెలంగాణ స్టేట్ బోర్డు ఆఫ్ ఇంటర్మీడియట్ ఎడ్యుకేషన్‌నకు కృతజ్ఞతలు, అవిశ్రాంతంగా ఈ పాఠ్యపుస్తకాన్ని రాయడానికి కోఆర్డినేటర్స్, ఉపాధ్యాయులు, అధ్యాపకులు మరియు డిటిపి ఆపరేటర్లు తమ తమ సేవలను అందించబడినందుకు మా ప్రత్యేక ధన్యవాదాలు.

తేది :

డైరెక్టర్

హైదరాబాదు.

పాఠ్యపుస్తకాల అభివృద్ధి కమిటీ

డా. D. పుష్ప, M.Sc., M.Phil, Ph.D
అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వం మహిళల డిగ్రీ కళాశాల(A),
బేగంపేట్, హైదరాబాద్

డా. C. శ్రీనివాస్ రెడ్డి, MSc, Ph.D
అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వం సిటీ కాలేజ్(A), నయాపూల్, హైదరాబాద్.

శ్రీ M. విజయ్ శేఖర్, M.Sc., M.Phil, B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, BHEL, రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీ K. కృష్ణ రెడ్డి, M.Sc., B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, చేవెళ్ల, రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీమతి K. పద్మ, M.Sc., B.Ed
అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, గణితశాస్త్రం
భోజ్ రెడ్డి ఇంజినీరింగ్ కళాశాల, హైదరాబాద్.

శ్రీ కావలి రంగ స్వామి, M.Sc., M.Phil, M.Ed,
రిటైర్డ్ ప్రిన్సిపాల్
ఇబ్రహీంపట్నం, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీ K. శ్రీనివాస్, M.Sc., M.Phil., B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, శంషాబాద్,
రంగారెడ్డి జిల్లా

శ్రీ M. హరి ప్రసాద్, M.Sc, M.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, మేడ్చల్,
మేడ్చల్ మల్కాజిగిరి జిల్లా.

శ్రీమతి అరుంధతి దాచేపల్లి, M.Sc.,B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వ జూనియర్ కళాశాల, భూదాన్ పోచంపల్లి,
యాదాద్రి భువనగిరి జిల్లా

శ్రీమతి వీరస్తు అరుణ కుమారి, M.Sc., M.Ed,
జూనియర్ లెక్చరర్, గణితశాస్త్రం
ప్రభుత్వం జూనియర్ కళాశాల, కూకట్‌పల్లి,
మేడ్చల్ మల్కాజిగిరి జిల్లా

శ్రీ కిషోర్ కొమ్మిని, M.Sc., B.Ed.
PGT గణితం, TSWR స్కూల్/
జూనియర్ కళాశాల (B), కోహెడ, సిద్దిపేట జిల్లా.

శ్రీమతి K. మాధవి, S.A.(Maths),
M.Sc., (Maths), M.Sc.,(Applied Statistics)
and M.A., (Socialogy), B.Ed.,
ZPHS, పోచన్నపేట్, బచ్చన్నపేట్ (M), జనగాం.

సమన్వయకర్తలు

శ్రీ B. వెంకటేశ్వరరావు
రాష్ట్ర సమన్వయకర్త, TOSS, తెలంగాణ,
హైదరాబాద్.

శ్రీమతి K. మాధవి
రాష్ట్ర సమన్వయకర్త, TOSS, తెలంగాణ,
హైదరాబాద్.

కవర్ డిజైన్ : **శ్రీ K. సుధాకర్ చారి,** S.G.T.,
యుపిపిఎస్ మైలారం, రాయపర్తి (ఎం), వరంగల్ రూరల్.

DTP, పేజీ లేఅవుట్ & డిజైన్ :
M/s **పవన్ గ్రాఫిక్స్** (సుంకర కోటేశ్వరరావు, సునీత)
D. No. 2-2-1130/24/2, ఫ్లాట్ 302, 3వ అంతస్తు, బాలభద్ర రెసిడెన్సీ,
యాక్సిస్ బ్యాంక్ వెనుక, శివం రోడ్, న్యూ నల్లకుంట, హైదరాబాద్

మీతో ఒక మాట

ప్రియమైన అభ్యాసకులారా!

మీరు చదవబోయే సీనియర్ సెకండరీ కోర్సుకు హృదయపూర్వక స్వాగతం మీ అధ్యయన విషయాలలో గణితాన్ని ఒక అంశంగా ఎన్నుకున్నందుకు మాకు ఆనందంగా ఉంది. మనం గణితాన్ని ఎందుకు చదువుతాము అన్న విషయాన్ని ఎప్పుడైనా ఆలోచించారా? కొన్ని విషయాలను లెక్కించని లేదా గణితాన్ని ఉపయోగించని రోజు ఏదైనా ఉంటుందా అసలు? బహుశా! ఉండదనే చెప్పాలి.

గణితం మానవ సమాజానికి పునాది వంటిది. కూరగాయలు కోయడం దగ్గర నుండి అరలలో పుస్తకాలను అమర్చడం వరకు, బట్టల తయారీకి అవసరమయ్యే కలల నుండి గ్రహాల గమనం వరకు – మన దిన చర్య నుండి దినకరుని సమూహం వరకు గణిత శాస్త్రం నిక్షిప్తమై ఉంటుంది. గణితం అంటే సంఖ్యలు మరియు చిహ్నాల ద్వారా వ్యక్తీకరింపబడి, వాటి మధ్య ఉన్న కార్యకారణ సంబంధాలను, కొలతలతో కూడిన పరిమాణాలను శాస్త్రీయంగాను, విస్తృతంగాను అధ్యయనం చేయడమేనని, గణిత శాస్త్రజ్ఞులు పేర్కొంటారు. నిజానికి గణితం నేర్చుకోవడం చాలా సరదగా ఉంటుంది. కావలసిందల్లా గణితంపై ప్రేమ, పూర్తి ఏకాగ్రత. ఈ రెండు ఉంటే గణితశాస్త్రానికి ఉన్న ఎల్లలు చూడవచ్చు.

ప్రస్తుత పాఠ్యప్రణాళికలో ఆరు మాడ్యుల్స్ ఉన్నాయి. అవి బీజగణితం, నిరూపక జ్యామితి, త్రిపరిమాణ జ్యామితి, ప్రమేయాలు కలనగణితం మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం. వీటి గురించి తెలుసుకోవడానికి రెండు పుస్తకాలు సిద్ధంగా ఉన్నాయి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకం 1లో మూడు మాడ్యుల్స్ ఉంటాయి. ఒకటవ మాడ్యుల్ బీజగణితంలో గణితానుగమన సిద్ధాంతం సంకీర్ణ సంఖ్యలు, డీమోయర్ సిద్ధాంతం, వర్గ సమీకరణాలు, సమీకరణవాదం, ద్విపద సిద్ధాంతం మరియు వాటి అనువర్తనాలను మీకు పరిచయం చేస్తుంది. అంతేకాకుండా మాత్రికలు మరియు వాటి నిర్ధారకాలను ఉపయోగించి రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనను తెలుసుకొంటాము.

రెండవ మాడ్యుల్ నిరూపక జ్యామితిలో సరళరేఖలు వాటి వివిధ రూపాలు, వృత్తాలు మరియు శాంఖవల గురించి వివరిస్తుంది.

మూడవ మాడ్యుల్ త్రిపరిమాణ జ్యామితిలో తలాలు మరియు సదిశలను మీకు పరిచయం చేస్తుంది.

ఇందులో ఉన్న పరిష్కరింపబడిన ఉదాహరణలన్నింటిని మీరు శ్రద్ధగా చదివి అభ్యాసంతో ఇచ్చిన అన్ని ప్రశ్నలను స్వతంత్రంగా పరిష్కరించడానికి ప్రయత్నించడం మీ నుండి మేము కోరుకుంటున్నాము. అంతేకాదు ఏ పాఠంలోనైనా ఏ అభ్యసంలోనైనా మీకు ఇబ్బంది ఎదురైతే మీ సమస్యను మాకు వ్రాయవచ్చు. సమస్యను నివృత్తిని చేసుకోవచ్చు. మీ నుండి తగిన సహాలను సూచనలను కూడ మేము స్వాగతిస్తున్నాము.

మీ

అకడమిక్ ఆఫీసర్

(గణితం)

(311)

గణితశాస్త్రము

విభాగం - I

మాడ్యుల్ - I

బీజ గణితము

1. గణితాను గమనం
2. సంకీర్ణ సంఖ్యలు
3. వర్గ సమీకరణములు
4. మాత్రికలు
5. నిర్ధారకాలు, వాటి అనువర్తనాలు
6. మాత్రికల విలోమాలు అనువర్తనాలు
7. ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు
8. ద్విపద సిద్ధాంతము

మాడ్యుల్ - II

నిరూపక జ్యామితి

9. కార్టీసియన్ నిరూపకవ వ్యవస్థ
10. సరళరేఖలు
11. వృత్తాలు
12. శాంకవ ఛేదములు

మాడ్యుల్ - III

త్రిపరిమాణపు జ్యామితి

13. త్రిపరిమాణ జ్యామితి పరిచయములు
14. తలము
15. సదిశలు

(311)

గణితశాస్త్రము

విభాగం – II

మాడ్యుల్ - IV

ప్రమేయాలు మరియు త్రికోణమితి ప్రమేయాలు

16. సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయాలు
17. త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు
18. విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలు
19. త్రిభుజ ధర్మాలు

మాడ్యుల్ - V

కలనగణితం

20. అవధులు, అవిచ్ఛిన్నాలు
21. అవకలనం
22. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనాలు
23. ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాల అవకలనాలు
24. స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు
25. మహిష్ఠము మరియు అల్పిష్ఠము (గరిష్ఠ – కనిష్ఠ విలువలు)
26. సమాకలనం
27. నిశ్చిత సమాకలనం
28. అవకలన సమీకరణాలు

మాడ్యుల్ - VI

సంభావ్యత మరియు సాంఖ్యాకశాస్త్రం

29. విస్తరణ కొలతలు
30. సంభావ్యత
31. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు ఘటనలు

విషయసూచిక

మాడ్యుల్స్	పాఠం సంఖ్య	పాఠం పేరు	పుటసంఖ్య
మాడ్యుల్ - I		**బీజగణితము**	
	1.	గణితాను గమనం	1-16
	2.	సంకీర్ణ సంఖ్యలు	17-72
	3.	వర్గ సమీకరణములు	73-106
	4.	మాత్రికలు	107-170
	5.	నిర్ధారకాలు, వాటి అనువర్తనాలు	171-222
	6.	మాత్రికల విలోమాలు అనువర్తనాలు	223-266
	7.	ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు	267-306
	8.	ద్విపద సిద్ధాంతము	307-364
మాడ్యుల్ - II		**నిరూపక జ్యామితి**	
	9.	కార్టీసియన్ నిరూపక వ్యవస్థ	365-412
	10.	సరళరేఖలు	413-488
	11.	వృత్తాలు	489-540
	12.	శాంకవ ఛేదములు	541-570
మాడ్యుల్ - III		**తిపరిమాణపు జ్యామితి**	
	13.	త్రిపరిమాణ జ్యామితి పరిచయములు	571-598
	14.	తలము	599-630
	15.	సదిశలు	631-682
		మాదిరి ప్రశ్నాపత్రము	683-686

అధ్యాయం

1

గణితాను గమనం

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్య పఠనము వలన మీరు కింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- పరిమిత గణితానుగమన సూత్రాన్ని చెప్పగలరు.
- ప్రవచనము $p(n)$ను $n = 1$ కు సత్యాసత్యాలను పరిశీలించగలరు.
- $p(k)$ నిజమని అనుకున్నప్పుడు $p(k+1)$ నిజమో, కాదో పరిశీలించగలరు.
- గణితానుగమన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి గణిత ప్రవచనాలు సత్యమో, కాదో నిర్ణయించగలరు.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంఖ్యామానము
- సంఖ్యలు, సమాసాలపై నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలు
- బీజీయ రూపాలు వాటి క్లుప్తీకరణలు

పరిచయం

మనదైనందిన జీవితంలో మనకు ఎన్నో రకాల అనుభవాలు. వాటి కారణాలు ఎదురవుతుంటాయి. ఉదాహరణకు మీ మిత్రుడు తనకు బిడ్డ పుట్టిందని చెపితే వెంటనే

నీవు ఆడామగా అని ప్రశ్నిస్తావు. ఇక్కడ నీవు సార్వత్రిక విషయాన్ని ప్రత్యేక విషయానికి వర్తిస్తున్నావు. ఈ రకమైన తర్కాన్ని నిగమన తర్కమంటారు. మరొక విషయాన్ని చర్చిద్దాం. నీ చుట్టూ ఉన్న బాగా చదివే విద్యార్థులు పరీక్షలు బాగా వ్రాస్తే నీవు దానిని "బాగా చదివే విద్యార్థులు పరీక్షలు కూడా చక్కగా వ్రాస్తారు" అని సిద్ధాంతీకరిస్తావు. దీనిని నీవు ప్రత్యేక విషయాలను పరిగణలోకి తీసుకొని దానిని సార్వత్రీకరించావు. దీనిని అనుగమన తర్కమంటారు. దీనిని అన్ని శాస్త్రాలలోను, గణితములోనూ ఉపయోగిస్తారు.

గణితములో గణితాను గమనము దీనికి పరిపూర్ణరూపము. గణితంలో ఒక ప్రవచనాన్ని అంగీకరించాలంటే అన్ని సందర్భాల్లోనూ అది వాస్తవమని రుజువుకావాలి.

1.1 ప్రవచనమనగా నేమి?

సత్యమనికాని, అసత్యమని గాని నిర్దుష్టంగా చెప్పగల వాక్యమును ప్రవచనము (statement) అంటాము.

ఉదాహరణకు "నా వయస్సు ఇరవై సంవత్సరాలు" "$x = 3$ అయితే $x^2 = 9$ అవుతుందనే"వి ప్రవచనాలు. "ఎప్పుడు బయలుదేరుతున్నావు" "ఎంత అద్భుతం" అనునవి ప్రవనాలు కావు.

ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య x కు, $x - 5 = 7 \Rightarrow x = 12$ మరియు '$x - 5 = 7$' అనునవి రెండూ ప్రవచనాలే కాని ఇందులో మొదటిది ఒప్పు రెండవది తప్పు

ఉదాహరణ 1.1 : కింది వాక్యాలలో ఏవి ప్రవచనాలు?

(i) భారతదేశానికి ఒక మహిళా అధ్యక్షురాలు ఉన్నారు.

(ii) 5 అనేది సరిసంఖ్య

(iii) $x^n > 1$

(iv) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

సాధన : (i) మరియు (ii) లు ప్రవచనాలు. ఇందులో (i) ఒప్పు (ii) తప్పు n విలువ, x విలువ తెలియకుండా (iii) తప్పో, ఒప్పో నిర్ణయించలేము. కనుక (iii) ప్రవచనం కాదు. ఏవిలువలు a, b ల కైనా (iv) ఒక సర్వసమీకరణ:. కాబట్టి (iv) ఒక ప్రవచనము.

దిగువ ఇచ్చిన ప్రచనమును పరిశీలిద్దాం.

$$1+ 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ఈ ప్రవచనము సహజసంఖ్య n లో ఉన్నది. ఈ ప్రవచనమును $p(n)$ తో సూచిద్దాం.

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$, p(1) అవుతుంది.

అలాగే $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ ప్రవచనమవుతుంది.

దీనిని $p(2)$ తో సూచిస్తారు.

ఉదాహరణ 1.2 : $2^n > n - 1$ ను $p(n)$తో సూచిస్తే $p(1), p(k), p(k+1), k \in \mathrm{N}$ను వ్రాయండి.

సాధన : $p(n) : 2^n > n - 1$ అని ఇచ్చారు.

n కి బదులు 1, k మరియు $k + 1$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$p(1) : 2^1 > 2 - 1$, i.e., $2 > 1$

$p(k) : 2^k > k - 1$

$p(k + 1) : 2^{k+1} > (k + 1) - 1$, i.e., $2^{k+1} > k$

ఉదాహరణ 1.3 : ప్రవచనము $p(n) : 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

అయితే $p(1), p(k)$ మరియు $p(k + 1), k \in \mathrm{N}$ రాయండి.

సాధన : $p(1)$ వ్రాయడానికి, $p(n)$ తో ఎడమచేతివైపు (LHS)

$3\times1 - 2$ అంటే 1 వచ్చేటట్లు వ్రాస్తాము. అనగా ఎడమ చేతివైపు ఒక పదం, అనగా మొదటి పదం వస్తుంది. అలాగే కుడిచేతివైపు

$$(\mathrm{RHS}) \quad p(1) = \frac{1\times(3\times1-1)}{2} = 1$$

$\therefore$ p(1) = 1

$$\mathrm{p}(2) : 1+4 = \frac{2\times(3\times2-1)}{2}, \quad \text{అంటే } 5 = 5 \text{ అని వస్తుంది.}$$

n బదులు k, $k + 1$ లు వరుసగా ప్రతిక్షేపిస్తే

$$p(k) : 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

$p(k + 1) : 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) + [3(k+1) - 2]$

$$= \frac{(k+1)[(3(k+1)-1]}{2}$$

అంటే $1 + 4 + 7 + ... + (3k + 1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$.

అభ్యాసం 1.1

1. కింది వానిలో ప్రవచనాలు ఏవి?

   (a) $1 + 2 + 4 + ... + 2^n > 20$ (b) $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 99$

   (c) ముంబాయి కన్నా చెన్నై బాగుంటుంది.

   (d) ఢిల్లీ ఎక్క ఉంది?

   (e) $\frac{1}{1\times 2}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ for $n = 5$

   (f) cosec $\theta < 1$

2. $p(n) : n^3 + 5n$ కు 6 ఒక ఒక కారణాంకం, అయితే $p(1)$, $p(2)$, $p(k)$, $p(k + 1)$, $k \in \mathrm{N}$లను రాయండి.

3. కింది ప్రవచనాలు $p(n)$ లకు $p(1)$, $p(k)$ మరియు $p(k + 1)$ లను రాయండి.

   (a) $2^n \geq n + 1$ (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

   (c) $n(n + 1)(n + 2)$ ను 6 భాగిస్తుంది.

   (d) $x^n - y^n$ ను $x - y$ భాగిస్తుంది.

   (e) $(ab)^n = a^n b^n$ (f) $\left(\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}\right)$ సహజసంఖ్య.

4. కింది ప్రవచనాలు $p(n)$ లకు $p(1)$, $p(2)$, $p(k)$ మరియు $p(k+1)$ లను రాయండి.

   (a) $\frac{1}{1\times 2}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

   (b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

   (c) $(1\times 2) + (2 \times 3) + ... + n(n + 1) < n(n + 1)^2$

   (d) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

1.2 గణితానుగమన సూత్రం

సహజసంఖ్య n తో $p(n)$ ఒక ప్రవచనము.

(i) $n = 1$ కి నిజము అంటే $p(1)$ నిజము.

(ii) $k \geq 1$ కు $p(k)$ నిజమైనపుడు $p(k + 1)$ కు కూడా నిజము అయితే $p(n)$ ప్రతి సహజసంఖ్యకు నిజము.

గమనిక: (ii) లో $p(k)$ నిజమని కాదు. $p(k)$ నిజమైనపుడు $p(k + 1)$ నిజమవ్వాలి అని తెలుపుతున్నది.

ఉదాహరణకు $n = 1$ కు $p(n)$ వాస్తవమని తెల్పడానికి. (i) ప్రకారం $p(1)$ వాస్తవము. $p(1)$ నిజము కాబట్టి (ii)లో $k = 1$ ప్రతిక్షేపిస్తే $p(1+1)$ అంటే $p(2)$ నిజము. మళ్ళీ $p(2)$ నిజము కాబట్టి (ii) లో $k = 2$ ప్రతిక్షేపిస్తే $p(2 + 1)$ అంటే $p(3)$ నిజము. ఇలాగే (ii) లో $k = 3$ ప్రతిక్షేపిస్తే $p(4)$ నిజమని చూపవచ్చు.

ఇలా చేస్తూపోతే $p(11)$ వాస్తవమని తెలుపుతాము. ఇచ్చట $n = 11$ మాత్రమే కాదు. $n = 137$ కూడా నిజమని చెప్పవచ్చు. కావున ప్రతి సహజసంఖ్య $n > 1$ కు $p(n)$ నిజము.

ఉదాహరణ 1.4 : గణితాను గమన పద్ధతిని ఉపయోగించి $1+ 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, అనే సూత్రాన్ని ప్రతి $n \in \mathrm{N}$ కు నిరూపించండి.

సాధన : $1+ 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ అనేది ప్రవచనం $p(n)$ అనుకొందాం.

$\therefore \mathrm{p}(1) = 1 = \frac{1}{2}(1+1)$ నిజము

$\therefore$ $p(1)$ నిజము.

$n = k$, $k \geq 1$ కు దత్తసూత్రం నిజం అనుకొందాం.

అంటే $1+2+3+...+k = \frac{k}{2}(k+1)$ ...(i)

ఇప్పుడు $p(k + 1)$ is $1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

మనము LHS = RHS చూపినచో ఇది నిజం అవుతుంది.

$p(k+1)$ లో LHS $= (1 + 2 + 3 + \ldots k) + (k + 1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$= p(k + 1)$ లో RHS

కావున $p(k)$ నిజం అయినపుడు $p(k + 1)$ కూడా నిజం అవుతుంది.

$\because$ $p(1)$ కూడా నిజం. కాబట్టి గణితానుగమన సూత్రం ప్రకారం రెండు నియమాలు పాటించబడినాయి.

అందువల్ల దత్త ప్రవచనం ప్రతి $n \in N$ కు నిజం.

ఇక్కడ ప్రవచనం నిరూపణలో 3 సోపానాలు చూడవచ్చు.

ఉదాహరణ 1.5 : గణితానుగమన పద్ధతి ఉపయోగించి $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \ldots + n.2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$, ప్రతి $n \in N$ కు సూత్రాన్ని నిరూపించండి.

సాధన : $1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$ అనేది ప్రవచనం $p(n)$ అనుకొందాం.

p(1) అనేది $1.2^1 = (1 - 1)\ 2^{1+1} + 2$ i.e., $2 = 2$

$\therefore$ p(1) నిజము

$n = k,\ k \geq 1$ కు p(k) నిజం అనుకొందాం.

అంటే $1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k.2^k = (k - 1) \cdot 2^{k+1} + 2$ ...(i)

ఇప్పుడు p(k + 1) నిజం అని చూపాలి.

ఇప్పుడు $p(k + 1)$ అనేది

$1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k.2^k + (k + 1).2^{k+1} = [(k+1)-1]2^{(k+1+1)}+2$

$= k \cdot 2^{k+2} + 2.$

$p(k+1)$ లో LHS $= 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k.2^k + (k + 1) \cdot 2^{k+1}$

$= (k-1)\ 2^{k+1} + 2 + (k+1)\ .\ 2^{k+1}$

$= 2^{k+1}\ [(k-1) + (k+1)] + 2$

$= 2^{k+1}\ (2k) + 2$

$= k\ .\ 2^{k+2} + 2$

$=$ RHS of $p(k+1)$

$\therefore$ $p(k+1)$ నిజము.

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం నుండి, $n \in \mathrm{N}$ అన్ని విలువలకు దత్త ప్రవచనము నిజము.

ఉదాహరణ 1.6 : గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$, ప్రతి $n \in \mathrm{N}$ కు నిరూపించండి.

సాధన : $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$ అనేది ప్రవచనం $p(n)$ అనుకొందాం.

$\therefore$ $p(1)$ అనేది $1^2 = \frac{1}{3}1(2-1)(2+1) = 1$ నిజము.

$\therefore$ $p(1)$ నిజము.

$k \geq 1$, $p(k)$ నిజం అని అనుకొందాం.

అంటే $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$

ఇప్పుడు $p(k+1) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2$

$= \frac{1}{3}(k+1)[2(k+1)-1]\,[2(k+1)+1]$

$= \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)$

$p(k+1)$లో LHS $= 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2k-1)^2 + (2k+1)^2$

$= \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1) + (2k+1)^2$

$$= \frac{1}{3}(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]$$

$$= \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)$$

$= p(k+1)$ లో RHS

$\therefore$ $p(k+1)$ నిజము.

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం నుండి, $n \in \mathrm{N}$ అన్ని విలువలకు దత్తప్రవచనం నిజము.

ఉదాహరణ 1.7 : గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి, $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots$ (n పదాల వరకు) $= \frac{n}{3n+1}$, $\forall\ n \in \mathrm{N}$ అని చూపండి.

సాధన : 1, 4, 7, ... లు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి.

$\therefore$ ఈ శ్రేఢిలో n వ పదం $3n-2$.

4, 7, 10 .... లు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి.

$\therefore$ ఈ శ్రేఢిలో n వ పదం $3n+1$.

$\therefore$ దత్తశ్రేఢిలో n వ పదం $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

ప్రవచనం $p(n)$ అనుకొందాం.

$\therefore$ $p(1)$ అనేది $\frac{1}{1.4} = \frac{1}{3+1}$ నిజము.

$\therefore$ $p(1)$ నిజము.

$n = k,\ k \geq 1$ కు దత్తప్రవచనం $p(k)$ నిజం అని అనుకొందాం.

i.e., $$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

ఇప్పుడు $p(k+1)$ నిజము అని చూపుదాం.

$p(k+1)$ అనేది

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}$$

$p(k+1)$ లో LHS $= \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$$= \frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k+1}{3k+1}$$

$$= \text{RHS of } p(k+1)$$

$\therefore$ $p(k+1)$ నిజము.

$\therefore$ గణితాను గమన సూత్రం నుండి, $n \in \mathrm{N}$ అన్ని విలువలకు దత్త ప్రవచనం నిజం.

ఉదాహరణ 1.8 : గణితానుగమనం పద్ధతినుపయోగించి $n \in \mathrm{N}$ అన్ని విలువలకు $x^n - y^n$ ను $x - y$ భాగిస్తుందని చూపండి.

సాధన : "$x^n - y^n$ ను $x - y$ భాగిస్తుంది" అనేది. ప్రవచనం $p(n)$ అనుకొందాం.

$x'-y'=x-y$ ని '$x - y$' భాగిస్తుంది. కాబట్టి $n = 1$ కు ప్రవచనం నిజం.

$n = k$, $k \geq 1$ దత్త ప్రవచనం నిజం అనుకొందాం.

అంటే, $x^k - y^k$ ను $x - y$ భాగిస్తుంది.

$\therefore$ $x^k - y^k = (x - y)p$ .... (i) అయ్యేట్లు పూర్ణాంకం p వ్యవస్థితం

ఇప్పుడు $n = k + 1$ కు దత్త ప్రవచనం నిజం అని చూపాలి.

అంటే $x^{k+1} - y^{k+1}$ ను $x - y$ భాగిస్తుందని చూపాలి.

(i) నుంచి, $x^k - y^k = (x - y)p$ కాబట్టి

$\therefore \quad x^k = (x - y)p + y^k$

$\therefore \quad x^{k+1} = (x - y)px + y^k \cdot x$

$\therefore \quad x^{k+1} - y^{k+1} = (x - y)px + y^k x - y^{k+1}$

$= (x - y)px + y^k(x - y)$

$= (x - y)\ (px + y^k)$

$\therefore\ x^{k+1} - y^{k+1}$ ను $x - y$ భాగిస్తుంది.

$\therefore\ n = k + 1$ కు దత్తప్రవచనం నిజం.

$\therefore$ గణితానుగమనం సూత్రం నుంచి $n \in N$ అన్ని విలువలకు $x^n - y^n$ ను $x - y$ భాగిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1.9 : ప్రతి $n \in N$కు $49^n + 16n - 1$ ని 64 ని 64 భాగిస్తుందని చూపండి.

సాధన : "$49^n + 16n - 1$ ని 64 భాగిస్తుంది" అనే ప్రవచనాన్ని $p(n)$ అనుకొందాం.

$49^1 + 16.1 - 1 = 64$ ను 64 భాగిస్తుంది. కాబట్టి $n = 1$ కి దత్తప్రవచనం నిజం.

$\therefore\ p(1)$ నిజం.

ప్రవచనం $p(k)$ నిజం అని అనుకొందాం.

అనగా, $49^k + 16k - 1$ ని 64 భాగిస్తుంది.

$\therefore\ 49^k + 16k - 1 = 64p$ ...(i) అయ్యేటట్లుగా $p \in N$ వ్యవస్థితం.

ఇప్పుడు $p(k + 1)$ నిజం అని చూపాలి.

అంటే $49^{k+1} + 16(k + 1) - 1$ ను 64 భాగిస్తుందని చూపాలి.

(1) నుండి, $49^k + 16k - 1 = 64p$

$\therefore\ 49^k = 64p - 16k + 1$

$\therefore\ 49^k.49 = (64p - 16k + 1).49$

$49^{k+1} + 16(k+1) - 1 = (64p - 16k + 1)49 + 16(k+1) - 1$

$$= 64(49p - 12k + 1)$$

ఇక్కడ $49p - 12k + 1$ ఒక పూర్ణాంకం.

$\therefore$ $49^{k+1} + 16(k + 1) - 1$ ను 64 భాగిస్తుంది.

$\therefore$ $p(k + 1)$ నిజము.

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $n \in \mathrm{N}$ అన్ని విలువలకు దత్తప్రవచనం నిజం.

ఉదాహరణ 1.10 : ప్రతి $n \in \mathrm{N}$కు $2^n > n$ అని చూపండి.

సాధన : $2^n > n$ అనే ప్రవచనము $p(n)$ అనుకొందాం.

$\therefore$ $p(1)$ అనేది $2^1 > 1$, i.e., $2 > 1$ నిజము.

$\therefore$ $p(1)$ నిజము.

$p(k)$ నిజము అనుకొందాం.

అపుడు $2^k > k$ ...(i)

ఇప్పుడు $p(k + 1)$ నిజం అని చూపాలి.

అంటే $2^{k+1} > k + 1$ అని చూపాలి.

సమీకరణం (i) ని ఇరువైపులా 2 తో గుణించగా

$$2^k.2 > 2k$$

$$2^{k+1} > 2k$$

$$\Rightarrow \quad 2^{k+1} > k + 1, \qquad (\because\ k > 1)$$

$\therefore$ $p(k + 1)$ నిజము.

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $n \in \mathrm{N}$ అన్ని విలువలకు దత్త ప్రవచనం నిజం.

కొన్ని సందర్భాలలో ఒక ప్రవచనాన్ని ఒక ప్రత్యేకమైన సహజసంఖ్య దానిని a అనుకున్నట్లయితే ప్రతి $n > a\ (\in \mathrm{N})$ కు నిరూపించాల్సి రావచ్చు. (ఉదాహరణ 1.11) అపుడు గణితానుగమన ధర్మాలలో $p(1)$ కు బదులుగా $p(a + 1)$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1.11: గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి $n^2 > 2(n + 1)\ \forall\ n \geq 3$, $n \in \mathrm{N}$ అని చూపండి.

సాధన : $n^2 > 2(n + 1)\ \forall\ n \geq 3$, $n \in \mathrm{N}$ అనేది ప్రవచనం $p(n)$ అనుకొందాం.

ఇక్కడ ప్రవచనాన్ని, $n \geq 3$, $n \in N$ అన్ని విలువలకు నిరూపించాలి.

కావున, $p(3)$ నిజమవుతుందో, లేదో చూడాలి.

$p(3) : 3^2 > 2 \times 4$ i.e., $9 > 8$

$\therefore$ $p(3)$ నిజము.

$k \geq 3$, కు దత్త ప్రవచనము $p(k)$ నిజం అనుకొందాం.

i.e., $k^2 > 2(k + 1)$ ....(i)

ఇపుడు $p(k + 1)$ నిజం అని చూపుదాం.

$$p(k + 1) : (k + 1)^2 > 2(k + 2)$$

$p(k + 1)$లో LHS $= (k + 1)^2$

$= k^2 + 2k + 1$

$> 2(k + 1) + 2k + 1$ ... (i) నుంచి

$> 3 + 2k + 1$, since $2(k + 1) > 3$

$= 2(k + 2)$

$(k + 1)^2 > 2(k + 2)$

$\therefore$ $p(k + 1)$ నిజం.

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం నుంచి $n \geq 3$ అన్ని విలువలకు దత్తప్రవచనం నిజం.

అభ్యాసం 1.2

1. గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి ప్రతీ $n \in N$కు కింది వాటిని రుజువు చేయండి.

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(c) $1 + 3 + 5 + ... + 2(n - 1) = n^2$.

(d) $1 + 4 + 7 + \ldots\ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$

2. గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి ప్రతీ $n \in N$కు కింది సమానతలను నిరూపించండి.

(a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

(b) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots.+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

(c) $1.2+2.3+\ldots.+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. ప్రతీ $n \in N$కు కింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $n^3 + 5n$ ను 6 భాగిస్తుంది.

(b) $(x^n - 1)$ ను $x - 1$ భాగిస్తుంది.

(c) $n^3 + 2n$ ను 3 భాగిస్తుంది.

(d) $n^4 + 2n^3 + n^2$ ను 4 భాగిస్తుంది.

కీలకపదాలు

1. పరిమిత గణితానుగమన సూత్రం (Principle of finite mathematical induction) యొక్క ఉపనమితి (i) $1 \in S$ (ii) ఏదైనా $K \in N$, $K \in S \Rightarrow K+1 \in S$ లను తృప్తిపరిచినచో అపుడు S = N అవుతుంది.

2. సంపూర్ణానుగమన సూత్రం (Principle of complete induction) : ప్రతి n సహజ సంఖ్యకు $P(n)$ ఒక ప్రవచనము $P(1)$ సత్యము మరియు $P(2)$ ... $P(k)$ లు సత్యమయినపుడు $P(K + 1)$ కూడాసత్యము. అయితే $\forall\ n \in N$, $P(n)$ సత్యమవుతుంది.

3. $x \neq y$, x, y లు సహజసంఖ్యలయితే, అప్పుడు $x^n - y^n$ ను $x - y$ భాగిస్తుంది $\forall\ n \in N$.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి, ప్రతి $n \in N$కు క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

1. $2.3 + 3.4 + 4.5 + \ldots$ n పదాల వరకు $= \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$
2. $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots..$ (n పదాల వరకు) $= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$
3. $4^n - 3^n - 1$ ని 9 భాగిస్తుంది.
4. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots.$ (n పదాల వరకు) $= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$
5. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots..$ (n పదాల వరకు) $= \frac{n}{3n+1}$

జవాబులు

అభ్యాసము 1.1

1. (b), (e), (f) లు ప్రవచనాలు. (a) ప్రవచనము కాదు. ఎందుకనగా n యొక్క వ్యాప్తి తెలియదు. కనుక దత్తవాక్యము నిజమో కాదో నిర్ణయించలేము. (c), (d) లు ప్రవచనాలు కావు. (f) కావు.
2. P(1) : $1^3 + 5.1$ నకు 6 కారణాంకము

   P(2) : $2^3 + 5.2$ నకు 6 కారణాంకము

   P(k) : $k^3 + 5k$ నకు 6 కారణాంకము

   P($k + 1$) : $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$ నకు 6 కారణాంకము
3. (a) P(1) : $2 \geq 2$

$P(k) : 2^k \geq k + 1$

$P(k + 1) : 2^{k+1} \geq k + 2$

(b) $P(1) : 1 + x \geq 1 + x$

$P(k) : (1 + x)^k \geq 1 + kx$

$P(k + 1) : (1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

(c) $P(1)$: 6 ను 6 భాగిస్తుంది.

$P(k)$: $k(k + 1)(k + 2)$ ను 6 భాగిస్తుంది.

$P(k + 1)$: $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ ను 6 భాగిస్తుంది.

(d) $P(1)$: $x - y$ అనేది $x - y$ తో భాగించబడుతుంది.

$P(k)$: $x^k - y^k$ అనేది $x - y$ చేత భాగించబడుతుంది.

$P(k + 1)$: $(x^{k+1} - y^{k+1})$ అనేది $x - y$ చేత భాగించబడుతుంది.

(e) $P(1) : ab = ab$

$P(k) : (ab)^k = a^k b^k$

$P(k + 1) : (ab)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$

(f) $P(1) : \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15}$ సహజసంఖ్య.

$P(k) : \frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15}$ సహజసంఖ్య.

$P(k + 1)$: $\frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15}$ సహజసంఖ్య.

4. (a) $P(1) : \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$

$P(2) : \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{2}{3}$

$$P(k): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+....+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

$$P(k+1): \frac{1}{1\times 2}+....+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

(b) $P(1): 1 = 1^2$

$P(2): 1 + 3 = 2^2$

$P(k): 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

$P(k + 1): 1 + 3 + 5 +.... + (2k - 1) + [2(k + 1)-1] = (k + 1)^2$

(c) $P(1): 1 \times 2 < 1(2)^2$

$P(2): (1\times 2) + (2\times 3) < 2(3)^2$

$P(k): (1\times 2) + (2\times 3) + ... + k(k + 1) < k(k + 1)^2$

$P(k + 1): (1\times 2) + (2\times 3) +....+(k + 1)(k + 2) < (k + 1)(k + 2)^2$

(d) $P(1): \frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$

$$P(2): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}=\frac{2}{5}$$

$$P(k): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+.....+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

$$P(k+1): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+.....+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

అధ్యాయం

2

సంకీర్ణ సంఖ్యలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యపఠనము వలన మీరు క్రింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థను, సంకీర్ణ సంఖ్యావ్యవస్థకు విస్తరింపచేయవలసిన అవసరమును వివరించగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యను నిర్వచించి, దానికి తగు ఉదాహరణలు ఇచ్చెదరు.
- రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సమానత్వమునకు నియమాన్ని తెలుపగలరు.
- ప్రతి సంకీర్ణ సంఖ్య $x+iy$ కు అనుగుణంగా, ఆర్గాండ్ తలంలో $P(x, y)$ అనే బిందువు ఏకైకంగా ఉంటుంది, అని తెలుసుకొంటారు. ఆర్గాండ్ తలమునకు చెందిన బిందువు $P(x, y)$ కు అనుగుణంగా సంకీర్ణ సంఖ్య $x+iy$ ఏకైకంగా ఉంటుంది అని తెలుసుకొంటారు.
- సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మాన్ని నిర్వచించి, కనుగొనగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క మాపము మరియు ఆయామములను నిర్వచించి, కనుగొనగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యను ధ్రువరూపంలో తెలియజేయగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యలపై బీజీయ పరిక్రియలను (సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము మరియు భాగహారము) చేయగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యలపై, బీజీయ పరిక్రియల దృష్ట్యా, సంవృత ధర్మము, వినిమయ ధర్మము, సాహచర్య ధర్మము, తత్సమ ధర్మము, విలోమ ధర్మము మరియు విభాగ ధర్మాలను వ్రాయడమే గాక వాటిని ఉపయోగిస్తారు.

- సమస్యలను సాధించుట కొఱకు, క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలను వివరించి ఉపయోగిస్తారు.

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ మరియు $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

(ii) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(iv) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

(v) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0).$

పూర్వాకాంక్షితాలు

- వాస్తవ సంఖ్యల ధర్మాలు
- రేఖీయ మరియు వర్గ సమీకరణాల సాధన
- సంఖ్యారేఖపై వాస్తవ సంఖ్యను గుర్తించుట
- సమతలంలో బిందువులను గుర్తించుట

పరిచయం

కింది తరగతులలో మనం వాస్తవ సంఖ్యల ధర్మాలను నేర్చుకొని, ఈ సంఖ్యలపై సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణనం, భాగహారం వంటి కొన్ని పరిక్రియలను తెలుసుకొన్నాం. ఇంకా ఒకటి, రెండు చలరాశులలో ఏకఘాత సమీకరణాలను, ఒకే చలరాశిలో ఉన్న వర్గసమీకరణాలను సాధించడం కూడా నేర్చుకొన్నాం. ఒక వాస్తవ సంఖ్య వర్గం ఋణేతరం కాబట్టి, $x^2 + 1 = 0$ సమీకరణం వాస్తవ సాధనను కలిగి ఉండదని గమనించాం. ఈ గమనిక మనకు $x^2 = -1$ సమీకరణానికి సాధనలను మదింపు చేయడానికి వీలుగా వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థను విస్తరింప జేయవలసిన అవసరం ఎంతైనా ఉందని సూచిస్తుంది. ఇట్లాంటి విస్తరణను చేయగలిగితే, అది $ax^2 + bx + c = 0$ అనే సమీకరణానికి $b^2 - 4ac < 0$ అయ్యే సందర్భంలో, వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థలో సాధ్యం కాబట్టి సాధన చేయడానికి మనకు దోహదం చేస్తుంది.

2.1 సంకీర్ణ సంఖ్యలు

$x^2 + 1 = 0$ సమీకరణాన్ని తీసుకొందాం. ....(A)

పై సమీకరణాన్ని $x^2 = -1$ గా వ్రాయవచ్చు.

(లేదా) $x = \pm\sqrt{-1}$

కానీ $x^2 = -1$ ను తృప్తి పరిచే వాస్తవ సంఖ్య లేదు. అంటే, ఏ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గము '-1' అగుటకు అవకాశం లేదు. ఇటువంటి సమీకరణములను సాధించుట కోసం, $i = \sqrt{-1}$ అగునట్లు ఒక సంఖ్య 'i' వున్నదని ఊహిస్తాము.

1978 నందు, L. ఆయిలర్ అను గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్త మొదటిసారి 'i' అనే సంఖ్యను గుర్తించి దానికి 'అయోట' అని పేరు పెట్టాడు. $i = \sqrt{-1}$ (లేదా) $i^2 = -1$ అయోట లేదా 'i' ను కల్పిత మూలము అంటారు. క్రొత్తగా 'i' ను ప్రవేశ పెట్టినందువల్ల, మనము ఒక రుణ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలమును, వాస్తవ సంఖ్య మరియు 'i' ల లబ్ధంగా వివరించవచ్చు.

కాబట్టి (A) యొక్క సాధనను $x = \pm i$ గా చూపవచ్చు.

ఈ విధంగా $-4 = 4(-1)$

$\therefore \sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{i^2 .2^2} = 2i$

సంప్రదాయకంగా $2i$ అని వ్రాయవచ్చు.

కాబట్టి $\sqrt{-4} = 2i,\ \sqrt{-7} = \sqrt{7}i$

$\sqrt{-4}, \sqrt{-7}$ లు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

మరొక వర్గసమీకరణము $x^2 - 6x + 13 = 0$ ను తీసుకొందాం.

దీనిని క్రింది విధంగా సాధించవచ్చు.

$$(x - 3)^2 + 4 = 0$$

లేదా, $(x - 3)^2 = -4$

లేదా, $x - 3 = \pm 2i$

లేదా, $x = 3 \pm 2i$

మనకు $x + yi$ రూపంలో గల సంఖ్యలు లభిస్తాయి. ఇచ్చట x మరియు y లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $i = \sqrt{-1}$.

$a + bi$ రూపంలో వ్రాయగల సంఖ్యను సంకీర్ణ సంఖ్య అంటారు. a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $i = \sqrt{-1}$.

ఒక సంకీర్ణ సంఖ్యను సాధారణముగా z అక్షరముతో సూచిస్తారు.

i.e., $z = a + bi$, a ని z యొక్క వాస్తవ భాగము అంటారు.

దీనిని $\text{Re}(a + bi)$ అని వ్రాస్తాము. b ని z యొక్క కల్పిత భాగము అంటారు.

దీనిని $\text{Imag}(a + ib)$ / $\text{I}_m(a + ib)$ అని వ్రాస్తాము.

$a = 0, b \neq 0$ అయినపుడు, సంకీర్ణ సంఖ్య bi అగును. దీనిని శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అంటారు.

$-7i, \frac{1}{2}i, \sqrt{3}i$ మరియు πi లు శుద్ధ కల్పిత సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు. $a \neq 0$, $b = 0$ అయినపుడు, సంకీర్ణ సంఖ్య a అగును. ఇది వాస్తవ సంఖ్య.

$5, 2.5, \sqrt{7}$ లు వాస్తవ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

$a = 0, b = 0$ అయినపుడు, సంకీర్ణ సంఖ్య '0' అగును.

కాబట్టి వాస్తవ సంఖ్యలు, సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క ప్రత్యేక రూపాలు.

ఉదాహరణ 2.1 క్రింది వాటిని 'i' ని ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరింపుము.

(i) $\sqrt{-36}$ (ii) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{-4}$

సాధన : (i) $\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6i$

(ii) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{-4} = 5 \times 2i = 10i$

2.2 i యొక్క ధన పూర్ణ ఘాతాంకాలు

$i^2 = -1$ అని మనకు తెలుసు.

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$

$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = (+1)\, i = i$

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

$i^7 = (i^2)^3\, (i) = (-1)\, (i) = -i$

$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = +1.$

కావున i యొక్క ఏ ధనపూర్ణాంక ఘాతానికైనా $i, -1, -i, +1$ లలో ఏదో ఒకటి వచ్చును.

$n > 4$ అయ్యేలా, 'n' అనే ధనపూర్ణాంకము వున్నచో, i^n విలువను కనుగొనుటకు 'n'ను 4 చే భాగిస్తాము.

భాగఫలమును 'm'గా, శేషమును 'r' గా అనుకొనిన $n = 4m + r$ అగును. ఇచ్చట $0 \leq r < 4$.

కాబట్టి, $i^n = i^{(4m+r)} = i^{4m} . i^r$

$= (i^4)^m . i^r$

$= i^r \ (\because i^4 = 1)$

> **గమనిక :** ఏవేని రెండు వాస్తవ సంఖ్యలు a, b ల లో కనీసం ఒకటి సున్న లేదా ధనాత్మకం అయినచో $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ సత్యము అగును.

వాస్తవంగా $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$

$= i . \sqrt{a} \times i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab}$

$= -\sqrt{ab}$, a, b లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు.

ఉదాహరణ 2.2. $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$

$= 1 + (i^2)^5 + (i^2)^{10} + (i^2)^{15}$

$= 1 + (-1)^5 + (-1)^{10} + (-1)^{15}$

$= 1 + (-1) + (1) + (-1)$

$= 1 - 1 + 1 - 1$

$= 0$

కావున $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30} = 0$

ఉదాహరణ 2.3. $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ ను $a + bi$ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

సాధన : $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ ను $8(i^2) . i + 6(i^2)^8 - 12(i^2)^5 . i$ గా రాయవచ్చును.

$= 8(-1) \cdot i + 6(-1)^8 - 12(-1)^5 \cdot i$

$= -8i + 6 - 12(-1)\, i$

$= -8i + 6 + 12i$

$= 6 + 4i$

ఇది $a + bi$ రూపంలో వున్నది, $a = 6, b = 4$.

అభ్యాసం 2.1

1. ఈ క్రింది వాటిని i ని ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరింపుము.

   (a) $\sqrt{-27}$ (b) $-\sqrt{-9}$ (c) $\sqrt{-13}$

2. క్రింది వాటిని $a + bi$ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

   (a) 5 (b) $-3i$ (c) 0

3. $10i^3 + 6i^{13} - 12\, i^{10}$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

4. $\forall\ m \in N/m$ యొక్క అన్ని సహజ విలువలకు

   $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$ అని చూపుము.

2.3 సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము

1. $x^2 - 6x + 25 = 0$ ..... (i) సమీకరణాన్ని తీసుకొన్నచో

   $(x - 3)^2 + 16 = 0$

   లేదా, $(x - 3)^2 = -16$

   లేదా, $(x - 3) = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16(-1)}$

   లేదా, $x = 3 \pm 4i$

   పై సమీకరణము యొక్క మూలములు $3 + 4i$, $3 - 4i$ లు.

   మరొక సమీకరణము

   $x^2 + 2x + 2 = 0$ ను తీసుకొందాం ..... (ii)

$(x+1)^2 + 1 = 0$

లేదా, $(x+1)^2 = -1$

లేదా, $(x+1) = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

లేదా, $x = -1 \pm i$

(ii) వ సమీకరణము మూలాలు $-1+i$, $-1-i$ లు.

మీరు (i), (ii) సమీకరణాల మూలాల మధ్య ఏమైనా పోలికను గుర్తించారా ?

(i), (ii) సమీకరణాల మూలాలు $a+bi$, $a-bi$ రూపంలో వున్నాయి. ఇటువంటి మూలాలను సంయుగ్మ మూలాలు అంటారు. $a+bi$ యొక్క సంయుగ్మమును $a-bi$ అంటారు. ఇదే విధముగా $a-bi$ యొక్క సంయుగ్మమును $a+bi$ అంటారు.

గమనిక : సంకీర్ణ సంఖ్యలోని కల్పిత భాగము యొక్క గుర్తును మార్చడం వల్ల, ఆ సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము వచ్చును.

అంటే, సంకీర్ణ సంఖ్య $z = a+bi$, యొక్క సంయుగ్మాన్ని $a-bi$ గా నిర్వచిస్తాము. దీనిని $\overline{z}$ తో సూచిస్తాము.

కావున $z = a+bi$ అయినచో $\overline{z} = a-bi$ అగును.

క్రింది ఉదాహరణలు సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క సంయుగ్మాలను సూచించును.

(i) $z = 2+3i$ అయినచో $\overline{z} = 2-3i$ అగును.

(ii) $z = 1-i$ అయినచో $\overline{z} = 1+i$ అగును.

(iii) $z = -2+10i$ అయినచో $\overline{z} = -2-10i$ అగును.

2.3.1 సంకీర్ణ సంయుగ్మముల ధర్మాలు

(i) z ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయినచో $z = \overline{z}$ అగును. అంటే ఒక వాస్తవ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము అదే సంఖ్య అగును.

ఉదాహరణకు $z = 5$ అయినచో

$z = 5 + 0i$ గా వ్రాయవచ్చు.

$\therefore \overline{z} = 5 - 0i = 5$

$\therefore z = 5 = \overline{z}$

(ii) z ఒక శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అయినచో $\overline{z} = -z$

ఉదాహరణకు, $z = 3i$ అయినచో

$z = 0 + 3i$ గా వ్రాయవచ్చు.

$\therefore \quad \overline{z} = 0 - 3i = -3i$

$= -z$

$\therefore \quad \overline{z} = -z.$

(iii) సంకీర్ణ సంఖ్య సంయుగ్మము యొక్క సంయుగ్మము అదే సంఖ్య అగును.

i.e., $\overline{(\overline{z})} = z$

ఉదాహరణకు, $z = a + bi$ అయినచో, $\overline{z} = a - bi$

మరలా, $\overline{(\overline{z})} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$

$\therefore \quad \overline{(\overline{z})} = z.$

ఉదాహరణ 2.4 : క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల సంయుగ్మములను కనుక్కోండి.

(i) $3 - 4i$ (ii) $2i$ (iii) $(2 + i)^2$ (iv) $\frac{i+1}{2}$

సాధన : (i) $z = 3 - 4i$ గా తీసుకొందాం.

ఇప్పుడు $\overline{z} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

కావున $3 + 4i$ అనునది $3 - 4i$ యొక్క సంయుగ్మము.

(ii) $z = 2i$ లేదా $0 + 2i$ గా తీసుకుందాం.

ఇప్పుడు $\overline{z} = \overline{0 + 2i} = 0 - 2i = -2i$

కాబట్టి $-2i$ అనునది $2i$ యొక్క సంయుగ్మము.

(iii) $z = (2 + i)^2$

i.e., $z = (2)^2 + (i)^2 + 2(2)(i)$

$= 4 - 1 + 4i$

$= 3 + 4i$

ఇప్పుడు $\overline{z} = \overline{3 + 4i} = 3 - 4i.$

కావున $(2 + i)^2$ యొక్క సంయుగ్మము $3 - 4i.$

(iv) $z = \frac{i+1}{2}$ గా తీసుకొనిన

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

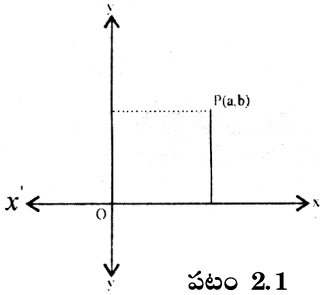
ఇప్పుడు $\bar{z} = \overline{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

కాబట్టి $\frac{i+1}{2}$ యొక్క సంయుగ్మము $\frac{-i+1}{2}$.

2.4 సంకీర్ణ సంఖ్యను జ్యామితీయంగా చిత్రించడం

$z = a + bi$ ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య అనుకొందాం. పరస్పర లంబరేఖలైన XOX', YOY'లను X, Y అక్షములుగా తీసుకొందాం. O అనేది మూలబిందువు అగును.

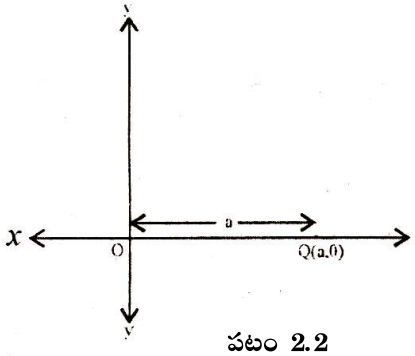
P(a, b) ఏదైనా ఒక బిందువు. ఇప్పుడు మనము సంకీర్ణ సంఖ్య $z = a + bi$ ను పటం 2.1 నందు బిందు రూపంలో P(a, b) గా గుర్తించాము.



పటం 2.1

$b = 0$ అయిన, z ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయి $z = a + 0i$ అగును. దీనిని బిందువు $(a, 0)$ గా గుర్తిస్తాము. ఈ బిందువు X- అక్షంపై ఉంటుంది.

XOX' ను X-అక్షం అంటారు. పటం 2.2 నందు బిందువు Q$(a, 0)$ అనేది సంకీర్ణ సంఖ్య $z = a + 0i$ ను సూచించును.

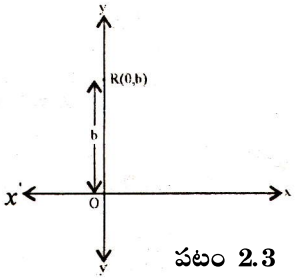


పటం 2.2

$a = 0$ అయిన, z ఒక శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అగును. $z = 0 + bi$ అగును. దీనిని $(0, b)$ బిందువు గా గుర్తిస్తాము. బిందువు Y–అక్షంపై ఉంటుంది.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

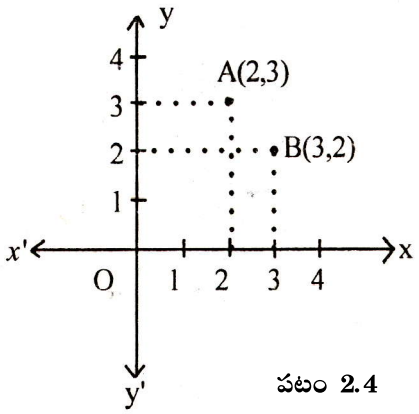
YOY' ను Y-అక్షం అంటారు. పటం 2.3 నందు బిందువు $R(0, b)$ అనేది సంకీర్ణ సంఖ్య $z = 0 + bi$ ను సూచించును.



పటం 2.3

సంకీర్ణ సంఖ్యలను చిత్రించిన తలమును సంకీర్ణ తలం లేదా ఆర్గాండ్ తలం అంటాం. సంకీర్ణ సంఖ్యను గుర్తించిన పటమును ఆర్గాండ్ పటము అంటాం.

ఉదాహరణ 2.5 ఒకే ఆర్గాండ్ తలము నందు $2 + 3i$ మరియు $3 + 2i$ సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించుము.

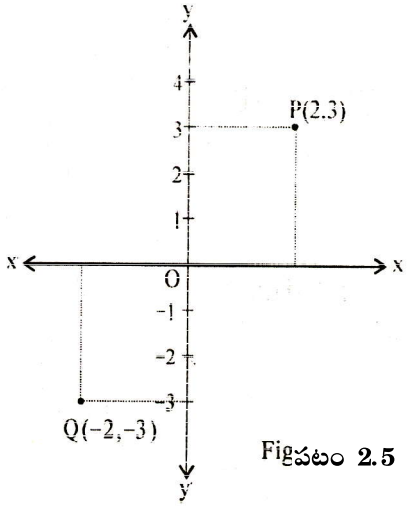


పటం 2.4

సాధన : 1. $2 + 3i$ ను బిందువు $A(2, 3)$ గా గుర్తించితిమి.

2. $3 + 2i$ ను బిందువు $B(3, 2)$ గా గుర్తించితిమి. A, B లు స్పష్టంగా విభిన్న బిందువులు.

ఉదాహరణ 2.6 ఒకే ఆర్గాండ్ తలము నందు $2 + 3i$ మరియు $-2 - 3i$ సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించుము.

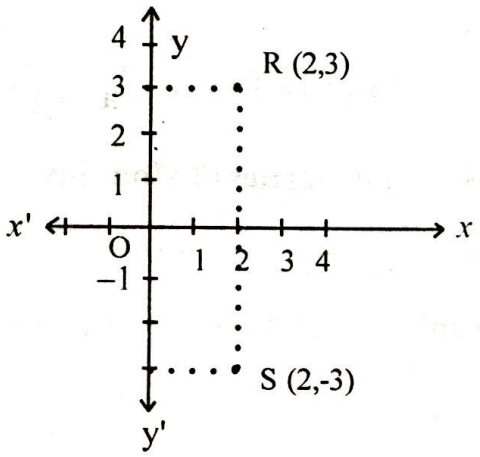


Figపటం 2.5

సాధన : 1. $2 + 3i$ ను బిందువు P(2, 3) గా గుర్తించితిమి.

2. $-2 - 3i$ ను బిందువు Q(−2, −3) గా గుర్తించితిమి.

ఉదాహరణ 2.7 ఒకే ఆర్గాండ్ తలము నందు $2 + 3i$ మరియు $2 - 3i$ సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించుము.

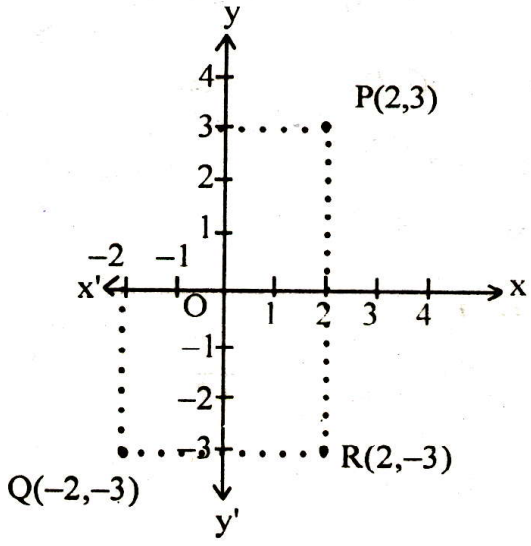


పటం 2.6

సాధన : 1. $2 + 3i$ ను బిందువు R(2, 3) గా గుర్తించితిమి.

2. $2 - 3i$ ను బిందువు S(+2, −3) గా గుర్తించితిమి.

ఉదాహరణ 2.8 ఒకే ఆర్గాండ్ తలము నందు $2 + 3i$, $-2 - 3i$ మరియు $2 - 3i$ సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించుమ



పటం 2.7

సాధన : 1. $2 + 3i$ ను బిందువు P(2, 3) గా గుర్తించితిమి.

2. $-2 - 3i$ ను బిందువు Q(−2, −3) గా గుర్తించితిమి.

3. $2 - 3i$ ను బిందువు R(2, −3) గా గుర్తించితిమి.

2.5 సంకీర్ణ సంఖ్య మాపం

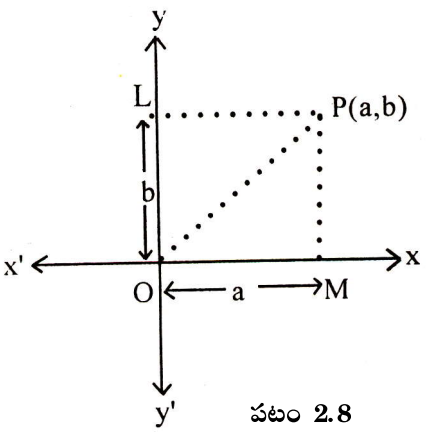
ఏ సంకీర్ణ సంఖ్య $z = a + bi$ ని అయినా ఆర్గాండ్ తలం నందు బిందువుగా గుర్తించవచ్చు. మూలబిందువు నుంచి, ఈ బిందువుకు గల దూరాన్ని ఎలా కనుగొంటారు?

$a + bi$ ని సూచించే బిందువును $P(a, b)$ అనుకొందాము.

బిందువు 'P' నుంచి X, Y అక్షముల మీదికి వరుసగా PM, PL అనే లంబములను గీయుము.

$OM = a$, $OL = b$ అనుకొనుము.

మనము మూలబిందువు నుంచి "P" కి గల దూరాన్ని కనుగొనవలెను.



పటం 2.8

$$\therefore OP = \sqrt{OM^2 + MP^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$

OP ని సంకీర్ణ సంఖ్య $a + bi$ యొక్క 'మాపము' లేదా 'పరమమూల్యం' అంటాం.

$\therefore z = a + bi$ సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క మాపమును $|z|$ తో సూచిస్తారు.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2.5.1 మాపము యొక్క ధర్మాలు

(a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ఉపపత్తి : $z = a + bi$ అనుకొనిన, $a \in R$, $b \in R$.

ఇప్పుడు $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ మరియు $b = 0$ ($\because a^2, b^2$ లు రెండునూ ఋణేతరం)

$\Leftrightarrow z = 0.$

(b) $|z| = |\overline{z}|.$

ఉపపత్తి : $z = a + bi$ అయినచో, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ఇప్పుడు, $\overline{z} = a - bi$

$\therefore |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

కావున $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\overline{z}|$ ... (i)

(c) $|z| = |-z|$

ఉపపత్తి : $z = a + bi$ అయినచో, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$-z = -a - bi$, ఇప్పుడు $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

అలాగే, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |-z|$ ...(ii)

(i), (ii) ల నుంచి $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 2.9 : $z = -4 + 3i$ అయినచో z, $\overline{z}$ ల మాపములను కనుగొనుము.

సాధన : $z = -4 + 3i$ అయిన, $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

కావున $|z| = 5$

మరియు $\overline{z} = -4 - 3i$

$|\overline{z}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

కావున $|z| = 5 = |\overline{z}|.$

ఉదాహరణ : 2.10. $z = 5 + 2i$ అయిన, $z, -z$ లమాపములను కనుక్కోండి. మరియు $|z| = |-z|$ అని చూపండి.

సాధన : $z = 5 + 2i$ అయిన,

$$-z = -5 - 2i$$

$$|z| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

మరియు $|-z| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

కావున $|z| = \sqrt{29} = |-z|$.

ఉదాహరణ : 2.11. $z = 1 + 2i$ అయిన, $z, -z, \bar{z}$ ల మాపమును కనుక్కోండి.

సాధన : $z = 1 + 2i$ అయిన, $-z = -1 - 2i$ మరియు $\bar{z} = 1 - 2i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|-z| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

మరియు $|\bar{z}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

కావున $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.

ఉదాహరణ : 2.12 క్రింది వాటి మాపములను కనుగొనండి.

(i) $1 + i$ (ii) 2π (iii) 0 (iv) $-\frac{1}{2}i$

సాధన : (i) $z = 1 + i$ అనుకొనిన

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

కావున $|1 + i| = \sqrt{2}$

(ii) $z = 2\pi$ లేదా $2\pi + 0i$ అనుకొనిన

$$|z| = \sqrt{(2\pi)^2 + (0)^2} = 2\pi$$

కావున $|2\pi| = 2\pi$.

(iii) $z = 0$ లేదా $0 + 0i$ అనుకొనిన

$$|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

కావున $|z| = 0.$

(iv) $z = -\frac{1}{2}i$ లేదా $0 - \frac{1}{2}i$ అనుకొనిన

$$|z| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

కావున $\left|-\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}.$

$\therefore$ z శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అయితే, $z \neq |z|$.

ఉదాహరణ : 2.13 సంకీర్ణ సంఖ్య $z = -2 + 3i$ సంయుగ్మము యొక్క పరమ మూల్యమును కనుక్కోండి.

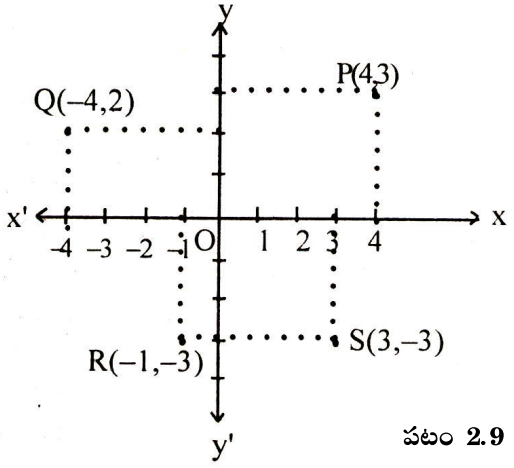
సాధన : $z = -2 + 3i$

అప్పుడు $\bar{z} = -2 - 3i$

$\bar{z}$ యొక్క పరమ మూల్యము = $|\bar{z}| = |-2 - 3i| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$

$$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

ఉదాహరణ 2.14 ఆర్గాండ్ తలము (పటం 2.9) నందు గుర్తించిన సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపములను కనుగొనుము.



పటం 2.9

సాధన : (i) P(4, 3) బిందువు $z = 4 + 3i$ సంకీర్ణ సంఖ్యను సూచించును.

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

$\therefore |z| = 5.$

(ii) Q(–4, 2) బిందువు $z = -4 + 2i$ సంకీర్ణ సంఖ్యను సూచించును.

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$\therefore |z| = 2\sqrt{5}.$

(iii) R(–1, –3) బిందువు $z = -1 - 3i$ సంకీర్ణ సంఖ్యను సూచించును.

$$\therefore |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

(iv) S(3, –3) బిందువు $z = 3 - 3i$ సంకీర్ణ సంఖ్యను సూచించును.

$$\therefore |z| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

లేదా $|z| = 3\sqrt{2}.$

అభ్యాసం 2.2

1. క్రింది వాటికి సంయుగ్మములను కనుక్కోండి.

   (a) $-2i$ (b) $-5 - 3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $(-2 + i)^2$

2. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఆర్గాండ్ తలంలో గుర్తించండి.

   (a) (i) $2 + 0i$ (ii) $-3 + 0i$ (iii) $0 - 0i$ (iv) $3 - 0i$

   (b) (i) $0 + 2i$ (ii) $0 - 3i$ (iii) $4i$ (iv) $-5i$

   (c) (i) $2 + 5i$ మరియు $5 + 2i$ (ii) $3 - 4i$ మరియు $-4 + 3i$

   (iii) $-7 + 2i$ మరియు $2 - 7i$ (iv) $-2 - 9i$ మరియు $-9 - 2i$

   (d) (i) $1 + i$ మరియు $-1 - i$ (ii) $6 + 5i$ మరియు $-6 - 5i$

   (iii) $-3 + 4i$ మరియు $3 - 4i$ (iv) $4 - i$ మరియు $-4 + i$

(e) (i) $1 + i$ మరియు $1 - i$ (ii) $-3 + 4i$ మరియు $-3 - 4i$

(iii) $6 - 7i$ మరియు $6 + 7i$ (iv) $-5 - i$ మరియు $-5 + i$

3. (a) క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపములను కనుగొనుము.

(i) 3 (ii) $(i + 1)(2 - i)$ (iii) $2 - 3i$ (iv) $4 + \sqrt{5}\, i$

(b) క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z| = |\bar{z}|$ ను సరిచూడండి.

(i) $-6 + 8i$ (ii) $-3 - 7i$

(c) క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z| = |-z|$ ను సరిచూడండి.

(i) $14 + i$ (ii) $11 - 2i$

(d) క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z| = |-z| = |-\bar{z}|$ ను సరిచూడండి.

(i) $2 - 3i$ (ii) $-6 - i$ (iii) $7 - 2i$

2.6 రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సమానత్వము

$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ సంకీర్ణసంఖ్యలను $z_1 = z_2$ అయ్యేటట్లు తీసుకొందాం.

మనకు $a + bi = c + di$ అని తెలుసు.

లేదా $(a - c) + (b - d)i = 0 = 0 + 0i$

పై సమీకరణములో, వాస్తవ, కల్పిత భాగములను పోల్చగా ; $a - c = 0$ లేదా $a = c$

$\Rightarrow$ z_1 వాస్తవ భాగం $= z_2$ వాస్తవ భాగం

మరియు $b - d = 0$ లేదా $b = d$

$\Rightarrow$ z_1 కల్పిత భాగం $= z_2$ కల్పిత భాగం.

అంటే రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు సమానము కావలెనంటే, వాటి వాస్తవ, కల్పిత భాగాలు వరుసక్రమంలో ఒక దానికొకటి సమానము కావలెను.

సాధారణంగా $a = c$ మరియు $b = d$ అయినప్పుడు మాత్రమే $a + bi = c + di$.

ధర్మాలు : $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ గా తీసుకొందాం.

$z_1 = z_2$ అంటే $a = c$ మరియు $b = d$

ఇప్పుడు $|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$ మరియు $|z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$

$= \sqrt{a^2+b^2}$ $(\because a = c\ b = d)$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2|$.

ఉదాహరణ 2.15 x, y ల ఏవిలువలకు, $5x+6y\,i,\ 10+18\,i$ సంకీర్ణ సంఖ్యలు సమానమగును?

సాధన : లెక్కప్రకారము $5x + 6y\,i = 10 + 18\,i$ `Ç

వాస్తవ, కల్పిత భాగములను పోల్చగా

$5x = 10$ లేదా $x = 2$

మరియు $6y = 18$ లేదా $y = 3$

కావున, $x = 2, y = 3$ లకు ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్యలు సమానమగును.

2.7 సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ లు రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు అయినచో, వాటి సంకలనమును

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ గా నిర్వచిస్తాము.

ఉదాహరణకు, $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -4 + 5i$ అయిన

$$z_1 + z_2 = [2 + (-4)] + [3 + 5]i$$
$$= -2 + 8i$$

ఉదాహరణ 2.16 సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $(3 + 2i) + (4 - 3i)$

(ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i)$

సాధన : (i) $(3 + 2i) + (4 - 3i) = (3 + 4) + (2 - 3)i = 7 - i$

(ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = (2 - 3 + 1) + (5 - 7 - 1)i$

$= 0 - 3i$

(లేదా) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = -3i$

2.7.1 రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనమును జ్యామితీయంగా చిత్రించడం

P(a, b), Q(c, d) లు బిందువులు. రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు z_1, z_2 లను సూచిస్తాయనుకొందాం. వీటి సంకలనము $z_1 + z_2$ ను అదే ఆర్గాండ్ తలమునందు బిందువు R$(a + c, b + d)$ సూచిస్తుంది.

OP, OQ, OR, PR మరియు QR లను కలుపుము.

RL పైకి PK లంబాన్ని గీయుము.

Δ QON లో

ON = C

మరియు QN = d

Δ ROL లో

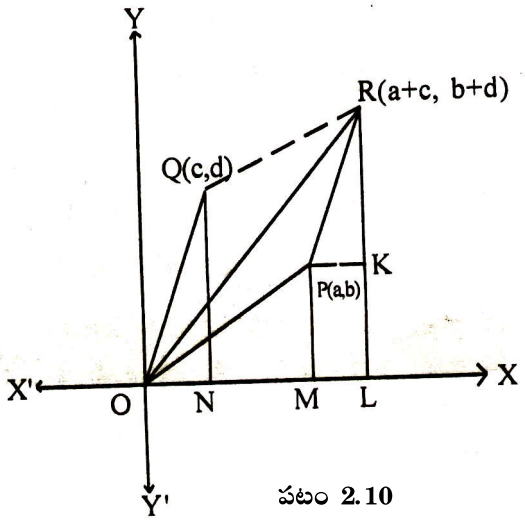
RL = $b + d$

మరియు OL = $a + c$

Δ POM లో

PM = b

OM = a



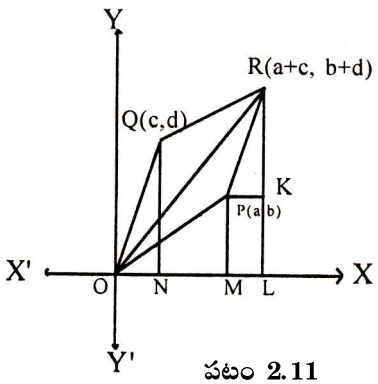
పటం 2.10

మరియు PK = ML

= OL – OM

= $a + c – a$

= c = ON.



పటం 2.11

RK = RL – KL

= RL – PM

= b + $d – b$

= d = QN

Δ QON మరియు Δ RPK లో

ON = PK, QN = RK మరియు $\angle$QNO = $\angle$RKP = 90^0.

$\therefore$ ΔQON $\cong$ ΔRPK

$\therefore$ OQ = PR మరియు OQ // PR.

$\Rightarrow$ OPRQ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు దాని కర్ణము OR.

కావున రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనమును సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణము సూచిస్తుంది అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 2.17 : త్రిభుజ అసమానత : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ అని నిరూపించుము.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణము రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు z_1, z_2 ల సంకలనాన్ని సూచిస్తుందని నిరూపించాము. (పటం 2.11 చూడుము)

Δ OPR లో

$OR \leq OP + PR$

లేదా $OR \leq OP + OQ$ ($\because$ OQ = PR)

లేదా $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

ఉదాహరణ 2.18 : $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 1 + i$ అయిన, $|z_1 + z_2| \leq |.z_1| + |z_2|$ ను సరిచూడుము.

సాధన : సంకీర్ణ సంఖ్యలు $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 1 + i$ లను బిందువులు (2, 3), (1, 1) లచే సూచిస్తాము.

వీటి సంకలనము $z_1 + z_2$ ను బిందువు (2 + 1, 3 + 1) i.e., (3, 4) చే సూచిస్తాము.

సరిచూచుట :

$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.6$ (సుమారుగా)

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ (సుమారుగా)

$|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|z_1| + |z_2| = 3.6 + 1.41 = 5.01$

$\therefore\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2.7.2 రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల వ్యవకలనము

రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ లను సూచించు బిందువులును (a, b), (c, d) లనుకొందాం.

$$\therefore \quad z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$
$$= (a - c, b - d) \text{ బిందువును సూచిస్తుంది.}$$

$\therefore \; z_1 - z_2$ అనేది $(a - c, b - d)$ బిందువుచే సూచించబడును.

కావున రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల వ్యవకలనమునకు, వాటిలోని వాస్తవ, కల్పిత భాగములను విడివిడిగా తీసివేయవలెను.

ఉదాహరణ 2.19 క్రింది వాటిలో ప్రతీ దానికి $z_1 - z_2$ ను కనుక్కోండి.

(a) $z_1 = 3 - 4i, \qquad z_2 = -3 + 7i$

(b) $z_1 = -4 + 7i, \qquad z_2 = -4 - 5i$

సాధన : (a) $z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (-3 + 7i)$
$= (3 - 4i) + (3 - 7i)$
$= (3 + 3) + (-4 - 7)i$
$= 6 + (-11)\, i = 6 - 11i$

(b) $z_1 - z_2 = (-4 + 7i) - (-4 - 5i)$
$= (-4 + 7i) + (4 + 5i)$
$= (-4 + 4) + (7 + 5)i$
$= 0 + 12i = 12\, i$

ఉదాహరణ 2.20 $5 + 4i$ వచ్చుటకు, i కి ఏమి కలపాలి?

సాధన : $z = a + bi$ ని i కి కలుపగా $5 + 4i$ వచ్చును అనుకొందాం.

$\therefore \quad i + (a + bi) = 5 + 4i$

లేదా $a + (b + 1)i = 5 + 4i$

వాస్తవ, కల్పిత భాగాలను సమానపర్చగా

$a = 5$ మరియు $b + 1 = 4$ లేదా $b = 3$

$\therefore 5 + 4i$ వచ్చుటకు 'i' కి $z = 5 + 3i$ ని కలపాలి.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం

నోట్స్

2.8 సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనానికి సంబంధించిన ధర్మాలు

1. సంవృతము : రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము సంకీర్ణ సంఖ్య అగును. $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ లను తీసుకొన్నచో; $a_1,\ b_1,\ a_2, b_2 \in \mathrm{R}$ ఇప్పుడు $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ కూడా ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య.

కావున సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము సంవృతము అని ఋజువు అయినది. ఇలాగే, $(1 + i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (1 + 3)i = 3 + 4i$ కూడా సంకీర్ణ సంఖ్య. మరలా, రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల భేదము కూడా సంకీర్ణ సంఖ్య,

ఉదాహరణకు $(2 + 4i) - (1 - 4i) = (2 - 1) + \{4 - (-4)\}\ i = 1 + 8i$ కూడా సంకీర్ణసంఖ్య.

2. వినిమయము : z_1, z_2 లు రెండు సంకీర్ణలయితే, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ అయినచో,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i \quad \{\text{వాస్తవ సంఖ్యల సంకలనము వినిమయము}\} \\ &= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

i.e., $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

కావున, సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము వినిమయము.

ఉదాహరణ : $z_1 = 8 + 7i,\ z_2 = 9 - 3i$ అయిన

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (8 + 7i) + (9 - 3i) \\ &= (8 + 9) + (7 - 3)i \\ z_2 + z_1 &= (9 - 3i) + (8 + 7i) \\ &= (9 + 8) + (-3 + 7)i \\ z_2 + z_1 &= 17 + 14i \quad \text{మరియు} \quad z_1 + z_2 = 17 + 14i \end{aligned}$$

కాబట్టి $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ అని వచ్చినది.

ఇప్పుడు $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$

$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$z_2 - z_1 = (a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i)$

$= (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i$

$= -(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)i$

$= -(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

$\therefore z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$

కావున సంకీర్ణ సంఖ్యల వ్యవకలనము వినిమయము కాదు.

ఉదాహరణ : $z_1 = 8 + 7i,\ z_2 = 9 - 3i$ అయిన

$z_1 - z_2 = (8 + 7i) - (9 - 3i)$

$= (8 - 9) + (7 + 3)i$

$z_2 - z_1 = (9 - 3i) - (8 + 7i)$

$= (9 - 8) + (-3 - 7)i$

$z_1 - z_2 = -1 + 10i$ మరియు $z_2 - z_1 = -1 - 10i$

$\therefore z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$.

3. సాహచర్యము : $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i,\ z_3 = a_3 + b_3 i$ లు మూడు సంకీర్ణ సంఖ్యలయిన,

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

ఇప్పుడు $z_1 + (z_2 + z_3)$

$= (a_1 + b_1 i) + \{(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)\}$

$= (a_1 + b_1 i) + \{(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i\}$

$= \{(a_1 + (a_2 + a_3)\} + \{b_1 + (b_2 + b_3)\}i$

$= \{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\} + (a_3 + b_3 i)$

$= \{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)\} + (a_3 + b_3 i)$

$= (z_1 + z_2) + z_3$.

కావున సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము సాహచర్య ధర్మాన్ని పాటించును.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

ఉదాహరణకు : $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 3i$ మరియు $z_3 = 1 - 2i$ అయిన,

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (2 + 3i) + \{(3i) + (1 - 2i)\}.$$

$$= (2 + 3i) + (1 + i)$$

$$= 3 + 4i \text{ మరియు}$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = \{(2 + 3i) + (3i)\} + (1 - 2i)$$

$$= (2 + 6i) + (1 - 2i)$$

$$= 3 + 4i$$

కాబట్టి $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = 3 + 4i$

కావున దత్త సంకీర్ణ సంఖ్యలు z_1, z_2, z_3 ల సంకలనము సాహచర్యము.

వినిమయధర్మము వలెనే, సంకీర్ణ సంఖ్యల వ్యవకలనము లేదా భేదము సాహచర్య ధర్మాన్ని పాటించదు.

4. సంకలన తత్సమ మూలకం వ్యవస్థితము.

$x + yi$ సంకీర్ణసంఖ్య అయిన, $(x + yi) + (0 + 0i) = x + yi$ అయ్యే లాగ, సంకీర్ణ సంఖ్య $(0 + 0i)$ వుంటుంది/ వ్యవస్థితము.

$z_1 = 2 + 3i$ యొక్క సంకలన తత్సమము $z_1 = x + yi$ అయిన, $z_1 + z_2 = z_1$

i.e., $(2 + 3i) + (x + yi) = 2 + 3i$

లేదా $(2 + x) + (3 + y)i = 2 + 3i$

లేదా $(2 + x) = 2;\ 3 + y = 3$

లేదా $x = 0$ మరియు $y = 0$

i.e., $z_2 = x + yi = 0 + 0i$ అనేది సంకలన తత్సమము.

i.e., $z = a + bi$ సంకీర్ణ సంఖ్య అయిన,

$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$

i.e., $(0 + 0i)$ సంకలన తత్సమము.

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (0 + 0i)$$

$$= (2 - 0) + (3 - 0)i$$

$= 2 + 3i$

$= z_1$

$\therefore\ z_2 = 0 + 0i$, వ్యవకలనం దృష్ట్యా కూడా కుడి తత్సమ మూలకం అగును.

5. సంకలన విలోమము వ్యవస్థితము.

ప్రతీ సంకీర్ణ సంఖ్య $a + bi$ కి అనుగుణంగా, $-a - bi$ సంకీర్ణ సంఖ్య వ్యవస్థితమవుతూ,

$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$ అగును.

ఉదాహరణ : $z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = x + yi,$ అనేది z_1 యొక్క సంకలన విలోమము అయిన, $z_1 + z_2 = 0$

(లేదా) $(4 + 5i) + (x + yi) = 0 + 0i$

(లేదా) $(4 + x) = 0$ మరియు $5 + y = 0$

(లేదా) $x = -4$ మరియు $y = -5$

కావున $z_1 = -4 - 5i$ అనే సంకీర్ణ సంఖ్య $z_1 = 4 + 5i$ యొక్క సంకలన విలోమము అగును.

సాధారణంగా, సంకీర్ణ సంఖ్యలోని వాస్తవ, కల్పిత భాగాల గుర్తులను మార్చడం ద్వారా సంకలన విలోమము వస్తుంది.

$z_1 - z_2 = 0$ ను తీసుకొనిన,

(లేదా) $(4 + 5i) - (x + yi) = 0 + 0i$

(లేదా) $(4 - x) + (5 - y)i = 0 + 0i$

(లేదా) $4 - x = 0,\ 5 - y = 0$

(లేదా) $x = 4, y = 5$

i.e., $z_1 - z_2 = 0$ అనేది $z_2 = 4 + 5i$ ను ఇస్తుంది.

కావున వ్యవకలనము నందు ఇచ్చిన సంఖ్యయే విలోమము అగును.

(i.e.,) $(a + bi) - (a + bi) = 0 + 0i$ (లేదా) 0.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



అభ్యాసం 2.3

1. సూక్ష్మీకరించండి.

   (a) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}i)+(\sqrt{5}-\sqrt{2}i)$ (b) $\frac{2+i}{3}+\frac{2-i}{6}$

   (c) $(1+i)-(1-6i)$ (d) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)-(-2-7i)$

2. $z_1=(5+i)$ మరియు $z_2=(6+2i)$ అయిన

   (a) z_1+z_2 ను కనుక్కోండి.

   (b) z_2+z_1 ను కనుక్కోండి.

   (c) $z_1+z_2=z_2+z_1$ అవుతుందా ?

   (d) z_1-z_2ను కనుక్కోండి.

   (e) z_2-z_1 ను కనుక్కోండి.

   (f) $z_1-z_2=z_2-z_1$ అవుతుందా ?

3. $z_1=(1+i)$, $z_2=(1-i)$, $z_3=(2+3i)$ అయిన,

   (a) $z_1+(z_2+z_3)$ ని కనుక్కోండి.

   (b) $(z_1+z_2)+z_3$ ని కనుక్కోండి.

   (c) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ అవుతుందా ?

   (d) $z_1-(z_2-z_3)$ ని కనుక్కోండి.

   (e) $(z_1-z_2)-z_3$ ని కనుక్కోండి.

   (f) $z_1-(z_2-z_3)=(z_1-z_2)-z_3$ అవుతుందా ?

4. క్రింది వాటికి సంకలన విలోమాన్ని కనుగొనండి.

   (a) $12-7i$ (b) $4-3i$

5. $3-2i$ వచ్చుటకు $-15+4i$ కి ఏమి కలపాలి ?

6. $\{\overline{(3+7i)-(5+2i)}\}=\overline{(3+7i)}-\overline{(5+2i)}$ అని చూపుము.

2.9 సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క ఆయామం

P(a, b) బిందువు, $z = a + bi$ అనే సంకీర్ణ సంఖ్యను సూచిస్తుంది అనుకొనిన, $a \in R$, $b \in R$ మరియు OP అనేది X– అక్షంతో ధన (అపసవ్య) దిశలో 'θ' కోణం చేస్తే,

$OP = r$ అయిన

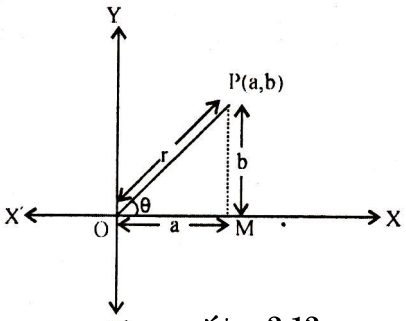
లంబకోణ త్రిభుజం ΔOMP లో

$OM = a$

$MP = b$

$\therefore\ r\cos\theta = a.$

$r\ \sin\theta = b.$



పటం 2.12

అప్పుడు, $z = a + bi$ ని $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ...(i) గా వ్రాయవచ్చు.

ఇచ్చట $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ మరియు $\tan\theta = b/a$

(లేదా) $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ (బిందువు (a, b) ఉండే పాదానికి తగినట్లు $\theta = \tan^{-1} b/a$ ని తీసుకోవాలి).

దీనిని సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క మాప – ఆయామ (లేదా) ధృవ రూపం అంటాం. r మరియు θ లను వరుసగా మాపము మరియు ఆయామము అంటారు.

2.10 రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము

రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల లబ్ధమును, వాస్తవ సంఖ్యలను సంకలనము మరియు లబ్ధము చేయు మాదిరిగానే చేయవచ్చును.

$z_1 = (a + bi)$, $z_2 = (c + di)$ అయిన,

$$z_1 . z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$= a(c + di) + bi(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad (\because\ i^2 = -1)$$

$(a + bi)$, $(c + di)$ లు రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలైనచో, వాటి లబ్ధమును $(a - bd) + (ad + bc)i$ గా నిర్వచిస్తాము.

ఉదాహరణ 2.21. క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము.

(i) $(1 + 2i)(1 - 3i)$ (ii) $(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)$ (iii) $(3 - 2i)^2$

సాధన : (i) $(1 + 2i)(1 - 3i) = \{(1 - (-6)\} + (-3 + 2)i$

$= 7i$

(ii) $(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) = \{3 - (-1)\} + (-\sqrt{3} + \sqrt{3})i$

$= 4 + 0i$

(iii) $(3 - 2i)^2 = (3 - 2i)(3 - 2i)$

$= (9 - 4) + (-6 - 6)i$

$= 5 - 12i$

2.10.1 లబ్ధము యొక్క ధర్మాలు

$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$\therefore |z_1| = r_1 . \sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$

ఇదేవిధంగా, $|z_2| = r_2$.

ఇప్పుడు $z_1 . z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) . r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$= r_1 . r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) i]$

$= r_1 . r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.

$$\left[\begin{array}{l} \therefore \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \end{array}\right]$$

$|z_1 . z_2| = r_1 . r_2 \sqrt{\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)}$

$= r_1 . r_2$.

$\therefore |z_1 . z_2| = r_1 . r_2 = |z_1| . |z_2|$.

$z_1 \cdot z_2$ యొక్క ఆయామము $= \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

i.e., $\theta_1 + \theta_2 =$ (z_1 ఆయామం) + (z_2 ఆయామం).

ఉదాహరణ 2.22 సంకీర్ణ సంఖ్య $(1 + i)(4 - 3i)$ మాపమును కనుక్కోండి.

సాధన : $z = (1 + i)(4 - 3i)$ అయిన

$$|z| = |(1 + i)(4 - 3i)|$$

$$= |1 + i|\,|4 - 3i| \qquad (\because |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

కానీ, $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ మరియు

$$|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$\therefore |z| = \sqrt{2} \cdot 5 = 5.\sqrt{2}.$

2.11 రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల భాగహారము

రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల భాగహారమును, హారము యొక్క సంయుగ్మము చేత లవ, హారములను గుణించడం ద్వారా చేస్తాము. దీనిని క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా వివరిస్తాము.

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ అయిన,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \quad (c+di) \neq 0$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\,(c-di)}{(c+di)\,(c-di)}$$

(లవ, హారములను, హారము యొక్క సంయుగ్మము చేత గుణించగా)

$$= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

కావున $\quad \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i$

ఉదాహరణ 2.23 $3 + i$ ను $4 - 2i$ చే భాగించుము.

సాధన : లవ, హారములను $(4 - 2i)$ యొక్క సంయుగ్మము చే గుణించగా,

$$\frac{(3+i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{10+10i}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

కావున, $\quad \frac{3+i}{4-2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

2.11.1 భాగహారము ధర్మాలు

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad z_2 \neq 0$$

ఉపపత్తి :

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$|z_1| = r_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$$

ఇదేవిధంగా, $|z_2| = r_2$

$$\arg(z_1) = \theta_1 \text{ and } \arg(z_2) = \theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}{(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\cos^2(\theta_1-\theta_2)+\sin^2(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}$$

కావున, $\arg\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \theta_1-\theta_2 = \arg(z_1)-\arg(z_2)$

ఉదాహరణ 2.24

$$\frac{2+i}{3-i}$$

సాధన : $z = \frac{2+i}{3-i}$ అయినచో

$$\therefore |z| = \left|\frac{2+i}{3-i}\right| = \left|\frac{2+i}{3-i}\right| \quad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.12 రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము యొక్క ధర్మాలు

1. **సంవృతము :** $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ లు రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు అయిన వాటి లబ్ధము $z_1 . z_2$ కూడా సంకీర్ణ సంఖ్య అగును.
2. **వినిమయము :** $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ అనేవి రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల అయిన $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$

   ఉదాహరణకు, $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 1 - i$ లను తీసుకొన్న

   ఇప్పుడు $z_1z_2 = (3 + 4i)(1 - i)$

   $= 3(1 - i) + 4i(1 - i)$

   $= 3 - 3i + 4i - 4i^2$

$= 3 - 3i + 4i - 4(-1)$

$= 3 + i + 4 = 7 + i$

మరలా, $z_2 z_1 = (1 - i)(3 + 4i)$

$= (3 + 4i) - i(3 + 4i)$

$= 3 + 4i - 3i - 4i^2$

$= 3 + i + 4 = 7 + i$

$\therefore z_1 z_2 = z_2 z_1 = 7 + i$

3. సాహచర్యము :

$z_1 = (a + bi),\ z_2 = c + di,\ z_3 = (e + fi)$ అయినచో

$z_1 (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) z_3$

దీనిని క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిస్తాము.

$z_1 = (1 + i), z_2 = (2 + i),\ z_3 = (3 + i)$ అయితే

$z_1(z_2 . z_3) = (1 + i)\ \{(2 + i)(3 + i)\}$

$= (1 + i)\ \{(6 - 1) + (3 + 2)i\}$

$= (1 + i)(5 + 5i)$

$= (5 - 5) + (5 + 5)i$

$= 0 + 10i = 10i$

మరియు $(z_1 . z_2) z_3 = \{(1 + i)(2 + i)\}(3 + i)$

$= \{(2 - 1) + (1 + 2)i\}(3 + i)$

$= (1 + 3i)(3 + i)$

$= (3 - 3) + (1 + 9)i$

$= 0 + 10i = 10i$

$\therefore z_1(z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) z_3 = 10i$

గుణకార తత్సమము యొక్క వ్యవస్థిత : శూన్యము కాని ప్రతీ సంకీర్ణ సంఖ్య $z = a + bi$ కి $(a + bi)(1 + 0i) = (1 + 0i)(a + bi) = a + bi$ అగునట్లు ఒకే ఒక్క సంకీర్ణ సంఖ్య వ్యవస్థితమగును.

$zz_1 = z.$

$(a + bi)\,(x + yi) = a + bi$

$(ax - by) + (ay + bx)i = a + bi$

$ax - by = a,\ \ ay + bx = b$

$x = 1,\ \ y = 0$

i.e., $z_1 = x + yi = 1 + 0i$ అనునది గుణకార తత్సమము.

దీనిని క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిస్తాము.

$z = 2 + 3i$ అయిన

$z\,.\,(1 + 0i) = (2 + 3i)\,(1 + 0i)$

$= (2 - 0) + (3 + 0)i$

$= 2 + 3i$

5. గుణకార విలోమము యొక్క వ్యవస్థిత :

గుణకార విలోమము ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య. దీనిని శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్యచే గుణించగా '1' వచ్చును. ప్రతీ శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య $z = a + bi$ కి అనుగుణంగా ఒకే ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య $(x + yi)$ అనేది వాటి లబ్ధము $(1 + 0i)$ అయ్యే విధంగా ఉంటుంది.

i.e., $(a + bi)\,(x + yi) = 1 + 0i$

లేదా $\quad (ax - by) + (bx + ay)i = 1 + 0i$

వాస్తవ, కల్పిత భాగాలను సమానం చేయగా

$ax - by = 1$ మరియు $bx + ay = 0$

అడ్డగుణకారం చేయగా

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{-b} = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} \quad \text{మరియు} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{-\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}$$

కావున శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క గుణకార విలోమము.

$$x+yi = \left[\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^2} - \frac{-\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}i\right] = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

ఉదాహరణ 2.25 : $2-4i$ యొక్క గుణకార విలోమమును కనుగొనుము.

సాధన : $z = 2-4i$ తీసుకొన్న

$\overline{z} = 2+4i$ మరియు $|z|^2 = |2^2 + (-4)^2| = 20$

$\therefore$ కావలసిన గుణకార విలోమము $\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{2+4i}{20} = \frac{1}{10}+\frac{1}{5}i$

పరిశీలన : $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i$ అనేది $2-4i$ యొక్క గుణకార విలోమం అయిన వాటి లబ్ధము $1+0i$ కి సమానము.

$$(2-4i)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{2}{10}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{10}\right)i$$

$= 1+0i$ అనేది సత్యము.

6. సంకలనముపై గుణకారము యొక్క విభాగన్యాయము

$z_1 = a_1+b_1i,\ z_2 = a_2+b_2i,\ z_3 = a_3+b_3i$ అయినచో,

$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

దీనిని క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిస్తాము.

$z_1(z_2+z_3) = (3-2i)\ \{(-1+4i)+(-3-i)\}$ అయిన,

$= (3-2i)\ (-1+4i-3-i)$

$= (3-2i)\ (-4+3i)$

$= (-12+6)+(9+8)i$

$= -6+17i$

మరియు $z_1z_2 = (3 - 2i)\ (-1 + 4i)$

$= (-3 + 8) + (12 + 2)i$

$= 5 + 14i$

మరలా $z_1z_3 = (3 - 2i)\ (-3 - i)$

$= (-9 - 2) + (-3 + 6)i$

$= -11 + 3i$

ఇప్పుడు $z_1z_2 + z_1z_3 = (5 + 14i) + (-11 + 3i)$

$= -6 + 17i$

$\therefore\ z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

అభ్యాసం 2.4

1. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

   (a) $(1+2i)(\sqrt{2}-i)$

   (b) $(\sqrt{2}+i)^2$

   (c) $(3 + i)\ (1 - i)(-1 + i)$

   (d) $(2 + 3i) \div (1 - 2i)$

   (e) $(1 + 2i) \div (1 + i)$

   (e) $(1 + 0i) \div (3 + 7i)$

2. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క గుణకార విలోమమును కనుక్కోండి.

   (a) $3 - 4i$ (b) $\sqrt{3}+7i$ (c) $\dfrac{3+5i}{2-3i}$

3. $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 3 - 2i$ మరియు $z_3 = i + 5$ అయినచో $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ ని సరిచూడుము.

4. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 + i$ మరియు $z_3 = 2 - i$ అయినచో $(z_1 . z_2)z_3 = z_1(z_2 . z_3)$ ని సరిచూడుము.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



డిమోయర్ సిద్ధాంతము

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యపఠనము వలన మీరు కింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- ఒకటి (unity) యొక్క n మూలాలు కనుక్కోండం.
- అకరణీయ ఘాతానికి డిమోయర్ సిద్ధాంతం రాబట్టడం
- ధ్రువరూపంలో ఉన్నటువంటి ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్యకు మూలాలు కనుగొనడం
- సంకీర్ణసంఖ్యల మూలాలను మరియు ఏదైనా ఘాతాన్ని సులభంగా కనుగొనగలరు.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంకీర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలు
- రేఖీయ, వర్గ సమీకరణాల సాధనలు
- ఆర్గాండ్ తలంలో సంకీర్ణసంఖ్యలను గుర్తించుట.

పరిచయం

క్రిందటి అధ్యాయంలో $\text{cis}\theta_1 \cdot \text{cis}\theta_2 = \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ అని నేర్చుకున్నాం. కాబట్టి $(\text{cis}\theta)^2 = \text{cis}\ 2\theta$. ఈ అధ్యాయంలో ఏ పూర్ణాంకానికి అయినా ఈ ఫలితం సత్యం అని చూపిస్తాం. ఈ విస్తృత ఫలితాన్ని డిమోయర్ సిద్ధాంతం అంటాం. దీనిని ఉపయోగించి ఒకటి(1) యొక్క n వ మూలాలు రాబడతాం. అంతేకాక అకరణీయ ఘాతానికి కూడా డిమోయర్ సిద్ధాంతాన్ని రాబడతాం.

పూర్ణాంక ఘాతానికి, అకరణీయ ఘాతానికి డిమోయర్ సిద్ధాంతం

మొదట డిమోయర్ సిద్ధాంతం ఋజువు చేస్తాం. ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్యలకు nవ మూలాలు కనుక్కొంటాం. ప్రత్యేకించి ఒకటి (unity) యొక్క nవ మూలాలు కనుక్కొంటాం.

పూర్ణాంక ఘాతానికి డిమోయర్ సిద్ధాంతం

n పూర్ణాంకం, θ వాస్తవ సంఖ్య అయితే

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

నిరూపణ: θ ని దత్త వాస్తవ సంఖ్య అనుకుందాం. నిరూపణను మూడు సందర్భాలుగా విభజిద్దాం.

సందర్భం (i) n ధన పూర్ణాంకం అనుకొందాం. ఈ సందర్భంలో సిద్ధాంతాన్ని గణితానుగమన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి నిరూపిద్దాం.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ అనే ప్రవచనాన్ని $p(n)$ అనుకొనుము.

$n = 1$ అయిన LHS $= \cos\theta + i\sin\theta = \cos 1\theta + i\sin 1\theta =$ RHS.

$\therefore$ $p(1)$ నిజము.

$k \in N$ కు $p(k)$ నిజమని అనుకొందాం.

అంటే $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

పై సమీకరణాన్ని ఇరువైపులా $\cos\theta + i\sin\theta$ తో గుణిస్తే

$(\cos\theta + i\sin\theta)^k (\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos k\theta + i\sin k\theta) . (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = \cos k\theta.\cos\theta + i\sin k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i^2\sin k\theta\sin\theta$$

$$= (\cos k\theta.\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)$$

$$= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)$$

$$= \cos(k + 1)\theta + i\sin(k + 1)\theta$$

$$= \text{RHS}.$$

$\therefore$ $p(k + 1)$ నిజము.

కాబట్టి గణితానుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి ప్రతీ ధనపూర్ణాంకం n కు $P(n)$ నిజము.

అంటే $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \forall \quad n \in Z^+$.

సందర్భం(ii) $n = 0$ అనుకొందాం. LHS $= (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$

$= \cos 0\theta + i \sin 0\theta$

$=$ RHS.

కాబట్టి ఈ సందర్భంలో కూడా $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ అయింది.

Case(iii) Let n be a negative integer and $n = -m$ where $m \in Z^+$.

$$\therefore \text{LHS} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \quad \text{form case (i)}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + i^2\sin^2 m\theta}$$

$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}$$

$$= \cos(-m)\theta + i\sin(-m)\theta$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta = \text{RHS}.$$

ఉదాహరణ 2.1: సూక్ష్మీకరించండి: $(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)^6 \cdot (\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)^5$

సాధన : GE $= (\cos 12\alpha + i\sin 12\alpha)\ (\cos 15\alpha - i\sin 15\alpha)$

$= (\text{cis } 12\alpha)\ [\text{cis } (-15\alpha)]$

$= \text{cis}(12\alpha - 15\alpha) = \text{cis}(-3\alpha) = \cos 3\alpha - i\sin 3\alpha.$

ఉదాహరణ 2.2: $x = \text{cis}\ \alpha$ మరియు $y = \text{cis}\ \beta$ అయితే $xy + \frac{1}{xy}$ ని కనుక్కోండి.

సాధన : $xy = \text{cis}\alpha \cdot \text{cis}\beta = \text{cis}(\alpha + \beta)$, అయితే $\frac{1}{xy} = cis\left[-(\alpha + \beta)\right]$

$$\Rightarrow xy + \frac{1}{xy} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) - i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= 2\cos(\alpha + \beta).$$

ఉదాహరణ 2.3 : n పూర్ణాంకం అయితే

$$(1+i)^n+(1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$ అని చూపండి.

సాధన : $1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n=2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \quad ...(i)$$

$$(1-i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n=2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \quad ...(ii)$$

సం॥ (1), (2) లను కలుపగా

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{n/2}\left(2\cos\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

అభ్యాసం 2.5

I 1. కింది విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $(1+i\sqrt{3})^3$ (ii) $(1-i)^8$ (iii) $(1+i)^{16}$

(iv) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5$

2. n పూర్ణాంకం అయితే

$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$

$=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ అని చూపండి.

II.1. $x^2-2x+4=0$ సమీకరణం మూలాలు α, β లు అయితే $n\in N$ కు

$\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.

2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ అయితే

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2} = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ అని చూపండి.

3. n పూర్ణాంకం అయితే $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ అని చూపండి.

అకరణీయ ఘాతానికి డిమోయర్ సిద్ధాంతం

సిద్ధాంతము : $\frac{p}{q}(q>1)$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే, $\cos\left(\frac{p\theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p\theta}{q}\right)$ అనేది $(\cos\theta + i\sin\theta)^p$. యొక్క q మూలాలలో ఒకటి.

నిరూపణ : $n = \frac{p}{q}$ అనుకోండి $\Rightarrow nq = p$.

q ధన పూర్ణాంకం కాబట్టి $(\cos n\theta + i\sin n\theta)^q = \cos nq\theta + i\sin nq\theta$

$\therefore \quad (\cos n\theta + i\sin n\theta)^q = \cos p\theta + i\sin p\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^p$

$\therefore$ $(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ అనేది $(\cos\theta + i\sin\theta)^p$ యొక్క q మూలాలలో ఒకటి.

$\Rightarrow \left(\cos\frac{p}{q}\theta + i\sin\frac{p}{q}\theta\right)$ అనేది $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ యొక్క q మూలాలలో ఒకటి.

గమనిక: $\cos\left(\frac{p\theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{p\theta}{q}\right)$ అనేది $(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q}$ యొక్క విలువలో ఒకటి అని కూడా అంటారు.

ఒకటి (Unity)కి nవ మూలాలు

$$\sqrt[n]{1} = (\cos 0 + i\sin 0)^{1/n} = \{\cos(2k\pi + 0) + i\sin(2k\pi + 0)\}^{1/n}$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$ ఇక్కడ $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

ఒకటి (1)కి nవ మూలాలు, ఆయామములో $\frac{2\pi}{n}$లో భేదిస్తాయి. కాని వాటి మాపము ఒక్కటే (సమానం) ప్రతిమూలము యొక్క మాపము ఒకటి రేఖాచిత్రం వల్ల :

$A_1, A_2, ... A_n$ అనే బిందువులు ఒకటి (1) యొక్క n-వ మూలాలను సూచిస్తాయి. ఇక్కడ $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n = 1$ మరియు $\angle A_1OX = \frac{2\pi}{n}$, $\angle A_2OX = \frac{4\pi}{n}$, ... $\angle A_nOX = \frac{2k\pi}{n}$.

మూలబిందువు కేంద్రంగానూ, వ్యాసార్ధం ఒకటిగానూ ఉండే వృత్తం మీద పై బిందువులు ఉంటాయి. ఈ బిందువులు వృత్తాన్ని n సమాన చాపాలలోకి విభజిస్తాయి.

$cis\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \alpha$ అనుకోండి.

$$\therefore \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \alpha^k$$

$\therefore$ $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2 ... \alpha^{n-1}$ అనేవి ఒకటి యొక్క nవ మూలాలు.

$$\therefore 1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = 0 \qquad (\because \alpha^n = 1)$$

$\therefore$ ఒకటి యొక్క nవ మూలాల మొత్తం సున్నా.

ఒకటికి ఘనమూలాలు

ఒకటి యొక్క ఘనమూలాలు $x^3 = 1$ అనే సమీకరణాన్ని సాధించడం ద్వారా వస్తాయి.

$x^3 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos(2k\pi + 0) + i \sin(2k\pi + 0)$ సం॥ యొక్క మూలాలు x_k ఇక్కడ

$$x_k = \cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$\therefore$ ఒకటికి ఘనమూలాలు

$$\cos 0 + i \sin 0; \quad \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}, \quad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ $1, \omega, \omega^2$ where $w = cis\frac{2\pi}{3}$ or $cis\frac{4\pi}{3}$

$$[\because w = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \Rightarrow w^2 = \cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}$$

$$\Rightarrow w^2 = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow w^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}]$$

గమనిక: $1 + w + w^2 = 1 + \cos 120^0 + i \sin 120^0 + \cos 240^0 + i \sin 240^0$

$$= 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 1 = 0$$

మరియు $w^3 = w \cdot w^2 = 1.$

ఉదాహరణ 2.4 : $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

సాధన : $1 + i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow r\cos\theta = 1,\ r\sin\theta = \sqrt{3}$

అప్పుడు $r = \sqrt{3+1} = 2$ మరియు $\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \left(1+i\sqrt{3}\right)^{1/5} = 2^{1/5}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + (\pi/3)}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \pi/3}{5}\right)\right],$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$= 2^{1/5}\text{cis}\left(\frac{6k+1}{15}\right)\pi,\ k = 0,1,2,3,4$$

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{1/5}$ యొక్క విలువలు

$$\therefore 2^{1/5}cis\left(\frac{\pi}{15}\right),\ 2^{1/5}cis\left(\frac{7\pi}{15}\right),\ 2^{1/5}cis\left(\frac{13\pi}{15}\right),\ 2^{1/5}cis\left(\frac{19\pi}{15}\right), 2^{1/5}cis\left(\frac{25\pi}{15}\right).$$

ఉదాహరణ 2.5 : $x^4 + 1 = 0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చినది $x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -1 \Rightarrow x = (-1)^{1/4}$

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = \cos(2k\pi + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi)$ అని తెలుసు.

$$\Rightarrow (-1)^{1/4} = \left[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi\right]^{1/4}$$

$$= \text{c}is(2k+1)\frac{\pi}{4},\ k = 0,1,2,3$$

$\therefore x$ యొక్క నాలుగు విలువలు $cis\left(\frac{\pi}{4}\right),\ cis\left(\frac{3\pi}{4}\right),\ cis\left(\frac{5\pi}{4}\right),\ cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \text{ మరియు } \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$



ఉదాహరణ 2.6 : $1, w, w^2$ లు ఒకటి యొక్క ఘనమూలాలయితే క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $1 + w^2 + w^7 = 0$

(b) $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$

(c) $(1 + w)^3 - (1 + w^2)^3 = 0$

(d) $(1 - w + w^2) = -8$ and $(1 + w - w^2)^3 = -8$

సాధన: (a) $1 + w^2 + w^7 = 0$

$$\text{LHS} = 1 + w^2 + (w^3)^2 . w$$
$$= 1 + w^2 + w \qquad (\because w^3 = 1)$$
$$= 0 \qquad (\because 1 + w + w^2 = 0)$$
$$= \text{RHS}$$

$\therefore$ LHS = RHS.

(b) $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$

$$\text{LHS} = (1 - w + w^2)(1 + w - w^2)$$
$$= (1 + w^2 - w)(1 + w - w^2)$$
$$= (-w - w)(-w^2 - w^2) \qquad (\because 1 + w^2 = -w,\ 1 + w = -w^2)$$
$$= (-2w)(-2w^2)$$
$$= 4w^3 \qquad (\because w^3 = 1)$$
$$= 4$$
$$= \text{RHS}$$

$\therefore$ LHS = RHS

(c) $(1 + w)^3 - (1 + w^2)^3 = 0$

$$\text{LHS} = (1 + w)^3 - (1 + w^2)^3$$
$$= (-w^2)^3 - (-w)^3 \qquad (\because 1 + w = -w^2;\ 1 + w^2 = -w)$$
$$= -w^6 + w^3$$
$$= -(w^3)^2 + w^3$$
$$= -(1)^2 + 1$$

$= -1 + 1$

$= 0$

$= \text{RHS}$

$\therefore$ LHS = RHS.

(d) $(1 - w + w^2) = -8$

$\text{LHS} = (1 - w + w^2)^3$

$= (1 + w^2 - w)^3$

$= (-w - w)^3$

$= (-2w)^3$

$= -8w^3 \qquad (\because w^3 = 1)$

$= -8.$

(ii) $\text{LHS} = (1 + w - w^2)^3$

$= (-w^2 - w^2)^3$

$= (-2w^2)^3$

$= -8w^6$

$= -8(w^3)^2$

$= -8.$

$= \text{RHS}$

$\therefore$ LHS = RHS.

ఉదాహరణ 2.7 : $\left[\frac{1+\sin\pi/8+i\cos\pi/8}{1+\sin\pi/8-i\cos\pi/8}\right]^{8/3}$ యొక్క ఒక విలువ -1 అని చూపండి.

సాధన : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{3\pi}{8}$ అని తెలుసు, మరియు

and $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{3\pi}{8}$

$\therefore 1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}=1+\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\frac{3\pi}{8}$

$$= 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) + 2i\sin\frac{3\pi}{16}\,.\,\cos\frac{3\pi}{16}$$

$$= 2\cos\frac{3\pi}{16}\left[\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right]$$

అదేవిధంగా, $1+\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{3\pi}{16}\left[\cos\frac{3\pi}{16} - i\sin\frac{3\pi}{16}\right]$

$$\therefore \quad \text{LHS} = \left[\frac{2\cos\frac{3\pi}{16}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)}{2\cos\frac{3\pi}{16}\left(\cos\frac{3\pi}{16} - i\sin\frac{3\pi}{16}\right)}\right]^{8/3}$$

$$= \left[\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{16} - i\sin\frac{3\pi}{16}\right)^{-1}\right]^{8/3}$$

$$= \left[\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)\right]^{8/3}$$

$$= \left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)^{\frac{16}{3}}$$

దీని విలువలలో ఒకటి $\cos\pi + i\sin\pi = -1 = \text{RHS}$.

ఉదాహరణ 2.8: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{100} = 2^{99}(a+ib)$, అయితే, $(a, b) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$ అని చూపండి.

సాధన : $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$

అప్పుడు $\left(\sqrt{3}+i\right)^{100} = 2^{100}(\cos 30^0 + i\sin 30^0)^{100}$

$$= 2^{100}(\cos 3000^0 + i\sin 3000)$$

$$= 2^{100}[\cos 120^0 + i\sin 120^0]$$

$$= 2^{100}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

దత్తాంశం ప్రకారం $\left(\sqrt{3}+i\right)^{100}=2^{99}(a+ib) \Rightarrow 2^{100}\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=2^{99}(a+ib)$

$\Rightarrow 2^{99}\left(-1+i\sqrt{3}\right)=2^{99}(a+ib) \Rightarrow a=-1, b=\sqrt{3}$

$\therefore \quad (a, b) = \left(-1, \sqrt{3}\right).$

అభ్యాసం 2.6

1. సూక్ష్మీకరించండి: $\frac{(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^3(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^8(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^9}$

2. సూక్ష్మీకరించండి: $\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{12}(\cos 2\beta-i\sin 2\beta)^{10}}{(\sin\alpha+i\cos\alpha)^5}$

3. కింది వాటి అన్ని విలువలు కనుక్కోండి.

   (i) $(1-i\sqrt{3})^{1/3}$ (ii) $(-i)^{1/6}$ (iii) $(1+i)^{2/3}$

   (iv) $(-16)^{1/4}$ (v) $(-32)^{1/5}$

4. A, B, C లు త్రిభుజంలోని, x = cis A, y = cis B, z = cis C, అయితే xyz విలువను కనుక్కోండి.

5. $1, w, w^2$ లు ఒకటి యొక్క ఘనమూలాలు, అయితే క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

   (i) $\frac{1}{2+w}+\frac{1}{1+2w}=\frac{1}{1+w}$

   (ii) $(2-w)(2-w^2)(2-w^{10})(2-w^{11}) = 49$

   (iii) $(x+y+z)(x+yw+zw^2)(x+yw^2+zw) = x^3+y^3+z^3-3xyz.$

II.

1. క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

   (i) $x^4-1=0$ (ii) $x^5+1=0$

   (iii) $x^9-x^5+x^4-1=0$

2. $x^{12} - 1 = 0$, $x^4 + x^2 + 1 = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలాలు కనుక్కోండి.

3. ఒకటి (unity) యొక్క ఘనమూలాలు $1, w, w^2$ అయితే $(x-1)^3 + 8 = 0$ మూలాలను కనుక్కోండి.

4. $(1+i)^{4/5}$ యొక్క అన్ని విలువల లబ్దాన్ని కనుక్కోండి.

5. $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$ మరియు $y + \frac{1}{y} = 2\cos\beta$, అయితే

   $xy + \frac{1}{xy} = 2\cos(\alpha+\beta)$ అని నిరూపించండి.

6. $x^2 - 2x + 4 = 0$ సమీకరణం మూలాలు α, β లు అయితే $n \in \mathrm{N}$ కు

   $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.

కీలకపదాలు

- సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క ప్రామాణిక రూపము $z = a + bi,\ a, b \in \mathrm{R}$ మరియు $i = \sqrt{-1}$.
- i యొక్క ఏ గరిష్ఠ ఘాతాంకాలనైనా, $i, -1, -i, 1$ అను నాల్గు విలువలతో వ్యక్తపరచవచ్చు.
- $z = a + bi$ యొక్క సంయుగ్మము $a - bi$. దీనిని $\bar{z}$ తో సూచిస్తారు.
- $z = a + bi$ యొక్క మాపము $\sqrt{a^2+b^2}$ i.e., $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

  (a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (b) $|z| = |\bar{z}|$

  (c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- $z = a + bi$ యొక్క ధృవరూపము $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

  ఇచ్చట $r = \sqrt{a^2+b^2}$ అనేది మాపము.

  $\theta = \tan^{-1}(b/a)$ అనేది ఆయామము
- $z = a + bi$ యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

(i) $\cos\theta + i\sin\theta$ కు బదులుగా $\text{cis}\,\theta$ రాస్తాం.

కాబట్టి డిమోయర్ సిద్ధాంతాన్ని $(\text{cis}\,\theta)^n = \text{cis}\,(n\theta)$గా రాయవచ్చు.

(ii) n ఒక పూర్ణాంకం అయితే $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n)\theta + i\sin(-n)\theta = \cos n\theta - i\sin n\theta$.

(iii) $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = \cos^2\theta - i^2\sin^2\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\therefore \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta - i\sin\theta},\quad \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

(iv) $$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \left[\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right]^n$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta\ ,$$

n పూర్ణాంకం అయినప్పుడు.

(v) $cis\theta\,.\,cis\,\phi = cis(\theta + \phi)\ ;\quad \theta,\ \phi \in R$

(vi) సంకీర్ణ సంఖ్యకు n -వ మూలం; n ధనపూర్ణాంకం, $z_0 \neq 0$ సంకీర్ణ సంఖ్య అనుకొందాం. $z^n = z_0$ ను తృప్తిపరిచే ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్య z ని z_0 యొక్క nవ మూలం అంటాం. దీనిని $z_0^{1/n}$ లేదా $\sqrt[n]{z_0}$ లతో సూచిస్తాం.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http:// www.wikipedia.org
- http:// mathworld.wolfram.com.

సాధనా అభ్యాసం

1. క్రింది వాటికి వాస్తవ, కల్పిత భాగములను కనుక్కోండి.

(a) $2 + 7i$ (b) $3 + 0i$ (c) $-\frac{1}{2}$

(d) $5i$ (e) $\frac{1}{2+3i}$

2. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

(a) $\sqrt{-3}.\sqrt{-27}$ (b) $\sqrt{-3}.\sqrt{-4}\ .\ \sqrt{-72}$

(c) $3i^{15} - 5i^8 + 1$

3. వాస్తవ, కల్పిత భాగాలను క్రమయుగ్మాలుగా ఇచ్చిన క్రింది వాటిని సంకీర్ణ సంఖ్యలుగా వ్రాయుము

(a) $z\,(3, -5)$ (b) $z\,(0, -4)$ (c) $z\,(8, \pi)$

4. క్రింది వాటి సంయుగ్మాలను కనుక్కోండి.

(a) $1 - 2i$ (b) $-1 - 2i$ (c) $6 - \sqrt{2}i$ (d) $4i$

(e) $-4i$

5. క్రింది వాటి మాపములను రాబట్టుము.

(a) $1 - i$ (b) $3 + \pi i$ (c) $-\frac{3}{2}i$ (d) $-2 + \sqrt{3}i$

6. $7i^{17} - 6i^6 + 3i^3 - 2i^2 + 1$ ను $a + bi$ రూపంలో వ్యక్తపరుచుము.

7. క్రింది వాటికి x, y విలువలను కనుక్కోండి.

(a) $(x - yi) + 7 - 2i = 9 - i$ (b) $2x + 3yi = 4 - 9i$

(c) $x - 3yi = 7 + 9i$

8. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

(a) $(3 + i) - (1 - i) + (-1 + i)$

(b) $\left(\frac{1}{7} + i\right) - \left(\frac{2}{7} - i\right) + \left(\frac{3}{7} - 2i\right)$

9. క్రింది వానికి సంకలన, గుణన విలోమాలను వ్రాయండి.

(a) $3 - 7i$ (b) $11 - 2\text{i}$ (c) $\sqrt{3} + 2i$

(d) $1 - \sqrt{2}i$ (e) $\frac{1 + 5i}{1 - i}$

10. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపములను కనుక్కోండి.

(a) $\frac{1 + i}{3 - i}$ (b) $\frac{5 + 2i}{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}$ (c) $(3 + 2i)\,(1 - i)$

(d) $(1 - 3i)\,(-2i^3 + i^2 + 3)$

11. క్రింద ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$ ను సరిచూడుము.

(a) $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 - 5i$

(b) $z_1 = 3 - \sqrt{7}i,\ z_2 = \sqrt{3} - i$

12. క్రింద ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ని సరిచూడుము.

(a) $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 2 + 5i$

(b) $z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 3 - 4i$

13. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ అయితే

(i) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$

(iii) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) = 0$ అని చూపండి.

2. $1, w, w^2$ లు ఒకటి యొక్క ఘనమూలాలయితే, క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $(1 - w + w^2)^6 + (1 - w^2 + w)^6 = 128$

$= (1 - w + w^2)^7 + (1 + w - w^2)^7$

(ii) $(a + b)(aw + bw^2)(aw^2 + bw) = a^3 + b^3$

(iii) $x^2 + 4x + 7 = 0$ అయితే $x = w - w^2 - 2$.

3. $x^2 + x + 1 = 0$ సమీకరణ మూలాలు α, β అయితే $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^{-1}\beta^{-1} = 0$ అని చూపండి.

4. $z^2 + z + 1 = 0$, ఇక్కడ z సంకీర్ణ సంఖ్య అయితే,

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)^2 + \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right)^2 + \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right)^2 + \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right)^2 = 12$$ అని చూపండి.

5. n పూర్ణాంకం, $z = \cos\theta + i\sin\theta$, అయితే $\dfrac{z^{2n}-1}{z^{2n}+1} = i\tan\theta$, అని చూపండి.

6. $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$, $c = \cos\gamma + i\sin\gamma$ మరియు $a + b + c = abc$, అయితే
$\cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha) + \cos(\alpha-\beta) + 1 = 0$ అని చూపండి.

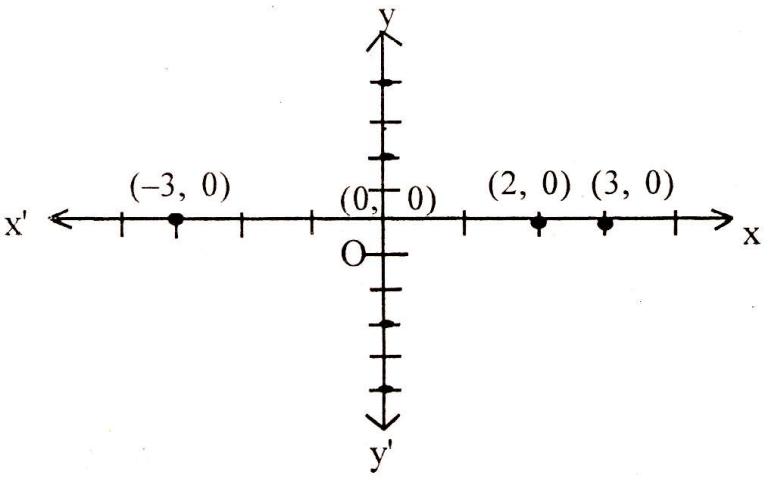
జవాబులు

అభ్యాసం 2.1

1. (a) $3\sqrt{3}i$ (b) $-3i$ (c) $\sqrt{13}i$
2. (a) $5 + 0i$ (b) $0 - 3i$ (c) $0 + 0i$
3. $12 - 4i$

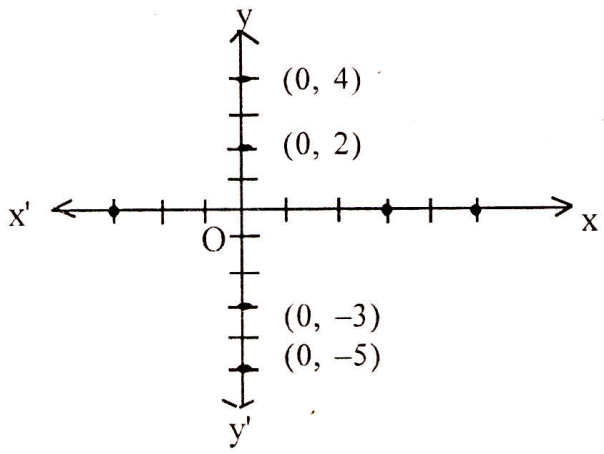
అభ్యాసం 2.2

1. (a) $2i$ (b) $-5 + 3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $3 + 4i$
2. (a)

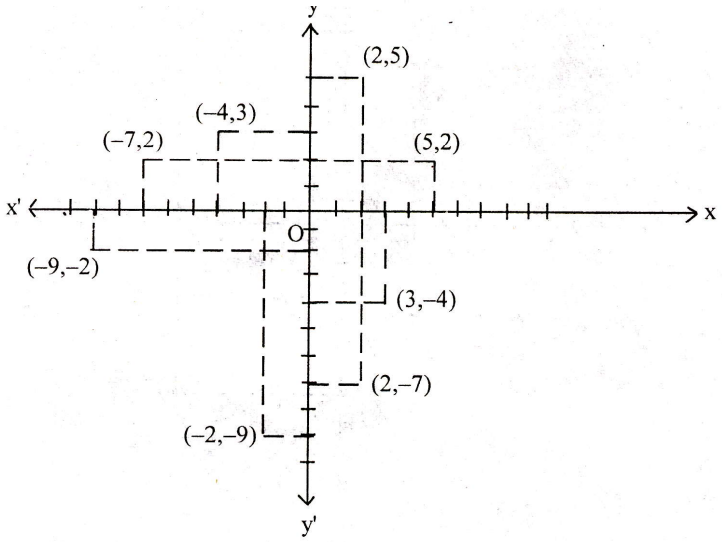


మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

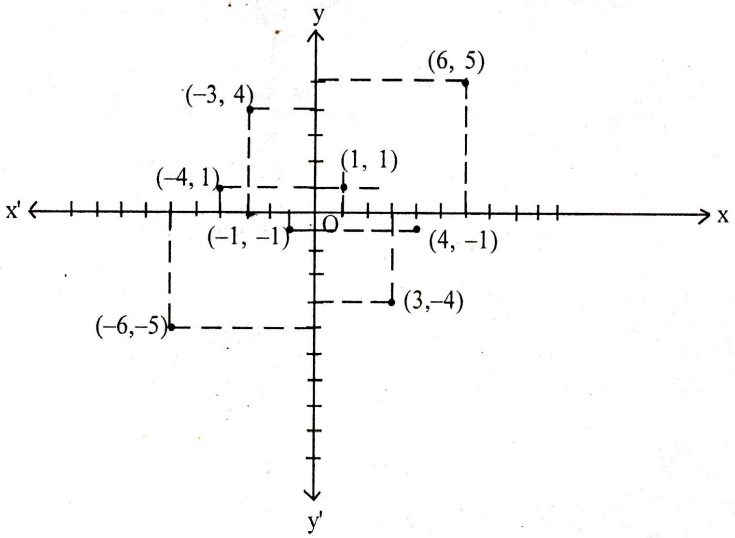
(b)



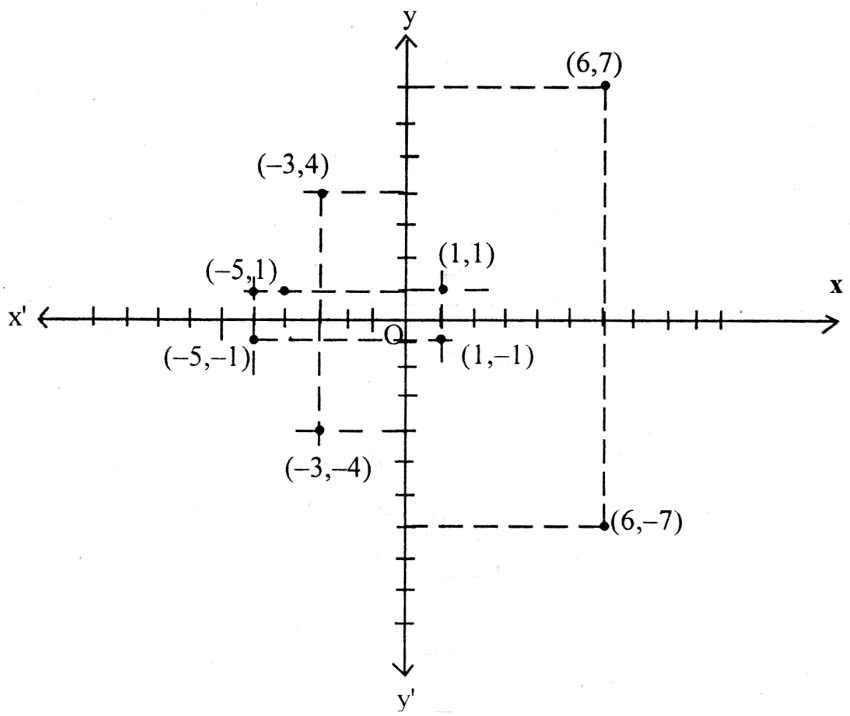
(c)



(d)



(e)



3. (a) (i) 3 (ii) $\sqrt{10}$ (iii) $\sqrt{13}$ (iv) $\sqrt{21}$

అభ్యాసం 2.3

1. (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)i$ (b) $\frac{1}{6}(6+i)$

   (c) $7i$ (d) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+(7-\sqrt{3})$

2. (a) $11 + 3i$ (b) $11 + 3i$ (c) అవును

   (d) $-1 - i$ (e) $1 + i$ (f) కాదు

3. (a) $4 + 3i$ (b) $4 + 3i$ (c) అవును

   (d) $2 + 5i$ (e) $-2 - i$ (f) కాదు

4. (a) $-12 + 7i$ (b) $-4 + 3i$

5. $18 - 6i$

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



అభ్యాసం 2.4

1. (a) $\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(2\sqrt{2}-1\right)i$ (b) $1+2\sqrt{2}i$

   (c) $-2 + 6i$ (d) $\frac{1}{5}(-4+7i)$

   (e) $\frac{1}{2}(3+i)$ (f) $\frac{1}{58}(3-7i)$

2. (a) $\frac{1}{25}(3+4i)$ (d) $\frac{1}{52}(\sqrt{3}-7i)$

   (c) $\frac{1}{34}(-9-19i)$

అభ్యాసం 2.5

I. 1. (i) -8 (ii) 16 (iii) 256 (iv) i

అభ్యాసం 2.6

I. 1. $\cos(14\theta) + i \sin(14\theta)$

2. $\sin(17\alpha - 20\beta) - i\cos(17\alpha - 20\beta)$

3. (i) $2^{1/3} cis(6k-1)\frac{\pi}{9},\ k = 0,1,2$

   (ii) $cis(4k-1)\frac{\pi}{12},\ k = 0,1,2,3,4,5$

   (iii) $2^{1/3}\, cis(4k+1)\frac{\pi}{6},\ k = 0,1,2$

   (iv) $2\ cis(2k+1)\frac{\pi}{4},\ k = 0,1,2,3$

   (v) $2\ cis(2k+1)\frac{\pi}{5},\ k = 0,1,2,3,4$

4. -1

II.

1. (i) $\pm 1, \pm i$

   (ii) $cis\left(\frac{2k+1}{5}\right)\pi,\ k = 0,1,2,3,4$

   (iii) $\pm 1,\ \pm i,\ cis\left(\pm\frac{\pi}{5}\right),\ cis\left(\pm\frac{3\pi}{5}\right)$

2. $cis\frac{\pi}{3},\ cis\ \frac{2\pi}{3},\ cis\frac{4\pi}{3},\ cis\frac{5\pi}{3}$

3. $-1,\ 1 - 2w,\ 1\ - 2w^2$

4. -4

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) 2, 7 (b) 3, 0

   (c) $-\frac{1}{2}, 0$ (d) 0, 5

   (e) $\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}$

2. (a) -9 (b) $-12\sqrt{6}i$

   (c) $-\ 4\ -\ 3i$

3. (a) $3\ -\ 5i$ (b) $0\ -\ 4i$

   (c) $8\ +\ \pi i$

4. (a) $1\ +\ 2i$ (b) $-1\ +\ 2i$

   (c) $6+\sqrt{2}i$ (d) $-4i$

   (e) $4i$

5. (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{9+\pi^2}$

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{7}$

6. $9 + 4i$

7. (a) $x = 2,\ y = -1$ (b) $x = 2,\ y = -3$

(c) $x = 7,\ y = -3$

8. (a) $1 + 3i$ (b) $\frac{2}{7}+0i$

9. (a) $-3+7i, \frac{1}{58}(3+7i)$

(b) $-11+2i, \frac{1}{125}(-11+2i)$

(c) $-\sqrt{3}-2i, \frac{1}{7}(\sqrt{3}-2i)$

(d) $-1+\sqrt{2}i, \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)$

(e) $2-3i, \frac{1}{13}(2+3i)$

10. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{5}\sqrt{145}$

(c) $\sqrt{26}$ (d) $4\sqrt{5}$

అధ్యాయం

3

వర్గ సమీకరణములు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యపఠనము వలన మీరు కింది విషయాలను అర్థము చేసుకోగలరు.

- వాస్తవ గుణకాలు కలిగిన వర్గ సమీకరణాలను, కారణాంక విభజన పద్ధతి మరియు సూత్రాల ద్వారా సాధించడం.
- మూలాలు మరియు గుణకాల మధ్య సంబంధము కనుగొనడం.
- మూలాలు ఇచ్చినప్పుడు వర్గ సమీకరణాన్ని రూపొందించడం

పూర్వాకాంక్షితాలు

- వాస్తవ సంఖ్యలు
- వాస్తవ సంఖ్యలు గుణకాలుగా కలిగిన వర్గసమీకరణాలు.

పరిచయం

a, b, c లు వాస్తవ (లేదా) సంకీర్ణసంఖ్యలు అయి, $a \neq 0$ అయినప్పుడు $ax^2 + bx + c = 0$, రూపంలో ఉన్న సమీకరణాన్ని చలరాశి x లో వర్గ సమీకరణం అంటాం. a, b, c లను ఈ సమీకరణ గుణకాలు అంటాం.

$ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణాన్ని x లో వర్గసమీకరణ ప్రామాణిక రూపం అంటాం.

ఉదా: $5x^2 - 8x = 2x + 4$ అనే సమీకరణాన్ని $5x^2 - 10x - 4 = 0$ రూపంలో వ్యక్తపరచగలము.

ఈ పాఠము నందు వాస్తవ మరియు సంకీర్ణ గుణకాలతో కూడిన వర్గ సమీకరణాలను ఎలా సాధించవలెనో చర్చిస్తాం. వర్గ సమీకరణము, మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధమును రాబడతాం. ఇంకనూ వర్గసమాసాల గుర్తు, గుర్తుల్లో మార్పు, గరిష్ట కనిష్ట విలువలు కనుగొంటాం.

3.1 వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు

ఏదైనా విలువను, సమీకరణములోని చలరాశికి బదులు ప్రతిక్షేపించినప్పుడు అది, సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిస్తే, ఆ విలువను సమీకరణమునకు మూలము లేదా సాధన అంటారు.

α ను వర్గ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. మూలాలలో ఒక మూలము అనుకొంటే,

ఇప్పుడు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ .... (i)

మరొక విధముగా $(x - \alpha)$ వర్గ సమీకరణము (i) కి, ఒక కారణాంకము.

స్పష్ఠముగా $x^2 + x - 8 = 0$ .... (ii) వర్గ సమీకరణాన్ని తీసుకొందాం.

$x = 2$ ను (ii) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\text{L.H.S.} = 2^2 + 2 - 6 = 0$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S}$$

మరలా, $x = -3$ ను (ii) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\text{L.H.S.} = (-3)^2 - 3 - 6 = 0$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S}$$

ఇంకనూ $x = -1$ ను (ii) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\text{L.H.S.} = (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S}$$

$\therefore$ $x = 2$ మరియు $x = -3$ లు మాత్రమే వర్గ సమీకరణం (ii) ను తృప్తిపరుస్తున్నాయి. మరి ఏ ఇతర విలువలు (ii) ని తృప్తి పరచవు.

$\therefore$ $x = 2$ మరియు $x = -3$ లు మాత్రమే వర్గ సమీకరణం (ii) కు మూలాలు అగును.

గమనిక : α, β లు వర్గ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$; ... (A)

$a \neq 0$ యొక్క మూలాలు అయిన,

$(x - \alpha)$ మరియు $(x - \beta)$ లు (A) కి కారణాంకాలు అగును.

కావున ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణాన్ని $(x - \alpha)\ (x - \beta) = 0$ గా వ్రాయవచ్చు.

3.2 కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుట

వర్గ బహుపది $P(x) = ax^2 + bx + c$. $a \neq 0$ లోని మధ్య పదాన్ని విడగొట్టి సామాన్య కారణాంకాన్ని తీసుకొని ఏ విధంగా కారణాంక విభజన చేశామో గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఆ విధంగానే, కారణాంక విభజన ద్వారా వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించవచ్చు.

$x - \frac{p}{q}, x - \frac{r}{s}$ లు $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ వర్గ సమీకరణముకు కారణాంకాలు అయిన,

$$\left(x - \frac{p}{q}\right)\ \left(x - \frac{r}{s}\right) = 0.$$

$\therefore\ x = \frac{p}{q}$ లేదా $x = \frac{r}{s}$

$\therefore\ ax^2 + bx + c = 0$ కు మూలాలు $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ లు.

ఉదాహరణ 3.1 : కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా కింది వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుము.

$$6x^2 + 5x - 6 = 0.$$

సాధన : ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణము $6x^2 + 5x - 6 = 0$ .... (i)

మధ్య పదాన్ని విడగొట్టగా,

$$6x^2 + 9x - 4x - 6 = 0$$

(లేదా) $3x(2x + 3) - 2(2x + 3) = 0$

(లేదా) $(2x+3)\,(3x-2)=0$

$\therefore \quad 2x+3=0$ లేదా $3x-2=0$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{-3}{2}, \frac{2}{3}$.

ఉదాహరణ 3.2 : కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా కింది ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుము.

$$3\sqrt{2}\,x^2+7x-3\sqrt{2}=0.$$

సాధన : మధ్యపదాన్ని విడగొట్టగా

$$3\sqrt{2}\,x^2+9x-2x-3\sqrt{2}=0$$

లేదా $\quad 3x(\sqrt{2}\,x+3)-\sqrt{2}(\sqrt{2}x+3)=0$

లేదా $\quad (\sqrt{2}\,x+3)\,(3x-\sqrt{2})=0$

$\therefore \quad \sqrt{2}\,x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{\sqrt{2}}$

లేదా $\quad 3x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}$.

ఉదాహరణ 3.3 : కారణాంక విభజన పద్ధతి నుపయోగించి కింది వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుము.

$$(a+b)^2\;x^2+6(a^2-b^2)\,x+9(a-b)^2=0.$$

సాధన : $(a+b)^2\,x^2+6(a^2-b^2)\,x+9(a-b)^2=0$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణము

మధ్యపదాన్ని విడగొట్టి రాయగా

$$(a+b)^2\;x^2+3(a^2-b^2)\,x+3(a^2-b^2)\,x+9(a-b)^2=0.$$

లేదా $(a+b)\,x\,\{(a+b)\,x+3(a-b)\}\;\{\,3(a-b)\{(a+b)\,x+3(a-b)\}=0$

లేదా $\quad \{(a+b)\,x+3(a-b)\}\;.\;\{(a+b)\,x+3(a-b)\}=0$

$\therefore \quad (a+b)x+3(a-b)=0 \Rightarrow x=\frac{-3(a-b)}{a+b}=\frac{3(b-a)}{a+b}$

లేదా $\quad (a+b)x+3(a-b)=0 \Rightarrow x=\frac{-3(a-b)}{a+b}=\frac{3(b-a)}{a+b}$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{3(b-a)}{a+b}, \frac{3(b-a)}{a+b}$

మరొక పద్ధతి

$(a+b)^2\ x^2+6(a^2-b^2)x+9(a-b)^2=0$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం.

పై సమీకరణాన్ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$\{(a+b)x\}^2+2(a+b)x\,.\,3(a-b)+\{3(a-b)\}^2=0$$

లేదా $\quad \{(a+b)x+3(a-b)\}^2=0$

లేదా $\quad x=\frac{-3(a-b)}{a+b}=\frac{3(b-a)}{a+b}$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు $\frac{3(b-a)}{a+b}, \frac{3(b-a)}{a+b}$

అభ్యాసం 3.1

1. కింద ఇవ్వబడిన వర్గ సమీకరణాలను కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

(i) $\sqrt{3}x^2+10x+8\sqrt{3}=0$ (ii) $x^2-2ax+a^2-b=0$

(iii) $x^2+\left(\frac{ab}{c}-\frac{c}{ab}\right)x-1=0$ (iv) $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

3.3 సూత్ర సహాయముతో వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించడం

$ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ వర్గ సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక పద్ధతి ద్వారా సాధించుటను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

పై వర్గ సమీకరణము మూలాలు

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{మరియు} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

ఇచ్చట $D = b^2 - 4ac$ ని వర్గ సమీకరణానికి విచక్షణి అంటారు.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$ వర్గ సమీకరణానికి

(i) $D > 0$ అయిన, సమీకరణానికి వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు ఉంటాయి.

(ii) $D = 0$ అయిన, సమీకరణానికి వాస్తవ మరియు సమాన మూలాలు ఉంటాయి. అవి $\frac{-b}{2a}$ కు సమానము.

(iii) $D < 0$ అయిన, సమీకరణానికి సంయుగ్మ సంకీర్ణ (కల్పిత) మూలాలు ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 3.4 : కింది వర్గ సమీకరణాల మూలాల స్వభావాన్ని పరిశీలించండి. సూత్ర సహాయముతో కూడా పరిశీలించండి.

(i) $x^2 + 9x + 10 = 0$ (ii) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

(iii) $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

సాధన : (i) $x^2 + 9x + 10 = 0$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణము

ఇచ్చట $a = 1,\ b = 9,\ c = 10$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = 81 - 4.1.10 = 41 > 0.$

$\therefore$ సమీకరణానికి వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు ఉంటాయి.

పరిశీలన : సూత్రము ద్వారా $x = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{2}$

$\therefore \frac{-9+\sqrt{41}}{2}, \frac{-9-\sqrt{41}}{2}$ లు వాస్తవాలు మరియు అసమానాలు.

(ii) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం

ఇచ్చట $a = 9,\ b = -6\sqrt{2},\ c = 2$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (-6\sqrt{2})^2 - 4(9)(2) = 0.$

$\therefore$ సమీకరణానికి వాస్తవ మరియు సమాన మూలాలు ఉంటాయి.

పరిశీలన : సూత్రము ద్వారా $y = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{(2)(9)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ మూలాలు $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}$ లు వాస్తవాలు మరియు సమానాలు.

(iii) $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణం.

ఇచ్చట $D = (-3)^2 - 4(\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2}$

$= -15 < 0$

$\therefore$ సమీకరణానికి, సంయుగ్మ సంకీర్ణ సంఖ్యలు మూలాలుగా ఉంటాయి.

పరిశీలన : సూత్రము ద్వారా $t = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{15}i}{2\sqrt{2}} \quad \{\because i = \sqrt{-1}\}$

$\therefore$ $\frac{3+\sqrt{15}i}{2\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{15}i}{2\sqrt{2}}$ లు సంయుగ్మ సంకీర్ణ మూలాలు.

ఉదాహరణ 3.5 : 'P' యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు $x^2 + py - 1 = 0$ వర్గ సమీకరణము వాస్తవ మరియు విభిన్న మూలాలను కలిగి ఉండునని నిరూపించుము.

సాధన : $D = P^2 + 4$. ఇది P యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు ధనాత్మకం.

$\therefore$ P యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు దత్త వర్గ సమీకరణ మూలాలు వాస్తవాలు మరియు విభిన్నాలు.

ఉదాహరణ 3.6 : K యొక్క ఏ విలువకు $(4k + 1)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణపు మూలాలు సమానము?

సాధన : $(4k + 1)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణము

ఇచ్చట $D = (k + 1)^2 - 4(4k + 1).1$

మూలాలు సమానము కావలెనంటే $D = 0$

$\therefore \quad (k + 1)^2 - 4(4k + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 14k - 3 = 0$

$\therefore\ k = \dfrac{14 \pm \sqrt{196+12}}{2}$ లేదా $k = \dfrac{14+\sqrt{208}}{2}$

$= 7 \pm 2\sqrt{13}$ లేదా $7+2\sqrt{13},\ 7-2\sqrt{13}$ లు కావలసిన k విలువలు.

ఉదాహరణ 3.7 : $x^2(a^2+b^2) + 2x(ac+bd) + (c^2+d^2) = 0$ సమీకరణము మూలాలు కల్పితములని రుజువు చేయుము. కాని $ad = bc$ అయినప్పుడు మూలాలు వాస్తవాలు మరియు సమానాలు అని చూపుము.

సాధన : $x^2(a^2+b^2) + 2x(ac+bd) + (c^2+d^2) = 0$ ఇచ్చిన సమీకరణం

విచక్షిణి $= 4(ac+bd)^2 - 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$= 8abcd - 4(a^2d^2 + b^2c^2)$

$= -4(-2abcd + a^2d^2 + b^2c^2)$

$= -4(ad-bc)^2$

$< 0 \quad \forall\ a, b, c, d.$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణము, మూలాలు కల్పితములు.

మూలాలు వాస్తవాలు, సమానములు కావలెనంటే విచక్షిణి '0' కావలెను.

$\Rightarrow \quad 4(ad-bc)^2 = 0$ లేదా $ad = bc$

కావున $ad = bc$ అయిన, మూలాలు వాస్తవాలు మరియు సమానమగును.

అభ్యాసం 3.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతీ వర్గ సమీకరణాన్ని సూత్రము ద్వారా సాధించుము.

   (i) $2x^2 - 3x + 3 = 0$ (ii) $-x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

   (iii) $-4x^2 + \sqrt{5}x - 3 = 0$ (iv) $3x^2 + \sqrt{2}x + 5 = 0$

2. 'k' యొక్క ఏ విలువకు $y^2 - 2(1+2k)y + 3 + 2k = 0$ సమీకరణము సమాన మూలాలను కలిగి ఉంటుంది?

3. $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ సమీకరణము మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవాలు అనియు, మరియు $a = b = c$ అయిన సందర్భంలో తప్ప, మూలాలు సమానము కావు అని చూపండి.

3.4 వర్గ సమీకరణ మూలాలు మరియు గుణకాల మధ్య సంబంధము

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ వర్గ సమీకరణం మూలాలు

$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ మరియు $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అని తెలుసుకొన్నాం.

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{.... (i)}$$

$$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{.... (ii)}$$

అనుకొనిన (i), (ii) లను కలుపగా

$$\alpha+\beta = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore \text{ మూలాల మొత్తం } = -\frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}} = \frac{-b}{a} \quad \text{... (iii)}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{+b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \text{ మూలాల లబ్ధము } = \frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ గుణకము}} = \frac{c}{a} \quad \text{... (iv)}$$

(iii), (iv) లు వర్గ సమీకరణ మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధమును తెలుపును. ఈ సంబంధాలు, మూలాలను ఇచ్చినప్పుడు వర్గ సమీకరణాన్ని కనుక్కోవడానికి ఉపయోగపడతాయి.

ఉదాహరణ 3.8 : $3x^2 - 5x + 9 = 0$ సమీకరణ మూలాలు α, β లు అయిన, $(a)\ \alpha^2+\beta^2,\ (b)\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : $3x^2 - 5x + 9 = 0$ సమీకరణ మూలాలు α, β అని ఇచ్చారు.

$$\therefore\ \alpha+\beta = \frac{5}{3} \quad \text{..... (i)} \quad \text{మరియు} \quad \alpha\cdot\beta = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{..... (ii)}$$

ఇప్పుడు $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\cdot\beta$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2.3 \qquad \{\text{(i), (ii)ల నుంచి}\}$$

$$= -\frac{29}{9}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2 = -\frac{29}{9}$$

ఇప్పుడు $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$

$$= \frac{-\frac{29}{9}}{9} \qquad \{\text{(i), (ii)ల నుంచి}\}$$

$$= -\frac{29}{81}$$

ఉదాహరణ 3.9 : $3y^2 + 4y + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు α, β లు అయిన, α^2, β^2 లు మూలాలుగా కలిగిన వర్గ సమీకరణాన్ని నిర్మించండి.

సాధన : $3y^2 + 4y + 1 = 0$ సమీకరణ మూలాలు α, β అని ఇచ్చారు.

$$\therefore\ \text{మూలాల మొత్తము i.e., } \alpha+\beta = \frac{\text{'}y\text{' గుణకము}}{\text{'}y^2\text{'గుణకము}} = -\frac{4}{3} \quad \text{.... (i)}$$

$$\text{మూలాల లబ్ధము i.e., } \alpha.\beta = \frac{\text{స్థిర పదము}}{y^2 \text{ గుణకము}} = \frac{1}{3} \quad \text{..... (ii)}$$

ఇప్పుడు $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\cdot\beta$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \{\text{(i), (ii)ల నుంచి}\}$$

$$= \frac{16}{9} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{10}{9}$$

మరియు $\alpha^2 \cdot \beta^2 = \frac{1}{9}$.

$\therefore$ కావలసిన వర్గ సమీకరణము $y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)y + \alpha^2 \cdot \beta^2 = 0$

లేదా $y^2 - \frac{10}{9}y + \frac{1}{9} = 0$

లేదా $9y^2 - 10y + 1 = 0.$

ఉదాహరణ 3.10 : $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ సమీకరణపు ఒక మూలం రెండవ మూలము వర్గానికి సమానమైతే, $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $ax^2 + bx + c = 0$ మూలములను α, α^2 అనుకొనిన

$$\therefore \quad \alpha + \alpha^2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{..... (i)}$$

మరియు $\alpha \cdot \alpha^2 = \frac{c}{a}$

i.e., $\alpha^3 = \frac{c}{a}$ ..... (ii)

(i)నుంచి $\alpha(\alpha + 1) = -\frac{b}{a}$

లేదా $\{\alpha(\alpha+1)\}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 = -\frac{b^3}{a^3}$

లేదా $\alpha^3(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) = -\frac{b^3}{a^3}$

లేదా $\frac{c}{a}\left\{\frac{c}{a} + 3\left(-\frac{b}{a}\right) + 1\right\} = -\frac{b^3}{a^3}$ $\{\text{(i), (ii)ల నుంచి}\}$

లేదా $\frac{c^2}{a^2} - \frac{3bc}{a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^3}{a^3}$

లేదా $ac^2 - 3abc + a^2c = -b^3$

లేదా $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc.$ ఇదియే కావలసిన ఫలితము

ఉదాహరణ 3.11 : $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు $m : n$ నిష్పత్తిలో ఉండానికి కావలసిన నియమాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $m\alpha, n\alpha$ లు వర్గ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ కు మూలాలు అనుకొనిన,

ఇప్పుడు $m\alpha + n\alpha = -\frac{b}{a}$ .... (i)

మరియు $m \cdot n \cdot \alpha^2 = \frac{c}{a}$ ..... (ii)

(i) నుంచి $\alpha(m+n) = -\frac{b}{a}$

లేదా $\alpha^2(m+n)^2 = \frac{b^2}{a^2}$

లేదా $\frac{c}{a}(m+n)^2 = mn\frac{b^2}{a^2}$ {(ii) నుంచి}

లేదా $ac(m+n)^2 = mnb^2$ కావలసిన నియమము

అభ్యాసం 3.3

1. $ay^2 + bx + c = 0$ మూలాలు α, β లు అయిన, కింది వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

   (i) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4}$

2. $5x^2 - 6x + 3 = 0$ మూలాలు α, β లు అయిన, కింద ఇచ్చిన మూలాలు కల్గిన వర్గ సమీకరణాన్ని నిర్మించండి / రాయము.

   (i) α^2, β^2 (ii) $\alpha^3\beta, \alpha\beta^3$

3. $ay^2 + bx + c = 0$ మూలాలు 3 : 4 నిష్పత్తిలో ఉన్నచో, $12b^2 = 49ac$ అని రుజువు చేయుము.

4. $px^2 - qx + p = 0$ సమీకరణపు ఒక మూలము, మరొక మూలము కంటే '1' ఎక్కువ అగుటకు నియమాన్ని కనుగొనుము.

3.5 D < 0 అయినప్పుడు, వర్గ సమీకరణ సాధన

(a) t కొరకు $t^2 + 3t + 4 = 0$ ను సాధించండి.

$$\therefore t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

ఇచ్చట $D = -7 < 0$

$\therefore \quad \frac{-3+\sqrt{-7}}{2}$ మరియు $\frac{-3-\sqrt{-7}}{2}$ లు మూలాలు

లేదా $\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}, \frac{-3-\sqrt{7}i}{2}$

కావున మూలాలు సంకీర్ణములు మరియు సంయుగ్మాలు

(b) 'y' కొరకు $-3y^2 + \sqrt{5}y - 2 = 0$ సాధించండి.

$$\therefore y = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)}$$

$$= \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{-19}}{-6}$$

ఇచ్చట $D = -19 < 0$

మూలాలు $\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{19}i}{-6}, \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{19}i}{-6}$

ఇక్కడ కూడా మూలాలు సంకీర్ణములు మరియు సంయుగ్మాలు, పై ఉదాహరణల నుంచి కింది ముగింపులను ఇవ్వవచ్చు.

(i) పై రెండు సందర్భాలలో $D < 0$.

(ii) మూలాల సంకీర్ణాలు మరియు ఒకదానికొకటి సంయుగ్మాలు.

ప్రతిసారి, సంకీర్ణ మూలాలు సంయుగ్మ జతలుగా వస్తుంది. అన్నది సత్యమా?

$2 + 3i$ మరియు $4 - 5i$ లు మూలాలుగా కల్గిన వర్గ సమీకరణాన్ని రాయగా,

ఆ సమీకరణము $\{(x - (2 + 3i)\}\{x - (4 - 5i)\} = 0$ అగును.

లేదా $x^2 - (2 + 3i)\, x - (4 - 5i)x + (2 + 3i)\,(4 - 5i) = 0$

లేదా $x^2 - (-6 + 2i)x + 23 + 2i = 0$ అనేది, సంకీర్ణ గుణకాలు కలిగిన సమీకరణము.

> **గమనిక:** వర్గ సమీకరణపు మూలాలు సంయుగ్మాలు కాని సంకీర్ణ మూలాలైతే. ఆ వర్గ సమీకరణము, సంకీర్ణ గుణకాలు కలిగిన సమీకరణము అగును.

3.6 వర్గసమాసాల గుర్తులు, గుర్తుల్లో మార్పులు

ఈ విభాగంలో వర్గసమాసాల భావాలను, గుర్తులోను, పరిమాణంలోను, ఏర్పడే మార్పులను గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలను గురించి మనం చర్చించబోతున్నాం.

$ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణం మూలల స్వభావం మీద, x^2 గుణకం 'a' మీద, వర్గసమాసం గుర్తు ఆధారపడుతుంది. ఇచ్చట a, b లు శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలు, a, b లు రెండూ ధనాత్మకం గాని, రుణాత్మకం గాని అయితే, అప్పుడు a, b లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

1. సిద్ధాంతం : $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గ సమీకరణానికి ($a, b, c \in \mathrm{R}$ వాస్తవగుణకాలు, $a \neq 0$)

సంకీర్ణమూలాలుంటే, $x \in \mathrm{R}$ (వాస్తవసంఖ్య) అయినపుడు $ax^2 + bx + c$, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

ఉపపత్తి : $ax^2 + bx + c = 0$ సమీకరణానికి వాస్తవేతర సంకీర్ణమూలాలు ఉండడానికి నియమం $b^2 - 4ac < 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

ఇప్పుడు పై కుడిచేతివైపు సమాసం $\geq \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ అవుతుంది. కాబట్టి $4ac-b^2>0$ అయితే $\frac{ax^2+bx+c}{a}>0$ అవుతుంది. కనక అన్ని వాస్తవ x విలువలకు, ax^2+bx+c, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

సిద్ధాంతం 2. $ax^2+bx+c=0$ సమీకరణానికి సమాన మూలాలు ఉంటే, అప్పుడు $x=-\frac{b}{2a}$ తప్ప తక్కిన అన్ని వాస్తవ x విలువలకు ax^2+bx+c, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది. $(a, b, c \in \mathrm{R},\ a \neq 0)$

ఉపపత్తి : సమాన మూలాలు ఉండటానికి నియమం $b^2-4ac=0$.

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$$

$$=0,\quad x=\frac{-b}{2a} \text{ అయితే}$$

కనుక $x=\frac{-b}{2a}$ కు తప్ప, మిగతా అన్ని వాస్తవ విలువలకు ax^2+bx+c, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

సిద్ధాంతం 3. $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ లు $ax^2+bx+c=0$ కు వాస్తవ మూలాలైతే

(i) $\alpha<x<\beta$ అయినప్పుడు ax^2+bx+c, a లకు ఒకే గుర్తులు వ్యతిరేకంగాను,

(ii) $x<\alpha$ లేదా $x>\beta$ అయినప్పుడు ax^2+bx+c, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

ఉపపత్తి : $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta) \qquad ...(1)$$

(i) $\alpha<x<\beta$ అయినప్పుడు $x-\alpha>0,\ x-\beta<0$.

(1) నుంచి $\frac{ax^2+bx+c}{a} < 0$ అవుతుంది.

$\therefore ax^2 + bx + c, a$ లకు వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.

(ii) $x < \alpha$ అయితే $x - \alpha < 0,\ x - \beta < 0\ (\because \alpha < \beta)$

(1) నుంచి $\frac{ax^2+bx+c}{a} > 0$ అవుతుంది.

$x < \beta$ అయితే $x - \beta > 0,\ x - \alpha > 0$

(1) నుంచి $\frac{ax^2+bx+c}{a} > 0$ అవుతుంది.

$\therefore x < \alpha$ లకు $x > \beta$ అయినప్పుడు $ax^2 + bx + c, a$ లకు ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 3.12: (1) x వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 4$ సమాస గుర్తును గురించి చర్చించండి.

సాధన: $ax^2 + bx + c$ తో పోల్చగా $a = 1,\ b = -5,\ c = 4.$

విచక్షణి $\Delta b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 > 0$ మూలాలు విభిన్న వాస్తవ సంఖ్యలు.

$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) = 0$

మూలాలు $x = 1, 4$

గుణకం $a = 1 > 0$

అందువల్ల $1 < x < 4$ అయితే, అప్పుడు $x^2 - 5x + 4$ కూ x^2 గుణకానికి వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.

ఇంకా $x < 1$ లేదా $x > 4$ అయితే, అప్పుడు $x^2 - 5x + 4$ కూ x^2 గుణకానికీ ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

(i) కాబట్టి $1 < x < 4$ అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 4 < 0,$

(ii) $x < 1$ లేదా $x > 4$ అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 4 > 0$ అవుతుంది [అనగా $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$]

(iii) $x = 1$ లేదా $x = 4$ అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 4 = 0$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 3.13 : $x^2 - x + 3$ సమాసగుర్తును తెలపండి.

సాధన : విచక్షణి $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11 < 0.$

$\because \ \Delta = 0, \ x^2$ గుణకం $a = \ 1 > 0$

అయితే $x^2 - x + 3 > 0, \quad \forall \ x \in \mathrm{R}.$

$x^2 - x + 3 = 0$ సమీకరణ మూలాలు $\frac{1 \pm \sqrt{11}i}{2}$. ఇవి వాస్తవస్థ్యలు కావు. అందువల్ల $x^2 - x + 3$ కు, x^2 గుణకానికీ ఒకే గుర్తు ఉంటుంది. కాబట్టి x అన్ని వాస్తవ విలువలకు $x^2 - x + 3 > 0.$

3.7 గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు

వర్గసమాసానికి అంత్య విలువలు నిర్ణయించే పద్ధతులు :

ఇవి x^2 గుణకం గుర్తుపై ఆధారపడతాయి.

సిద్ధాంతం 4: $f(x) = ax^2 + bx + c$ వర్గ సమాసం. $(a, b, c \in \mathrm{R}, \ a \neq 0)$

$x \in \mathrm{R}, \quad \frac{4ac - b^2}{4a}$ అనే సంఖ్య.

(i) $a > 0$ అయినప్పుడు $x = \frac{-b}{2a}$ వద్ద $f(x)$ కు పరమకనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఈ కనిష్ఠ విలువ $\frac{4ac - b^2}{4a}$

(ii) $a < 0$ అయినప్పుడు $x = \frac{-b}{2a}$ వద్ద $f(x)$ కు పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఈ గరిష్ఠ విలువ $\frac{4ac - b^2}{4a}$

ఉపపత్తి :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad ...(1)$$

(i) $a > 0$ అయితే $f(x) \leq \frac{4ac-b^2}{4a}$ $x = \frac{-b}{2a}$ అయినప్పుడు (1)నుంచి

$f(x) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ అవుతుంది.

ఇదే $f(x)$ కు పరమకనిష్ఠ విలువ.

$\therefore$ కనిష్ఠవిలువ = $\frac{4ac-b^2}{4a}$

(ii) $a < 0$ అయితే $f(x) \leq \frac{4ac-b^2}{4a}$ అవుతుంది. $x = \frac{-b}{2a}$ అయినప్పుడు (1)నుంచి

$f(x) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ అవుతుంది.

ఇది $f(x)$ కు పరమ గరిష్ఠ విలువ.

$\therefore$ గరిష్ఠ విలువ = $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

ఉదాహరణ 3.14: కింది సమాసాలకు గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $x^2 - x + 7$ (ii) $12x - x^2 - 32$

(iii) $ax^2 + bx + a$ (iv) $2x - 7 - 5x^2$

సాధన: (i) $x^2 - x + 7$ ని $ax^2 + bx + c$ తో పోలిస్తే ఇక్కడ $a = 1,\ b = -1, c = 7$

$a = 1 > 0$ అయినందువల్ల. $x^2 - x + 7$ సమాసానికి పరమ కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

ఈ కనిష్ఠ విలువ $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(7)-(-1)^2}{4(1)} = \frac{27}{4}$.

(ii) $12x - x^2 - 32$ ను పోల్చగా,

ఇక్కడ $a = -1,\ b = 12, c = -32$

$a = -1 < 0$ అందువల్ల, సమాసానికి పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

ఆ గరిష్ఠ విలువ $= \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-32)-(12)^2}{4(-1)}$

$= \frac{128-144}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4.$

(iii) (i) $a > 0$ అయిన $ax^2 + bx + a$ కు కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

ఆ కనిష్ఠ విలువ $= \frac{4(a)(a)-b^2}{4a} = \frac{4a^2-b^2}{4a}$

(ii) $a < 0$ అయిన $ax^2 + bx + a$ కు గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

ఆ గరిష్ఠ విలువ $= \frac{4(a)(a)-b^2}{4a} = \frac{4a^2-b^2}{4a}$

(iv) దత్త సమాసాన్ని $ax^2 + bx + c = 0$ తో పోలిస్తే

$a = -5,\ b = 2, c = -7$

$a = -5 < 0$ దత్త సమాసానికి గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

$\therefore$ గరిష్ఠ విలువ $= \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-5)(-7)-(2)^2}{4(-5)}$

$= \frac{140-4}{-20} = \frac{+136}{-20} = \frac{-34}{5}.$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$. $a < 0$ అగుటచే $x = \frac{1}{5}$ వద్ద $2x - 7 - 5x^2$ కు పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

3.8 వర్గ సమాస పరిమాణంలో మార్పులు

వాస్తవ సంఖ్య R లో 'x' విలువ మారినపుడు, వర్గసమాస $ax^2 + bx + c$ విలువ (పరిమాణం)లో మార్పులను గమనించండి.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$y = f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ గా రాద్దాం.

$a > 0$ అయితే	$a < 0$ అయితే
1. x "$-\infty$ ను సమీపిస్తే", అప్పుడు $f(x)$, "$+\infty$ ను సమీపిస్తుంది"	1. x, "$-\infty$ ను సమీపిస్తే", అప్పుడు $f(x)$, "$-\infty$ ను సమీపిస్తుంది".
2. x "$+\infty$ ను సమీపిస్తే", అప్పుడు $f(x)$, "$+\infty$ ను సమీపిస్తుంది"	2. x, "$+\infty$ ను సమీపిస్తే", అప్పుడు $f(x)$, "$-\infty$ ను సమీపిస్తుంది".
3. $x = \frac{-b}{2a}$ అయితే, అప్పుడు $f(x) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ అవుతుంది.	3. $x = \frac{-b}{2a}$ అయితే, అప్పుడు $f(x) = \frac{4ac-b^2}{4a}$
4. x ను "$-\infty$ నుంచి $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ కు పెరిగినప్పుడు, $f(x)$, $+\infty$ నుంచి $\frac{4ac-b^2}{4a}$ తగ్గుతుంది.	4. x, $-\infty$ నుంచి $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ కు పెరిగినప్పుడు; $f(x)$, $-\infty$ నుంచి $\frac{4ac-b^2}{4a}$ కు పెరుగుతుంది.
5. x, $\frac{-b}{2a}$ నుంచి $+\infty$ కు పెరిగినప్పుడు, $f(x)$, $\frac{4ac-b^2}{4a}$ నుంచి $+\infty$ కు పెరుగుతుంది.	5. x, $\frac{-b}{2a}$ నుంచి $+\infty$ కు పెరిగినప్పుడు, $f(x)$, $\frac{4ac-b^2}{4a}$ నుంచి $-\infty$ కు తగ్గుతుంది.

ఉదాహరణ 3.14: వాస్తవ సంఖ్య x కు $4x - 5x^2 + 2$ సమాసగుర్తులో మార్పులను, సమాసపు అంత్యవిలువను కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన సమాసాన్ని $ax^2 + bx + c$ తో పోలిస్తే $a = -5 < 0$.

$5x^2 - 4x - 2 = 0$ సమీకరణ మూలాలు $\frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(5)(-2)}}{2(5)}$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+40}}{10} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$$

అందువల్ల $\frac{2-\sqrt{14}}{5} < x < \frac{2+\sqrt{14}}{5}$ అయినప్పుడు,

$4x - 5x^2 + 2$ గుర్తు ధనాత్మకం.

$x < \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ గాని, $x > \frac{2+\sqrt{14}}{5}$ గాని అయితే, $4x - 5x^2 + 2$ గుర్తు రుణాత్మకం.

దత్తమాసంలో $a < 0$. గనుక $4x - 5x^2 + 2$ కు గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(-5)(2)-(4)^2}{4(-5)} = \frac{-56}{-20} = \frac{14}{5}$$

$\therefore$ దత్త సమాస అంత్య విలువ = $\frac{14}{5}$.

ఉదాహరణ 3.15: $x^2 - 5x + 6$ సమాస గుర్తులో మార్పులను వాటి అంత్యవిలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $x^2 - 5x + 6$ ను $ax^2 + bx + c$ తో పోలిస్తే $a = 1 > 0$

సమీకరణం మూలాలు = 2, 3. ఇవి వాస్తవ సంఖ్యలు.

కనక $2 < x < 3$ అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 6$ కు x^2 గుణకానికీ వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.

మరియు $x < 2$ లేదా $x > 3$ అయితే $x^2 - 5x + 6$ కు, x^2 గుణకానికీ ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

$\therefore 2 < x < 3$ అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 6 < 0$ అగును.

$x < 2$ లేదా $x > 3$ అయినప్పుడు $x^2 - 5x + 6 > 0$ అగును.

$a < 0$, కనుక $x^2 - 5x + 6$ సమాసానికి కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

కనిష్ఠ విలువ = $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(6)-(-5)^2}{4(1)} = \frac{24-25}{4} = \frac{-1}{4}$.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

ఉదాహరణ 3.16 : $3x^2 + 4x + 1$ సమాసానికి గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $ax^2 + bx + c$ తో పోల్చగా $a = 3, b = 4, c = 1$ $a = 3 > 0$ అయినందువల్ల $3x^2 + 4x + 1$ సమాసానికి పరమ కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

ఆ కనిష్ఠ విలువ = $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(3)(1) - (4)^2}{4(3)} = \frac{-1}{3}$.

దత్త సమాసానికి గరిష్ఠ విలువ ఉండదు..

అభ్యాసం 3.4

1. $x^2 - 5x + 14$ సమాసం ఏయే x విలువలకు ధనాత్మకం అవుతుంది.
2. $-6x^2 + 2x - 3$ సమాసం ఏయే x విలువలకు రుణాత్మకం అవుతుంది ?
3. $x^2 + 5x + 6$ సమాసానికి x యొక్క ఏ విలువలకు గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువ ఉంటుందో కనుక్కోండి.
4. x యొక్క ఏ విలువకు $2x - x^2 + 7$ సమాసమునకు గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువ ఉంటుందో కనుక్కోండి.
5. $3x^2 + 2x + 11$ సమాసమునకు గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువను కనుక్కోండి.
6. $-5x^2 + 4x + 2, -1$ ($x \in R$) కు సమాసగుర్తులో మార్పులను, సమానపు అంత్యవిలువను కనుక్కోండి.
7. $x^2 + x + 1$ సమాసానికి $x \in R$ అయినప్పుడు, గుర్తును నిర్ణయించండి.
8. కింది సమాసాలకు గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువ కనుక్కోండి.

   (i) $3x^2 + 4x + 1$ (ii) $4x - x^2 - 10$

   (iii) $2x - 7 - 5x^2$ (iv) $3x^2 + 2x + 11$
9. $15 + 4x - 3x^2$ సమాస గుర్తులో మార్పులను, సమాసపు అంత్యవిలువను కనుక్కోండి.

సమీకరణవాదం

ఇదివరకటి తరగతులలో ఒకటి, రెండు చలరాశులలో ఏకఘాత సమీకరణాలను, ఏకచలరాశిలో బహుపదిగా x యొక్క అకరణీయ పూర్ణాంక ప్రమేయాన్ని, వర్గసమీకరణాలకూ సాధనలను చదివాం.

క్రింది అధ్యాయంలో వర్గసమాసాలు, వర్గసమీకరణాల గురించి మనం నేర్చుకున్నాం. వర్గసమీకరణాల మూలాలు గుణకాల మధ్య కొన్ని సంబంధాలను నిర్ధారించాం. అయితే విజ్ఞానశాస్త్రంలో, సాంకేతిక రంగంలో ఉత్పన్నమయ్యే సమస్యలలో రెండు కంటే ఎక్కువ తరగతి సమీకరణాలను మనం ఎదుర్కొంటాం. అందువల్ల nవ తరగతి సమీకరణాల మూలాలకూ గుణకాలకూ వర్తించే సంబంధాలను మనం ఇపుడు కనుక్కొందాం. తరువాత సాధారణ సమీకరణ వాదంలోని కొన్ని ప్రాథమిక లక్షణాలను చర్చిద్దాం.

3.9 బహుదీయ ప్రమేయము (లేదా) బహుపది

n ఒక రుణేతర పూర్ణాంకమై $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ లు వాస్తవ(లేదా) సంకీర్ణ సంఖ్యలు $a_0 \neq 0$ అయితే, అపుడు $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$, సమాసాన్ని x లో n వ తరగతి బహుపది (లేదా) బహుపదీయ ప్రమేయమని అంటాం.

బహుపదిని $g(x)$, $h(x)$ లతో కూడా సూచిస్తాం.

స్థిర బహుపది : $n = 0$ అయితే బహుపదిలో a_0 పదం మాత్రమే ఉంటుంది. ఇటువంటి బహుపదిని స్థిరబహుపది అంటాం.

శూన్య బహుపది : స్థిరాంకం సున్నాను శూన్యబహుపది అంటాం. దాని తరగతి నిర్వచితం కాదు.

గమనిక:

1. $f(x) = a_0x + a_1, \quad a_0 \neq 0$ తరగతి 1గా గల బహుపదిని ఏకబహుపది అంటాం.
2. $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad a_0 \neq 0$ తరగతి 2గా గల బహుపదిని వర్గబహుపది అంటాం.
3. $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad a_0 \neq 0$ తరగతి 3గా గల బహుపదిని ఘన బహుపది అంటాం.
4. $f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \quad a_0 \neq 0$ తరగతి 4గా గల బహుపదిని ద్వివర్గ బహుపది అంటాం.
5. **బహుపది యొక్క సున్నా :** ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్య α కు $f(\alpha) = 0$ అయితే సంకీర్ణ సంఖ్య α ను బహుపది $f(x)$ కు సున్నా అని అంటాం.

బహుదీయ సమీకరణం

ఏదైనా x విలువకు రెండు వేరు వేరు బహుపదులు సమానమైనచో, ఆ విధమైన సంబంధాన్ని బహుపదీయ సమీకరణం అంటాం.

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0, a_0 \neq 0$ ను సాధారణ రూపంలో n వ తరగతి బహుపదీయ సమీకరణం అంటాం. దీనిని $f(x) = 0$ (లేదా) $g(x) = 0$ (లేదా) $h(x) = 0$ తో సూచిస్తాం.

సమీకరణం యొక్క తరగతి : $f(x) = 0$ సమీకరణంలో x యొక్క గరిష్ట ఘాతాన్ని సమీకరణం యొక్క తరగతి అంటాం.

భాగహార విశేషవిధి : $f(x)$, $g(x)$ లు వరుసగా $n, m(<n)$ తరగతులుగా గల బహుపదులు అనుకొందాం. అప్పుడు $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ (ఇక్కడ $r(x) = 0$ లేదా $r(x) < m$) అయ్యేటట్లుగా $q(x), r(x)$ అనే బహుపదులు ఏకైకంగా వ్యవస్థితం అవుతాయి. మరియు $q(x)$ బహుపది తరగతి $(n - m)$.

శేష సిద్ధాంతం: $f(x)$ బహుపది $(x - \alpha)$ చే భాగించబడినప్పుడు వచ్చే శేషము $f(\alpha)$ అవుతుంది. (ఇక్కడ α ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్య).

నిరూపణ: బహుపది $f(x)$ ను $(x - \alpha)$ భాగించినప్పుడు భాగఫలం $q(\alpha)$, శేషము $r(x)$ అనుకొందాం.

భాగహార విశేష విధి ప్రకారం: $f(x) = (x - \alpha)\ q(\alpha) + r(x)$ ... (1)

ఇక్కడ $r(x) = 0$ (లేదా) $r(x)$ తరగతి < 1.

$r(x)$ తరగతి $< 1 \Rightarrow$ $r(x)$ తరగతి $= 0$. అందువల్ల $r(x) = r_0$ ఇక్కడ r_0 ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్య.

అప్పుడు సమీకరణం(1)లో $x = \alpha$ ప్రతిక్షేపించగా,

$f(\alpha) = 0.\ q(\alpha) + r(\alpha) = r_0$.

$\therefore$ శేషము r_0 అనగా $f(\alpha)$ అవుతుంది.

- **సమీకరణం మూలము:** ఏదైనా సంకీర్ణ సంఖ్య α కు $f(\alpha) = 0$ అయితే, α కు $f(x) = 0$ సమీకరణానికి మూలం అని అంటాం.
- **కారణాంక సిద్ధాంతం:** $f(x) = 0$ సమీకరణానికి α ఒక మూలం అయితే $f(x)$ నకు $(x - \alpha)$ ఒక కారణాంకం అవుతుంది. విపర్యంగా, $f(x)$ కు $(x - \alpha)$ కారణాంకం అయితే $f(x) = 0$ సమీకరణానికి α ఒక మూలం అవుతుంది.

  నిరూపణ : $f(x) = 0$ సమీకరణానికి α ఒకమూలం అనుకొందాం.

  అపుడు $f(\alpha) = 0$. అవుతుంది ...(1)

  భాగహారవిశేషవిధి, శేషసిద్ధాంతం ప్రకారం

  $f(x) = (x - \alpha)\ q(x) + f(\alpha)$

  (1) నుండి $f(x) = (x - \alpha)\ q(x)$

  $\Rightarrow$ $(x - \alpha)$, $f(x)$ నకు కారణాంకం అవుతుంది.
- విపర్యంగా, $(x - \alpha), f(x)$ నకు కారణాంకం అయితే $(x - \alpha)$, $f(x)$ ను నిశ్శేషంగా భాగించాలి.

అపుడు $f(\alpha) = 0$.

$\Rightarrow$ నిర్వచనం ప్రకారం α, $f(x) = 0$ సమీకరణానికి మూలం అవుతుంది.

గమనిక: ప్రతి బహుపదీయ సమీకరణం $f(x) = 0$ నకు వాస్తవ(లేదా) సంకీర్ణమూలం ఉంటుంది.

- **బీజగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (Fundamental Theorem of Alzebra):** $n \geq 1$ తరగతి గాగల బహుపది సమీకరణం $f(x) = 0$ నకు కనీసం ఒక మూలం ఉంటుంది.

- తరగతి $n \geq 1$ గా గల బహుపది సమీకరణం $f(x) = 0$ నకు n వాస్తవ (లేదా) సంకీర్ణ మూలాలు మాత్రమే ఉంటాయి.

మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధాలు

$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_{n-1}x + p_n = 0$ అనే nవ తరగతి బహుపది సమీకరణాన్ని తీసుకొందాం. దాని మూలాలు $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ అనుకొందాం. అప్పుడు

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_{n-1}x + p_n$$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_n)$$

$$= x^n - (\alpha_1, \alpha_2 + ... + \alpha_n)x^{n-1}$$

$$+ (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} ..... + (-1)^n \alpha_1\alpha_2 .... \alpha_n$$

ఈ సమీకరణంలో x ఘాతాల గుణకాలను పోలిస్తే

$-p_1 = s_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (మూలాల మొత్తం)

$p_2 = s_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_i\alpha_j$ (ఒక్కోసారి రెండేసి మూలాలను తీసుకొంటే వాటి లబ్దాల మొత్తం)

$-p_3 = s_3 = \sum_{1\le i\le j\le n} \alpha_i\alpha_j\alpha_k$ (ఒక్కోసారి మూడేసి మూలాలను తీసుకుంటే వాటి లబ్దాల మొత్తం)

.....

$(-1)^n p_n = s_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.....\alpha_n$ (మూలాల లబ్దం)

ప్రధాన గుణకం 1 గాగల ఏ సమీకరణానికైనా పై సమానతలు మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధాన్ని ఇస్తాయి.

గమనిక:

(i) $f(x)$ యొక్క ప్రధాన గుణకం a_0 అయినపుడు సమీకరణం $f(x) = 0$ లోని ప్రతి పదాన్ని $a_0(\neq 0)$ తో భాగించగా వచ్చే సమీకరణం

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

$f(x) = 0$ సమీకరణం మూలాలతో ఏకీభవిస్తాయి.

ఈ సందర్భంలో పై సంబంధాలు కింది విధంగా మారతాయి.

$s_1 = \frac{-a_1}{a_0}$, $s_2 = \frac{a_2}{a_0}$, $...s_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$; అంటే $s_r = (-1)^r \frac{a_r}{a_0}$ $1 \le r \le n$

(ii) α, β లు మూలాలుగాగల $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గసమీకరణం తీసుకొంటే $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ అని గుర్తుకు తెచ్చుకొందాం.

(iii) $n = 3$ తీసుకొన్నప్పుడు $x^3 + p_1x^2 + p_2x^3 + p_3 = 0$ అనే ఘన సమీకరణం వస్తుంది.

దీని మూలాలను α_1 α_2, α_3 అనుకొందాం. అప్పుడు

$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -p_1$

$$S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = p_2$$

$$S_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -p_3$$

(iv) $n = 4$ తీసకొన్నప్పుడు ద్విపవర్గసమీకరణం $x^4 + p_1x^3 + p_2x^3 + p_3x + p_4 = 0$ వస్తుంది. దీని మూలాలు α_1 α_2, α_3, α_4 అనుకొందాం.

అపుడు $S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -p_1$

$$S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = p_2$$

$$S_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -p_3$$

$$S_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = p_4$$

ఉదాహరణ 1 : 2, 3, 6 మూలాలలుగా గల 3వ తరగతి ఏకబహుపది సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.

సాధన: కావలసిన ఏక బహుపది సమీకరణ: $(x - 2)(x - 3)(x - 6) = 0$

దీన్ని సూక్ష్మీకరిస్తే $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$

ఉదాహరణ 2 : $3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0$ ఘనసమీకరణం యొక్క మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధాలను కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన ఘనసమీకరణం $3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0$

ఈ సమీకరణాన్ని 3తో భాగిస్తే

$$x^3 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{10}{3} = 0 \qquad \text{...(i)}$$

సమీకరణం (1)ని $x^3 - p_1x^2 + p_2x^2 + p_2x + p_3 = 0$, తో పోలిస్తే

$$p_1 = -\frac{10}{3},\ p_2 = \frac{7}{3},\ p_3 = \frac{10}{3}$$

సమీకరణం (1) మూలాలను α, β, γ అనుకొందాం.



అపుడు $\Sigma\alpha = -p_1 = -\left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{3}$

$$\Sigma\alpha\beta = p_2 = \frac{7}{3}$$

ఉదాహరణ 3 : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ సమీకరణం మూలాలు 1, 2, 3, 4 అయితే a, b, c, d ల విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సమీకరణానికి మూలాలు 1, 2, 3, 4 అపుడు

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$$

అంటే $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

x యొక్క సమానఘాతాల గుణకాలను సమీకరిస్తే,

$$a = -10, \quad b = 35, \quad c = -50, \; d = 24.$$

ఉదాహరణ 4: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ సమీకరణం మూలాల వర్గాల మొత్తాన్ని ఘనాల మొత్తాన్ని p, q, r లలో కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తసమీకరణం మూలాలు a, b, c అనుకొందాం.

అపుడు $a + b + c = p, \quad ab + bc + ca = q, \; abc = r.$

మూలాల వర్గాల మొత్తం

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = p^2 - 2q$$

మూలాల ఘనాల మొత్తం

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= p(p^2 - 2q - q) + 3r = p(p^2 - 3q) + 3r.$$

ఉదాహరణ 5: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ మూలాల α, β, γ అనుకొందాం. అపుడు కింది వాటిని కనుకోకండి.

(i) $\Sigma\alpha^2$ (ii) $\Sigma\frac{1}{\alpha}$ (α, β, γ లు శూన్యేతరాలు) (iii) $\Sigma\alpha^3$

సాధన : దత్తసమీకరణానికి మూలాలు α, β, γ అయినందువల్ల

$$\alpha + \beta + \gamma = -p \qquad ...(1)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q \qquad ...(2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -\gamma \qquad ...(3)$$

(i) $\Sigma\alpha^2$ ను కనుక్కోవడానికి

సమీకరణం (1) ని వర్గం చేస్తే

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma) = p^2$$

అంటే $\Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\alpha\beta = p^2$

అంటే $\Sigma\alpha^2 + 2q = p^2$

అందువల్ల $\Sigma\alpha^2 = p^2 - 2q$

(ii) $\Sigma\frac{1}{\alpha}$ ను కనుక్కోవడానికి

$$\Sigma\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

$$= \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{q}{r}$$

(iii) $\Sigma\alpha^3$ ను కనుక్కోవడానికి

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)]$$

అంటే $\Sigma\alpha^3 - 3r = -p(p^2 - 3q)$

అందువల్ల $\Sigma\alpha^3 = 3pq - p^3 + 3r.$

అభ్యాసం 3.5

I 1. కింద ఇచ్చిన మూలాలు గల కనిష్ట తరగతి బహుపది సమీకరణాలను రూపొందించండి.

(i) 1, −1, 3 (ii) 0, 0, 2, 2 −2, −2 (iii) $0, 1, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}$

2. $4x^3 - 6x^2 + 7x + 3 = 0$ సమీకరణమూలాలు α, β, γ అయితే $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ విలువను కనుక్కోండి.

3. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ మూలాలు $1, 1, \alpha$ అయితే α ను కనుక్కోండి.

4. $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ మూలాలు $-1, 2, \alpha$ అయితే α ను కనుక్కోండి.

5. $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ మూలాలు $1, -2, 3$ అయితే aను కనుక్కోండి.

II. 1. ద్విపవర్గసమీకరణం $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ మూలాలు, గుణకాలకు మధ్య సంబంధాన్ని రాయండి. (s_1, s_2, s_3, s_4 లను కనుక్కోండి).

2. ద్వి వర్గ సమీకరణం $6x^4 + 15x^2 + 7x - 10 = 0$ మూలాలు, గుణకాలకు మధ్య సంబంధాన్ని రాయండి.

కీలకపదాలు

- $D < 0$ అయినప్పుడు, వర్గ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ మూలాలు సంకీర్ణాలు మరియు ఒకదానికొకటి సంయుగ్మాలు.
- $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం మూలాలు α, β లు అయిన, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}.$

వర్గసమాసము గుర్తులు :

1. $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గ సమీకరణానికి సంకీర్ణ మూలాలుంటే, 'x' వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు $ax^2 + bx + c$, a లకు గుర్తు ఒకటే.

2. α, β $(\alpha < \beta)$ లు $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ మూలాలైతే

   (i) $\alpha < x < \beta$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c$, a ల గుర్తులు వ్యతిరేకంగాను,

   (ii) $x < \alpha$ లేదా $x > \beta$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c$, a ల గుర్తులు ఒకటిగాను ఉంటాయి.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ వర్గ సమాసం.

   $\frac{4ac - b^2}{4a}$ అనే సంఖ్య

   (i) $a > 0$ అయినపుడు f కు కనిష్ఠ విలువ

   (ii) $a < 0$ అయినపుడు f కు గరిష్ఠ విలువ

4. (i) $a > 0$ అయినపుడు $x = \frac{-b}{2a}$ వద్ద $f(x)$ కు పరమ కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఆ కనిష్ఠ విలువ $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

   (ii) $a < 0$ అయినపుడు $x = \frac{-b}{2a}$ వద్ద $f(x)$ కు పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది. ఆ గరిష్ఠ విలువ $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. $2(a^2 + b^2)x^2 + 2(a + b)x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణము మూలాలు $a \neq b$ అయినప్పుడు, కల్పితాలు అని చూపుము.

2. $ax^2 + b(2x + 1) = 0$ యొక్క మూలాలు కల్పితములు అయినప్పుడు $bx^2 + (b - c)x = c + a - b$ యొక్క మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవాలు అని చూపండి.

3. $2x^2 - 6x + 5 = 0$ మూలాలు α, β లు అయిన, కింద ఇవ్వబడిన మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణాలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$

(iii) $\alpha^2+\beta^2, \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

జవాబులు

అభ్యాసం 3.1

1. (i) $-2\sqrt{3}, \frac{-4}{\sqrt{3}}$ (ii) $a-\sqrt{b}, a+\sqrt{b}$

(iii) $-\frac{ab}{c}, \frac{c}{ab}$ (iv) $3\sqrt{2}, \sqrt{2}$

అభ్యాసం 3.2

1. (i) $\frac{3\pm\sqrt{15}i}{4}$ (ii) $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$

(iii) $\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{43}i}{8}$ (iv) $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{58}i}{6}$

2. $-1, \frac{1}{2}$

అభ్యాసం 3.3

1. (i) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$ (ii) $\frac{(b^2-2ac)^2-2a^2c^2}{c^4}$
2. (i) $25x^2 - 6x + 9 = 0$ (ii) $625x^2 - 90x + 81 = 0$
4. $q^2 - 5p^2 = 0$

అభ్యాసం 3.4

1. $\forall x \in \mathbf{R}$
2. x^2 గుణకం ధనాత్మకం

R లోని అన్ని x విలువలకు

3. $x = \frac{-5}{2}$

4. $x = 1$

5. కనిష్ఠ విలువ = $\frac{32}{3}$

6. గరిష్ఠ విలువ = $\frac{14}{5}$

అంత్యవిలువ = $\frac{14}{5}$

$\frac{2-14}{5} < x < \frac{2+14}{5}$ అయినప్పుడు, $4x - 5x^2 + 2$ గుర్తు ధనాత్మకం.

$x < \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ గానీ, $x > \frac{2+\sqrt{14}}{5}$ గానీ అయినప్పుడు $4x - 5x^2 + 2$ గుర్తు రుణాత్మకం.

9. $\frac{-5}{3} < x < 3$ అయితే, సమాసం ధనాత్మకం $x < \frac{-5}{3}$ లేదా $x > 3$ అయితే, సమాసం రుణాత్మకం. అంత్యవిలువ $\frac{49}{3}$.

అభ్యాసం 3.5

I. 1. (i) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ (ii) $x^6 - 8x^4 + 16x^2 = 0$

(iii) $4x^4 + 12x^3 - x^2 - 15x = 0$

2. $\frac{7}{4}$ 3. 4 4. $-\frac{3}{2}$ 5. -5

II. 1. $s_1 = 2,\ s_2 = 4,\ s_3 = -6,\ s_4 = -21$

2. $s_1 = 0,\ s_2 = 15/6,\ s_3 = -7/6,\ s_4 = -10/6$

సాధనా అభ్యాసం

3. (i) $5x^2 - 8x + 5 = 0$ (ii) $10x^2 - 42x + 49 = 0$

(iii) $25x^2 - 116x + 64 = 0$

అధ్యాయం

4

మాత్రికలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్య పఠనము వలన విద్యార్థి క్రింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- మాత్రికను నిర్వచించుట
- మాత్రిక తరగతి గుర్తించుట
- వివిధ రకాలైన మాత్రికలు – చతురస్ర, అడ్డువరుస, నిలువు వరుస, శూన్య మాత్రికలను నిర్వచించుట.
- ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికల సంకలనము మరియు సాధ్యమయిన సందర్భాలలో రెండు మాత్రికలు లబ్ధమును కనుగొనుట
- మాత్రికా వ్యత్యయము, సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికలను నిర్వచించి, ఉదాహరణలు నిర్వచిస్తారు.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ, సంఖ్యాక వ్యవస్థకు సంబంధించిన జ్ఞానము.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



పరిచయం

మాత్రిక అనే పదాన్ని సిల్వేస్టర్ 1850లో సృష్టించాడు. కాని మాత్రికల విభాగాన్ని 1860లో కేలి ప్రవేశపెట్టారు. మాత్రిక అనగా "అమరిక" లేదా సంఖ్యలు "దీర్ఘచతురస్రాకార శ్రేణి".

మాత్రికలను రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ యొక్క సాధనలో, గిత అర్థశాస్త్రం, క్వాంటం మెకానిక్స్ రవాణా సమస్యలు, మెకానిక్స్ ఫ్రేమ్‌వర్క్‌ల పరిష్కారంలో ఉపయోగిస్తాము.

4.1 మాత్రికలు మరియు వాటిని సూచించు పద్ధతులు

అనిల్ దగ్గర 6 పెన్సిల్స్ కలవు అని చెప్పడానికి మనము [6] లేదా (6) ద్వారా వ్యక్తీకరించవచ్చు. [ ] లోపల వున్న సంఖ్య, అనిల్ దగ్గర ఉన్న పెన్సిల్స్ సంఖ్యను తెలియ చేస్తుంది. తరువాత, అనిల్ దగ్గర 2 పుస్తకాలు మరియు 5 పెన్సిళ్ళు కలవు అని చెప్పుటకు [2, 5] ద్వారా వ్యక్తీకరించవచ్చు. [ ] లోపల గల మొదటి సంఖ్య పుస్తకాల సంఖ్యను, రెండవ సంఖ్య పెన్సిళ్ళ సంఖ్యను తెలియ చేస్తుంది అని అర్థం చేసుకోవచ్చు.

ఇప్పుడు శ్యామ్ మరియు ఇర్‌ఫాన్ అనే ఇద్దరు స్నేహితులను తీసుకొందాం. శ్యామ్ దగ్గర 2 పుస్తకాలు, 4 నోటు పుస్తకాలు, 2 పెన్నులు ఉన్నాయి మరియు ఇర్‌ఫాన్ దగ్గర 3 పుస్తకాలు, 5 నోటు పుస్తకాలు మరియు 3 పెన్నులు ఉన్నాయి అనుకొందాం.

పై దత్తాంశాన్ని అనువుగా క్రింది పట్టిక ద్వారా చూపవచ్చు.

	పుస్తకాలు	నోటుపుస్తకాలు	పెన్నులు
శ్యామ్	2	4	2
ఇర్‌ఫాన్	3	5	3

దీనినే, క్రింది విధంగా సూక్ష్మంగా వ్రాయవచ్చు.

	మొదటి నిలువు వరుస ↓	రెండవ నిలువు వరుస ↓	మూడవ నిలువు వరుస ↓
మొదటి అడ్డువరుస	2	4	2
రెండవ అడ్డు వరుస	3	5	3

పై వర్ణన క్రింది విషయాలను తెలియచేయును.

1. మొదటి మరియు రెండవ అడ్డు వరుసలలోని సంఖ్యలు వరుసగా శ్యామ్ మరియు ఇర్ఫాన్ దగ్గర కల వస్తువుల సంఖ్యను (పుస్తకాలు, నోటు పుస్తకాలు, పెన్నులు) తెలియచేస్తుంది.
2. మొదటి, రెండవ మరియు మూడవ నిలువు వరుసలలోని సంఖ్యలు వరుసగా పుస్తకాల సంఖ్య, నోటు పుస్తకాల సంఖ్య, మరియు పెన్నుల సంఖ్యల తెలియచేస్తుంది.

అంటే, మొదటి అడ్డువరుస మరియు మూడవ నిలువ వరుసలోని సంఖ్య, శ్యామ్ దగ్గర ఉన్న పెన్నుల సంఖ్యను సూచించును.

ఇదేవిధంగా పైన వ్రాసిన సంఖ్యలన్నింటినీ వివరించవచ్చు.

పై దత్తాంశాన్ని / విషయాన్ని క్రింది విధంగా కూడా చూచించవచ్చు.

	శ్యామ్	ఇర్ఫాన్
పుస్తకాలు	2	3
నోటు పుస్తకాలు	4	5
పెన్నులు	2	3

దీనినే మూడు అడ్డువరుసలు, మరియు రెండు నిలువు వరుసలలో క్రింది విధంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు / చూపవచ్చు.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. ఈ అమరికనే 'మాత్రిక' అంటారు.

సాధారణంగా మాత్రికను బ్రాకెట్లలో రాసి, వాటిని ఆంగ్లభాష లోని పెద్ద అక్షరాలు (A, B, X ... etc.,) తో సూచిస్తాము. కావున, పై విషయాన్ని మాత్రిక రూపంలో క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ లేదా } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

గమనిక : 'మాత్రిక' కు బహువచనము 'మాత్రికలు'.

4.1.1 మాత్రిక తరగతి : క్రింది మాత్రికలను గమనించండి. (సంఖ్యల అమరిక)

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) లోని మాత్రికలో రెండు అడ్డు వరుసలు మరియు రెండు నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి. దీనినే 2 బై 2 మాత్రిక లేదా 2×2 తరగతికి చెందిన మాత్రిక అంటారు. దీనినే 2×2 మాత్రిక అని వ్రాస్తాము.

(b) లోని మాత్రికలో మూడు అడ్డువరుసలు మరియు రెండు నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి. దీనినే 3 బై 2 మాత్రిక లేదా 3×2 తరగతికి చెందిన మాత్రిక అంటారు. దీనినే 3×2 మాత్రిక అని వ్రాస్తాము.

(c) లోని మాత్రిక, 3×4 తరగతికి చెందిన మాత్రిక.

ఒక మాత్రికలో ఎన్ని అడ్డువరుసలైనా మరియు ఎన్ని నిలువు వరుసలైనా వుండవచ్చు. మాత్రిక 'A' లో 'm' అడ్డువరుసలు మరియు 'n' నిలువు వరుసలు ఉన్నచో, దీని తరగతి $m \times n$ అంటాం. దీనిని $m \times n$ మాత్రిక అని చదువుతాము.

ప్రతి మూలకంతో పాటు ఉండే రెండు సంఖ్యలు (i, j లు) నిర్ధిష్ట మూలకం యొక్క స్థానాన్ని తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడును. క్రింద తెలిపిన $m \times n$ మాత్రికలో a_{ij} అనేది 'i' వ అడ్డువరుస, 'j' వ నిలువ వరుసలోని మూలకమును తెలియచేయును.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ తరగతికి చెందిన మాత్రికను $A = [a_{ij}]$,

$i = 1, 2, ..., m$, మరియు $j = 1, 2, ... n$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 4.1: క్రింది మాత్రికల తరగతులను వ్రాయుము.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

సాధన :

(i) మాత్రికలో 2 అడ్డువరుసలు మరియు 2 నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి కావున మాత్రిక యొక్క తరగతి 2×2 అవుతుంది.

(ii) మాత్రికలో 3 అడ్డువరుసలు మరియు 1 నిలువు వరుస ఉన్నాయి. కావున మాత్రిక యొక్క తరగతి 3×1

(iii) మాత్రికలో 1 అడ్డువరుస 3 నిలువు వరుసలున్నాయి. కావున మాత్రిక యొక్క తరగతి 1×3

(iv) మాత్రికలో 2 అడ్డువరుసలు 3 నిలువు వరుసలున్నాయి. కావున మాత్రిక యొక్క తరగతి 2×3

ఉదాహరణ : 4.2: మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ కి, క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(i) A యొక్క తరగతిని కనుక్కోండి.

(ii) A లోని మూలకాల సంఖ్యను వ్రాయండి.

(iii) A లోని మూలకాలు a_{23}, a_{32}, a_{14} మరియు a_{34} లను వ్రాయండి.

(iv) '3' అను ప్రతీ మూలకాన్ని (A కి చెందిన), a_{ij} రూపంలో వ్యక్తపరుచుము.

సాధన : (i) A లో 3 అడ్డువరుసలు, 4 నిలువు వరుసలు ఉన్నవి కావున 'A' యొక్క తరగతి 3×4.

(ii) A లోని మూలకాల సంఖ్య $3 \times 4 = 12$

(iii) $a_{23} = 2,\ a_{32} = 2, a_{14} = 4$ మరియు $a_{34} = 6.$

(iv) a_{22}, a_{31} మరియు $a_{33}.$

ఉదాహరణ. 4.3 : 2×3 తరగతి మాత్రిక 'A' లోని i-వ అడ్డువరుస, 'j'-వ నిలువు వరుస లోని వరుసలోని మూలకము $\frac{i+2j}{2}$ అయినచో, మాత్రిక 'A' ను వ్రాయుము.

సాధన : ఇచ్చట $a_{ij} = \frac{i+2j}{2}$ (ఇచ్చినది)

$$a_{11} = \frac{1+2\times1}{2} = \frac{3}{2}.,\qquad a_{12} = \frac{1+2\times2}{2} = \frac{5}{2}.,\qquad a_{13} = \frac{1+2\times3}{2} = \frac{7}{2}.,$$

$$a_{21} = \frac{2+2\times1}{2} = 2.,\qquad a_{22} = \frac{2+2\times2}{2} = 3.,\qquad a_{23} = \frac{2+2\times3}{2} = 4.,$$

కావున $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 & 7/2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

ఉదాహరణ 4.4 : A మరియు B అను రెండు దుకాణాలు కలవు. దుకాణము 'A' నందు 120 చొక్కాలు, 100 ట్రోజర్లు మరియు 50 కార్డిగన్‌లు కలవు. దుకాణము 'B' నందు 200 చొక్కాలు, 150 ట్రోజర్లు. మరియు 100 కార్డిగన్‌లు కలవు. ఈ దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలోను, మరియు మాత్రిక రూపంలోను వ్యక్త పరచండి.

సాధన :

పట్టికరూపం .1

	చొక్కాలు	ట్రోజర్లు	కార్డగన్‌లు
దుకాణం A	120	100	50
దుకాణం B	200	150	100

మాత్రిక రూపం $\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & 100 & 50 \\ 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$

పట్టికరూపం. 2

	దుకాణం A	దుకాణం B
చొక్కాలు	120	200
ట్రోజర్లు	100	150
కార్డిగన్‌లు	50	100

మాత్రిక రూపం $\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & 200 \\ 100 & 150 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}$

అభ్యాసం 4.1

1. A మరియు B అను ఇద్దరు విద్యార్థులు మూడు పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులను కింది పట్టికలో ఇచ్చారు. దీనిని రెండు విధాలుగా మాత్రిక రూపంలో తెల్పుము.

	పరీక్ష 1	పరీక్ష 2	పరీక్ష 3
A	56	65	71
B	29	37	57

2. X, Y మరియు Z అను మూడు సంస్థలు వరుసగా 40, 35, 25 ట్రక్కుల రాళ్ళలోడ్లును, మరియు 10, 5, 8 ట్రక్కుల ఇసుక లోడ్లును ఒక కంట్రాక్టరుకు పంపినవి. దీనిని మాత్రిక రూపంలో, రెండు విధాలుగా తెల్పుము.

3. 'P' అనే కుటుంబంలో 4గురు పురుషులు, 6గురు స్త్రీలు మరియు 3 మంది పిల్లలు ఉన్నారు. 'Q' అనే కుటుంబంలో 4గురు పురుషులు, 3 మంది స్త్రీలు మరియు 5 మంది పిల్లలు ఉన్నారు. ఈ దత్తాంశాన్ని 2 × 3 తరగతి మాత్రికగా వ్యక్తపరచండి.

4. క్రింది మాత్రికలలో ఎన్ని మూలకాలు కలవు ?

   (a) 2 × 3 మాత్రిక (b) 3×4 మాత్రిక (c) 4×2 మాత్రిక

   (d) 6 × 2 మాత్రిక (e) a × b మాత్రిక (f) $m \times n$ మాత్రిక

5. క్రింది మూలకాల సంఖ్యను కల్గిన మాత్రికలను ఎన్ని రకాల తరగతులు గల మాత్రికలుగా వ్రాయవచ్చు ?

   (a) 8 మూలకాలు (b) 5 మూలకాలు (c) 12 మూలకాలు

   (d) 16 మూలకాలు

6. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & -3 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన,

   (a) అడ్డువరుసల సంఖ్య

   (b) నిలువు వరుసల సంఖ్య

(c) మాత్రిక 'A' తరగతి

(d) 'A' లోని మూలకాల సంఖ్య

(e) మూలకాలు $a_{14}, a_{23}, a_{34}, a_{45}$ మరియు a_{33} లను కనుక్కోండి.

7. i-వ అడ్డువరుస, j-వ నిలువు వరుసలోని మూలకాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతీ సందర్భంలో 3×3 తరగతి మాత్రికను నిర్మించండి.

(a) $i - j$ (b) $\frac{i^2}{j}$ (c) $\frac{(i+2j)^2}{2}$ (d) $3j - 2i$

8. i-వ అడ్డువరుస, j-వ నిలువ వరుసలోని మూలకాలు క్రింద ఇచ్చారు. ప్రతీ సందర్భంలో 3×2 తరగతి మాత్రికను నిర్మించండి.

(a) $i + 3j$ (b) $5 \,.\, i \,.\, j$ (c) i^j (d) $i + j - 2$

4.2 మాత్రికల రకాలు

అడ్డువరుస మాత్రిక లేదా పంక్తి మాత్రిక : ఒకే అడ్డు వరుస ఉన్న మాత్రికను అడ్డువరుస మాత్రిక అంటారు. ఎన్ని నిలువు వరుసలైనా ఉండవచ్చు. ఉదా॥ $\begin{bmatrix}1 & 6 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ అనేది ఒక అడ్డువరుస మాత్రిక. ఒక అడ్డువరుస మాత్రిక తరగతి $1 \times n$.

నిలువు వరుస మాత్రిక లేదా దొంతి మాత్రిక : ఒకే నిలువు వరుస ఉన్న మాత్రికను నిలువు వరుస మాత్రిక అంటారు. ఎన్ని అడ్డువరుసలైనా ఉండవచ్చు. ఉదా॥ $\begin{bmatrix}2\\3\\0\\7\end{bmatrix}$

ఒక నిలువు వరుస మాత్రిక తరగతి $m \times 1$.

చతురస్ర మాత్రిక : అడ్డువరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానంగా గల మాత్రికను చతురస్రమాత్రిక అంటారు.

ఉదా॥ చతురస్ర మాత్రిక $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 6 & 1\\3 & 4 & 2\end{bmatrix}$ నందు 3 అడ్డువరుసలు, 3 నిలువు వరుసలు ఉన్నవి.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక తరగతి '$n \times n$' లేదా సూక్ష్మంగా 'n'.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక వికర్ణము అంటే మొదటి అడ్డువరుసలో మొదటి మూలకం నుంచి చివరి అడ్డువరుసలో చివరి మూలకం వరకు గల వికర్ణాన్ని, ప్రధాన వికర్ణము అంటారు.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ యొక్క ప్రధాన వికర్ణము లోని మూలకాలు 2, 1, 9.

గమనిక : $A = [a_{ij}]$ ఒక $m \times n$ మాత్రిక అయినచో, దానిలోని ప్రధాన వికర్ణము యొక్క మూలకాలు

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$. .

దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక : అడ్డువరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానం కాకపోతే, అట్టి మాత్రికను దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక అంటారు.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ అనేది 3 అడ్డువరుసలు, 4 నిలువు వరుసలు గల దీర్ఘచతురస్ర మాత్రిక.

$1 \times n$ ($n \neq 1$) తరగతికి చెందిన అడ్డువరుస మాత్రిక, $m \times 1$ ($m \neq 1$) తరగతికి చెందిన నిలువు వరుస మాత్రికలు, దీర్ఘచతురస్ర మాత్రికలు.

శూన్యమాత్రిక : ఒక మాత్రిక లోని ప్రతీ మూలకం సున్న అయితే, ఆ మాత్రికను శూన్యమాత్రిక అంటారు.

$$[0 \quad 0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

లు శూన్య మాత్రికలు. శూన్య మాత్రికను '**0**' తో సూచిస్తారు.

గమనిక : శూన్యమాత్రిక ఏదో ఒక $m \times n$ తరగతికి చెందినది కావచ్చు.

వికర్ణ మాత్రిక : ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణంలో లేని మూలకాలన్నీ సున్నాలైతే, ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అంటారు.

ఉదా॥ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ లు వికర్ణ మాత్రికలు

గమనిక : వికర్ణమాత్రిక $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ను $A = [a_{11}, a_{12}, a_{13}....., a_{nm}]$ తో సూచిస్తారు.

అదిశా మాత్రిక : ఒక వికర్ణ మాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలన్నీ ఒక శూన్యేతర సంఖ్య 'K' కు సమానమైనచో ఆ మాత్రికను అదిశా మాత్రిక అంటారు. ఉదా॥

$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ఒక అదిశా మాత్రిక.

గమనిక : ఒక శూన్య చతురస్రమాత్రిక, సంఖ్యామాత్రిక కాదు.

యూనిట్ (లేదా) తత్సమ మాత్రిక : ఒక సంఖ్య మాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు అన్నీ '1' కి సమానమైతే ఆ మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక అంటాం.

'n' వ తరగతికి చెందిన యూనిట్ మాత్రికను I_n తో సూచిస్తారు.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ అనునది 3వ తరగతికి చెందిన యూనిట్ మాత్రిక. ఇది I_3.

గమనిక : $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ అయిన} \\ 1, & i = j \text{ అయిన} \end{cases}$, ఒక చతురస్ర మాత్రిక $A = [a_{ij}]$ యూనిట్ మాత్రిక అగును.

సమాన మాత్రికలు : రెండు మాత్రికల యొక్క తరగతులు సమానమై వాటిలోని అనురూప స్థానాలలోని మూలకాలు సమానమైతే, వాటిని సమాన మాత్రికలు అంటారు.

మాత్రిక 'A' తరగతి $m \times n$, మరియు 'B' మాత్రిక తరగతి $p \times r$ అయి, $A = B$ కావలెనంటే

If $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ then

$A = B$ if $a_{ij} = b_{ij}$ for $i = 1, 2, ...$ $j = 1, 2, 3.$

$X = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ మాత్రికలు సమానము కావు.

ఎందుచేతనంటే, వాటి పరిమాణాలు వేరు కావున, అంటే X, Y ల పరిమాణాలు వరుసగా 2×3 మరియు 3×2.

మరియు $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ మాత్రికలలోని కొన్ని అనురూప స్థానాలలోని మూలకాలు సమానము కావు, కాబట్టి P, Q లు సమాన మాత్రికలు కావు.

ఉదాహరణ 4.5: క్రింది మాత్రికలు సమానమా ? సమానము కాదా? కనుక్కోండి.

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

సాధన: (i) A, B మాత్రికల పరిమాణములు సమానము అయిననూ, వాటిలోని కొన్ని అనురూప స్థానములలో గల మూలకాలు సమానము కావు కాబట్టి $A \neq B$.

(ii) P, Q మాత్రికల పరిమాణములు వేరు కావున $P \neq Q$.

(iii) X, Y మాత్రికల తరగతులు సమానము మరియు వాటి యొక్క అనురూప స్థానాలలోని మూలకాలు సమానము కావున $X = Y$.

ఉదాహరణ : 4.6 : క్రింది సందర్భాలలో x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix} x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

సాధన: రెండు మాత్రికలు సమానము కావున, వాటి లోని అనురూప స్థానాలలో గల మూలకాలు సమానము.

(i) $x = 2$

(ii) $x = 4, y = 3$

(iii) $x = 1, y = -5$

ఉదాహరణ 4.7 : a, b, c మరియు d ల యొక్క ఏ విలువలకు క్రింది మాత్రికలు సమానము అగును?

(i) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 3c & d \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 5c & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} a & b-2d \\ -3 & 2b \\ a+c & 7 \end{bmatrix}, \ \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

సాధన: (i) రెండు మాత్రికలు సమానము కావలెనంటే, వాటిలోని అనురూప మూలకాలు సమానము కావలెను.

$a = 1, 2b = 4, 3 = 5c$ మరియు $d = 2$

$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = \frac{3}{5}$ మరియు $d = 2$

కాబట్టి $a = 1, b = 2, c = \frac{3}{5}$ మరియు $d = 2$

(ii) P, Q మాత్రికలు సమానము కావలెనంటే, వాటిలోని సదృశ మూలకాలు సమానము కావలెను. అంటే,

$a = 5, \ b - 2d = 1, 2b = 6$ మరియు $a + c = 4$

$\Rightarrow a = 5, b = 3, c = -1$ మరియు $d = 1$

కాబట్టి $a = 5, b = 3, c = -1$ మరియు $d = 1$ లకు P, Q లు సమానము.

అభ్యాసం 4.2

1. కింది మాత్రికలలో ఏవి

   (a) అడ్డువరుస మాత్రికలు (b) నిలువు వరుస మాత్రికలు

   (c) చతురస్ర మాత్రికలు (d) వికర్ణ మాత్రికలు

   (e) సంఖ్యామాత్రికలు (f) యూనిట్ మాత్రికలు (g) శూన్య మాత్రికలు

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\7\\8\\0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&9&8\\1&0&2\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}3&4&10&8\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}2&3&7\\1&4&9\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\\-1&0\end{bmatrix}$$

2. క్రింది సందర్భాలలో a, b, c మరియు d విలువలను కనుక్కోండి.

   (a) $\begin{bmatrix}b&2c\\b+d&c-2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&12\\8&2\end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix}a+2&4\\b+3&25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2c\\6&5d\end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix}2a&b\\-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\d&3c\end{bmatrix}$

3. 1×2 తరగతి మాత్రిక, 2×1 తరగతి మాత్రికకు సమానమగునా?

4. 2×3 తరగతి మాత్రిక, 3×3 తరగతి మాత్రికకు సమానమగునా?

4.3 ఒక అదిశ చేత మాత్రికను గుణించడం

కింది సందర్భాన్ని పరిశీలిస్తాము.

ఆంగ్లము, హిందీ మరియు గణిత శాస్త్రము లందు ముగ్గురు విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

	ఆంగ్లము	హిందీ	గణితము
ఎలిజబెత్	20	10	15
ఉషా	22	25	27
షబ్‌నమ్	17	25	21

పైన విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు, గరిష్ఠ మార్కులు 30కి గాను పొందినవి. పై దత్తాంశాన్ని క్రింది విధంగా మాత్రికలో పొందుపరచాము.

$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 22 & 25 & 27 \\ 17 & 25 & 21 \end{bmatrix}$ అడ్డువరుసలు విద్యార్థుల పేర్లను, నిలువు వరుసలు సబ్జక్టులను సూచించును.

గరిష్ఠ మార్కులను రెండు రెట్లు చేసినచో, బాలికలు సాధించిన మార్కులు కూడా రెండు రెట్లు అగును. క్రొత్తగా పెరిగిన మార్కులను కింది విధంగా మాత్రికలో సూచిస్తారు.

$$\begin{bmatrix} 2\times20 & 2\times10 & 2\times15 \\ 2\times22 & 2\times25 & 2\times27 \\ 2\times17 & 2\times25 & 2\times21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 44 & 50 & 54 \\ 34 & 50 & 42 \end{bmatrix}$$

కావున దీనిని క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$2\times\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 22 & 25 & 27 \\ 17 & 25 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times20 & 2\times10 & 2\times15 \\ 2\times22 & 2\times25 & 2\times27 \\ 2\times17 & 2\times25 & 2\times21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 44 & 50 & 54 \\ 34 & 50 & 42 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు మరొక మాత్రిక A ను తీసుకొందాం.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

పై మాత్రిక Aను '5' చే గుణిస్తే ఏమి వస్తుందో, చూద్దాము.

$$5 \times A = 5A = 5 \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 3 & 5\times 2 \\ 5\times(-2) & 5\times 0 \\ 5\times 1 & 5\times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ -10 & 0 \\ 5 & 30 \end{bmatrix}$$

ఒక మాత్రికను ఏదైనా అదిశతో గుణించవలెనంటే, ఆ మాత్రిక లోని ప్రతీ మూలకాలన్నీ, అదే అదిశతో గుణించాలి.

ఉదాహరణకు,

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన, $kA = \begin{bmatrix} k\times 2 & k\times(-1) \\ k\times 6 & k\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ 6k & 3k \end{bmatrix}$

$k = -1$ అయిన, $kA = (-1)A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

కావున $(-1)A = -A$

కాబట్టి $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన $-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$.

ఉదాహరణ 4.8: $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన, కింది వాటిని కనుక్కోండి.

(i) $2A$ (ii) $\frac{1}{2}A$ (iii) $-A$ (iv) $\frac{2}{3}A$

సాధన :

(i) ఇచ్చట $2A = 2 \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-2) & 2\times 3 & 2\times 4 \\ 2\times(-1) & 2\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times(-2) & \frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 4\\ \frac{1}{2}\times(-1) & \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2} & 2\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(iii) $-A = (-1)\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3 & -4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

(iv) $\frac{2}{3}A = \frac{2}{3}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{3}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

అభ్యాసం 4.3

1. $A = \begin{bmatrix}7 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

   (a) $4A$ (b) $-A$ (c) $\frac{1}{2}A$ (d) $-\frac{3}{2}A$

2. $A = \begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ అయిన కింది వాటిని కనుగొనుము.

   (a) $5A$ (b) $-3A$ (c) $\frac{1}{3}A$ (d) $-\frac{1}{2}A$

3. $A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ అయిన $(-7)A$ వాటిని కనుక్కోండి.

4. $X = \begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}$ అయిన, కింది విలువను కనుక్కోండి.

   (a) $5X$ (b) $-4X$ (c) $\frac{1}{3}X$ (d) $-\frac{1}{2}X$

5. 'A' యొక్క వ్యత్యయము 'A'' ను కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. ఏదేని మాత్రిక A కు, $(A')' = A$ అని నిరూపించుము.

7. క్రింది మాత్రికలు అన్నియూ సౌష్ఠవ మాత్రికలు అని చూపుము.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. క్రింది మాత్రికలు అన్నియూ, ప్రతి సౌష్ఠవ మాత్రికలు అని చూపుము.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

4.4 మాత్రికల సంకలనము

A, B విద్యార్థులు గణితము, భౌతికశాస్త్రం మరియు ఆంగ్లములలో రెండు పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులను పోల్చితిరి. ప్రతి సబ్జక్టు మరియు ప్రతీ పరీక్ష నందు గరిష్ఠ మార్కులు 50. వారు సాధించిన మార్కులను క్రింద ఇచ్చారు.

	మొదటి పరీక్ష			రెండవ పరీక్ష		
	M	P	E	M	P	E
A	50	38	33	45	32	30
B	47	40	36	42	30	39

రెండు పరీక్షలలో కలిపి, ప్రతీ సబ్జక్టు నందు వారికి వచ్చిన మొత్తము మార్కులను ఎలా కనుక్కొంటారు?

రెండు మాత్రికలను కలుపగా వచ్చిన క్రొత్త మాత్రికను గమనించండి.

$$\begin{matrix} & M & P & E \\ A \\ B \end{matrix}\begin{bmatrix} 50+45 & 38+32 & 33+30 \\ 47+42 & 40+30 & 36+39 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & M & P & E \\ A \\ B \end{matrix}\begin{bmatrix} 95 & 70 & 63 \\ 89 & 70 & 75 \end{bmatrix}$$

పై కొత్త మాత్రికను, రెండు మాత్రికల యొక్క సంకలన మాత్రిక అంటాం.

A, B లు ఒకే తరగతికి చెందిన రెండు మాత్రికలు అయినచో, A, B లలో అనురూప స్థానాలలో వున్న మూలకాలను కలిపి అదే అనురూప స్థానంలో రాస్తే ఏర్పడే మాత్రిక C ని 'A, B ల సంకలనం (మొత్తం)' అంటాం. దీనిని $C = A + B$ తో సూచిస్తాం.

If $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ and $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ then $A + B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$

where $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

గమనికలు : 1. మాత్రిక 'C' యొక్క తరగతి, A, B మాత్రికల తరగతులు సమానము.

2. రెండు మాత్రికల తరగతులు వేరు అయిన, వాటిని సంకలనం చేయలేము.

ఉదాహరణ 4.9: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ అయిన $A + B$ ని కనుక్కోండి.

సాధన : A, B మాత్రికల తరగతులు సమానము (i.e., 2×2) కావున వాటిని కూడవచ్చు.

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+5 & 3+2 \\ 4+1 & 2+0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ఉదాహరణ 4.10: $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ అయిన, A + B ని కనుక్కోండి.

సాధన: A, B మాత్రికల తరగతులు సమానము (i.e., 2 × 3) కావున వాటిని కూడవచ్చు.

$$A+B=\begin{bmatrix}0+3 & 1+0 & -1+4\\ 2+1 & 3+2 & 0+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}.$$

4.4.1 మాత్రికల సంకలన ధర్మాలు :

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$ లు ఒకే తరగతి మాత్రికలయిన, మాత్రికల సంకలనం కింది ధర్మాలను పాటిస్తుంది.

(i) వినిమయ ధర్మం

$$A+B=B+A$$

ఇప్పుడు $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$

$= [b_{ij}] + [a_{ij}]$

$= B + A.$

A, B ఒకే తరగతి మాత్రికలయిన, $A + B = B + A$

i.e., మాత్రికల సంకలనం వినిమయం.

(ii) సాహచర్య ధర్మం

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

ఇప్పుడు $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$$= [\,a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$$

$$= [(\,a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$$

$$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]$$

$$= [\,a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$$

$$= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}]$$

$$= [\,a_{ij}\,] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$$

$$= \mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C})$$

A, B మరియు C లు ఒకే తరగతి మాత్రికలయిన

$$\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C}$$

i.e., మాత్రికల సంకలనం సాహచర్య ధర్మాన్ని పాటిస్తుంది.

(iii) సంకలన తత్సమం

A ఒక $m \times n$ మాత్రిక, 0 ఒక శూన్య మాత్రిక $(m \times n)$ అయితే, $\mathrm{A} + 0 = 0 + \mathrm{A} = \mathrm{A}$.
0 ను $m \times n$ మాత్రికల సమితిలో సంకలన తత్సమం అంటాము.

i.e., $\mathrm{A} + 0 = 0 + \mathrm{A} = \mathrm{A}$.

ఉదాహరణ 4.11:

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ అయినచో,

(a) $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ (b) $\mathrm{B} + \mathrm{C}$ (c) $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C}$ (d) $\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C})$

లను కనుగొనుము.

సాధన :

$$\text{(a)}\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-3) & 0+1 \\ 1+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) $B + C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-3)+(-1) & 1+0 \\ 1+0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $(A + B)+C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ... (a) నుంచి

$= \begin{bmatrix} (-1)+(-1) & 1+0 \\ 2+0 & 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

(d) $A + (B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ... (b) నుంచి

$= \begin{bmatrix} 2+(-4) & 0+1 \\ 1+1 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

ఉదాహరణ 4.12 : $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ అయినచో

(a) $A + O$ (b) $O + A$ లను కనుక్కోండి. ఏమి గమనించితిరి ?

సాధన: (a) $A + O = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2+0 & 3+0 & 5+0 \\ 1+0 & -1+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+(-2) & 0+3 & 0+5 \\ 0+1 & 0+(-1) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(a) మరియు (b) ల నుంచి $A + O = O + A = A$ అని చూడవచ్చును.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం

నోట్స్

4.5 మాత్రికల వ్యవకలనము

A మరియు B లు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలు అనుకొందాం. $A - B$ అనేది A నుంచి B ని తీసివేయడం. మాత్రిక B లోని మూలకాలను మాత్రిక A లోని అనురూప స్థానాలలోని మూలకాల నుంచి తీసివేయగా వచ్చు మాత్రిక $A - B$ అగును.

$A - B = A + (-B)$ గా వ్రాయవచ్చు.

గమనిక : $A = B$ అయినప్పుడు తప్ప, $A - B$ మరియు $B - A$ లు ఒకే మాత్రికను సూచించవు.

ఉదాహరణ: 4.13 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ అయిన

(a) $A - B$ (b) $B - A$ లను కనుగొనుము

(a) $A - B = A + (-B)$ అని తెలుసు. ...(i)

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ కావున $-B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

(i) లో దీనిని ప్రతిక్షేపించగా,

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-3) & 0+(-2) \\ 2+(-1) & (-1)+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(b) ఇదేవిధంగా

$$B - A = B + (-A)$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+(-1) & 2+0 \\ 1+(-2) & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

రిమార్కులు : $A-B$ ను రాబట్టుటకు, B లోని మూలకాలను A లోని అనురూప స్థానాలలో గల మూలకాల నుంచి తీసివేస్తాం. అలా

$$A-B=\begin{bmatrix}1-3 & 0-2\\ 2-1 & -1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

మరియు $B-A=\begin{bmatrix}3-1 & 2-0\\ 1-2 & 4-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

ఉదాహరణ 4.14: (a) $A-B$ (b) $B-A$ లను క్రింది A, B లకు కనుక్కోండి.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ -1 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

సాధన: (a) $A-B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2-0 & 4-3\\ 5-5 & 7-(-2)\\ -1-3 & 4-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 9\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$

(b) $B-A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0-2 & 3-4\\ 5-5 & -2-7\\ 3-(-1) & 1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -9\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

రిమార్కులు : పై ఉదాహరణల ద్వారా, మాత్రికల వ్యత్యయము వినిమయము కాదు అని నిశ్చయించవచ్చు.

ఉదాహరణ. 4.15: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ మరియు $A + B = 0$ అయిన 'B' ని కనుక్కోండి.

$A + B = 0$ అని ఇచ్చినారు.

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2+a & 3+b \\ -1+c & 4+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + a = 0 \quad ; \quad 3 + b = 0$$
$$-1 + c = 0 \quad ; \quad 4 + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -2;\ b = -3;\ c = 1 \text{ మరియు } d = -4$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

రిమార్కులు : ఉదాహరణ 3.15 నుంచి మనకు 'B' లోని మూలకాలు 'A' లోని అనురూప స్థానాలలో గల మూలకాల యొక్క సంకలన విలోమాలు అగును. కావున, 'B' ని మాత్రిక 'A' యొక్క సంకలన విలోమము అంటాం. ఇంకనూ

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = (-1) \times A = -A$$

సాధరణంగా, ఏదైనా దత్త మాత్రిక 'A' కు $A + B = 0$ అయ్యే విధంగా ఒక మాత్రిక $B = (-1)A$ వ్యవస్థితమగును. ఇచ్చట 'B' ని మాత్రిక 'A' యొక్క సంకలన విలోమము అంటారు.

అభ్యాసం 4.4

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ అయినచో క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

   (a) $A + B$ (b) $2A + B$ (c) $A + 3B$ (d) $2A + 3B$

2. $P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, అయిన, క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

   (a) $P - Q$ (b) $Q - P$ (c) $P - 2Q$ (d) $2Q - 3P$

3. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 0\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}$ అయిన కింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $A+B$ (b) $A-B$ (c) $-A+B$ (d) $3A+2B$

4. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ అయిన, $A+0=A$ని సంతృప్తి పరచే విధంగా శూన్య మాత్రిక '0'ను కనుక్కోండి.

5. $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$ అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $-A$ (b) $A+(-A)$ (c) $(-A)+A$

6. $A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ అయితే క్రింది మాత్రికలను కనుక్కోండి.

(a) $2A$ (b) $3B$ (c) $2A+3B$ (d) $2A+3B+5X=0$, అయినచో $X=?$

7. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ అయినచో క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) A' (b) B' (c) $A+B$ (d) $(A+B)'$ (e) $A'+B'$

ఏమి గమనించితిరి?

8. $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ మరియు $C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ అయిన కింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $A-B$ (b) $B-C$ (c) $A-C$ (d) $3B-2C$
(e) $A-B-C$
(f) $2A-B-3C$

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



4.6 మాత్రికల గుణకారము / లబ్ధము

సలీనా మరియు రాఖీలు స్నేహితులు. సలీనా, 17 కేజీల గోధుమ, 3 కేజీల ధాన్యం, మరియు 250 గ్రాల నెయ్యిని కొనాలనుకొంది; రాఖి, 15 కేజిల గోధుమ, 2 కేజీల ధాన్యం మరియు 500 గ్రా. ల నెయ్యిని కొనాలనుకొంది. గోధుమ, ధాన్యం మరియు నెయ్యిల విలువలు 1కెజీకి వరుసగా రూ. 8.00, రూ. 27.00 మరియు రూ. 90.00. ఒక్కొక్కరు ఎంత డబ్బు వెచ్చించాలి ?

సలీనా మరియు రాఖిలకు అవసరమయిన డబ్బు క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

సలీనా : 17 కేజీల గోధుమ విలువ $\Rightarrow 17 \times$ రూ. 8 = రూ. 136.00

3 కేజీల ధాన్యం విలువ $\Rightarrow 3 \times$ రూ. 27 = రూ. 81.00

250 గ్రా. ల నెయ్యి విలువ $\Rightarrow \frac{1}{4} \times$ రూ. 90 = రూ. 22.50

మొత్తం = రూ. 239.50

రాఖి : 15 కేజీల గోధుమల విలువ $\Rightarrow 15 \times$ రూ. 8 = రూ. 120.00

2 కేజీల ధాన్యం విలువ $\Rightarrow 2 \times$ రూ. 27 = రూ. 54.00

500 గ్రా. ల నెయ్యి విలువ $\Rightarrow \frac{1}{2} \times$ రూ. 90 = రూ. 45.00

మొత్తం = రూ. 219.00 లు

పై విషయాన్ని మాత్రిక రూపంలో క్రింది విధంగా సూచించవచ్చు.

కావలసినవి విలువ అవసరమగు ధనము

$$\begin{bmatrix} \text{గోధుమ} & \text{ధాన్యం} & \text{నెయ్యి} \\ 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \\ 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17\times 8+3\times 27+0.250\times 90 \\ 15\times 8+2\times 27+0.500\times 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 \\ 219.00 \end{bmatrix}$$

మరొక అంగడి నందు క్రింద సూచించిన రేట్లు గలవు.

1 కేజీ గోధుమ : రూ. 9, 1. కెజీ ధాన్యం : రూ. 26; 1 కేజీ నెయ్యి = 100 రూ.

పై అంగడి నుంచి అవసరమగు వాటిని కొనుటకు సలీన మారియు రాఖి క్రింది విధముగా వెచ్చించవలెను.

సలీనా : 17 కేజీల గోధుమ $\Rightarrow 17 \times$ రూ. 9 = రూ. 153.00

3 కేజీల ధాన్యం $\Rightarrow 3 \times$ రూ. 26 = రూ. 78.00

250 గ్రా. ల నెయ్యి $\Rightarrow \frac{1}{4} \times$ రూ. 100 = రూ. 25.00

మొత్తం = రూ. 256.00

రాఖి : 15 కేజీల గోధుమ $\Rightarrow 15 \times$ రూ. 9 = రూ. 135.00

2 కేజీల ధాన్యం $\Rightarrow 2 \times$ రూ. 26 = రూ. 52.00

500 గ్రా. ల నెయ్యి $\Rightarrow \frac{1}{2} \times$ రూ. 100 = రూ. 50.00

మొత్తం = రూ. 237.00

పై విషయాన్ని మాత్రిక రూపంలో క్రింది విధంగా రాయవచ్చు.

కావలసినవి విలువ అవసరమగు ధనము

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.00 \\ 26.00 \\ 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17\times9+3\times26+0.250\times100 \\ 15\times9+2\times26+0.500\times100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256.00 \\ 237.00 \end{bmatrix}$$

పోల్చి చూచుటకు పై రెండు విషయాలను కలిపి క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.00 & 9.00 \\ 27.00 & 26.00 \\ 90.00 & 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 & 256.00 \\ 219.00 & 237.00 \end{bmatrix}$$

ఈ లబ్ధమును ఎలా మరియు ఎప్పుడు రాస్తామో చూద్దాం.

(i) మొదటి మాత్రికలోని 1వ అడ్డువరుస లోని మూడు మూలకాలను, రెండవ మాత్రకిలోని 1వ నిలువు వరుసలోని సంబంధిత మూలకాలతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాల మొత్తం, లబ్ధ మాత్రికలోని మొదటి అడ్డు వరుస, మొదటి నిలువు వరుసలోని మూలకము వచ్చును. ఇదేవిధంగా, మొదటి మాత్రికలోని 2వ అడ్డువరుసలోని మూలకాలను, రెండవ మాత్రికలోని 1వ నిలువు వరుస లోని సంబంధిత మూలకాలలో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాల మొత్తం, లబ్ధ మాత్రికలోని 2వ అడ్డువరుస, 1వ నిలువు వరుసలోని మూలకం వస్తుంది. .....

(ii) మొదటి మాత్రికలోని నిలువు వరుసల సంఖ్య, రెండవ మాత్రికలోని అడ్డువరుసల సంఖ్య సమానము అయితేనే, మొదటి మాత్రికను, రెండవ మాత్రికతో గుణించవచ్చు.

కావున $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$ అయిన

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 \end{bmatrix}$$

నిర్వచనము : A, B మాత్రికల తరగతులు వరుసగా $m \times p$ మరియు $p \times n$ అయినప్పుడు, వాటి లబ్ధ మాత్రిక C తరగతి $m \times n$ అగును; మరియు a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} లు వరుసగా i-వ అడ్డువరుస, j-వ నిలువు వరుసలలో గల, మాత్రికలు A, B, C లలోని మూలకాలు అయిన,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,, \qquad 1 < i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n.$$

ఉదాహరణ 4.16: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

(a) AB (b) BA మరియు AB = BA అగునా?

సాధన : A తరగతి 1 × 3

B తరగతి 3 × 1

∴ A లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య = B లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య

∴ AB వ్యవస్థితము.

ఇప్పుడు $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= [1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 2 \times 2] = [-2 + 0 + 4] = [2]$

కావున, $AB = [2]$ అనేది 1×1 తరగతికి చెందిన మాత్రిక.

మరియు B లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య = A లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య

$\therefore$ BA వ్యవస్థితము.

ఇప్పుడు $BA = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2\times1 & (-2)\times(-1) & (-2)\times2 \\ 0\times1 & 0\times(-1) & 0\times2 \\ 2\times1 & 2\times(-1) & 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

కావున $BA = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ అనేది 3×3 తరగతికి చెందిన మాత్రిక

పై నుంచి $AB \neq BA$ అని కనుగొంటిమి.

ఉదాహరణ 4.17: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ అయిన AB ని కనుక్కోండి.

సాధన: A లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య = B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్య

$\therefore$ AB వ్యవస్థితము.

ఇప్పుడు $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times1}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+2\times1 \\ 3\times3+(-1)\times1 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

రిమార్కులు : మనము BA ని కనుగొనగలమా? సమాధానము. 'కనుక్కోలేము'. ఎందుచేతనంటే, B లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య, A లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము కాదు.

ఉదాహరణ. 4.18: క్రింది A, B లకు సాధ్యమయినచో, AB మరియు BA లను కనుగొనుము.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

సాధన : ఇచ్చట A లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య $\neq$ B లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య.

$\therefore$ AB వ్యవస్థితము కాదు.

ఇంకనూ, B లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య $\neq$ A లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య.

$\therefore$ BA వ్యవస్థితము కాదు.

ఉదాహరణ 4.19 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, అయినచో AB మరియు BA లను కనుగొనుము. మరియు AB = BA అగునేమో కనుక్కోండి.

సాధన: ఇక్కడ A లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య = B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్య

$\therefore$ AB వ్యవస్థితమగును

ఇంకనూ, B లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య = A లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్య

$\therefore$ BA వ్యవస్థితమగును.

ఇప్పుడు $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times2+2\times2 & 1\times1+2\times2 \\ -1\times2+0\times2 & -1\times1+0\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4 & 1+4 \\ -2+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

మరియు $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1+1\times(-1) & 2\times2+1\times0 \\ 2\times1+2\times(-1) & 2\times2+2\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 4+0 \\ 2-2 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

కాబట్టి $AB \neq BA$.

ఉదాహరణ 4.20 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, అయిన AB మరియు BA లను కనుక్కోండి. $AB = BA$ అవుతుందా ?

సాధన: ఇచ్చట A మరియు B ల తరగతులు 2×2. కావున AB మరియు BAలు వ్యవస్థితము. ఇప్పుడు

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2\times2}$$ మరియు

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

ఇచ్చట AB మరియు BA ల తరగతులు సమానము, మరియు $AB = BA$.

కావున A, B మాత్రికలను గుణించినపుడు క్రింది సందర్భాలు ఏర్పడును.

(i) AB మరియు BA లు వ్యవస్థితము. కానీ తరగతులు వేరుగా ఉండును.

(ii) AB, BA లలో ఏదో ఒక్కటి మాత్రమే వ్యవస్థితము.

(iii) AB మరియు BA లు రెండునూ వ్యవస్థితము కాదు.

(iv) AB, BA లు వ్యవస్థితము మరియు ఒకే తరగతికి చెందినవి. కానీ $AB \neq BA$

(v) AB, BA లు వ్యవస్థితము మరియు ఒకే తరగతికి చెందినవి అవుతూ $AB = BA$ అగును.

రిమార్కులు : మాత్రికా గుణకారము వినిమయం కాదు.

ఉదాహరణ 4.21: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $A^2 - 2A - 3I = 0$ ను సరిచూడండి.

సాధన: ఇచ్చట

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

మరియు $3I = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^2 - 2A - 3I = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-9 & 0-0 \\ 0-0 & 9-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ఆ విధంగా అడిగిన సమీకరణాన్ని సరిచూశారు.

ఉదాహరణ 4.22: క్రింది మాత్రికా సమీకరణాలను సాధించుము.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

సాధన : ఇచ్చట

$$\text{L.H.S.} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ 2x - 3y = 1;\ x + y = 3$$

పై సమీకరణాలను సాధించగా, $x = 2$ మరియు $y = 1$.

ఉదాహరణ. 4.23: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ అయిన, AB ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చట

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1) \\ 1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 1-1 \\ -1+1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

రిమార్కులు : ఉదాహరణ 3.23 ద్వారా, మనము రెండు శూన్యేతర మాత్రికల లబ్ధము శూన్యమాత్రిక అగునని కనుగొంటిమి. i.e., $A \neq 0, B \neq 0$ అయిననూ $AB = 0$ కావచ్చు.

కావున, రెండు శూన్యేతర మాత్రికల లబ్ధము, శూన్యమాత్రిక అగును, కానీ రెండు శూన్యేతర సంఖ్యల లబ్ధము, శూన్యేతర సంఖ్య అగును.

ఉదాహరణ 4.24: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ అయిన A^2 ని కనుగొనుము.

సాధన : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

రిమార్కులు: ఉదాహరణ 3.24 నుంచి, మనము ఒక శూన్యేతర మాత్రిక యొక్క వర్గము శూన్యమాత్రిక అగును. i.e., $A \neq 0$ అయిననూ $A^2 = 0$ కావచ్చును.

ఉదాహరణ 4.25: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $(AB)C$ (b) $A(BC)$ $(AB)C = A(BC)$ అగునా ?

సాధన: (a) $(AB)C = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+2 & 0-4 \\ 12-5 & 0+10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6+0 & 0-12 \\ -7+0 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$

(b) $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4+0 & 0+0 \\ 1+0 & 0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4-2 & 0-12 \\ -12+5 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$$

(a) మరియు (b)ల నుంచి మనము $(AB)C = A(BC)$ అని కనుగొంటిమి. నిజానికి మాత్రికల లబ్ధము సాహచర్యము.

అభ్యాసం 4.5

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లను కనుగొనుము. $AB = BA$ అగునా ?

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ అయిన AB మరియు BA లను కనుక్కోండి. $AB = BA$ అవుతుందా?

3. $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ అయిన AB మరియు BAలలో ఏది వ్యవస్థితమో దానిని కనుగొనుము.

4. $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ అయిన, BAని కనుక్కోండి. AB వ్యవస్థితమా ?

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ అయిన,

(a) AB వ్యవస్థితమా ? ఎందువల్ల? (b) BA వ్యవస్థితమా ? ఎందువల్ల ?

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లను కనుక్కోండి. $AB = BA$ అవుతుందా ?

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లను కనుక్కోండి. $AB = BA$ అవుతుందా ?

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన, AB మరియు BA లను కనుక్కోండి. $AB = BA$ అవుతుందా?

9. క్రింది వాటికి x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ లకు $AB = 0$ ని సరిచూడుము.

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, కు $A^2 - 5A + I = 0$ ని సరిచూడుము. ఇచ్చట I అనేది 2వ తరగతి యూనిట్ మాత్రిక.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన, క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $A(BC)$ (b) $(AB)C$ (c) $(A + B)C$

(d) $AC + BC$ (e) $A^2 - B^2$ (f) $(A - B)(A + B)$

13. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ అయిన : (a) AC (b) BC లను కనుగొనుము. $AC = BC$ అగునా?

14. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ అయిన, క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

(a) $B + C$ (b) $A(B+C)$ (c) AB (d) AC
(e) $AB + AC$

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ లకు $(AB)' = B'A'$ ని సరిచూడుము.

16. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ అయినచో, $AX = B$ అగునట్లు, 'X' ను కనుక్కోండి.

17. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ మరియు $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయినచో, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I$ అని చూపుము.

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ అయినచో, క్రిందివి సత్యమా ?

(a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$? (b) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$?
(c) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

4.7 మాత్రిక వ్యత్యయం

నిర్వచనం (మాత్రికా వ్యత్యయం)

$A = [a_{ij}]$ ఒక $m \times n$ మాత్రిక అయితే, A లోని అడ్డువరసలను నిలువు వరసలను పరస్పరం మార్చగా వచ్చే మాత్రికను Aకి వ్యత్యయం అంటాం. A' (లేదా A^T) తో సూచిస్తాం.

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, అయితే $A' = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{అయితే} \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ అవుతుంది.}$$

4.7.1 మాత్రిక వ్యత్యయం – ధర్మాలు

మాత్రిక వ్యత్యయం పాటించే ధర్మాలను ఉపపత్తి లేకుండా తగిన ఉదాహరణలతో సరిచూడవచ్చు.

A, B లు ఏవైనా రెండు మాత్రికలు (అనుగుణమైనవి) అయితే

(i) $(A')' = A$ (ii) $(KA)' = KA'$ (K స్థిరాంకం)

(iii) $(A+B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$

ఉదాహరణ 4.26 : If $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

అయిన (i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$ (iii) $(5B)' = 5(B)'$

సాధన:

(i) We have $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A.$$

(ii) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)' = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = (A + B)'$$

(iii) $5B = 5\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 20 & 0 \\ 20 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(5B)' = \begin{bmatrix} -15 & 20 \\ 20 & -10 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= 5\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$= 5B'.$

ఉదాహరణ 4.27: If $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ అయిన

$(AB)' = B'A'$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+3+10 & -4+0+8 \\ 1-9-20 & -2+0-16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ -28 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ (AB)' = \begin{bmatrix} 15 & -28 \\ 4 & -18 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ మరియు $B' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \ B'A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3+10 & 1-9-20 \\ -4+0+8 & -2+0-16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -28 \\ 4 & -18 \end{bmatrix}$$

$\therefore \ (AB)' = B'A'$.

4.7.2 సౌష్ఠవ మాత్రిక

$A' = A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ను సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం.

ఉదాహరణకు,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ అయిన $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ అవుతుంది.

$A' = A$ కావున, A ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక

గమనిక: (1) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ సౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన ప్రతి i, j లకు $a_{ij} = a_{ji}$.

(2) శూన్యమాత్రిక $O_{n \times n}$, ఏదైనా వికర్ణ మాత్రిక, యూనిట్ మాత్రిక $I_{n \times n}$ లు సౌష్ఠవ మాత్రికలు.

(3) A ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయిన మాత్రిక $A + A'$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక అవుతుంది.

(4) దీర్ఘ చతురస్ర మాత్రిక ఎప్పటికి సౌష్ఠవ మాత్రిక కాలేదు.

4.7.3 వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక లేదా ప్రతి సౌష్ఠవ మాత్రిక

$A' = -A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ను వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం.

ఉదాహరణకు

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ అయిన } \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{కాని } -A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

$\therefore A' = -A.$

$\therefore$ మాత్రిక A, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక.

గమనిక: (1) శూన్యమాత్రిక $0_{m\times n}$ ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక.

(2) A ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయితే, $A - A'$ ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక.

(3) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అయితే $i = j$ నకు $a_{ij} = 0$. i.e., ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక లోని ప్రధాన వికర్ణ మూలకాలన్ని సున్నాకి సమానం.

ఉదాహరణ 4.28: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & x & 7 \end{bmatrix}$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక అయినా x విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: A ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక కావున $A' = A$.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & x & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad x = 6.$$

ఉదాహరణ 4.29: $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 8 \\ 2 & -8 & x \end{bmatrix}$ ఒక ప్రతిసౌష్ఠవ మాత్రిక అయినా x విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: A ఒక ప్రతి సౌష్ఠవ మాత్రిక మరియు x వికర్ణం లోని మూలకం కావున $x = 0$.

ఉదాహరణ 4.30: A ఒక nవ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక అయితే Aను ఒక సౌష్ఠవ మారతిక, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా ఏకైకంగా రాయవచ్చని నిరూపించండి.

సాధన: $A + A'$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక, $A - A'$ ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

B ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక, C ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అయితే ఏకైకత నిరూపించడానికి $A = B + C$ అనుకొందాం.

అప్పుడు $A' = (B + C)' = B' + C' = B - C$

మరియు $A + A' = B + C + B - C$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2}(A + A')$$

మరియు $C = \frac{1}{2}(A - A')$.

అభ్యాసం 4.7

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ అయినా $2A + B'$ మరియు $3B' - A$ ను కనుక్కోండి.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & x & 0 \end{bmatrix}$ ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అయినా x ను కనుక్కోండి.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ అయినా $A + A'$ మరియు AA' లను కనుక్కోండి.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ అయితే $3A - 4B'$ ను కనుక్కోండి.

5. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, then find :

   (a) A' (b) B' (c) $A + B$ (d) $(A + B)'$

   (e) $A' + B'$

6. Find A' (transpose of A) :

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. For any matrix A, prove that $(A')' = A$.

8. Show that each of the following matrices is a symmetric matrix :

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. Show that each of the following matrices is a skew symmetric matrix:

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

4.8 అసమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలు

3 అజ్ఞాతరాసులు, 3 సమీకరణాలు గల కింది సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకుందాము.

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

దీనికి సంబంధిత మాత్రికా సమీకరణం

$Ax = D$, ఇక్కడ A

గుణన మాత్రిక A = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

చలరాశి మాత్రిక X = $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

స్థిరరాశి మాత్రిక D = $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

సర్వ మాత్రిక [AD] = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$

4.8.1 గౌస్ - జోర్డాన్ పద్ధతి

సర్వ మాత్రిక [AD] = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$

ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరిక్రియలను ఉపయోగించి = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$

రూపంలోకి మారుస్తాము. దీని వల్ల $X = \alpha, Y = \beta$

$z = \gamma$ అనే సాధన స్పష్టంగా కన్పిస్తుంది.

గమనిక:

మూడు అజ్ఞాత రాసులతో కూడిన మూడు సమీకరణాలను గౌస్ –జోర్డాన్ పద్ధతిలో సాధించేటప్పుడు, ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరిక్రియలను క్రింద వివరించిన పద్ధతిలో వరుసగా ఉపయోగిస్తాము.

మెట్టు 1

(i) (2, 1) స్థానంలో లేదా (3, 1) స్థానంలో ఉన్న మూలకం ఉపయోగించి గాని, మరోవిధంగా గాని, సరియైన ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరిక్రియతో (1, 1) స్థానంలో ఉన్న మూలకాన్ని 1గా మారుస్తాం.

(ii) (2, 1), (3, 1) స్థానాలలో శూన్యేతర మూలకాలుంటే (మొదటి నిలువు వరుసలో ఇతర మూలకాలు) వాటిని (1, 1) స్థానంలోని 1ని ఉపయోగించి సున్నాగా మారుస్తాము.

మెట్టు 1 చివరిలో, (2, 2) లేదా (3, 2) స్థానంలో శూన్యేతర మూలకం ఉంటె మెట్టు 2కు వెళ్తాం లేకపోతే మెట్టు 2ను వదిలేస్తాం.

మెట్టు 2 :

(i) (3, 2) స్థానంలో ఉన్న మూలకం ఉపయోగించి గాని మరో విధంగా గాని, సరియైన ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరిక్రియతో (2, 2) స్థానంలో ఉన్న మూలకాన్ని 1గా సూచిస్తాము.

(ii) 2వ నిలువు వరుసలోని ఇతర శూన్యేతర మూలకాలను (అంటె (1, 2) లేదా (3, 2) స్థానాలలో ఉన్న ఇతర శూన్యేతర మూలకాలు), (2, 2) స్థానంలో ఉన్న 1ని ఉపయోగించి సున్నాగా మారుస్తాం.

మెట్టు 2 చివరలోగాని, పైన చెప్పిన కారణాల వల్ల వదిలేసిన తరువాత గాని (3, 3) స్థానంలో ఉన్న మూలకాన్ని పరిశీలిస్తాం. అది శూన్యేతరమైతే మెట్టు 3కు వెళ్తాం. లేకపోతే ఆపేస్తాం.

మెట్టు 3

(i) R_3 ను సరైన సంఖ్యతో భాగించి (3, 3) స్థానంలో ఉన్న మూలకాన్ని 1గా మారుస్తాం.

(ii) 3వ నిలువు వరుసలో ఇతర శూన్యేతర మూలకాలు ఉంటే (అంటే (1, 3) లేదా (2, 3) స్థానంలో ఉన్న శూన్యేతర మూలకాలను). వాటిని (3, 3) స్థానంలో ఉన్న 1ని ఉపయోగించి సున్నాగా మారుస్తాము.

ఉదాహరణ 4.31 : కింది సమీకరణాలను గౌస్ జోర్డాన్ పద్ధతిలో సాధించండి.

$$3x + 4y + 5z = 18$$
$$2x - y + 8z = 13$$
$$5x - 2y + 7z = 20$$

సాధన: సర్వమాత్రిక $= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 18 \\ 2 & -1 & 8 & 13 \\ 5 & -2 & 7 & 20 \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1 - R_2$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 8 & 13 \\ 5 & -2 & 7 & 20 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3\ R_3 - 5R_1$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & -11 & 14 & 3 \\ 0 & -27 & 22 & -5 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to -5R_2 + 2R_3$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -26 & -25 \\ 0 & -27 & 22 & -5 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 5R_2,\ R_3 \to R_3 + 27R_2$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 127 & 130 \\ 0 & 1 & -126 & -25 \\ 0 & 0 & -680 & -680 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 \div (-680)$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 127 & 130 \\ 0 & 1 & -126 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 127R_3,\ R_2 \to R_2 + 26R_3$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

కాబట్టి సాధన : $x = 3,\ y = 1,\ z = 1.$

ఉదాహరణ 4.32: గౌస్ – జోర్డాన్ పద్ధతిని ఉపయోగించి కింది సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలేదు అని చూపండి.

$$2x + 4y - z = 0,\ x + y + 2z = 5,\ 3x + 6y - 7z = 2$$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

అయితే మాత్రికా సమీకరణం $AX = D$ అవుతుంది.

సర్వమాత్రిక $[AD] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$

R_1, R_2 లను పరస్పరం మారిస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 \div (-5),\ R_3 \to R_3 \div (-13)$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

కాబట్టి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు తుల్య వ్యవస్థను రాస్తే

$x + y + 2z = 5,\ z = 2,\ 0(x) + 0(y) + 0(z) = -1$ అవుతుంది.

వీటిలో చివరి సమీకరణము x, y, z ల ఏవిలువలకూ ద్రువపడదు.

కాబట్టి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలేదు.

అభ్యాసం 4.8

కింది సమీకరణ వ్యవస్థలను గౌస్ - జోర్డాన్ పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించండి.

1. $x + y + z = 1$
   $2x + 2y + 3z = 6$
   $x + 4y + 9z = 3$

2. $x - y + 3z = 5$
   $4x + 2y - z = 0$
   $-x + 3y + z = 5$

3. $2x - y + 3z = 9$
$x + y + z = 6$
$x - y + z = 2$

4. $2x - y + 8z = 13$
$3x + 4y + 5z = 18$
$5x - 2y + 7z = 20$

4.8.2 నిర్వచనం (సంగత లేదా అసంగత వ్యవస్థలు)

ఒక ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను

(i) సాధన ఉంటే సంగతమనీ

(ii) సాధన లేకపోతే అసంగతమనీ అంటాం.

4.8.3 అసమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలు

3 అజ్ఞాత రాసులు, 3 సమీకరణాలు గల కింది సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకుందాం.

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

దీనికి సంబంధిత మాత్రికా సమీకరణం

$AX = D$, ఇక్కడ

గుణన మాత్రిక $[AD] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

చలరాశి మాత్రిక $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times1}$

స్థిరరాశి మాత్రిక $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

సర్వమాత్రిక $[AD] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

1. సిద్ధాంతం

మూడు చలరాశులలో మూడు సమీకరణాల $AX = D$ సమీకరణ వ్యవస్థకు,

(i) కోటి (A) = కోటి ([AD]) = 3 అయితే, ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

(ii) కోటి (A) = కోటి ([AD]) < 3 అయితే, అనంత సాధనలుంటాయి.

(iii) కోటి (A) ≠ కోటి ([AD]) అయితే, సాధన ఉండదు.

వ్యవస్థ సంగతం $\Leftrightarrow$ కోటి (A) = కోటి ([AD]) అని గమనించండి.

ఉదాహరణ 4.33 : కింది సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతమని చూపండి.

$2x + 6y = -11$

$6x + 20y - 6z = -3$

$6y - 18z = -1$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

అనుకొంటే దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు, మాత్రికా సమీకరణం $AX = D$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు సర్వమాత్రిక

$$[AD] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 6 & 20 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$ చేస్తే

$$[AD] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -6 & 30 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$ చేస్తే

$$AD \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -91 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, [AD] కి 3×3 ఉపమాత్రిక అయిన

$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -11 \\ 2 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & -91 \end{bmatrix}$, సాధారణం కాబట్టి

కోటి ([AD]) = 3 ఎందుకంటే ఉపమాత్రిక నిర్ణాయకం $-91(6)(-6) \neq 0$

కాని గుణన మాత్రిక కోటి 3 కాదు. ఎందుకంటే

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

కోటి (A) $\neq$ కోటి ([AD])

కాబట్టి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతం.

ఉదాహరణ 4.34 : ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరిక్రియలను మాత్రమే ఎందుకు ఉపయోగిస్తాం ?

ఉన్న సర్వమాత్రికకు నిలువు వరుస ప్రాథమిక పరిక్రియలను ప్రయోగిద్దాం.

సాధన: $[AD] \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -11 \\ 6 & 20 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$

$C_2 \to C_2 - 3C_1$ చేస్తే

$$[AD] \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -11 \\ 6 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & -18 & -1 \end{bmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - 3C_2,\ C_3 \to C_3 + 3C_2$ లను చేస్తే

ఇప్పుడు $AD \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ -18 & 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -18 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, అసాధారణం కాబట్టి

గుణమాత్రిక కోటి $\neq 3$ అని సులభంగా గ్రహించవచ్చు.

సర్వమాత్రికలోని ఒక ఉపమాత్రిక

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -3 \\ -18 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ సాధారణ మాత్రిక కాబట్టి సర్వమాత్రిక కోటి 3.

కాబట్టి కోటి (A) $\neq$ కోటి ([AD])

కాబట్టి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతం.

కాబట్టి, ఒక సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతమో, అసంగతమో తెలుసుకోవడానికి ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరిక్రియలను గాని, ప్రాథమిక నిలువు వరస పరిక్రియలను గాని ఉపయోగించవచ్చు.

ఉదాహరణ 4.35 : మాత్రిక కోటి ఉపయోగించి కింది సమీకరణాలు సంగతమేమో పరీక్షించండి.

$2x - y + 3z = 8$

$-x + 2y + z = 4$

$3x + y - 4z = 0$

సంగతమైతే సాధన కనుక్కోండి.

సాధన: సర్వమాత్రిక $[AD] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (R_1, R_2 లను పరస్పరం మారిస్తే)

ఈ మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజ మాత్రికగా మారుద్దాం.

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 7 & -1 & 12 \end{bmatrix} \; R_2 \to R_2 + 2R_1,\; R_3 \to R_3 + 3R_1 \text{ లను చేస్తే}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -38 & -76 \end{bmatrix} R_3 \to 3R_3 - 7R_2 \text{ చేస్తే}$$

$$\text{ఇప్పుడు} \quad \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -38 \end{bmatrix} = (-1)(3)(-38) = 114$$

$\therefore$ కోటి (A) = కోటి ([AD]) = 3

కావున సమీకరణ వ్యవస్థకు ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

$$-x + 2y + z = 4$$

$$3y + 5z = 16$$

$$-38z = -76$$

$\therefore$ సాధన $z = 2, y = 2, x = 2.$

ఉదాహరణ 4.36 : కింది సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతమని చూపి పూర్తిగా సాధించండి.

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y - z = 3$$

$$x + y - z = 1$$

సాధన: దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు మాత్రికా సమీకరణం $AX = D$, ఇక్కడ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{సర్వమాత్రిక} \quad [AD] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to 3R_3 - 2R_2$ చేస్తే

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

పై మాత్రికలో ప్రతి 3వ తరగతి చతురస్ర ఉపమాత్రికా అసాధారణం, కాబట్టి కోటి $[A] \neq 3$,

కోటి $([AD]) \neq 3$.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ అనే సాధారణ మాత్రికకు A కు [AD] కు కూడా ఉపమాత్రిక అవుతుంది.

కాబట్టి కోటి (A), కోటి $([AD]) = 2$

కాబట్టి సిద్ధాంతం 3.6.10లో (ii) నుంచి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతం. అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

తుల్య సమీకరణ వ్యవస్థను కింది విధంగా రాస్తే

$x + y + z = 3$

$-3z = -3$

కాబట్టి $z = 1, x + y = 2.$

$\therefore$ సాధన సమితి $x = k, y = 2 - k,\ z = 1, k \in R.$

అభ్యాసం 4.9

కింది సమీకరణ వ్యవస్థలు సంగతమో, కాదో పరీక్షించండి. సంగతమైతే పూర్తిగా సాధించండి.

1. $x + y + z = 1$
   $2x + y + z = 2$
   $x + 2y + 2z = 1$

2. $x - 3y - 8z = -10$
   $3x + y - 4z = 0$
   $2x + 5y + 6z = 13$

3. $x + y + 4z = 6$
   $3x + 2y - 2z = 9$
   $5x + y + 2z = 13$

కీలకపదాలు

- దీర్ఘ చతురస్ర ఆకారంగా, అడ్డువరుసలు, నిలువు వరుసలుగా అమర్చిన సంఖ్యల అమరికను మాత్రిక అంటాం. ప్రతీ సంఖ్యను మూలకం అంటాం.
- m అడ్డు వరుసలు, n నిలువు వరుసలు గల మాత్రిక తరగతి $m \times n$.
- అడ్డు వరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య, సమానముగా గల మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అంటాం.
- ఒక చతురస్రమాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు తప్ప మిగిలినవి సున్నలయితే, ఆ మాత్రికకు వికర్ణమాత్రిక అంటాము.
- ఒక వికర్ణ మాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు '1' అయినచో, దానిని యూనిట్ మాత్రిక అంటాం.
- ఒక మాత్రికలోని అన్ని మూలకాలు సున్నలు అయినచో దానిని శూన్యమాత్రిక అంటాం.
- రెండు మాత్రికల తరగతులు సమానమై, వాటిలోని అనురూప స్థానాలలోని మూలకాలు సమానము అయినచో, ఆ రెండు మాత్రికలు సమానము అగును.
- ఒక మాత్రిక లోని అడ్డు / నిలువు వరుసలను మార్చి వ్రాయగా వచ్చు నూతన మాత్రికను దత్త మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక అంటాం.
- $A' = A$ అయిన A ని సౌష్ఠవ మాత్రిక అనియూ, $A' = -A$ అయిన A ని ప్రతిసౌష్ఠవ మాత్రిక అనియూ అంటాం.



- ఒక మాత్రికను అదిశతో గుణించవలెనంటే, ఆ మాత్రికలోని ప్రతీ మూలకాన్ని ఆ అదిశతో గుణించాలి.
- ఒకే తరగతికి చెందిన రెండు మాత్రికలను సంకలనము చేయుటకు వాటిలోని సదృశ మూలకాలను కూడవలెను.
- రెండు మాత్రికలు A మరియు B ల భేదము అంటే, A మరియు –B ల సంకలనం అని అర్థం.
- $m \times n$ తరగతి మాత్రిక A, మరియు $n \times p$ తరగతి మాత్రిక Bల లబ్ధమాత్రిక యొక్క తరగతి $m \times p$ అవుతుంది. A లోని అడ్డువరుసలను B లోని నిలువు వరుసలతో, సదృశ మూలకాలను గుణించి, వాటి మొత్తాలను తీసుకుంటే లబ్ధమాత్రిక AB లోని మూలకాలు వచ్చును.

1. ఒక ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను

   (i) సాధన ఉంటే సంగతమనీ

   (ii) సాధన లేకపోతే అసంతమనీ అంటాం.

2. అసమఘాత వ్యవస్థ

   $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

   $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

   $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

   పై సమీకరణ వ్యవస్థకి

   (i) కోటి (A) = కోటి ([AD]) = 3 అయితే ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

   (ii) కోటి (A) = కోటి ([AD]) < 3 అయితే అనంత సాధన ఉంటుంది.

   (iii) కోటి(A) $\neq$ కోటి ([AD]) అయితే సాధన ఉండదు.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

సాధనా అభ్యాసం

1. క్రింది తరగతులు గల మాత్రికలలోని మూలకాల సంఖ్య ఎంత?

   (a) 2 × 1 (b) 3×2 (c) 3×3 (d) 3×4

2. క్రింద ఇవ్వబడిన a_{ij} మూలకాలకు 3×2 తరగతి మాత్రికను నిర్మించండి.

   (a) $a_{ij} = i - 2j$ (b) $a_{ij} = 3i - j$ (c) $a_{ij} = i + \frac{3}{2}j$

3. క్రింది మాత్రికల తరగతులు ఏవి?

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

4. క్రింది సందర్భాలలో x, y మరియు z విలువలను కనుక్కోండి.

   (a) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x+y & z \\ 6 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & y+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ y+z & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x+y & y-z \\ z-2x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ అయిన, క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

   (a) $A + B$ (b) $2A$ (c) $2A - B$

6. క్రింది సందర్భాలలో 'X' ను కనుక్కోండి.

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. క్రింది సందర్భాలలో a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & 2 & -2 \\ 4 & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 2a+b & 5 \end{bmatrix}$$

8. A, B మరియు C మాత్రికలకు

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ మరియు } C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A+(B+C) = (A + B) + C ని సరిచూడుము.

9. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ లకు AB మరియు BA లను కనుగొనుము.

AB = BA అగునా?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ లకు AB మరియు BA లను కనుక్కోండి.

AB = BA అవుతుందా?

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ అయిన, A^2 ను కనుక్కోండి.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ అయిన

A(B + C) ని కనుగొనుము.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ అయినచో, x మరియు y విలువలను కనుగొనుము.

14. $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ మాత్రిక, $A^2 + 4A - 2I = 0$ సమీకరణాన్ని సంతృప్తి పరుస్తుందని చూపుము

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

జవాబులు

అభ్యాసం 4.1

1. $\begin{bmatrix}56 & 65 & 71\\ 29 & 37 & 57\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}56 & 29\\ 65 & 37\\ 71 & 57\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}40 & 35 & 25\\ 10 & 5 & 8\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}40 & 10\\ 35 & 5\\ 25 & 8\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}4 & 6 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$

4. (a) 6 (b) 12 (c) 8 (d) 12 (e) ab (f) mn

5. (a) $1 \times 8;\ 2 \times 4;\ 4 \times 2;\ 8 \times 1$ (b) $1 \times 5;\ 5 \times 1$
   (c) $1 \times 12;\ 2 \times 6;\ 3 \times 4;\ 4 \times 3;\ 6 \times 2;\ 12 \times 1$
   (d) $1 \times 16;\ 2 \times 8\ ;\ 4 \times 4;\ 8 \times 2;\ 16 \times 1$

6. (a) 4 (b) 5 (c) 4×5 (d) 20
   (e) $a_{14} = 0;\ a_{23} = 7;\ a_{34} = -3;\ a_{45} = 1$ మరియు $a_{33} = 3$

7. (a) $\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 4 & 2 & \frac{4}{3}\\ 9 & \frac{9}{2} & 3\end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2}\\ 8 & 18 & 32\\ \frac{25}{2} & \frac{49}{2} & \frac{81}{2}\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ -1 & 2 & 5\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}$

8. (a) $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\\ 6 & 9\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\\ 15 & 30\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\\ 3 & 9\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

అభ్యాసం 4.2

1. (a) G (b) B (c) A, D, E మరియు F
   (d) A, D మరియు F (e) D మరియు F (f) F
   (g) C
2. (a) $a = 2,\ b = 10,\ c = 6,\ d = -2$ (b) $a = 2,\ b = 3,\ c = 2,\ d = 5$
   (c) $a = \frac{3}{2}, b = -2,\ c = 2,\ d = -4$
3. కాదు
4. కాదు.

అభ్యాసం 4.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-21}{2} & -3 \\ -3 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$
2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -9 & -3 & -12 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -28 & -14 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 20 & -10 & 0 \\ -5 & 0 & 25 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -12 & 0 & -4 \\ -16 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

అభ్యాసం 4.4

1. (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ -9 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & -11 & -15 \\ 11 & -10 & -10 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \\ -2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -14 & 9 \\ 14 & 9 & 8 \\ 16 & 15 & 14 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} \frac{-17}{5} & \frac{-21}{5} \\ \frac{-27}{5} & \frac{-31}{5} \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(A+B)' = B' + A'$ అని గమనించితిమి.

8. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -16 & -3 \end{bmatrix}$

అభ్యాసం 4.5

1. $AB = [-6]$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $AB \neq BA$

2. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -3 & 13 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ $AB \neq BA$

3. $AB = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{bmatrix}$; BA వ్యవస్థితము కాదు.

4. $BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; AB వ్యవస్థితము కాదు.

5. AB మరియు BA రెండునూ వ్యవస్థితం కాదు. A లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య, B లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానము కాదు. కావున AB వ్యవస్థితం కాదు. B లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య, A లోని అడ్డు వరుసల సంఖ్యకు సమానం కాదు. కావున BA వ్యవస్థితం కాదు.

6. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$

7. $AB = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 17 & 24 \\ 14 & -13 & 17 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -11 \\ 16 & 11 & 3 \\ 10 & 21 & 11 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$

8. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$.

9. (a) $x = 3,\ y = -1$ (b) $x = -1,\ y = 2$

12. (a) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; $AC = BC$.

ఇక్కడ $A \neq B$, మరియు $C \neq 0$, కానీ $AC = BC$.

కాబట్టి కొట్టివేత న్యాయమును మాత్రికలు పాటించవు.

14. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$ $A(B+C) = AB + AC$ అని గమనించితిమి.

16. $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 18. (a) కాదు (b) కాదు (c) కాదు

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) 2 (b) 6 (c) 9 (d) 12

2. (a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{9}{2} & 6 \end{bmatrix}$

3. (a) 3×1 (b) 1×3 (c) 3×2 (d) 2×3

4. (a) $x = 1, y = 2, z = 3$ (b) $x = 5, y = 1, z = 5$
   (c) $x = 3, y = -3\ z = 3$ (d) $x = 2, y = 1, z = 5$

5. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{3}{2}$

9. $AB = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 38 & 43 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 6 & 14 & 24 \\ 4 & 21 & 37 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$.

10. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $AB = BA$.

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

13. $x = 1,\ y = -4$.

అధ్యాయం

5

నిర్ధారకాలు, వాటి అనువర్తనాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠం చదివాక క్రిందివి నేర్చుకో గలుగుతారు.

- మాత్రిక నిర్ధారకాలని కనుక్కోవడం
- నిర్ధారకాల ధర్మాల్ని ప్రవచించడం.
- నిర్ధారకాల ధర్మాలను ఉపయోగించి నిర్ధారకాలను కనుక్కోవడం
- క్రేమర్ సూత్రాన్ని అనువర్తించి రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు సాధనను కనుక్కోవడం.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు సంబంధించిన జ్ఞానము
- సంఖ్యామానము, సంకీర్ణ సంఖ్యలకు సంబంధించిన జ్ఞానము

పరిచయం

ప్రతి చతురస్ర మాత్రికకి ఆమాత్రికా నిర్ధారకం అనేది ప్రత్యేకంగా నిర్వచించబడిన సంఖ్య. నిర్ధారకాలను రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ విశ్లేషణ మరియు సాధన కొరకు ఉపయోగిస్తాము. ఈ నిర్ధారకాలు ఇంజనీరింగ్, సామాన్యశాస్త్రం మరియు సాంఖికశాస్త్రంలో విస్తృత అనువర్తనాలను కలిగి ఉన్నాయి.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం
నోట్స్

ఈ అధ్యాయంలో నిర్ధారకాల వివిధ ధర్మాలను కనుగొనే పద్ధతులను తెలుసుకుంటాం. నిర్ధారకాలను వాడి క్రేమర్ సూత్రంలో రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధిస్తాం.

5.1 2వ పరిమాణ నిర్ధారకము

క్రింది రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకొందాం.

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

x, y ల కొరకు పై సమీకరణాలను సాధించగా.,

$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, మరియు $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ఇచ్చట $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ కావలెను.

$a_1b_2 - a_2b_1$ విలువ, x మరియు y విలువలు వుంటాయో లేదా వుండవో తెలుపును.

$a_1b_2 - a_2b_1$ ను నిర్ధారకం అంటాం. దీనిని $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ గా రాస్తాం.

5.2 2వ పరిమాణ నిర్ధారకాన్ని విస్తరించడం

2వ పరిమాణ నిర్ధారకాన్ని విస్తరించుటకు క్రింది సాధారణ నియమాన్ని రాస్తాం.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ నిర్ధారకం నందు

a_{11} మొదటి అడ్డువరుస మరియు మొదటి నిలువు వరుసకు చెందినది.

a_{12} మొదటి అడ్డు వరుస మరియు రెండవ నిలువు వరుసకు చెందినది.

a_{21} రెండవ అడ్డు వరుస మరియు మొదటి నిలువు వరుసకు చెందినది.

a_{22} రెండవ అడ్డు వరుస మరియు రెండవ నిలువు వరుసకు చెందినది.

పై మూలకాలను క్రింది విధంగా రాస్తాం.

a_{11} a_{12}
a_{21} a_{22}

మాలకాలను బాణపు గుర్తు ద్వారా గుణించాలి. క్రింది వైపు వెళ్ళే బాణపు గుర్తుకు ధన గుర్తు i.e., $a_{11}.a_{22}$ మరియు పై వైపుకు వెళ్ళే బాణపు గుర్తుకు రుణ గుర్తు i.e., $a_{21}.a_{22}$ గా ఉండును.

మరియు వాటి మొత్తం $a_{11}.a_{22} + (-a_{21}.a_{12})$ లేదా $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ నిర్ధార విలువ అగును.

లేదా, $2x^2 - x - 1 = 0$

లేదా, $2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

లేదా, $2x(x-1) + 1(x-1) = 0$

లేదా, $(2x+1)(x-1) = 0$

లేదా, $x = 1, -\frac{1}{2}$.

5.3 3వ పరిమాణ నిర్ధారకము

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అనేది $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ మరియు c_3. అను 9 పదాలను కలిగి ఉన్నది. వీటిని 3 అడ్డువరుసలు మరియు 3 నిలువు వరుసలలో అమర్చిన అమరికను 3వ పరిమాణ నిర్ధారకం అంటాం. 3వ పరిమాణ నిర్ధారకం $(3^2) = 9$ మూలకాలుండును.

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ మరియు c_3. సబ్‌స్క్రిప్ట్ గుర్తులు *viz* $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ లను ఉపయోగించి 3వ పరిమాణ నిర్ధారకాన్ని క్రింది విధంగా రాస్తాం.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

సాధారణంగా 2వ లేదా 3వ పరిమాణ నిర్ధారకాన్ని Δ లేదా |A|, |B| .....etc., లతో సూచిస్తాం. $\Delta = |a_{ij}|$, $i = 1, 2, 3$ మరియు $j = 1, 2, 3$.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం

నోట్స్

5.4 చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము

ప్రతి చతురస్ర మాత్రికకు అనుబంధంగా 'ఆ మాత్రికా నిర్ధారకం' ఉంటుంది. $[a]$ అను 1×1 మాత్రికకు అనుబంధంగా 1వ పరిమాణ నిర్ధారకం 'మూలకం a' ఉంటుంది. ఈ నిర్ధారకం విలువ 'a' .

ఒక 2వ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక అయినచో, $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ అనే సమాసము 2వ పరిమాణ నిర్ధారకాన్ని సూచిస్తుంది. దీనిని $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$ తో సూచిస్తాము.

ఉదాహరణ. 5.1: గణించుము.

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix}$

సాధన:

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (6 \times 2) - (8 \times 4) = 12 - 32 = -20$

(ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)(a+b) - (2a)(2b)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$

$= a^2 + b^2 - 2ab$

$= (a - b)^2$

(iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix} = (x^2 + x + 1)\,(x - 1) - (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$= (x^3 - 1) - (x^3 + 1)$

$= -2.$

ఉదాహరణ 5.2 : క్రింది వాటికి 'x' విలువను కనుక్కోండి.

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ (ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$

సాధన :

(i) ఇప్పుడు $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3) - x(x+1)$

$= (x^2 - 9) - x^2 - x = -x - 9$

ప్రశ్న ప్రకారం

$= -x - 9 = 6$

$\Rightarrow \quad x = -15$

(ii) ఇప్పుడు $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2) - (x+1)(2x+1)$

$= 8x^2 + 4x - 4x - 2 - 2x^2 - x - 2x - 9$

$= 6x^2 - 3x - 3 = 3(2x^2 - x - 1)$

ప్రశ్న ప్రకారం

$3(2x^2 - x - 1) = 0$

3×3 మాత్రిక $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ కు, నిర్ధారకము, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

తో అనుసంధానించి నిర్ధారక విలువను కనుగొనినచో,

$$a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ఉదాహరణ. 5.3: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ అయిన $|A|$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 6 = 15 - 6 = 9$

ఉదాహరణ 5.4: $A = \begin{bmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{bmatrix}$ అయిన $|A|$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $|A| = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b) - b \times a = a^2 - b^2 - ab$

గమనిక : 1. యూనిట్ మాత్రిక I యొక్క నిర్ధారకము 1.

2. చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకం సున్న అయినచో దానిని అసాధారణ మాత్రిక అంటాం.

5.5 3వ తరగతి మాత్రిక నిర్ధారకాన్ని విస్తరించుట

విభాగము 5.4 నందు మనము క్రింది విధంగా వ్రాశాము.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

దీనిని ఇంకనూ విస్తరించగా,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

పై విస్తరణ పద్ధతిలో మనము, మొదటి అడ్డు వరుసలోని ప్రతీ మూలకాన్ని, ఆ మూలకం ఉన్న అడ్డు మరియు నిలువు వరుసలను తొలగించి మిగిలిన 2వ పరిమాణ నిర్ధారకంతో గుణిస్తూ వచ్చామని గమనించితిమి.

ఇంకనూ, a_{11}, a_{12} మరియు a_{13} మూలకాలకు ధన, ఋణ, మరియు ధన గుర్తులను ఇచ్చాము. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే, ధన గుర్తుతో ప్రారంభించి వరుసగా ధన, ఋణ, ధన గుర్తులను మార్చి, మార్చి ఇచ్చాము. ఒక మూలకానికి గల సబ్‌స్క్రిప్ట్స్‌ను కలుపగా సరిసంఖ్య వచ్చిన ధన గుర్తును, బేసిసంఖ్య వచ్చినచో ఋణగుర్తును ఇచ్చితిమి. కాబట్టి a_{11} నకు ధనగుర్తును ఇచ్చితిమి.

గమనిక : ఒక నిర్ధారకాన్ని ఏదైనా అడ్డు లేదా నిలువు వరుస ద్వారా విస్తరించవచ్చు. మొదటి అడ్డు వరుస లేదా మొదటి నిలువు వరుస లేదా ఏ అడ్డు వరుస అయిన లేదా నిలువు వరుస ద్వారానైనా విస్తరించినా, దాని విలువ మారదు. మూలకాలకు మాత్రము పైన చెప్పిన పద్ధతి ప్రకారం గుర్తులను ఇవ్వవలెను.

ఉదాహరణ 5.5: మొదటి అడ్డు వరుస నుపయోగించి క్రింది నిర్ధారకాన్ని విస్తరించండి.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

సాధన : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (20 - 2) - 2 \times (10 - 3) + 3 \times (4 - 12)$

$= 18 - 14 - 24$

$= -20.$

ఉదాహరణ. 5.6 : 2వ నిలువు వరుసను ఉపయోగించి క్రింది నిర్ధారకాన్ని విస్తరించండి.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\times 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)3\times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 \times (3 - 4) + 1 \times (1 - 6) - 3 \times (2 - 9)$

$= 2 - 5 + 21$

$= 18.$

అభ్యాసం 5.1

1. క్రింది వాటికి |A| ను కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha+\cos\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$

2. క్రింది వానిలో ఏది అసాధారణ మాత్రికలు ?

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. మొదటి అడ్డు వరుస నుపయోగించి క్రింది నిర్ధారకాలను విస్తరించండి.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

5.6 లఘు నిర్ధారకాలు మరియు సహగుణావయవములు

5.6.1 |A| లోని a_{ij} యొక్క లఘు నిర్ధారకాలు

ఒక మూలకము ఉన్న అడ్డు వరుసను, మరియు నిలువు వరుసను తొలగించగా మిగిలిన నిర్ధారక విలువను ఆ మూలకము యొక్క లఘు నిర్ధారకం అంటాం.

అంటే |A| లో a_{ij} యొక్క లఘునిర్ధారకం అంటే i-వ అడ్డు వరుసను, j-వ నిలువు వరుసను తొలగించగా మిగిలిన నిర్ధారకము. దీనిని M_{ij} తో సూచిస్తారు.

ఉదాహరణకు, నిర్ధారకం $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ నందు 3 యొక్క లఘు నిర్ధారకం '7'.

ఉదాహరణ 5.7: క్రింది మాత్రికలోని మూలకాల యొక్క లఘునిర్ధారకాలను కనుగొనండి.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

సాధన: a_{ij} మూలకం యొక్క లఘు నిర్ధారకాన్ని M_{ij}. ఇప్పుడు a_{11} మూలకం. 1వ అడ్డువరుస, 1వ నిలువు వరుసలో వస్తుంది. కాబట్టి a_{11} యొక్క లఘు నిర్ధారకాన్ని కనుగొనుటకు, 1వ అడ్డు వరుసను, 1వ నిలువు వరుసను తొలగించగా,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

ఇదే విధంగా, M_{12} (a_{12} యొక్క లఘు నిర్ధారకం),ను క్రింది విధంగా రాస్తాం.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13};$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

ఇదేవిధంగా M_{31}, M_{32} మరియు M_{33} లను కనుగొనవచ్చును.

5.6.2 |A| లోని a_{ij} యొక్క సహగుణావయవములు

ఒక నిర్ధారకము లోని మూలకము a_{ij} యొక్క సహగుణావయవము అంటే, దాని లఘునిర్ధారకాన్ని $(-1)^{i+j}$ తో గుణించగా వచ్చునది. దీనిని C_{ij} తో సూచిస్తాం.

ఉదాహరణ 5.8: క్రింది నిర్ధారకములోని మూలకాలు a_{11}, a_{12} మరియు a_{21} ల సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

సాధన: a_{ij} యొక్క సహగుణావయవము $(-1)^{i+j} \times M_{ij}$; అప్పుడు,

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23})$$
$$= (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23})$$
$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -(a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) = (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})$$

మరియు $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = (a_{32} a_{13} - a_{12} a_{33})$

$$= (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}).$$

ఉదాహరణ 5.9 : క్రింది నిర్ధారకము లోని రెండవ అడ్డు వరుసలోని మూలకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలను మరియు సహగుణావయవములను కనుక్కోండి.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

సాధన: రెండవ అడ్డువరుస లోని మూలకాలు ; $a_{21} = 5$; $a_{22} = 2$; $a_{23} = 4$.

a_{21} యొక్క లఘు నిర్ధారకం (i.e., 5) $= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 0 = 48$

a_{22} యొక్క లఘు నిర్ధారకం (i.e., 2) $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$

a_{23} యొక్క లఘు నిర్ధారకం (i.e., 4) $= \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$

వీటికి అనుగుణంగా వున్న సహగుణావయవములు

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-48) = -48$$
$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = +(-13) = -13$$
$$\text{మరియు } C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -(-42) = 42$$

5.7 సహగుణావయవమును ఉపయోగించి నిర్ధారకం విలువను కనుగొనుట

సహగుణావయవంను సూచించు పద్ధతిని బట్టి ఒక నిర్ధారకం లోని ఏదో ఒక అడ్డు లేదా నిలువు వరుస లోని మూలకాలను మరియు వాటి సహగుణావయవాలతో విస్తరణ ఇవ్వవచ్చు.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

ఇచ్చట C_{ij} అనేది మూలకం a_{ij} యొక్క సహగుణావయవం.

ఉదాహరణ 5.10: నిర్ధారకము $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ ను, మొదటి అడ్డువరుసలోని మూలకాలు మరియు వాటి సహగుణావయవాల పరంగా, మరియు మొదటి నిలువు వరుసలోని మూలకాలు మరియు వాటి సహగుణావయవాల పరంగా గణించండి. రెండు ఫలితములు ఒకే విధంగా ఉన్నాయేమో సరి చూడండి.

సాధన: మొదటి అడ్డు వరుసలోని మూలకాలు మరియు వాటి సహగుణావయవాల పరంగా, నిర్ధారకాన్ని విస్తరించినచో, Δ విలువ వచ్చును.

'R_1' ద్వారా విస్తరించినచో,

$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

మొదటి C_{11}, C_{12} మరియు C_{13} లను గణించగా,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 10 + 12 = 22$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-30 + 24) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -24 - 16 = -40$$

$\therefore \Delta = 3 \times 22 + 1 \times 6 + 7 \times (-40) = 66 + 6 - 280 = -208$

మొదటి నిలువు వరుసలోని మూలకాలు మరియు వాటి సహగుణావయవాల పరంగా విస్తరించగా.,

$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

ఇప్పుడు, $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 = 22$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(5-28) = 23$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3-14) = -17$$

$\therefore \Delta = 3 \times 22 + (-6) \times 23 + 8 \times (-17) = 66 - 138 - 136 = -208$

రెండు పద్ధతుల నుంచి కనుగొన్న నిర్ధారక విలువ -208.

ఇంకనూ, రెండు ఫలితములు సమానమని సరిచూచితిమి.

ఉదాహరణ. 5.11: ఏదైనా అడ్డు/నిలువు వరుసలోని మూలకాలను మరొక అడ్డు / నిలువు వరుసలోని మూలకాల సహగుణావయవాలతో గుణించి కలుపగా వచ్చు విలువసున్న.

సాధన:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ అనుకొనిన

ఇప్పుడు, $C_{11} = 5$ మరియు $C_{12} = -4$

$a_{21} \times C_{11} + a_{22} \times C_{12}$ ను కనుగొందాం.

$= 4 \times 5 + 5 \times (-4)$

$= 20 - 20 = 0$

ఇదేవిధంగా

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ను తీసుకొన్నచో,

ఇచ్చట $C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$

$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$

$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23}$ ను కనుగొందాం.

$= 1 \times (-1) + 2(-7) + 3 \times (5)$

$= -1 -14 + 15 = 0$

ఇదే ధర్మాన్ని వేరే అడ్డు / నిలువు వరుసలకు కూడా సరి చూడవచ్చు.

5.8 3వ తరగతి నిర్ధారకమును విస్తరించుటకు సర్రస్ చిత్రము

ఒక నిర్ధారకమును విస్తరించుటకు /గణించుటకు గల మరొక సూక్ష్మ పద్ధతి సర్రస్ చిత్ర పద్ధతి :

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ను తీసుకొన్నచో

మొదటి మూడు నిలువు వరుసలను వ్రాసి, తరువాత మొదటి అడ్డు / నిలువు వరుసలను క్రింద చూపిన విధంగా వ్రాయగా,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

క్రింది వైపుకు సూచించిన బాణపు గుర్తులు గల పదాలను కూడి, పైవైపుకు బాణపు గుర్తులు గల పదాలను తీసివేయగా, మనకు

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

$$-a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{21}\,a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{31}a_{22})$$

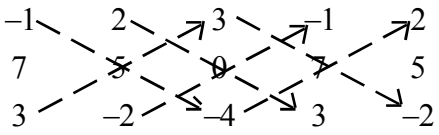
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ వచ్చినది.

ఇది మనకు ఇచ్చిన నిర్ధారకానికి సమానము.

ఉదాహరణ 5.12: క్రింది నిర్ధారక విలువను సర్రస్ చిత్రము ద్వారా కనుక్కోండి.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

సాధన:



పై నిర్ధారకం విలువ

$= (-1)\,(5)\,(-4) + 2.0.3 + 3.7(-2) - 3.5.3-(-2).0.\,(-1) - (-4).7.2$

$= 20 + 0 - 42 - 45 - 0 + 56$

$= -11.$

అభ్యాసం 5.2

1. క్రింది నిర్ధారకంలోని రెండవ అడ్డువరుసలోని మూలకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలను, మరియు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

2. క్రింది నిర్ధారకంలోని మూడవ నిలువు వరుసలోని మూలకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలను మరియు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. సహగుణావయవాలను ఉపయోగించి క్రింది నిర్ధారకాలను గణించుము.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

4. సర్రస్ చిత్రము నుపయోగించి, క్రింది నార్ధారకాలను గణించండి.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -1 & -a & b \\ a & -1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$

5. సర్రస్ చిత్రము నుపయోగించి,

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ అని చూపుము.

6. క్రింది సమీకరణాలను 'x' కొరకు సాధించుము.

(a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



5.9 నిర్ధారకాల ధర్మాలు

(i) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ఏదైనా ఒక అడ్డువరస (లేదా నిలువు వరస) లోని ప్రతీ మూలకం సున్న అయితే ఆ మాత్రిక నిర్ధారకం సున్న.

సున్నలున్న అడ్డువరస (లేదా నిలువు వరస) ద్వారా విస్తరించి అట్లాంటి మాత్రిక నిర్ధారకం సున్న అని సులభంగా గణించవచ్చు.

(ii) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో రెండు అడ్డువరసలు (లేదా నిలువు వరసలు) పరస్పరం మారిస్తే ఆ మాత్రిక నిర్ధారకం గుర్తు మారుతుంది.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ అనుకొందాం, A లో 1వ, 2వ అడ్డు వరసలు పరస్పరం మార్చి B రాద్దాం.

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\det B = a_1(-1)^{2+1}(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(-1)^{2+2}(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(-1)^{2+3}(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$= -\det A.$$

(iii) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ఏదైనా ఒక అడ్డువరస (లేదా నిలువు వరస) లోని ప్రతీ మూలకాన్ని ఒక సంఖ్య kతో గుణిస్తే వచ్చే మాత్రిక నిర్ధారకం, దత్త మాత్రిక నిర్ధారకానికి k రెట్లు ఉంటుంది.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

(A లో 1వ నిలువు వరసను k తో గుణించి B రాశాం.)

A లో a_1, a_2, a_3 మూలకాల సహగుణావయవాలు A_1, A_2, A_3 అయితే, Bలో ka_1, ka_2, ka_3 మూలకాల సహగుణావయవాలు కూడా వరసగా A_1, A_2, A_3 లే

$$\begin{aligned}\det B &= ka_1 A_1 + ka_2 A_2 + ka_3 A_3 \\ &= k(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \\ &= k(\det A).\end{aligned}$$

(iv) A ఒక 3వ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక, k ఒక సంఖ్య అయితే $|kA| = k^3|A|$.

ఈ ఫలితం, ధర్మం (iii)ను మూడుసార్లు ఉపయోగిస్తే వస్తుంది.

(v) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో రెండు అడ్డు వరసల (లేదా నిలువు వరసల) అనురూప మూలకాలు సమానమయితే ఆ మాత్రిక నిర్ధారకం సున్న.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$ అనుకొందాం.

(2వ, 3వ అడ్డు వరసల మూలకాలు సమానం).

అప్పుడు $\det A = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$

$$= a_1(0) + b_1(0) + c_1(0) = 0.$$

(vi) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో రెండు అడ్డు వరసల (లేదా నిలువు వరసల) అనురూప మూలకాలు సమాన నిష్పత్తిలో ఉంటే, ఆ మాత్రిక నిర్ధారకం సున్న.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$ అనుకొందాం.

అప్పుడు $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ధర్మం (iii) నుంచి

$= k\,(0)$ ధర్మం (v) నుంచి

$= 0.$

(vii) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ఏదైనా ఒక అడ్డు వరస (లేదా నిలువు వరస) లోని ప్రతీ మూలకం రెండు సంఖ్యల మొత్తంగా ఉంటే, ఆ మాత్రిక నిర్ధారకాన్ని కింద చూపిన విధంగా రెండు మాత్రికల నిర్ధారకాల మొత్తంగా రాయవచ్చు.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

అనుకొందాం.

A లో $a_1 + x_1,\ a_2 + x_2, a_3 + x_3$ మూలకాల సహగుణావయవాలు వరసగా A_1, A_2, A_3 అయితే B లో $a_1,\ a_2,\ a_3$ మూలకాలకూ, C లో x_1, x_2, x_3 మూలకాలకు కూడా వరసగా A_1, A_2, A_3 లే సహగుణావయవాలవుతాయి.

ఇప్పుడు,

$$\det A = (a_1 + x_1)A_1 + (a_2 + x_2)A_2 + (a_3 + x_3)A_3$$

$$= (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3)$$

$$= \det B + \det C.$$

అంటే

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(viii) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ఒక అడ్డు వరస (నిలువు వరస)లో ఉండే ప్రతి మూలకాన్ని ఒకే సంఖ్యతో గుణించి మరో అడ్డు వరస (నిలువు వరస)లో అనురూప మూలకాలకు కూడితే వచ్చే మాత్రిక నిర్ధారకం, ఇచ్చిన మాత్రిక నిర్ధారకానికి సమానం

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & c_2 + kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

(A లో 1వ అడ్డు వరసలో ప్రతీ మూలకాన్ని kతో గుణించి, 2వ అడ్డువరసలోని అనురూప మూలకాలకు కూడి B రాశాం)

$$\det B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ధర్మం(vii) నుంచి

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0$$ ధర్మం(vi) నుంచి

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det A.$$

(ix) ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ఏదైనా ఒక అడ్డు వరస (లేదా నిలువు వరస) మూలకాలను, మరొక అడ్డువరస (లేదా నిలువు వరస) మూలకాల సంబంధిత సహగుణావయవాలతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాల మొత్తం సున్న.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$ అనుకొందాం.

2వ అడ్డు వరస మూలకాలతో, మొదటి అడ్డు వరస మూలకాల సహగుణావయవాలను గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం చూద్దాం. అంటే

$$a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1$$

$$= a_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ధర్మం (v) నుంచి.}$$

(x) x లో బహుపదులు మూలకాలుగా ఉన్న ఒక చతురస్ర మాత్రికలో x కు బదులు a ప్రతిక్షేపిస్తే మాత్రిక నిర్ధారకం సున్న అయితే ఆ మాత్రిక నిర్ధారకానికి $x-a$ ఒక కారణాంకం అవుతుంది.

$$\text{A}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{bmatrix} \text{ అనుకొందాం.}$$

అప్పుడు $\det [\text{A}(x)]$, x లో ఒక బహుపది.

$\det [\text{A}(a)] = 0$ అయితే శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం $\det [\text{A}(x)] = 0$ కు $x-a$ కారణాంకం.

(xi) A ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయితే, $\det \text{A} = \det (\text{A}')$.

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \text{ అయితే } \text{A}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

మాత్రిక Aలోనూ, మాత్రిక A' లోనూ a_1, b_1, c_1 ల సహగుణావయవాల విలువలు సమానం. కాబట్టి

$$\det \text{A} = a_1 \text{A}_1 + b_1 \text{B}_1 + c_1 \text{C}_1 = \det \text{A}'.$$

(xii) A, B లు 2వ తరగతి చతురస్ర మాత్రికలయితే $\det (\text{AB}) = (\det \text{A})(\det \text{B})$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ అనుకొందాం.}$$

$$\det \text{A} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}; \quad \det \text{B} = b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}.$$

ఇప్పుడు $\text{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})$$

$$= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}$$

$$- a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}$$

$$= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$

$$= (\det A)(\det B).$$

A, B లు మూడో తరగతి మాత్రికలైనా, ఇదేవిధంగా

$\det(AB) = (\det A)(\det B)$ అని చూపవచ్చు.

ఏ సహజ సంఖ్య n కయినా, n తరగతి గల ఏ మాత్రికలు A, B లకయినా $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ అని చూపించవచ్చు. కాని, ఇది ఈ గ్రంథ పరిధికి మించింది.

(xiii) n ఒక ధన పూర్ణాంకం అయితే, $\det(A^n) = (\det A)^n$.

(xiv) A ఒక త్రిభుజ మాత్రిక (ఎగువ లేదా దిగువ) అయితే, వికర్ణంలోని మూలకాల లబ్ధమే, ఆ మాత్రిక నిర్ధారకం అవుతుంది.

5.4.9 సంకేతం

నిర్ధారకాలు గణించేటప్పుడు కింది సంకేతాలు ఉపయోగిస్తాం.

(i) R_1, R_2 అడ్డువరసలను పరస్పరం మార్చడానికి $R_1 \leftrightarrow R_2$

(ii) 1వ అడ్డువరస R_1 లో మూలకాలను k అనే సంఖ్యతో గుణించడానికి $R_1 \to kR_1$

(iii) 2వ అడ్డువరస R_2 లో ప్రతి మూలకాన్ని kతో గుణించి

1వ అడ్డువరస లోని సంబంధిత మూలకాలకు కూడటానికి

$R_1 \to R_1 + kR_2$

ఇటువంటి సంకేతాలను మిగిలిన అడ్డు వరసలకు, నిలువు వరసలకు కూడా వాడతాం.

ఉదాహరణ : 5.13: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & b^2 \\ 1 & a & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ అని చూపండి.

సాధన : $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$R_2 \to (R_2 - R_1);\ R_3 \to (R_3 - R_1)$ లను చేస్తే

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

నిర్ధారకాన్ని 1వ నిలువు వరస దృష్ట్యా విస్తరిస్తే

$$= 1.\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) = \text{R.H.S.}$$

5.10 నిర్ధారక ధర్మాలను ఉపయోగించి నిర్ధారకాన్ని విస్తరించుట / గణించుట

ఇప్పుడు మనం పై ధర్మాలను ఉపయోగించి నిర్ధారకాలను విస్తరించగలము. నిర్ధారకాన్ని సూక్ష్మీకరించడం అంటే, ఒక అడ్డు / నిలువు వరుసలో ఎక్కువ మూలకాలను సున్నకు సమానం చేసి ఆ అడ్డు / నిలువు వరుసనుపయోగించి విస్తరించడం. మనము 1వ, 2వ, 3వ అడ్డువరుసలను R_1, R_2, R_3 లనీ, 1వ, 2వ, 3వ నిలవు వరుసలను $C_1, C_2.C_2$ లనీ సూచిస్తాం.

ఉదాహరణ : 5.14:

$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$ అని చూపుము.

ఇచ్చట 'w' అనేది 1- యొక్క వాస్తవం కాని ఘనమూలం.

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$

2వ, 3వ నిలువు వరుసలను 1వ నిలువు వరుసకు కలువగా,

$C_1 \to C_1 + (C_2 + C_3)$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1+w+w^2 & w & w^2 \\ w+w^2+1 & w^2 & 1 \\ w^2+1+w & 1 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & w & w^2 \\ 0 & w^2 & 1 \\ 0 & 1 & w \end{vmatrix} = 0 \qquad (C_1\text{తో విస్తరించగా})$$

('w' అనేది వాస్తవం కాని 1- యొక్క ఘనమూలం కావున $1 + w + w^2 = 0$).

ఉదాహరణ 5.15: $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ అని చూపుము.

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & bc-ab \\ 0 & b-c & ca-ab \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - R_3 \text{మరియు } R_2 \to R_2 - R_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & b(c-a) \\ 0 & b-c & c(a-a) \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-c)(b-c) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

C_1 తో విస్తరించగా,

$$\Delta = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)(b-c)\,(b-a)$$

$$= (a-b)(b-c)\,(c-a).$$

ఉదాహరణ 5.16: $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)]$$

'R_1' తో విస్తరించగా

$$= 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - 2b\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2c[b(a+b) - bc] - 2b[bc - c(c+a)]$$

$$= 2bc[a+b-c] - 2bc[b-c-a]$$

$$= 2bc[(a+b-c) - (b-c-a)]$$

$$= 2bc\,[a+b-c-b+c+a]$$

$$= 4abc.$$

ఉదాహరణ. 5.17 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$$

$= 0$ 'C_1' తో విస్తరించగా.

ఉదాహరణ 5.18 :

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$$ అని నిరూపించుము.

సాధన : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & bc & bc+ab+ac \\ 1 & ca & ca+bc+ba \\ 1 & ab & ab+ca+cb \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_2 + C_3]$$

$$= (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$$

$= (ab + bc + ca) \times 0$ (ధర్మము 3 నుంచి)

$= 0.$

ఉదాహరణ **5.19 :**

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$ అని చూపుము.

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ 0 & 0 & 2c \\ 0 & 2b & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{bmatrix}$$

$$= abc(-a) \begin{vmatrix} 0 & 2c \\ 2b & 0 \end{vmatrix}$$ (C_1 గుండా విస్తరిస్తే)

$= abc(-a)(-4bc)$

$= 4a^2b^2c^2.$

ఉదాహరణ **5.20 :** $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2(a+3)$ అని చూపుము

సాధన : $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ a+3 & 1+a & 1 \\ a+3 & 1 & 1+a \end{vmatrix} [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix}C_2 \to C_2 - C_1\\ C_3 \to C_3 - C_1\end{bmatrix}$$

$$= (a+3)\times(1)\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{vmatrix}$$

$= (a + 3)\,(a^2)$

$= a^2(a + 3).$

అభ్యాసం 5.3

1. $\begin{vmatrix}x+3 & x & x\\ x & x+3 & x\\ x & x & x+3\end{vmatrix} = 27(x+1)$ అని చూపుము.

2. $\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ అని చూపుము.

3. $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix} = bc+ca+ab+abc$ అని చూపుము.

4. $\begin{vmatrix}a & a+b & a+2b\\ a+2b & a & a+b\\ a+b & a+2b & a\end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$ అని చూపుము.

5. $\begin{vmatrix}(a+1)(a+2) & a+2 & 1\\ (a+2)(a+3) & a+3 & 1\\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1\end{vmatrix} = -2$ అని చూపుము.

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ అని చూపుము.

7. గణించుము.

(a) $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

8. 'x' కొరకు సాధించుము.

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & x \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

5.11 క్రామర్స్ నియమం ద్వారా రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$ సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకొందాం.

ఈ విభాగంలో, మనము నిర్ధారకాల సహాయంతో రెండు లేదా మూడు తెలియని చరరాశుల గల రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుట నేర్చుకొందాం.

ఆ సమీకరణ వ్యవస్థను సంతృప్తి పరిచే x, y విలువలను సాధన అంటాం. సాధన వుంటే ఆ వ్యవస్థను సంగత వ్యవస్థ అంటాం.

సమీకరణాలలో R.H.S. నందు c_1, c_2 లు సున్న అయినచో ఆ సమీకరణ వ్యవస్థను సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ అంటాం; లేనిచో దానిని అసమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ అంటాం. అది సమఘాత వ్యవస్థ అయినచో $x = y = 0$ అనేది ఎల్లప్పుడూ సాధన అవుతుంది. దీనిని శూన్య సాధన అంటాం.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ అయిన దత్త సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థకు ఒకే ఒక్క సాధన ఉంటుంది.

అది శూన్యసాధన $x = 0,\ y = 0$ మాత్రమే

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ అయినచో, ఆ సమీకరణ వ్యవస్థ ఒక జత అస్వతంత్ర సమీకరణాలను సూచించును. ఈ సందర్భంలో దీనికి అనంత సాధనాలు ఉంటాయి. i.e., వ్యవస్థకు శూన్యేతర సాధన కూడా వుంటుంది. నిర్ధారకాలు మనము రెండు / మూడు చరరాశులలో గల అసమఘాత సమీకరణాలను సాధించుటకు వాడతాము.

నిర్ధారకాల ద్వారా సమఘాత రేఖీయ సమీకరణాల సాధనకు వాడు పద్ధతిని, క్రామర్స్ పద్ధతి అంటాం.

5.11.1 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించడం

$2x + 3y - 5 = 0$ ...(i)

$3x + 5y - 7 = 0$ ...(ii) లను తీసుకొనగా,

సాధారణంగా, ఇటువంటి వ్యవస్థను సాధించుటకు, తొలగించు పద్ధతిని వాడతాము. ఇచ్చట 'y'ని తొలగించగా

$3(2x + 3y - 5) = 0$

$2(3x + 5y - 7) = 0$

$3(2x) + 3(3y) = 3(5)$ ...(iii)

$2(3x) + 2(5y) = 2(7)$ ...(iv)

(iv) నుంచి (iii) ను తీసివేయగా

$$[2(5) - 3(3)]\, y = 2(7) - 3(5)$$

i.e., $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \quad \text{...(A)}$$

పై లవము సూచించు నిర్ధారకం మొదటి నిలువు వరుసలోని మూలకాల 'x' గుణకాలు, 2వ నిలువు వరుసలోని స్థిరపదాలు కలవు.

మరియు 'y' యొక్క హారము సూచించు నిర్ధారకంలో మొదటి నిలువు వరుస మరియు రెండవ నిలువు వరుసలోని x, y గుణకాలు వరుసగా వున్నాయి.

ఇదేవిధంగా (i), (ii) లను 'x' కొరకు సాధించగా

$$5(2x + 3y - 5) = 0$$

$$3(3x + 5y - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(2x)+5(3y)-5(5)=0 & ...(v) \\ 3(3x)+3(5y)-3(7)=0 & ...(vi) \end{cases}$$

(v) నుంచి (vi) ను తీసివేయగా

$$\{5(2) - 3(3)\}\, x = \{5(5) - 3(7)\}$$

$$\text{i.e., } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \quad ...(B)$$

'x' యొక్క లవముకు సంబంధించిన నిర్ధారకంలో మొదటి నిలువు వరుస, రెండవ నిలువు వరుసలు 'y' యొక్క గుణకాలను సూచిస్తున్నాయి. మరియు 'x' యొక్క హారముకు సంబంధించిన నిర్ధారకంలో మొదటి, రెండవ నిలువ వరుసలోని x, y గుణకాలు వరసగా సూచిస్తున్నాయి.

$$\text{కావున } x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \quad \text{(అనుకుందాం)}$$

$$\text{మరియు } y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \quad \text{(అనుకుందాం)}$$

అనేవి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు నిర్ధారక రూపంలో సాధనలు.



మరొక సమీకరణ వ్యవస్థ

$x + y = 3$ ...(i)

$2x - 3y = 1$ ...(ii) ను తీసుకుందాం.

మరలా (i), (ii) లను 'x' కొరకు సాధించగా

$-3\ (x + y) = 3(3)$

$1(2x - 3y) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3(x) - 3(y) = -3(3) & ...(iii) \\ 1(2x) - 1(3y) = 1(1) & ...(vi) \end{cases}$$

(iii) నుంచి (iv) తీసివేయగా

$$-3(x) - 1(2x) = -3(3) - 1(1)$$

$$\Rightarrow \quad \{-3(1) - 1(2)\}x = -3(3) - 1(1)$$

i.e., $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \quad \text{(అనుకుందాం)}$$

మరలా, D_1 నిర్ధారకాన్ని పరిశీలిస్తే, మొదటి నిలువు వరుసలోని స్థిరపదాలు, మరియు రెండవ నిలువు వరుస, 'y' గుణకాలను సూచిస్తాయి. మరలా D నందు, 1-వ, 2-వ నిలువు వరుసలు, x, y గుణకాలను సూచిస్తాయి.

ఇదేవిధంగా y కొరకు (i), (ii) లను సాధించగా,

$2(x) + 2(y) = 2(3)$ ...(v)

$1(2x) + 2(-3y) = 1(1)$ ...(vi)

(vi) నుంచి (v) ను తీసివేయగా

$\{1(-3) - 2(1)\}\ y = 1(1) - 2(3)$

$$\text{i.e., } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D} \quad \text{(అనుకుందాం)}$$

మరలా, నిర్ధారకం D అంటే x, y గుణకాల నిర్ధారకం. మరియు D_2 అంటే స్థిరపదాల స్థానంలో 'y' గుణకాలను వుంచగా వచ్చినది.

కావున $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}$ మరియు $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}$

కావున $a_1x + b_1y = c_1$ మరియు $a_2x + b_2y = c_2$ అయిన

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$

మరియు $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{D_2}{D}$

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ కూడా అవవలెను.

5.11.2. 3 చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణం సాధన

$$x + 2y + 3z = 4$$
$$2x + y + z = 1 \qquad \ldots(C)$$

$3x + 3y + 5z = 3$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$ అయిన

i.e., D అనేది x, y, z గుణకాలతో ఏర్పడిన నిర్ధారకం.

అప్పుడు $xD = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2x & 1 & 1 \\ 3x & 3 & 5 \end{vmatrix}$

2- వ నిలువు వరుసను 'y' తో 3-వ నిలువు వరుసను 'z' తో గుణించి, 1-వ నిలువు వరుసకు కలుపగా

$$xD = \begin{vmatrix} x+2y+3z & 2 & 3 \\ 2x+y+z & 1 & 1 \\ 3x+3y+5z & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

(C) నుంచి

$$xD = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = D_1$$ (అనుకుందాం)

i.e., $xD = D_1 \Rightarrow x = \dfrac{D_1}{D}$

ఇదేవిధంగా

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$ మరియు $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ వస్తుంది.

$yD = D_2$ మరియు $zD = D_3$

అప్పుడు $x = \dfrac{D_1}{D}$, $y = \dfrac{D_2}{D}$, $z = \dfrac{D_3}{D}$ (ఇచ్చట $D \neq 0$)

అనేవి 3 చరరాశులలో సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలు.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

అనేది 3 చరరాశులలో ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ, అప్పుడు,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

మరియు $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \dfrac{D_3}{D}$

అనేవి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలు.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

3 చరరాశులలో గల రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ సాధనా పద్ధతినే, n-చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ సాధనకు ఉపయోగపడుతుంది.

గమనిక : $D = 0$ అయిన క్రామర్స్ నియమంను వాడలేము.

ఉదాహరణ. 5.21 :

$2x + 3y = 5$

$3x + 5y = 7$

సాధన:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 21 = 4$$

మరియు $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1$

కావున, క్రామర్ నియమం ప్రకారం $x = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{1} = 4$

మరియు $y = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{1} = -1$

ఉదాహరణ 5.22 : క్రింది విజాతీయ సమీకరణ వ్యవస్థను క్రేమర్ సూత్రం వాడి సాధించు.

$2x + y - 3z = 3$

$x + 2y + z = 7$

$3x - 5y + 2z = 1$

సాధన: మనకు,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+5) - 1(2-3) - 3(-5-6) = 18 + 1 + 33 = 52 \neq 0$$

మరియు D_1 ను కనుగొనుటను 1-వ నిలువు వరుసను, స్థిర పదాలతో పూరించవలెను.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3(4+5) - 1(10-1) - 3(-25-2) = 27 - 9 + 81 = 99$$

D_2 ను కనుగొనుటకు, 2-వ నిలువు వరుసను, స్థిరపదాలతో నింపవలెను.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(10-1)-3(2-3)-3(1-15) = 18+3+42 = 63$$

D_3 ను కనుగొనుటకు, 3-వ నిలువు వరుసను, స్థిరపదాలతో నింపవలెను.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2(2+25)-1(1-15)+3(-5-6) = 35$$

కావున క్రామర్స్ నియమం ప్రకారం

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{99}{52}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{63}{52}$$

మరియు $z = \frac{D_3}{D} = \frac{35}{52}$

5.12 దత్త రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థకు ఏకైక సాధన ఉండుటకు

$2x + 3y = 4$

$x - 2y = 3$ వ్యవస్థను తీసుకొందాం.

ఇప్పుడు $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-3 = -7 \neq 0$

మరియు $D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8-9 = -17$

మరియు $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2.$

క్రామర్స్ నియమం ప్రకారం

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$$

మరియు $y = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-7} = \frac{-2}{7}$

కావున, $D \neq 0$ మరియు $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ లు కనుగొంటిమి. దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు శూన్యేతర, ఏకైకసాధన ఉంటుంది.

అది $x = 17/7$ మరియు $y = -2/7$.

ఈ సందర్భంలో దత్త వ్యవస్థను సంగత వ్యవస్థ అంటాం.

$x + 2y = 0$

$-2x + 3y = 0$ లను తీసుకొందాం.

ఇచ్చట $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$

మరియు $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

మరియు $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

కావున $x = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{7} = 0$

మరియు $y = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{7} = 0$

కాబట్టి, $D \neq 0$ మరియు $D_1 = D_2 = 0$ లకు దత్త వ్యవస్థకు శూన్య సాధన మాత్రమే వున్నది; అది $x = y = 0$.

$D = 0$ అయిన, క్రామర్స్ నియమం వర్తించదు.

రెండు సందర్భాలు (i) సాధన లేదు (ii) అనంతమైన సాధ్యలు ఉంటాయా అనేవి వుండును.

$2x + 4y = 5$

$x + 2y = 3$ వ్యవస్థను తీసుకుందాం.

ఇచ్చట $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

$D = 0$ కావున, క్రామర్స్ నియమం వర్తించదు.

ఇప్పుడు $D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$

మరియు $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$

కావున, $D = 0$ మరియు $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ అయిన సమీకరణలకు సాధన లేదు.

ఇదేవిధంగా 3 చరరాశులలో 3 సమీకరణాల వ్యవస్థకు సాధనను కనుక్కోందాం.

$x + y + z = 2$

$x + 2y + 3z = 3$

$x + 3y + 5z = 5$ ...(i) ను తీసుకొందాం.

ఇచ్చట $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10 - 9) - 1(5 - 3) + 1(3 - 2) = 1 - 2 + 1 = 0$

ఇప్పుడు $xD = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x & 3 & 5 \end{vmatrix}$

2-వ నిలువు వరుసలు 'y' చే గుణించి, 3-వ నిలువు వరుసను z తో గుణించి 1-వ నిలువు వరుసలో కలుపగా,

$$xD = \begin{vmatrix} x+y+z & 1 & 1 \\ x+2y+3z & 2 & 3 \\ x+3y+5z & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = D_1 \quad (1) \text{ నుంచి}$$

కాబట్టి $D_1 = 2(10 - 9) - 1(15 - 15) + 1(9 - 10) = 2 - 0 - 1 = 1$

కావున $xD = D_1 \Rightarrow xD = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{D} = \frac{1}{0}$ అనిర్వచితము.

ఇదేవిధంగా $yD = D_2$ మరియు $zD = D_3$ అని వచ్చినది.

ఇచ్చట

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1(15-15) - 2(5-3) + 1(5-3) + 1(5-3) = 0 - 4 + 2 = -2$$

మరియు $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10-9) - 1(5-3) + 2(3-2) = 1 - 2 + 2 = 1$

$yD = D_1 \Rightarrow y = \frac{D_2}{D} \Rightarrow y = \frac{-2}{0}$ అనిర్వచితము.

మరియు $zD = D_1 \Rightarrow z = \frac{D_1}{D} \Rightarrow z = \frac{1}{0}$ అనిర్వచితము.

కాబట్టి, $D = 0$ మరియు $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ మరియు $D_3 \neq 0$ అయిన, సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన లేదు. ఈ సందర్భంలో సమీకరణ వ్యవస్థను అసంగత వ్యవస్థ అంటాం.

ఇప్పుడు

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ x + 3y - 3z &= -4 \\ 5x + 3y + 3z &= 10 \end{aligned}\right\}$$ వ్యవస్థను తీసుకుందాం.

ఇచ్చట

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1(9+9) + 1(3+15) + 3(3-15) = 18 + 18 - 36 = 0$$

ఇంకనూ

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 10 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6(9+9)+1(-12+30)+3(-12-30)$$

$$= 108+18-126 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 1(-12+30)-6(3+15)+3(10+20)$$

$$= 18-108+90 = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1(30+12)+1(10+20)+6(3-15) = 42+30 = 72 = 0$$

ఇచ్చట $D = 0$ మరియు $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ అయిన, దత్త సమీకరణ వ్యవస్థను అనంతమైన సాధనలు వుంటాయి.

i.e., $x - y + 3z = 6$

$x + 3y - 3z = -4$ వ్యవస్థను తీసుకొన్నచో

ఈ సమీకరణాలను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$x - y = 6 - 3z$

$x + 3y = -4 + 3z$

నిర్ధారకాలనుపయోగించి, పై సమీకరణాలను సాధించగా

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6-3z & -1 \\ -4+3z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3(6-3z)+1(-4+3z)}{3+1} = \frac{18-9z-4+3z}{4} = \frac{14-6z}{4}$$

$$x = \frac{7-3z}{2}$$

మరియు

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-3z \\ 1 & -4+3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1(-4+3z)-1(6-3z)}{3+1}$$

$$= \frac{-4+3z-6+3z}{4} = \frac{-10+6z}{4}$$

$$y = \frac{-5+3z}{2}$$

$z = k$ అనుకొనిన ('k' ఏదైనా సంఖ్య కావచ్చును), అప్పుడు

$x = \frac{7-3k}{2}$, $y = \frac{-5+3k}{2}$ మరియు $z = k$ వచ్చినది.

కాబట్టి దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు చాలా సాధనలు ఉంటాయి.

కావున, దత్త సమీకరణ వ్యవస్థ ($D_i = 1, 2, 3, ..., n$) కు,

(i) $D \neq 0$ మరియు $D_1, D_2, ... D_n$ లలో కనీసం ఒకటి సున్న కాకపోతే, వ్యవస్థకు శూన్యేతర, ఏకైక సాధన వుంటుంది.

(ii) $D \neq 0$ మరియు $D_i = 0$ ప్రతీ అయిన, వ్యవస్థకు స్వల్ప సాధన $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ వుంటుంది.

(iii) $D = 0$ మరియు ఏదో కొన్ని $D_i = 0$ అయిన, దత్త వ్యవస్థకు సాధన వుండదు.

(iv) $D = 0$ మరియు ప్రతీ $D_i = 0$ అయిన, దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనలు వుంటాయి.

ఉదాహరణ 5.23 :

క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుము.

$x + y + z = 2$

$2x + 7y - 3z = 5$

$3x + 5y - z = 4.$

సాధన: ఇచ్చట

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1(-7+15) - 1(-2+9) + 1(10-21) = 8 - 7 - 11 = -10 \neq 0$$

ఇప్పుడు $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-7+15) - 1(-5+12) + 1(25-28) = 16 - 7 - 3 = 6$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5+12) - 2(-2+9) + 1(8-15) = 7 - 14 - 7 = -14$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1(28-25) - 1(8-15) + 2(10-21) = 3 + 7 - 22 = -12$$

$D \neq 0$ మరియు $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0, D_3 \neq 0$, కావున, దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు శూన్యేతర, ఏకైక సాధన వుంటుంది.

కాబట్టి, క్రామర్స్, నియమం ప్రకారం

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{-10} = \frac{-3}{5}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-10} = \frac{7}{5}$$

$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-12}{-10} = \frac{6}{5}$ లు దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన.

ఉదాహరణ 5.23: క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలలో దేనికి ఏకైక సాధన ఉంటుంది? ఏకైక సాధన ఉన్న సందర్భంలో, ఆ సాధనను కనుక్కోండి.

(i) $2x-3y+4z=-9$
$-3x+4y+2z=-12$
$4x-2y-3z=-3$

(ii) $x+2y-z=0$
$2x+y+2z=0$
$x-3y+z=0$

(iii) $x+2y+z=2$
$2x+y+2z=3$
$x-3y+z=4$

(iv) $x+2y+3z=1$
$3x-y+2z=1$
$4x+y+5z=2$

సాధన :

(i) $2x-3y+4z=-9$
$-3x+4y+2z=-12$
$4x-2y-3z=-3$

ఇచ్చట

$$D=\begin{vmatrix}2&-3&4\\-3&4&2\\4&-2&-3\end{vmatrix}=2(-12+4)+3(9-8)+4(6-16)$$

$$=-16+3-40=-53\neq 0$$

ఇంకనూ

$$D_1=\begin{vmatrix}-9&-3&4\\-12&4&2\\-3&-2&-3\end{vmatrix}=-9(-12+4)+3(36+6)+4(24+12)$$

$$=72+126+144=342$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&-9&4\\-3&-12&2\\4&-3&2\end{vmatrix}=2(36+6)+9(9-8)+4(9+48)=84+9+228=321$$

మరియు $D_3=\begin{vmatrix}2&-3&-9\\-3&4&-12\\4&-2&-3\end{vmatrix}=2(-12-24)+3(9-48)-9(6-16)$

$$=-72+171+90=189$$

కావున $D \neq 0$ మరియు $D_1 \neq 0,\ D_2 \neq 0, D_3 \neq 0.$

పై సమీకరణ వ్యవస్థకు, క్రింద సూచించిన విధంగా ఏకైక శూన్యేతర సాధన ఉంటుంది.

ఆ సాధన,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{342}{-53} = \frac{-342}{53}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{321}{-53} = \frac{-321}{53}$$

మరియు $z = \frac{D_3}{D} = \frac{189}{-53} = \frac{-189}{53}$

(ii) $x + 2y - z = 0$
$2x + y + 2z = 0$
$x - 3y + z = 0$

ఇచ్చట

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+6) - 2(2-2) - 1(-6-1) = 7 + 7 = 14 \neq 0$$

ఇంకనూ,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(1వ నిలువు వరుసతో విస్తరింప చేయగా)}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

మరియు

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ఈ విధంగా $D \neq 0$ మరియు $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ అని కనుగొంటిమి.

$\therefore$ పై రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థకు, ఏకైక సాధన లేదు, కానీ శూన్య సాధన $x = 0, y = 0, z = 0$ కలదు.

(iii) $x + 2y + z = 2$
$2x + y + 2z = 3$
$x - 3y + z = 4$

ఇచ్చట $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ఇంకనూ

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+6) - 2(3-8) + 1(-9-4) = 14 + 10 - 13 = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (\because C_1 = C_3)$$

మరియు $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4+9) - 2(8-3) + 2(-6-1)$

$$= 13 + 10 - 14 = -11$$

కావున $D = 0$ మరియు $D_1 \neq 0,\ D_2 = 0, D_3 \neq 0.$

పై సమీకరణ వ్యవస్థకు, సాధన లేదు.

(iv) $x + 2y + 3z = 1$
$3x - y + 2z = 1$
$4x + y + 5z = 2$

ఇచ్చట $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(-5-2) - 2(5-4) + 3(1+2) = -7 - 2 + 9 = 0$

ఇంకనూ

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(-5-2) - 2(5-4) + 3(1+2) = -7-2+9 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5-4) - 1(15-8) + 3(6-4) = 1-7+6 = 0$$

మరియు $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2-1) - 2(6-4) + 1(3+4) = -3-4+7 = 0$

ఇచ్చట $D = 0, D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0$

కావున, దత్త సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి.

అభ్యాసం 5.4

1. క్రామర్స్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుము.

   (a) $2x - 4y = 3$, $3x + y = 5$ (b) $x + 2y = 1$, $2x + 5y = 3$

2. క్రామర్స్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనను రాబట్టుము.

   (a) $2x + y + 3z = 1$, $x + 4y + 6z = 9$, $4x + 3y + 9z = 5$

   (b) $2x - 3y + 2z = 1$, $x + 3y - z = -2$, $x - y + 3z = 3$

   (c) $3x - 4y + 5z = -6$, $x + y - 2z = -1$, $2x + 3y + z = 5$

3. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను సాధించుము.

   (a) $3x + 2y = 4$, $2x + y = 3$

   (b) $6x - 3y = -1$, $2x + 2y = -3$

(c) $2x+3y+4z=8$
$3x+y-z=-2$
$4x-y-5z=-9$

(d) $x+3y-z=4$
$3x-2y+5z=-4$
$5x-y-4z=-9$

4. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలలో దేనికి ఏకైక సాధన ఉంటుంది? ఏకైక సాధన ఉన్న సందర్భంలో ఆ సాధనను కనుక్కోండి.

(a) $x-2y=4$
$-3x+5y=-7$

(b) $2x-y+z=0$
$x+y-2z=0$
$3x+2y-z=0$

కీలకపదాలు

- సమాసం $a_1b_2-a_2b_1$ ను $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ తో సూచిస్తాం.
- ప్రతీ చతురస్ర మాత్రికకు నిర్ధారకాన్ని జతపర్చగలం.
- ఒక నిర్ధారకంలోని ఒక మూలకపు లఘునిర్ధారకం ఆ మూలకమున్న పంక్తి, దొంతిలను ఆ నిర్ధారకంలోంచి తొలగించగా ఏర్పడే కొత్త నిర్ధారకం విలువ. దీని పరిమాణం మొదటి నిర్ధారకం కన్న ఒకటి తక్కువ.
- నిర్ధారకంలో మూలకం a_{ij} యొక్క సహగుణావయవం దాని లఘునిర్ధారకాన్ని $(-1)^{i+j}$ తో గుణిస్తే ఏర్పడే లబ్ధం.
- ఏ అడ్డు/నిలువు వరుసలనుపయోగించి, నిర్ధారకాన్ని విస్తరించిననూ, ఆ నిర్ధారకం విలువ మారదు.
- ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారం సున్న కాకుంటే దానిని అసాధారణ మాత్రిక అంటాం.
- అడ్డు / నిలువు వరుసలను తారుమారు చేసి వ్రాసినచో నిర్ధారకం విలువ మారదు.
- రెండు అడ్డు/నిలువు వరుసలను తారుమారు చేసినచో నిర్ధారకం విలువ గుర్తు మారును.
- ఏవైనా రెండు అడ్డు/నిలువు వరుసలు సమానమైనచో, నిర్ధారకం విలువు సున్న.
- ఏదైనా అడ్డు / నిలువు వరుసలోని ప్రతీ మూలకాన్ని, రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాల మొత్తంగా లేదా భేదంగా వ్రాసినచో, ఆనిర్ధారకాన్ని, అదే తరగతికి చెందిన రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ నిర్ధారకాల మొత్తంగా లేదా భేదంగా వ్రాయవచ్చు.

- ఏవైన రెండు అడ్డు/నిలువు వరుసలు అనుపాతంలో ఉంటే, ఆ నిర్ధారకం విలువ సున్న.
- ఏదైనా అడ్డు / నిలువు వరుసలోని ప్రతీ మూలకాన్ని అదే తరగతికి చెందిన రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాల మొత్తంగా లేదా భేదంగా వ్రాయవచ్చు.
- ఏదైనా అడ్డు / నిలువు వరుసలోని ప్రతీ మూలకానికి, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఇతర అడ్డు / నిలువు వరుసలోని సదృశ మూలకములను ఏవైనా గుణిజములతో గుణించి కలిపినా లేదా తీసివేసినా, ఆనిర్ధారకం విలువ మారదు.

- $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు సాధనలు,
  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

  $x = \frac{D_1}{D}$, $y = \frac{D_2}{D}$ మరియు $z = \frac{D_3}{D}$ గా ఇచ్చినవి.

  $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ మరియు

  $$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ $D \neq 0$ గా ఇచ్చిరి.

- $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ
  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

  (a) $D \neq 0$ అయినచో సంగతము అగును మరియు ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

  (b) $D = 0$ మరియు D_1, D_2, D_3 లలో అన్నీ సున్న కాకపోతే, అసంగతము మరియు సాధన ఉండదు.

  (c) $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ అయినచో, సంగతము మరియు అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి.

సాధనా అభ్యాసం

1. మాత్రిక $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$ యొక్క అన్ని లఘు నిర్ధారకాలను మరియు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

2. $\begin{vmatrix}43 & 1 & 6\\35 & 7 & 4\\17 & 3 & 2\end{vmatrix}$ ను గణించండి.

3. సర్రస్ పటము ద్వారా క్రింది మాత్రికను గణించండి.

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\1 & 2 & -3\\3 & -1 & -4\end{vmatrix}$$

4. $\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\x & 2 & x\\1 & 3 & x\end{vmatrix}=0$ అయిన 'x' కొరకు సాధించండి.

5. నిర్ధారకాల ధర్మాలను ఉపయోగించి, క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)$

(b) $\begin{vmatrix}1 & x+y & x^2+y^2\\1 & y+z & y^2+z^2\\1 & z+x & z^2+x^2\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$

6. క్రింది వాటిని గణించుము.

(a) $\begin{vmatrix}1^2 & 2^2 & 3^2\\2^2 & 3^2 & 4^2\\3^2 & 4^2 & 5^2\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}1 & w^3 & w^5\\w^3 & 1 & w^4\\w^5 & w^5 & 1\end{vmatrix}$

(w అనేది 1 యొక్క ఘన మూలము)

7. క్రామర్స్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించుము.

(a) $x-2y=3$, $2x+3y=4$ (b) $2x-3y=3$, $3x+2y=11$ (c) $x+y=2$, $4x-3y=3$

8. క్రామర్స్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుము.

(a) $2x+y+3z=8$, $3x+2y+3=z$, $x+3z=1+2y$

(b) $x-2y=3+z$, $2x+z=y$, $3-x=2z-3y$

9. క్రింది వాటిలో ఏ సమీకరణ వ్యవస్థలకు ఏకైక సాధన ఉంటుంది?

(a) $2x-6y+1=0$, $x-3y+2=0$

(b) $2x-3y=5$, $x-2y=6$

(c) $2x+3y+z=1$, $4x-6y+z=3$, $6x-3y+2z=5$

(d) $3x+y+2z=-1$, $x+2y-z=2$, $2x-y+3z=1$

జవాబులు

అభ్యాసం 5.1

1. (a) 11 (b) 1 (c) 0 (d) $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)$
2. (a) మరియు (d)
3. (a) 18 (b) -54 (c) $adf+2bce-ae^2-fb^2-de^2$

అభ్యాసం 5.2

1. (a) $M_{21}=39;\ C_{21}=-39$
   $M_{22}=3;\ C_{22}=3$
   $M_{23}=-11;\ C_{23}=11$

2. $M_{13}=-5;\ C_{13}=-5$
   $M_{23}=-7;\ C_{23}=7$
   $M_{33}=1;\ C_{33}=1$

3. (a) 19 (b) 0 (c) -131
(d) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (e) $4abc$ (f) 0

4. (a) 4 (b) 20 (c) $a^2+b^2+c^2+1$

6. (a) $x=2$ (b) $x=2, 3$ (c) $x=2, -\frac{17}{7}$

అభ్యాసం 5.3

7. (a) a^3 (b) $2abc(a+b+c)^3$

8. $x=\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}$

అభ్యాసం 5.4

1. (a) $x=\frac{23}{14}, y=\frac{1}{14}$ (b) $x=-1, y=1$

2. (a) $x=-1, y=2, z=\frac{1}{3}$ (b) $x=-\frac{3}{4}, y=0, z=\frac{5}{4}$
(c) $x=-1, y=2, z=1$

3. (a) $x=2, y=-1$ (b) $x=-\frac{11}{8}, y=-\frac{8}{9}$
(c) $x=1, y=-2, z=3$ (d) $x=-1, y=\frac{24}{13}, z=\frac{7}{13}$

4. (a) ఉన్నది; $x=-6, y=-5$ (b) ఉన్నది; $x=0, y=0, z=0$

సాధనా అభ్యాసం

1. $M_{11}=-2, M_{12}=-1, M_{13}=1, M_{21}=-7, M_{22}=-5,$
$M_{23}=-1, M_{31}=-8, M_{32}=-7, M_{33}=-2$
$C_{11}=-2, C_{12}=1, C_{13}=1, C_{21}=7, C_{22}=-5,$
$C_{23}=1, C_{31}=-8, C_{32}=7, C_{33}=-2.$

2. 0 3. –31 4. $x = 0,\ x = 1$

6. (a) –8 (b) 0

7. (a) $x = \frac{17}{7},\ y = -\frac{2}{7}$ (b) $x = 3, y = 1$

(c) $x = \frac{9}{7},\ y = \frac{5}{7}$

8. (a) $x = 2, y = 3, z = 3$ (b) $x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{3}{2},\ z = -\frac{1}{2}$

9. (b) మాత్రమే.

అధ్యాయం 6

మాత్రికల విలోమాలు అనువర్తనాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్య పఠనము వలన విద్యార్థి క్రింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- అనుబంధమాత్రిక మరియు విలోమ మాత్రికను కనుగొనుట.
- సాధారణ మరియు అసాధారణ మాత్రికలను నిర్వచించగలరు.
- మాత్రికరూపం $AX = B$ లో సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను సూచిస్తారు.
- మాత్రికా పద్ధతిలో రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థని సాధిస్తారు.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- మాత్రిక నిర్ణాయకం, మాత్రిక వ్యత్యయం.

పరిచయం

ఈ అధ్యాయం నందు మనం మాత్రిక విలోమం వ్యవస్థితమైనచో మాత్రిక విలోమాన్ని కనుక్కొంటాము. మాత్రిక విలోమ పద్ధతిని ఉపయోగించి ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను సాధిస్తాను.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం

నోట్స్

మనము ఒక ఉదాహరణని తీసుకుందాం

అభినవ్ 2 కలములు 5 నోటు పుస్తకములను రూ॥120॥లకు, శంతను 4 కలములు, 3 నోటు పుస్తకములను రూ॥100లకు కొంటే, ఒక కలము ధర, ఒక నోటు పుస్తకము ధర కనుగొనుటకు మాత్రికలు ఎలా ఉపయోగపడతాయో తెలుసుకుందాం.

కలము ధర ఒక్కింటికి రూ॥ x అని, నోటు పుస్తకము ధర ఒక్కింటికి రూ॥ y అని అనుకుందాం. ఇపుడు పై సమాచారాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

దీనినే మరో విధంగా $AX = B$ అని వ్రాయవచ్చు.

ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$.

$$X = A^{-1}B$$

కావున మనకు కావలసిన $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ కనుగొనుటకు A^{-1} కనుగొనవలసి వుంటుంది. A^{-1}ను A యొక్క మాత్రికా విలోమమంటారు. ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం మాత్రికా విలోమాల వ్యవస్థితము మరియు ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించడమెలాగో నేర్చుకుందాం.

6.1 సాధారణ మరియు అసాధారణ మాత్రికలు

ప్రతి చతురస్ర మాత్రికకు ఒక నిర్ధారకముంటుందని మనకిదివరకే తెలుసు.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

మాత్రికకు నిర్ధారకము $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ అవుతుంది. దీనిని $|A|$ తో సూచిస్తాం.

ఇలాగే $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$ అవుతుంది.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యమైతే దానిని సాధారణ మాత్రిక అంటారు. i.e. $|A| = 0$.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యేతరమైతే దానిని అసాధారణ మాత్రిక అంటారు.

i.e. $|A| \neq 0$

ఉదాహరణ 6.1 క్రింది మాత్రికలు సాధారణ మాత్రికలో లేక అసాధారణ మాత్రికలో కనుగొనుము.

(a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

సాధన : (a) $|A| = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-6)(2) - (4)(-3)$

$= -12 + 12 = 0$

కావున A సాధారణ మాత్రిక.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$= (1)(1 - 8) - (2)(0 - 2) + (3)(0 - 1)$

$= -7 + 4 - 3$

$= -6 \neq 0.$

కావున A అసాధారణ మాత్రిక.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం

నోట్స్

6.1 చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకము

ప్రతి చతురస్ర మాత్రికకు ఒక నిర్ధారకముంటుందని మనకిదివరకే తెలుసు.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

మాత్రికకు నిర్ధారకము $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ అవుతుంది. దీనిని $|A|$ తో సూచిస్తాం.

ఇలాగే $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ మాత్రికకు

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$ అవుతుంది.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యమైతే దానిని సాధారణ మాత్రిక అంటారు.

i.e., $|A| = 0$.

ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యేతరమైతే దానిని అసాధారణమాత్రిక అంటారు.

i.e., $|A| \neq 0$

ఉదాహరణ 6.1 క్రింది మాత్రికలు సాధారణ మాత్రికలో లేక అసాధారణ మాత్రికలో కనుగొనుము.

(a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

సాధన : (a) $|A| = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-6)(2) - (4)(-3)$

$= -12 + 12 = 0$

కావున A సాధారణ మాత్రిక.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1-8) - (2)(0-2) + (3)(0-1)$$

$$= -7 + 4 - 3$$

$$= -6 \neq 0.$$

కావున A అసాధారణ మాత్రిక.

ఉదాహరణ 6.2 క్రింది మాత్రిక A సాధారణ మాత్రిక అయితే x విలువ కనుగొనండి.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

సాధన : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-6-2) + 2(-3-x) + 3(2-2x)$$

$$= -8 - 6 - 2x + 6 - 6x.$$

$$= -8 - 8x.$$

A సాధారణమాత్రిక కావున $|A| = 0$.

$|A| = -8 - 8x = 0.$

లేదా $x = -1.$

కావున x విలువ -1.

ఉదాహరణ 6.3. $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ అయితే $|A| = |A'|$ అని చూపండి. (A' అనేది A మాత్రిక యొక్క మాత్రికా వ్యత్యయము)

సాధన : మాత్రిక A కు $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు $$|A| = \begin{vmatrix}1 & 6\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 1\times 2 - 3\times 6 = -16 \quad ...(1)$$

మరియు $$|A'| = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 6 & 2\end{vmatrix} = 1\times 2 - 6\times 3 = -16 \quad ...(2)$$

(1) మరియు (2) నుండి తెలుసుకున్నది $|A| = |A'|$

6.2 చతురస్రమాత్రికలోని మూలకాలకు లఘు నిర్ధారకాలు మరియు సహగుణావయవాలు

చతురస్ర మాత్రికలోని మూలకాలకు లఘు నిర్ధారకాలు సహగుణావయవాలు

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ అను చతురస్ర మాత్రికను తీసుకుందాం.

మాత్రిక A లోని i అడ్డువరుస, j నిలువ వరుస మూలకాలను తొలగించగా ఏర్పడు నిర్ధారకాన్ని a_{ij} మూలకము యొక్కలఘు నిర్ధారకమంటారు. దీనిని M_{ij} తో సూచిస్తారు.

a_{ij} మూలకము యొక్క సహగుణావయవము C_{ij} $a_{i\#^\circ}$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ గా సూచిస్తారు.

ఉదాహరణకు $M_{23} = a_{23}$ యొక్క లఘు నిర్ధారకం.

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

మరియు $C_{23} = a_{23}$ యొక్క సహగుణావయవము

$$= (-1)^{2+3} \; M_{23}$$

$$= (-1)^5 \; M_{23}$$

$$= -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

ఉదాహరణ 6.4 క్రింది మాత్రికలోని మూలకాలకు లఘు నిర్ధారకాలు మరియు సహగుణావయాలను కనుక్కోండి.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

సాధన : మాత్రిక A కు $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$

M_{11} (2 యొక్క లఘు నిర్ధారకము) = 3; $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$

$= (-1)^2 M_{11} = 3.$

M_{12} (5 యొక్క లఘు నిర్ధారకము) = 6; $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3$

$= M_{11} = -6.$

M_{21} (6 యొక్క లఘు నిర్ధారకము) = 5; $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -5.$

M_{22} (3 యొక్క లఘు నిర్ధారకము) = 2; $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2.$

ఉదాహరణ 6.5 క్రింది మాత్రికలోని మూలకాలకు లఘు నిర్ధారకాలు మరియు సహగుణావయాలు కనుక్కోండి.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

సాధన : $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17; \; C_{11} = (-1)^{1+1} \; M_{11} = 17$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14; \; C_{12} = (-1)^{1+2} \; M_{12} = -14$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18;\ C_{13} = (-1)^{1+3}\ M_{13} = -18$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3;\ C_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = -3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-3 - 24) = -27;\ C_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = -27$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 12) = -13;\ C_{23} = (-1)^{2+3}\ M_{23} = 13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-6 - 30) = -36;\ C_{31} = (-1)^{3+1}\ M_{31} = -36$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 12) = -10;\ C_{32} = (-1)^{3+2}\ M_{32} = 10$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5 - 6) = -11;\ C_{33} = (-1)^{3+3}\ M_{33} = -11$$

అభ్యాసం 6.1

1. క్రింది మాత్రికల నిర్ధారకాలు కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. క్రింది మాత్రికలు సాధారణ మాత్రికలో, అసాధారణ మాత్రికలో కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. క్రింది మాత్రికలకు లఘునిర్ధారకాలు కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

4.(a) క్రింది మాత్రికలోని రెండవ అడ్డువరుస మూలకాలకు లఘునిర్ధారకాలను కనుక్కోండి.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) క్రింది మాత్రికలోని మూడవ అడ్డువరుసలోని మూలకాలకు లఘునిర్ధారకాలను కనుక్కోండి.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. క్రింది మాత్రికలోని మూలకాలకు సహగుణావయాలు కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6.(a) క్రింది మాత్రికలో రెండవ అడ్డువరుస మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) క్రింది మాత్రికలో మొదటి అడ్డువరస మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ మరియు $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ అయితే క్రింది వాటిని సరిచూడండి.

(a) $|A| = |A'|$ మరియు $|B| = |B'|$

(b) $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$

6.3 చతురస్ర మాత్రికకు అనుబంధ మాత్రిక

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ అయితే $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ అవుతుంది.

M_{ij} మరియు C_{ij} లు వరుసగా a_{ij} మూలకానికి లఘునిర్ధారకము మరియు సహగుణావయాలనుకుందాం. అపుడు

$M_{11} = |7| = 7; \quad C_{11} = (-1)^{1+1} . |7| = 7.$

$M_{12} = |5| = 5; \quad C_{12} = (-1)^{1+2} |5+ = -5$

$M_{21} = |1| = 1; \quad C_{21} = (-1)^{2+1} |1+ = -1$

$M_{22} = |2| = 2; \quad C_{22} = (-1)^{2+2} |2| = 2$

మాత్రిక A లోని మూలకాల స్థానంలో వాటి సహ గుణావయాలతో నింపగా

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక (1) నుండి

$$B' = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

ఈ విధంగా ఏర్పడ్డ మాత్రిక B' ను A యొక్క అనుబంధమాత్రిక అంటారు. దీనిని Adj A తో సూచిస్తారు.

అలా దత్తమాత్రిక యొక్క అనుబంధ మాత్రిక దత్తమాత్రికలోని మూలకాల సహగుణావయవములతో ఏర్పడ్డ మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయము అవుతుంది.

నిర్వహణ సూత్రం : మాత్రిక A కు Adj A కనుగొనడానికి,

(a) A లోని మూలకాల స్థానంలో వాటి సహగుణావయవాలను వ్రాసి సహగుణావయవాల మాత్రికను కనుగొనాలి.

(b) (a) లో కనుగొన్న మాత్రికకు వ్యత్యయ మాత్రిక కనుగొనాలి.

ఉదాహరణ 6.6 మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ కు అనుబంధ మాత్రిక కనుక్కోండి.

సాధన : $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ మూలకము a_{ij} యొక్క సహగుణావయవము A_{ij} అయితే,

$A_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}(5) = -5$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4.$

A లోని మూలకాల స్థానంలో వాటి సహగుణావయవాలను వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

(1) యొక్క వ్యత్యయము Adj A అవుతుంది.

కావున $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

ఉదాహరణ 6.7 : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ కు అనుబంధ మాత్రిక కనుక్కోండి.

సాధన : $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

|A| లోని a_{ij} మూలకము యొక్క సహగుణావయవము A_{ij} అయితే,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4-2 = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(3-5) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6-20 = -26$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1-10 = -11.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2+5) = -7.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1-8 = -9.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+6) = -7.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3 = 1.$$

A లోని మూలకాల స్థానంలో వాటి సహగుణావయవాలను వ్రాయగా,

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & -26 \\ 3 & -11 & -7 \\ -9 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

కావున $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 2 & -11 & -7 \\ -26 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

మాత్రిక A, n వ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక అయితే

$A.(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\,A = |A|\, I_n$ అవుతుంది.

ఇచ్చట I_n అనేది n వ తరగతి యూనిట్ మాత్రిక

పరిశీలన :

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ మాత్రికను తీసుకుందాం.

అప్పుడు $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6+4 = 10.$

$A_{11} = 3;\ A_{12} = 1;\ A_{21} = -4;\ A_{22} = 2$

కావున $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ఇప్పుడు $A(\text{Adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| . I_2$$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ మాత్రికను తీసుకుందాం.

$|A| = 3(-6-1) - 5(4-1) + 7(2+3) = -1$

$A_{11} = -7;\ A_{12} = -3;\ A_{13} = 5$

$A_{21} = -3;\ A_{22} = -1;\ A_{23} = 2$

$A_{31} = 26;\ A_{32} = 11;\ A_{33} = -19.$

కాబట్టి $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

$$(A)\ (\text{Adj } A) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= |A$ [redacted]

మరియు $(\text{Adj } A) . A = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3.$$

గమనిక : A సాధారణ మాత్రిక అయితే అనగా $|A| = 0$ అయితే, $A . (\text{Adj } A) = 0$

1. క్రింది మాత్రికలకు అనుబంధ మాత్రికలను కనుక్కోండి.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. క్రిందిమాత్రికలకు అనుబంధ మాత్రికలను కనుక్కోండి.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$

పై [redacted] Adj A) A = |A| I_2 ను పరిశీలించండి.

3. క్రింది మాత్రిక A లకు, A. (Adj A) = (Adj A) A = |A| I_3 ను పరిశీలించండి.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

6.4

ఇచ్చిన మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ కు $AB = BA = I$ అయ్యేటట్లు $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ మాత్రికను కనుగొందాం.

$$\text{i.e., } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{లేదా } \begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

రెండువైపుల మూలకాలను పోల్చగా

$ax + by = 1;\quad ay + bv = 0$

$cx + du = 0;\quad cy + dv = 1$

x, y, u మరియు v ల కోసం సాధింపగా,

$$x = \frac{d}{ad-bc},\ y = \frac{-b}{ad-bc},\ u = \frac{-c}{ad-bc},\ v = \frac{a}{ad-dc}$$

$ad - bc \neq 0$ అయినపుడు, అనగా $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

కావున $$B = \begin{vmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-dc} \end{vmatrix}$$

లేదా $$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

ఇపుడు $BA = I$ అని పరిశీలించవచ్చు.

మరియు $$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A \qquad \ldots(1)$$

అను మాత్రికను రాబట్టగలిగినాము. ఈ మాత్రిక B ని A యొక్క విలోమమాత్రిక అని అంటాము. దీనిని A^{-1} తో సూచిస్తాము.

ఇచ్చిన మాత్రిక Aకు, B అనే మాత్రిక వుండి $AB = BA = I$ అయితే B ను మాత్రిక A యొక్క విలోమ మాత్రిక అని అంటారు. దీనిని $B = A^{-1}$ గా వ్రాస్తాము.

గమనిక : $ad - bc = 0$ అయితే, అంటే $|A| = 0$ అయితే (1)లోని R.H.S. వ్యవస్థితముకాదు అనగా $B = (A^{-1})$ ను నిర్వచించలేము. కావున మాత్రిక Aకు గుణకార విలోమము వుండవలనంటే అది అసాధారణ మాత్రిక అయివుండవలెను. కాబట్టి అసాధారణ మాత్రికలకు మాత్రమే గుణకార విలోమాలుంటాయి. అంతేగాక B అసాధారణ మాత్రిక మరియు $A = B^{-1}$.

ఉదాహరణ 6.8 మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$కు విలోమము కనుక్కోండి.

సాధన : $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

కావున $|A| = -12 - 10 = -22 \neq 0$.

$\therefore$ A అసాధారణ మాత్రిక. కావున A కి విలోమము A^{-1} వ్యవస్థితమవుతుంది.

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

గమనిక : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ అని పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ 6.9 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ కు విలోమ మాత్రిక కనుగొనుము.

సాధన : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(5 - 24) - 2(-5 - 30) - 2(4 + 5)$$
$$= 3(-19) - 2(-35) - 2(9)$$
$$= -57 + 70 - 18 = -5 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} వ్యస్థితము.

a_{ij} మూలకము యొక్క సహగుణావయవము A_{ij} అయితే

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 24 = -19,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} - (-5 - 30) = 35,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9,$$

$$A_{21} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 8) = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15+10 = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12-10) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12-2 = 10,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(18+2) = -20,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -19 & 35 & 9 \\ 2 & -5 & -2 \\ 10 & -20 & -5 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{5} & \frac{-2}{5} & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ \frac{-9}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

గమనిక : $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ ని పరిశీలింపుము.

ఉదాహరణ 6.10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ అయితే క్రింది వాటిని కనుగొనుము. (i) $(AB)^{-1}$ (ii) $B^{-1}A^{-1}$ (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ అవుతుందా?

సాధన : (i) $C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+0 & 1+0 \\ -4+0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |C| = |AB| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2 \neq 0.$$

|C| లోని మూలకం C_{ij} యొక్క సహగుణావయవం C_{ij} అనుచో

అప్పుడు, $C_{11} = (-1)^{1+1}(3) = 3$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}(-4) = 4$ $\quad C_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

కనుక $\text{Adj}(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\text{Adj}(C) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $B^{-1}A^{-1}$, కనుగొనుటకు ముందు B^{-1} ను కనుక్కొందాం.

ఇప్పుడు, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2-0 = 2 \neq 0$

$\therefore$ B^{-1} వ్యవస్థితము.

B లోని మూలకము b_{ij} యొక్క సహగుణావయవము B_{ij} అనుకుందాం.

అపుడు $B_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\quad B_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$B_{12} = (-1)^{1+2}(0) = 0$ $\quad B_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$$\text{Adj } B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj } B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

మరియు $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ కావున $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} వ్యవస్థితము.

A లోని మూలకము a_{ij} యొక్క సహగుణావయవము A_{ij} అనుకుందాం.

అపుడు $A_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} - 1 & 0 + \frac{+1}{2} \\ 0 - [redacted] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ [redacted] \end{bmatrix}$$

(ii) (i) (ii) ల నుండి,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$ అని చూడవచ్చు.

కావున $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1. క్రింది మాత్రికలకు వీలైనచో విలోమములు కనుగొనుము.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. క్రింది మాత్రికలకు వీలైనచో విలోమము కనుగొనుము.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ అయితే $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ అవుతుందని చూపండి.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $\left(A'\right)^{-1}$ కనుక్కోండి.

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & c+a & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{bmatrix}$ అయితే ABA^{-1} వికర్ణమాత్రిక అని చూపండి.

6. $\phi(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ అయితే $[\phi(x)]^{-1} = \phi(-x)$ అని చూపండి.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $A'A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ అని చూపండి.

8. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$, అయితే $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)\, I - aA$ అని చూపండి.

9. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, అయితే $A^{-1} = A^2$ అని చూపండి.

10. $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, అయితే $A^{-1} = A'$ అని చూపండి.

6.5

క్రింది తరగతులలో మీరు సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలు (రెండు లేదా మూడు చలరాశులతో కూడిన) సాధించడమెలాగో నేర్చుకున్నారు. వాటిని సాధించుటకు మీరు చలరాశుల లుప్త పద్ధతిని ఉపయోగించారు. కాని చలరాశుల సంఖ్య ఎక్కువయినపుడు పై పద్ధతిలో సాధించడం క్లిష్టమవుతుంది.

క్రామర్ (cramer) పద్ధతి నుపయోగించి ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించడమెలాగో మీ కింతకు ముందే తెలుసు.

చలరాశుల సంఖ్య ఎక్కువగా నున్నపుడు యిచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రికా పద్ధతిలో సాధించడం నేర్చుకుందాం. సులభముగా అర్థము చేసుకొనుటకు మొదట రెండు లేదా మూడు చలరాశుల సమీకరణాలను సాధించుటను ఉదాహరణలతో పరిశీలిద్దాం.

6.5.1 మాత్రికా పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో మొదట ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను $AX = B$ రూపంలో వ్రాసుకుందాం. ఇచ్చట A ను గుణక మాత్రిక అంటాము.

ఉదాహరణకు, యిచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ

$a_1x + b_1y = c_1$ మరియు $a_2x + b_2y = c_2$

అనుకుందాం. ఈ సమీకరణాలను

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ రూపంలో వ్రాసుకొనవచ్చును.

ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

యిచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1;\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2;$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ అయితే ఈ సమీకరణాలను

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$ రూపంలో వ్రాసుకొనవచ్చును.

ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

వీటికి సాధనాలు కనుగొనే ముందు గుణమాత్రిక A అసాధారణ మాత్రిక అవునో కాదో పరిశీలించాలి.

గమనిక : A సాధారణ మాత్రిక అయితే $|A| = 0$, అవుతుంది. కనుక A^{-1} వ్యవస్థితము కాదు. కావున ఈ పద్ధతి మనకు ఉపయోగపడదు.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ అయితే

$AX = B$. సమీకరణాన్ని తీసుకుందాం.

$|A| \neq 0$ అనగా $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అయితే $AX = B$ ను A^{-1} తో రెండువైపుల గుణించగా,

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ అవుతుంది.

$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\Rightarrow IX = A^{-1}B \qquad (\because A^{-1}A = I)$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

$A^{-1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ కావున,

$$X = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{bmatrix} b_2c_1 - b_1c_2 \\ -a_2c_1 + a_1c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix}$$

కావున $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$; $y = \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ఉదాహరణ 6.11 : మాత్రికా పద్ధతినుపయోగించి $\left.\begin{matrix} 4x - 3y = 11 \\ 3x + 7y = -1 \end{matrix}\right\}$ ...(1)

సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రికా పద్ధతిలో

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$ ...(ii) గా రాసుకోవచ్చు.

ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, మరియు $B = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$

కావున (ii)ను

$AX = B$ ...(iii) గా వ్రాసుకోవచ్చును.

$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 9 = 37 \neq 0,$ $|A| \neq 0$ కావున A^{-1} వ్యవస్థితము.

$AX = B$ ని A^{-1} తో రెండువైపుల గుణించగా

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B.$

$X = A^{-1}B.$

$X = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{37}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{37}\begin{bmatrix} 77 & -3 \\ -33 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{37}\begin{bmatrix} 74 \\ -37 \end{bmatrix}$$

లేదా $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ కావున $x = 2, y = -1,$ ఇచ్చిన సమీకరణాలకు ఏకైక సాధన.

ఉదాహరణ 6.12: మాత్రికా పద్ధతినుపయోగించి, క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

$$2x - 3y = 7$$
$$x + 2y = 3$$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను క్రింది విధంగా వ్రాసుకోవచ్చును.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

లేదా $AX = B$

ఇచట $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2\times 2 - 1\times(-3) = 4 + 3 = 7 \neq 0$$

A^{-1} వ్యవస్థితము.

$\text{Adj } (A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ కావున,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \qquad \ldots(ii)$$

(i) నుండి $X = A^{-1}B$

లేదా $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\frac{9}{7} \\ \frac{-7}{7}+\frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

$\because$ ఇచ్చిన సమీకరణాలు సాధన $x = \frac{23}{7},\ y = \frac{-1}{7}$

లేదా $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{7} \\ \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$.

ఉదాహరణ 6.13: మాత్రికా పద్ధతిలో క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించండి.

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z &= 14 \\ x-2y+z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణాలను మాత్రికా పద్ధతిలో

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{...(i) గా వ్రాసుకోవచ్చు.}$$

ఇది $AX = B$ రూపంలో వున్నది.

ఇక్కడ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B$

$|A| = 1(2 - 3) - 2(-1 - 2) + 3(3 + 4)$

$= 26 \neq 0$

కావున A^{-1} వ్యవస్థితము మరియు $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(ii) నుండి $X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\, A.B$

$$X = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} -1 & 11 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix}26\\52\\78\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \text{లేదా} \quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

కావున ఇచ్చిన సమీకరణాల సాధన $x = 1;\ y = 2; z = 3.$

ఉదాహరణ 6.14 క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రికా పద్ధతిలో సాధించుము.

$x + 2y + z = 2$

$2x - y + 3z = 3$

$x + 3y - z = 0$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రికా పద్ధతిగా వ్రాసుకోవచ్చును.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3\\1 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

అనగా $AX = B$ ...(i)

ఇచట $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3\\1 & 3 & -1\end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & -1 & 3\\1 & 3 & -1\end{bmatrix} = 1(1 - 9) - 2(-2 - 3) + 1(6 + 1) = 9 \neq 0$$

కావున A^{-1} వ్యవస్థితము.

మరియు $\text{Adj } A = \begin{bmatrix}-8 & 5 & 7\\5 & -2 & -1\\7 & -1 & -5\end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 5 & 7\\5 & -2 & -1\\7 & -1 & -5\end{bmatrix}$$

(i) నుండి $X = A^{-1}B$.

అనగా $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

కావున ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ సాధన $x = \frac{-1}{9}, y = \frac{4}{9}, z = \frac{11}{9}$ అవుతుంది.

6.6 సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతానికి నియమము

రెండు లేక మూడు ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ $AX = B$ ని తీసుకుందాం.

దీనికి సంబంధించి క్రింది నియమాలు వర్తిస్తాయి.

1. $|A| \neq 0$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతము మరియు $X = A^{-1}B$ అనే ఏకైక సాధన వుంటుంది.
2. $|A| = 0$ అయినపుడు ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతము కావచ్చు, కాకపోవచ్చు. అపుడు ఏకైక సాధన వుండదు. అంతేకాక

   (a) $(\text{Adj } A)B \neq 0$, అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతము.

   (b) $(\text{Adj } A)B = 0$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలుంటాయి.

గమనిక: పై నియమాలు n చలరాశులతో కూడిన n సమీకరణాలు కూడా వర్తిస్తాయి.

దీనిని క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా పరీక్షించి వీలయిన చోట్ల సాధనాలు కనుక్కుందాం.

(a) $5x + 7y = 1$
$2x - 3y = 3$

$\frac{5}{2} \neq \frac{7}{-3}$, కావున ఈ సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతము. మరియు ఏకైక సాధనవుంటుంది.

దీనికి మాత్రికా సమీకరణము

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

అనగా $AX = B$ ...(i)

ఇక్కడ $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ఇచట $|A| = 5(-3) - 2 \times 7 = -15 - 14 = -29 \neq 0$

మరియు $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-29} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ...(ii)

(i), నుండి $X = A^{-1}B$ అవుతుంది.

అనగా $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-29} \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{29} \\ -\frac{13}{29} \end{bmatrix}$ ((i), (ii) ల నుండి)

కావున $x = \frac{24}{29}$, మరియు $y = \frac{-13}{29}$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు ఏకైక సాధన.

(b) $3x + 2y = 7$
$6x + 4y = 8$

$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{7}{8}$ కావున

ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన లేదు.

ఇచ్చిన సమీకరణాలను మాత్రికా పద్ధతిలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

లేదా $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$|A| = 12 - 12 = 0$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

మరియు $(\text{Adj } A)\, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -18 \end{bmatrix} \neq 0$

కావున ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతము.

(c) $3x - y = 7$
$9x - 3y = 21$

ఇక్కడ , $\frac{3}{9} = \frac{-1}{3} = \frac{7}{21}$, కావున ఈ సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలుంటాయి.

ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రికా రూపంలో వ్రాయగా,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

లేదా $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$ అనుకొనిన $AX = B$ అవుతుంది.

ఇచట $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3X = (-3) - 9 \times (-1)$

$= -9 + 9 = 0.$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$$

మరియు $(\text{Adj } A)\, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలుంటాయి.

ఇంతవరకు మనం గమనించిన విషయాలు.

(i) $|A| \neq 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$ అయితే సమీకరణ వ్యవస్థకు ఏకైక శూన్యేతర సాధన ఉంటుంది.

(ii) $|A| \neq 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B = 0$ అయితే సమీకరణ వ్యవస్థకు $x = y = z = 0$ అనే శూన్యసాధన మాత్రమే ఉంటుంది.

(iii) $|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B = 0$ అయితే సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలుంటాయి.

(iv) $|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$ అయితే సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతము.

$|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$ గా ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను పరిశీలిద్దాం.

$x + 2y + z = 5$
$2x + y + 2z = -1$
$x - 3y + z = 6$

ఇచ్చిన సమీకరణాలను మాత్రికా పద్ధతిలో

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$ గా వ్రాసుకొనవచ్చు.

i.e., $AX = B$

ఇచ్చట $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\because C_1 = C_3)$$

మరియు $$(\text{Adj } A)\, B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$ ($\text{Adj } A$ ను పరిశీలింపుము)

$$= \begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix} \neq 0$$

$|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)B \neq 0$ కావున

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)B$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix}}{0}$$ ఇది అర్థరహితము.

$\therefore$ ఇచ్చిన ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనలేదు.

పైన చర్చించిన విషయాలను క్రింది విధముగా సంక్షిప్తీకరించవచ్చు.

(i) $|A| \neq 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు ఏకైక శూన్యేతర సాధన వుంటుంది.

(ii) $|A| \neq 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు శూన్యసాధన మాత్రమే వుంటుంది.

(iii) $|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B = 0$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలుంటాయి.

(iv) $|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనాలుండవు (అసంగతము)

ఉదాహరణ 6.15: మాత్రికా విలోమ పద్ధతులను పయోగించి క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను సాధించండి.

(i) $6x + 4y = 2$
$9x + 6y = 3$

(ii) $2x - y + 3z = 1$
$x + 2y - 3z = 2$
$5y - 5z = 3$

సాధన: (i) ఇచ్చిన వ్యవస్థను మాత్రికా సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i.e., $AX = B$

ఇక్కడ $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ఇపుడు $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6\times 6 - 9\times 4 = 36 - 36 = 0$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలైనా వుంటాయి లేకుంటే అసలు సాధన వుండదు.

$x = k$ అనుకుంటే $6k + 4y = 2$ అవుతుంది. దీని నుండి $y = \frac{1-3k}{2}$ అవుతుంది.

x, y విలువలను రెండవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$9k + 6\left(\frac{1-3k}{2}\right) = 3$$

$\Rightarrow 18k + 6 - 18k = 6$

$\Rightarrow 6 = 6$, ఇది వాస్తవము.

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనములుంటాయి.

అవి $x = k$, $y = \frac{1-3k}{2}$, k ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్య

(ii) ఇచ్చిన సమీకరణాలు

$2x - y + 3z = 1$ ...(1)

$x + 2y - z = 1$ ...(2)

$5y - 5z = 3$ ...(3)

ఇచ్చిన సమీకరణాలను మాత్రికా పద్ధతిలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i.e., $AX = B$

ఇచట $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-10 + 5) + 1(-5 - 0) + 3(5 - 0)$$

$$= -10 - 5 + 15 = 0$$

కావున యిచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు వుంటే అనంత సాధనాలుంటాయి లేకుంటే సాధనే వుండదు.

$z = k$ అనుకుంటే, (1) నుండి $2x - y = 1 - 3k$ మరియు (2) నుండి $x + 2y = 2 + k$. కావున మనకు

$$2x - y = 1 - 3k$$

$$x + 2y = 2 + k$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2+k \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2+k \end{bmatrix}$ అనుకుందాం.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} వ్యవస్థితము.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $X = A^{-1}B$.

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k+\frac{4}{5} \\ k+\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$x = -k + \frac{4}{5}$, $y = k + \frac{3}{5}$, k ఏదేని సంఖ్య

x, y మరియు z విలువలను (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$5\left(k + \frac{3}{5}\right) - 5k = 3$$

$\Rightarrow 5k + 3 - 5k = 3 \Rightarrow 3 = 3$ ఇది వాస్తవము.

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంతసాధనాలుంటాయి.

అవి $x = -k + \frac{4}{5}$; $y = k + \frac{3}{5}$ మరియు $z = k$, k ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య.

6.7 సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ

$AX = B$ సమీకరణ వ్యవస్థలో $B = 0$ శూన్యమాత్రిక అయితే దానిని సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ అంటారు.

దిగువ యిచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థలు సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థలు

(i) $x + 2y = 0$
$-2x + 3y = 0$

(ii) $2x + 5y - 3z = 0$
$x - 2y + z = 0$
$3x - y - 6z = 0$

(iii)

$2x + y - 3z = 0$
$x - 2y + z = 0$
$3x - y - 2z = 0$

ఇపుడు (ii)లో యిచ్చిన సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను సాధిద్దాం.

$2x + 5y - 3z = 0$
$x - 2y + z = 0$ అని యిచ్చారు.
$3x - y - 6z = 0$

(ii) ను మాత్రికా సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i.e., $AX = O$

ఇచట $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$|A| = 2(12 + 1) - 5(-6 - 3) - 3(-1 + 6)$

$= 26 + 45 - 15$

$= 56 \neq 0$

కాని $B = 0 \Rightarrow (\text{Adj } A)B = 0.$

కావున $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}A)B = 0$

$\therefore\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0.$

(iii) లో ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకుందాం.

$$2x + y - 3z = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$
$$3x - y - 2z = 0$$

దీనిని మాత్రికా సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i.e., $AX = 0$

ఇచట $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1) - 1(-2-3) - 3(-1+6)$$

$$= 10 + 5 - 15$$

$$= 0$$

$B = 0 \Rightarrow (\text{Adj } A)B = 0.$

కావున $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}A)B = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

మొదటి రెండు సమీకరణాలను

$$2x + y = 3z$$

$$x - 2y = -z$$

ను తీసుకొని సాధిస్తే $x = z,\ y = z,\ z = k,$ (k ఏదేని సంఖ్య) వస్తుంది.

అపుడు $x = k,\ y = k,\ z = k$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన అవుతుంది.

గమనిక: $|A| = 0$ మరియు $(\text{Adj } A)\ B = 0$ అయ్యేటువంటి సమఘాతసమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనలుంటాయి.

అభ్యాసం 6.4

1. క్రింది సమీకరణాలను మాత్రికా పద్ధతిలో సాధించండి.

(a) $2x + 3y = 4$
$x - 2y = 5$

(b) $x + y = 7$
$3x - 7y = 11$

(c) $3x + 4y - 5 = 0$
$x - 2y + 6 = 0$

(d) $2x - 3y + 6 = 0$
$6x + y - 8 = 0$

2. క్రింది సమీకరణాలను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో సాధించండి.

(a) $x+2y+z=3$
$2x-y+3z=5$
$x+y-z=7$

(b) $2x+3y+z=13$
$3x+2y-2=12$
$x+y+2z=5$

(c) $-x+2y+5z=2$
$2x-3y+z=15$
$-x+y+z=-3$

(d) $2x+y-z=2$
$x+2y-3z=-1$
$5x-y-2z=-1$

3. మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను సాధించండి.

(a) $x+y+z=0$
$2x-y+z=0$
$x-2y+3z=0$
$z+x=0$

(b) $3x-2y+3z=0$
$2x+y+z=0$
$4x-3y+2z=0$

(c) $x+y+1=0$
$y+z-1=0$

4. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలు సంగతమో, అసంగతమో కనుక్కోండి. సంగతమైతే వాటి సాధనలు కనుక్కోండి.

(a) $2x-3y=5$
$x+y=7$

(b) $2x-3y=5$
$4x-6y=10$

(c) $3x+y+2z=3$
$-2y-z=7$
$x+15y+3z=11$

(d) $x+2y-3z=0$
$4x-y+2z=0$
$3x+5y-4z=0$

కీలకపదాలు

- ఒక చతురస్రమాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యమైతే ఆ మాత్రికను సాధారణ మాత్రిక అంటారు.
- ఇచ్చిన మాత్రికలో i అడ్డువరుస , నిలువు వరుస j, మూలకాలను తొలగించగా వచ్చు మాత్రిక నిర్ధారకమును a_{ij} యొక్క లఘునిర్ధారకము అంటారు. దీనిని సాధారణంగా M_{ij} తో సూచిస్తారు.

- a_{ij} సహ గుణావయవాన్ని $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ గా నిర్వచిస్తాము.
- ఇచ్చిన మాత్రిక A లోని మూలకాల స్థానాలలో వాటి సంబంధిత సహగుణావయవాలను వ్రాసి, వ్యత్యయం చేస్తే వచ్చే మాత్రికను Aకు అనుబంధ మాత్రిక అంటాము. దీనిని Adj A తో సూచిస్తాము.
- A, n వ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక అయితే $A . (Adj A) = (Adj A) . A = |A| I_n$, I_n n వతరగతి యూనిట్ మాత్రిక.
- ఇచ్చిన అసాధారణ మాత్రిక Aకు $AB = BA = I$ అయ్యే విధంగా, B అనే అసాధారణ మాత్రిక వ్యవస్థితమైతే B ని Aకు గుణకార విలోమము అంటారు. దీనిని $B = A^{-1}$ గా వ్రాస్తాము.
- అసాధారణ మాత్రికలకు మాత్రమే మాత్రికా విలోమాలుంటాయి.
- $a_1x + b_1y = c_1$ మరియు $a_2x + b_2y = c_2$ అయితే

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

గా మాత్రికా పద్ధతిలో వ్రాయవచ్చు.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ అనుకుంటే

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

- $AX = B$ సమీకరణ వ్యవస్థలో $|A| \neq 0$ అయితే ఆ సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతము మరియు ఏకైక సాధన వుంటుంది.
- $AX = B$ సమీకరణ వ్యవస్థలో $|A| = 0$ మరియు $(Adj A)B \neq 0$ అయితే ఆ సమీకరణ వ్యవస్థ అసంగతము.
- $AX = B$ సమీకరణ వ్యవస్థలో $|A| = 0$ మరియు $(Adj A)B = 0$ అయితే ఆ సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతము మరియు అనంతసాధనాలుంటాయి.

- $AX = B$ సమీకరణ వ్యవస్థలో B శూన్యమాత్రిక అయితే దానిని సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ అంటారు.
- సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ $AX = 0$ లో $|A| \neq 0$ అయితే $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ అనే శూన్యమాత్రిక అయితే దానిని సాధన మాత్రమే వుంటుంది.
- సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ $AX = 0$ లో $|A| = 0$ అయితే ఆ వ్యవస్థకు అనంత సాధనాలుంటాయి.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. క్రింది మాత్రికలకు $|A|$ కనుక్కోండి.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. క్రింది మాత్రికలకు $\text{Adj } A$ కనుగొని, $A(\text{Adj } A) = |A| I_3 = (\text{Adj } A) A$ అవుతుందని చూపండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. క్రింది మాత్రికలకు A^{-1} (వ్యవస్థితమైతే) కనుగొని, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ అని పరిశీలించండి.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

4. క్రింది మాత్రికలకు విలోమ మాత్రికలు కనుక్కోండి.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను సాధించండి.

(a) $\begin{aligned} x+2y &= 4 \\ 2x+5y &= 9 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 6x+4y &= 2 \\ 9x+6y &= 3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x+y+z &= 1 \\ x-2y-z &= \frac{3}{2} \\ 3y-5z &= 9 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x-y+z &= 4 \\ 2x+y-3z &= 0 \\ x+y+z &= 2 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x+y-2z &= -1 \\ 3x-2y+z &= 3 \\ 2x+y-z &= 0 \end{aligned}$

6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4;\ \frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1;\ \frac{8}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=3$ ను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో సాధించండి.

7. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థకు అశూన్యసాధన కనుక్కోండి.

$$\begin{aligned} 3x+2y+7z &= 0 \\ 4x-3y-2z &= 0 \\ 5x+9y+23z &= 0 \end{aligned}$$

8. క్రింది సమఘాత సమీకరణాలను సాధించండి.

(a) $\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-2y+z &= 0 \\ 3x+6y-5z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x+2y-2z &= 0 \\ 2x+y-3z &= 0 \\ 5x+4y-9z &= 0 \end{aligned}$

9. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థకు అశూన్యసాధన వుంటే p విలువ కనుక్కోండి.

$$x+2y+z=px$$
$$2x+y+z=py$$
$$x+y+2z=pz$$

10.
$$2x-3y+4=0$$
$$5x-2y-1=0$$
$$21x-8y+\lambda=0$$

పై సమీకరణ వ్యవస్థ సంగతమైతే λ విలువను కనుక్కోండి.

జవాబులు

అభ్యాసం 6.1

1. (a) -12 (b) 10
2. (a) సాధారణ (b) అసాధారణ
3. (a) $M_{11}=4;\ M_{12}=7;\ M_{21}=-1;\ M_{22}=3$
   (b) $M_{11}=5;\ M_{12}=2;\ M_{21}=6;\ M_{22}=0$
4. (a) $M_{21}=11;\ M_{22}=7;\ M_{23}=1$
   (b) $M_{31}=-13;\ M_{32}=-13;\ M_{33}=13$
5. (a) $C_{11}=7;\ C_{12}=-9;\ C_{21}=2;\ C_{22}=3.$
   (b) $C_{11}=6;\ C_{12}=5;\ C_{21}=-4;\ C_{22}=0$
6. (a) $C_{21}=1;\ C_{22}=-8;\ C_{23}=-2$
   (b) $C_{11}=-6;\ C_{12}=10;\ C_{33}=2$

అభ్యాసం 6.2

1. (a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} d & b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$

అభ్యాసం 6.3

1. (a) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4/10 & -2/10 \\ 3/10 & -1/10 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{24} \end{bmatrix}$

4. $(A')^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

అభ్యాసం 6.4

1. (a) $x = \frac{23}{7}, y = \frac{-6}{7}$ (b) $x = 6, y = 1$

(c) $x = -\frac{7}{5}, y = \frac{23}{10}$ (d) $x = \frac{27}{30}, y = \frac{13}{5}$

2. (a) $x=\frac{58}{11}, y=-\frac{2}{11}, z=-\frac{21}{11}$ (b) $x=2, y=3, z=0$

(c) $x=2, y=-3, z=2$ (d) $x=1, y=2, z=2$

3. (a) $x=0, y=0, z=0$ (b) $x=0, y=0, z=0$

(c) $x=0, y=0, z=0$ (d) $x=0, y=0, z=0$

4. (a) సంగతము $x=\frac{26}{5}, y=\frac{9}{5}$ (b) సంగతము; అనంత సాధనలు

(c) అసంగతము (d) శూన్యసాధన $x=y=z=0$

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) -31 (b) -24

2. (a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -13 \\ -4 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -13 & 13 & 13 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{36} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{-5}{14} \\ \frac{-2}{7} & \frac{-3}{14} \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

5. (a) $x = 2,\ y = 1$

   (b) $x = k,\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k$

   (c) $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = -\frac{3}{2}$

   (d) $x = 2, y = -1, z = 1$

   (e) $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$

6. $x = 2, y = 3, z = 5$

7. $x = -k,\ y = -2k, z = k$

8. (a) $x = k,\ y = 2k,\ z = 3k$

   (b) $x = y = z = k$

9. $p = 1, -1, 4$

10. $\lambda = -5$.

అధ్యాయం

7

ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠము చదివిన తర్వాత నీవు

- ఇచ్చిన వస్తువులను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చ గలము.
- ప్రాథమిక గణన సమస్యను ప్రవచించడము
- $n!$ ను నిర్వచించి, వివిధ n విలువలకు $n!$ ను గణించడము.
- ప్రస్తారమనగా అమరిక అని ప్రవచించి, ${}^{n}P_{r}$ అర్థాన్ని వ్రాయగలగడం
- ${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ అని ప్రవచించి, దీనినుపయోగించి సమస్యలను సాధించడము
- (i) $(n+1)^{n}P_{r} = (n+1)\,P_{n}$ (ii) ${}^{n}P_{r+1} = (n-r)\,{}^{n}P_{r}$ అని చూపడం
- సంయోగమనగా ఎన్నిక అని తెల్పి, ${}^{n}C_{r}$ కు అర్థాన్ని తెలియజేయడం
- ప్రస్తారానికి సంయోగానికి వ్యత్యాసాన్ని తెలుసుకోవడం
- ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ని ఉత్పాదించి, సమస్యల సాధనకు ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం
- ${}^{n}P_{r} = r!\ {}^{n}C_{r}$ ను ఉత్పాదించడం
- ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$ అని సరిచూడడం
- ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = (n+1)\,C_{r}$ ను ఉత్పాదించి, సమస్యల సాధనతో దీనినుపయోగించడం.

మాడ్యూల్ - I
బీజగణితం



పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంఖ్యామానము
- నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలు

పరిచయం

ఒక ప్రశ్నాపత్రంలో ఇచ్చిన ప్రశ్నలనుంచి ఏవైనా 5 ప్రశ్నలు ఎంచుకోవడం లేదా ఒక హోటల్ లోని 'మెనూకార్డు'లోని పదార్థాల పట్టిక నుంచి కొన్ని పదార్థాలు ఎంచుకోవడం వంటి సందర్భాలు మనకు తారసపడి ఉంటాయి. అలాంటి సందర్భాలనే ఈ అధ్యాయంలో మనం చర్చిస్తాం. మన దైనందిన జీవితంలోనూ, అధ్యాయం 8 లో చర్చించిన సంభావ్యతలోనూ గల అనువర్తనాలదృష్ట్యా బీజ గణితంలోని 'ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు' అధ్యాయం ముఖ్యమైంది. ఈ ప్రస్తారాలు, సంయోగాలను ఉపయోగించేటప్పుడు సందర్భాన్ని బట్టి ప్రస్తారాల భావన వర్తిస్తుందా లేదా సంయోగాల భావన వర్తిస్తుందా అనే విషయాన్ని కచ్చితంగా తెలుసుకోవాలి. స్థూలంగా సంయోగం అంటే ఎంపిక మాత్రమే. కాని ప్రస్తారం అంటే ఎంపిక, అమరిక రెండూ కలిసి ఉంటాయి. ఉదాహరణకు 1, 2, 3, 4, 5 అంకెల నుంచి మూడు అంకెల సంఖ్య ఏర్పరచడం ఒక ప్రస్తారం. దీనిని మనం రెండు అంచెలలో చేస్తాం. మొదటగా 1, 2, 3, 4, 5 అంకెలనుంచి 3 అంకెలు ఎంపికచేస్తాం. ఉదాహరణకు 2, 4, 5 ఎంచుకొన్నామనుకోండి. ఈ 3 అంకెలను అమర్చడం ద్వారా 245, 452, 542, 222 మొదలైన 3 అంకెల సంఖ్యలు ఏర్పరచవచ్చు. ఇవే 5 అంకెలు 1, 2, 3, 4, 5 ఉపయోగించి 3 మూలకాల సమితులను తయారుచేయడం ఒక సంయోగం అవుతుంది. ఎందుకంటే ఇక్కడ మనం 3 అంకెలు ఎంచుకొంటే చాలు. ఉదాహరణకు 2, 4, 5 ఎంచుకొన్నాం అనుకొంటే వీటిని ఉపయోగించి ఒకే ఒక 3 మూలకాల సమితి $\{2, 4, 5\}$ ని ఏర్పరచగలం. ఎందుకంటే మనం $\{4, 5, 2\}$ రాసినా, $\{5, 4, 2\}$ రాసినా ఆ సమితులు $\{2, 4, 5\}$ కు సమానం. కనక మూలకాల (లేదా వస్తువుల) అమరికకు ప్రాధాన్యం ఉంటే అది 'ప్రస్తారం' అవుతుందనీ, అలాకాకుండా అమరికకు ప్రాధాన్యం లేకుండా మూలకాల ఎంపిక మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకొంటే అది ఒక 'సంయోగం' అవుతుందనీ గుర్తుంచుకోవాలి.

ముందుగా మనం ఈ ప్రస్తారాలు, సంయోగాల సంఖ్య గణనం చేసేటప్పుడు ఉపయోగించే క్రమ గుణిత సంకేతం గురించి నేర్చుకొందాం. ఒక ధన పూర్ణాంకం 'n' యొక్క క్రమ గుణితం దీ! ను అనుగమన పద్ధతిలో కింది విధంగా నిర్వచిస్తాం.

$1! = 1$ గానూ,

$n > 1$ అయినప్పుడు $n! = n . ((n-1)!)$ గానూ నిర్వచిస్తాం.

ఉదాహరణకు $2! = 2 (1!) = 2$

$3! = 3 (2!) = 3.2 = 6$

$4! = 4 (3!) = 4.6 = 24$

$5! = 5 (4!) = 5.24 = 120$

ఇంకా $0! = 1$ గా నిర్వచిస్తాం.

ఈ అధ్యాయం అంతటా n, r అక్షరాలు రుణేతర పూర్ణాంకాలను సూచిస్తాయి.

7.1 గణన సూత్రము

ఇపుడు మనం ప్రారంభంలో చర్చించిన సమస్యను సాధిద్దాం. బెంగుళూరు నుండి ఇటార్సికి పోవు రైళ్ళను t_1, t_2 లతోను, ఇటార్సి నుండి అలహాదాబాదుకు పోవు రైళ్ళను T_1, T_2, T_3 లతో సూచిద్దాం. ఒకతను t_1 రైల్లో బెంగుళూరు నుండి ఇటార్సికి ప్రయాణిస్తే, ఇటార్సి నుండి అలహాబాదుకు అతను T_1, T_2, T_3 లలో ఏదో ఒక రైలు లో ప్రయాణించవచ్చు. అనగా అతను t_1T_1, t_1T_2 మరియు t_1T_3 విధాలుగా బెంగుళూరు నుండి అలహాబాదుకు ప్రయాణించవచ్చు. ఇక్కడ t_1T_1 అంటే అతను బెంగుళూరు నుండి t_1 రైల్లోను, ఇటార్సి నుండి అలహాబాదుకు T_1 రైల్లోను ప్రయాణించాడని అర్థము. ఇలాగే అతను బెంగుళూరు నుండి ఇటార్సి కి t_2 రైల్లో ప్రయాణిస్తే అపుడు అతను t_2T_1, t_2T_2, t_2T_3 విధాలుగా బెంగుళూరు నుండి అలహాబాదుకు ప్రయాణించవచ్చు. కాబట్టి అతను $6(2 \times 3)$ విధాలుగా బెంగుళూరు నుండి అలహాబాదుకు ప్రయాణించవచ్చును.

ఈ సమస్యలో రైళ్ళ సంఖ్య తక్కువ కాబట్టి మనం అన్ని రకాల అవకాశాలను వ్రాయగలిగాము. ఒక వేళ బెంగుళూరు నుండి ఇటార్సికి 10 రైళ్ళు, ఇటార్సి నుండి అహమ్మదాబాదుకు 15 రైళ్ళు వుంటే అపుడు అన్ని అవకాశాలను వ్రాయడం క్లిష్టమవుతుంది. కాబట్టి ఇక్కడ ప్రాథమిక గణన సూత్రము (Fundamental Principle of counting) లేదా గణన సూత్రము (Counting Principle) ఉపయోగపడుతుంది.

ఒక పనిని m విధాలుగా చేయగలిగి, ఆ పనిని ఏదో విధంగా చేసిన తర్వాత రెండవ పనిని n రకాలు గా చేయగలిగితే రెండు పనులను కలిపి మొత్తం $m \times n$ రకాలుగా చేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.1 10 నుండి 95 వరకు గల సంఖ్యలలో 5 యొక్క గుణిజాలు ఎన్ని వున్నాయి.

సాధన : ఒక సంఖ్య 5 యొక్క గుణిజము కావలెనంటే ఆ సంఖ్యకు ఒక్కట్ల స్థానంలో 0 గాని 5 గాని వుండవలెనని నీకు తెలుసు. అంటే ఒక్కట్ల స్థానంలో అంకెని రెండు రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు. రెండవ అంకెను 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 నుండి ఒక దానిని ఎంచుకోవచ్చు. అనగా రెండవ అంకెను 9 రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు. కావున 10 నుండి 95 వరకు 5 యొక్క గుణజాల సంఖ్య, $2 \times 9 = 18$.

ఉదాహరణ 7.2 ఒక సిటిలో, సిటీ బస్సు రూట్లను A, B, C, D, E మరియు F లతో ప్రారంభించి తర్వాత స్థానంలో 100 లోపు సహజ సంఖ్యలతో సూచిస్తే, ఎన్ని విభిన్న బస్సు రూట్ల సంఖ్యలు వీలవుతాయి?

సాధన : మొదటి స్థానంలోని అక్షరాన్ని A, B, C, D, E, F ల నుండి 6 రకాలు ఎన్నుకోవచ్చు. తర్వాత స్థానాల్లో వుండవలసిన సంఖ్యను 1 నుండి 99 వరకు 99 రకాలుగా ఎన్ను కోవచ్చు. కాబట్టి మొత్తం వీలయ్యే బస్సు రూట్ల సంఖ్య $99 \times 6 = 594$.

అభ్యాసం 7.1

1. (a) మూడంకెల సంఖ్యలలో 5 యొక్క గుణిజాలెన్ని?

   (b) ఒక నాణేన్ని మూడు సార్లు ఎగురవస్తే వచ్చే మొత్తం ఘటనలెన్ని?

   (c) నీకు 3 చొక్కాలు, 4 జతల ప్యాంట్లు వుండి ఏ చొక్కాను, ఏ ప్యాంటుతోనైనా నీవు ధరించగలిగితే నీవు ఎన్ని రకాలుగా చొక్కా, ప్యాంటు లను ఎన్నుకోగలవు.

   (d) ఒక యాత్రికురాలు మరొక దేశానికి ఓడలో వెళ్ళి, విమానంలో తిరిగి రావాలనుకున్నది. వెళ్ళడానికి ఆమెకు 5 ఓడలు, రావడానికి 4 విమానాలు అందుబాటులో ఉంటే, ఆమె ఎన్ని రకాలుగా ప్రయాణం చేయగలదు.

2. (a) రెండు స్థానాలను ఒక దాన్ని పురుషునితోను, రెండవ దాన్ని స్త్రీతోను, 4 గురు పురుషులు 12 మంది స్త్రీల నుండి ఎన్ని రకాలుగా పూరించవచ్చు.

   (b) ఒక గదికి ఫ్లోరింగు, పెయింటింగ్ చేయవలసివున్నది. ఫ్లోరింగ్‌ను 3 రంగులలోను, గది గోడలను 12 రంగులతోను వేయవచ్చు. రంగుల ఎన్ని పై ఏ నింబంధన లేనిచో, ఎన్ని రకాలుగా ఫ్లోరింగ్‌ను, గది గోడలకు రంగులు వేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.3 ఒక ప్రశ్నాపత్రంలోని మూడు ప్రశ్నలకు వరుసగా 4, 3, 2 సాధనలుంటే మొత్తం సాధన లెన్నో తెలుపుము.

సాధన : మొదటి ప్రశ్నకు 4 సాధనలు, రెండవ ప్రశ్నకు 3 సాధనలు మరియు మూడవ ప్రశ్నకు 2 సాధనలున్నాయి.

$\therefore$ గణన సూత్రము ప్రకారం మొత్తం సాధనలు

$= 4 \times 3 \times 2 = 24$

ఉదాహరణ 7.4 ఆంగ్లభాషలో ఎటు వైపు నుంచి చదివినా ఒకే పదం వచ్చే ROTOR లాంటి పదాలను పాలిన్ డ్రోమ్స్ (Palindromes) అంటారు. ఆంగ్ల భాషలో గరిష్టంగా రాగల 5 అక్షరాల పాలిన్ డ్రోమ్స్ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన : ఐదుక్షరాల పదములో కుడి వైపుననున్న మొదటి అక్షరాన్ని 26 ఆంగ్ల అక్షరాల నుండి 26 రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు. అలాగే రెండవ అక్షరాన్ని 26 రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. అనగా మొదటి రెండు అక్షరాలను $26 \times 26 = 5768$ రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. తర్వాత మూడవ అక్షరాన్ని కూడా 26 రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు కాబట్టి మొత్తం మూడక్షరాల పదాలను $576 \times 26 = 17576$ రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. తర్వాత రావలసిన 4, 5 అక్షరాలు మనం ఎన్నుకున్న 2, 1 అక్షరాలే కావున మొత్తం పాలిన్ డ్రోమ్స్ కాగల పదాల సంఖ్య 17576.

గమనిక పై ఉదాహరణలో గరిష్టంగా రాగలిగిన 5 అక్షరాల ప్రాలిస్ డ్రోమ్స్ సంఖ్య 17576, కాని అవి అన్నీ పాలన్ డ్రోమ్స్ కావు. కారణమేమనగా కొన్ని CCCCC వంటి అర్థములేని పదాలు కూడా అందులో వుంటాయి.

ఉదాహరణ 7.5 1, 4, 7, 8 మరియు 9 ల నుండి పునరావృత్తాని అంకెలతో ఎన్ని మూడంకెల సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన : మూడంకెల సంఖ్యలలో ఒకట్లు, పదులు, వందల స్థానాలుంటాయి. ఇచ్చిన 5 అంకెలు నుండి ఒకట్లు స్థానాన్ని 5 రకాలుగా నింపవచ్చు. ... (i)

ఒకట్ల స్థానాన్ని నింపిన తర్వాత, పదుల స్థానాన్ని మిగిలిన 4 అంకెలతో 4 రకాలుగా నింపవచ్చు. ...(ii)

పదుల స్థానాన్ని నింపిన తర్వాత, వందల స్థానాన్ని, మిగిలిన 3 అంకెతో 3 రకాలుగా నింప వచ్చు. ...(iii)

గణన సూత్రం ప్రకారం (i) (ii) మరియు (iii)ల నుండి కావలసిన మొత్తం మూడంకెల సంఖ్యలు $= 5 \times 4 \times 3 = 60$. ఇపుడు సార్వత్రిక గణన సూత్రమును ప్రవచిద్దాం.

చేయవలసిన n పనులలో, మొదటి పనిని m_1 విధాలుగా, మొదటి పని అయిన తర్వాత రెండ పనిని m_2 విధాలుగా, రెండవ పని అయిన తర్వాత మూడవ పనిని m_3 విధాలుగా, చేస్తూ పోతే మొత్తం n పనులను $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_3$ విధాలుగా చేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.6 నీవు స్థలం Aనుండి స్థలం Bకి 3 బస్సులలోను, Bనుండి Cకి 4 బస్సులలోను, Cనుండి Dకి 2 బస్సులలోను, Dనుండి Eకి 3 బస్సులలోను ప్రయాణించగలిగితే, స్థలం A నుండి స్థలం Eకి ఎన్ని రకాలుగా ప్రయాణించగలవు

సాధన : Aనుంచి Bకి పోయే బస్సును 3 రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

Bనుంచి Cకి పోయే బస్సును 4 రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

Cనుంచి Dకి పోయే బస్సును 2 రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

Dనుంచి Eకి పోయే బస్సును 3 రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

సార్వత్రిక గణన సూత్రము ప్రకారము Aనుంచి Eకి $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ రకాలుగా ప్రయాణించవచ్చు.

అభ్యాసం 7.2

1. (a) ఆంగ్లభాషలో గరిష్టంగా రాగలిగిన పాలిన్ డ్రోమ్స్ సంఖ్య ఎంత?

   (b) ఒకట్ల స్థానంలో సున్నా లేని 6 అంకెల పాలిన్‌డ్రోమ్స్ సంఖ్యలు ఎన్ని వుంటాయి.

2. (a) ఒక బడిలో 5 గురు ఆంగ్ల టీచర్లు, 7 గురు హింది టీచర్లు 3 గురు ఫ్రెంచి టీచర్లు వున్నారు. ఒక్కో భాషకు సంబంధించిన టీచరును ఒక్కొక్కరిని తీసుకొని ముగ్గురు సభ్యులు గల కమిటీలను ఎన్నింటిని ఏర్పరచవచ్చు.

   (b) ఒక కళాశాలలోని యూనియన్ ఎలక్షన్లో 4 గురు విద్యార్థులు అధ్యక్షపదవికి, 5గురు ఉపాధ్యక్ష పదవికి, 3 గురు కార్యదర్శి పదవికి పోటీపడుతున్నారు. రాగల ఫలితాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

3. (a) 1, 2, 5, 6, 8 అంకెల నుండి పునరావృత్తం కాని, 600 అంటే ఎక్కువగా వుంటే మూడంకెల సంఖ్యలు ఎన్నింటిని ఏర్పరచవచ్చు.

   (b) ఒక వ్యక్తి 4 పీరియడ్లకు టైంటేబుల్ తయారు చేయాలి. అతను ఇంగ్లీషు, గణితము, ఆర్థిక శాస్త్రము, వ్యాపార శాస్త్రములకు ఒక్కొక్క పీరియడ్ కేటాయించవలసి వున్నది. అతడు ఎన్నిరకాలుగా టైం టేబుల్‌ను తయారు చేయగలడు.

7.2 ప్రస్తారాలు

నీవు నీ పుస్తకాలను ఒక అల్మరాలో అమర్చదలచుకున్నావనుకుందాం. నీ దగ్గర ఒక్క పుస్తకమే వుంటే దానిని ఒకే విధంగా అమర్చగలవు. నీ దగ్గర హిస్టర్, జాగ్రఫి పుస్తకాలున్నాయనుకుందాం. అపుడు ముందు జాగ్రఫి పుస్తకాన్ని పెట్టి, తర్వాత హిస్టరీ పుస్తకాన్ని, అంటే GH గా అమర్చవచ్చు లేదా ముందు హిస్టరీ పుస్తకం, తర్వాత జాగ్రఫి పుస్తకాన్ని అనగా GH గా అమర్చవచ్చు. కాబట్టి రెండు పుస్తకాలను రెండు విధాలుగా అమర్చవచ్చు. హిస్టరీ, జాగ్రఫి పుస్తకాలతోపాటు గణిత పుస్తకకూడా వుంటే, జాగ్రఫి, హిస్టరీ పుస్తకాలను GH గా అమర్చిన తర్వాత గణిత పుస్తకాన్ని వాటితో MGH, GHM or GMH విధాలుగా అమర్చవచ్చు. అలాగే HG అమరిక కు తర్వాత గణిత పుస్తకాని మూడు రకాలుగా అమర్చవచ్చు. కావున గణన సూత్రము ప్రకారము హిస్టరీ, జాగ్రఫి, గణిత పుస్తకాలను $3 \times 2 = 6$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

ఇచ్చిన వస్తువులను ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చడాన్ని **ప్రస్తారము** అంటారు.

ఇంతవరకు మనం ఒకటి, రెండు పుస్తకాలు లేదా మూడు పుస్తకాల అమరికలు గురించి చర్చించాము. $n(n \geq 1)$ పుస్తకాలయినపుడు వచ్చే అమరికలు లేదా ప్రస్తారాల గురించి కనుక్కుందాం.

ఒక పుస్తకమైనపుడు 1, రెండు పుస్తకాలకు 2×1, మూడు పుస్తకాలకు $3 \times 2 \times 1$. ప్రస్తారాలు వచ్చినట్లే, n పుస్తకాలయినపుడు $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ ప్రస్తారాలు వస్తాయి. దీనిని మనం క్రింది ఫలితంలో నిరూపిస్తాము.

సిద్ధాంతము 7.1 n వస్తువులచే ఏర్పడే ప్రస్తారాల సంఖ్య $n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$

నిరూపణ n విభిన్న వస్తువులతో ఏర్పడే ప్రస్తారాల సంఖ్యను కనుక్కుందాం. అమరికలో మొదటి స్థానాన్ని n విధాలుగా నింపవచ్చు. ఇలా చేసిన తరువాత, రెండవ స్థానాన్ని మిగిలిన $n-1$ వస్తువులచే $n-1$ రకాలుగా నింపవచ్చు. మొదటి రెండు స్థానాలను నింపిన తర్వాత మూడవ స్థానాన్ని మిగిలిన $n-2$ వస్తువులచే $n-2$ రకాలుగా నింపవచ్చు. ఇలా చేస్తూపోతే చివరి స్థానాన్ని మిగిలిన ఒకే ఒక వస్తువుతో ఒక విధంగా నింపవచ్చు.

గణన సూత్రాన్నుపయోగించితే, n విభిన్న వస్తువులను అమర్చే విధాల సంఖ్య $n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$. $\ldots (7.1)$

లబ్ధం $n(n-1) \ldots 3.2.1$ మనం గణిత శాస్త్రంలో $n!$ (లేదా $\lfloor \underline{n}$) తో సూచిస్తాము మరియు ప్యాక్టోరియల్ n గా చదువుతాము.

$\therefore \quad n! = n(n-1)(n-2) \quad \ldots . 3.2.1$

ఉదాహరణ 7.7 (a) 3 ! (b) 2 ! + 4 ! (b) 2 ! × 3 ! ను గణించండి

సాధన : (a) $3 ! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

(b) $2 ! = 2 \times 1 = 2$

$4 ! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$\therefore \quad 2 ! + 4 ! = 2 + 24 = 26.$

(c) $2 ! \times 3! = 2 \times 6 = 12$

$n ! = n \times (n - 1) !$ అని గమనించుము. (7.2)

ఏలనగా, $n \,.\, (n - 1) ! = n \,.\, [(n - 1)(n - 2) \ldots 3.2.1]$

$= n \,.\, (n - 1)\,(n - 2) \ldots 3.2.1$

$= n !$

ఇంతవరకు మనం O ! ను నిర్వచించలేదు కాబట్టి పై సంబంధము $n \geq 2$ కు మాత్రమే నిజమవుతుంది.

$$O! = 1 \qquad \ldots(7.3)$$

గా నిర్వచిస్తే సంబంధము (7.2), $n \geq 1$ కు కూడా వర్తిస్తుంది.

ఉదాహరణ 7.8 నీవు నీ ఇంగ్లీషు, హిందీ, గణితము, చరిత్ర భూగోళము మరియు సామాన్య శాస్త్ర పుస్తకాలను ఒక అల్మరాలో ఎన్ని విధాలుగా అమర్చగలవు?

సాధన : మనం 6 పుస్తకాలను అమర్చి వలసి వున్నది. n వస్తువులతో వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య $n ! = n(n - 1)$

ఇచట $n = 6$, కావున ప్రస్తారాల సంఖ్య = $6.5.4.3.2.1 = 720.$

అభ్యాసం 7.3

1. (a) (i) 6 ! (ii) 7 ! (iii) 7! + 3 ! (iv) 6 ! × 4!

(v) $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ ను గణించండి.

(b) క్రింది ప్రవచనాల్లో ఏది నిజం?

(i) 2 ! x 3 ! = 6 ! (ii) 2 ! + 4 ! = 6 !

(iii) 3 !, 4 ! ను భాగిస్తుంది (iv) 4 ! – 2 ! = 2 !

2. (a) ఒక గదిలో 5 గురు విద్యార్థులున్నారు. 5 పడకలను వారికి ఎన్ని విధాలుగా కేటాయించవచ్చు.

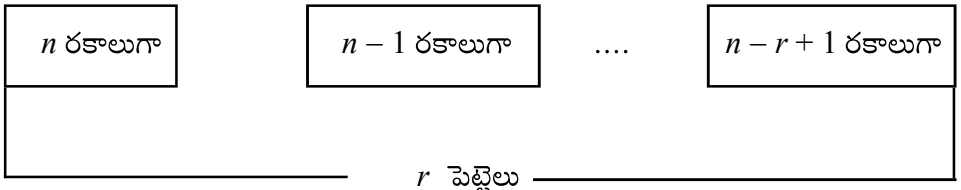
(b) TRIANGLE పదంలోని అక్షరాలను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

(c) 1, 2, 3, 4 ల నుండి ఎన్ని నాలుగంకెల విభిన్న సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చు.

7.3 n వస్తువులతో r వస్తువుల ప్రస్తారాలు

నీ వద్దనున్న 5 కథల పుస్తకాలను ఆషా, అక్తర్, జగన్‌లకు ఎన్ని విధాలుగా పంచిపెట్టగలవు? ముందు ఆషాకు 5 పుస్తకాలలో ఏదేని ఒక పుస్తకాన్ని ఇవ్వవచ్చు. ఆ తర్వాత అక్తర్‌కు మిగిలిన 4 పుస్తకాలలో ఏదో ఒకపుస్తకాన్ని ఇవ్వవచ్చు చివరగా జగన్‌కు మిగిలిన 3 పుస్తకాలలో ఒక దానిని యివ్వవచ్చు. గణన సూత్రము ప్రకారము $5 \times 4 \times 3 = 60$ రకాలుగా పుస్తకాలను ఆషా, అక్తర్ మరియు జగన్‌లకు పంచిపెట్టవచ్చు.

చాలా సాధారణంగా, n వస్తువుల నుంచి r వస్తువులను అమర్చడానికి ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు? దీనిని క్రింది విధంగా చూస్తాం. n వస్తువుల నుంచి r వస్తువులను r పెట్టెలలో, ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఒక్కొక్క వస్తువు అమర్చునట్లు క్రింది విధంగా అమర్చుతాము.



పటం 7.1

$r = 1$ అనే ఒక పెట్టె వుందనుకొందాం. మనము 'n' వస్తువులలో దేనినైనా ఒక వస్తువును n విధాలుగా అమర్చవచ్చు. $r = 2$ పెట్టెలు ఉన్నవనుకొందాం. అప్పుడు n వస్తువులలో ఏదో ఒక దానిని మొదటి పెట్టెలో 'n' విధాలుగా, మిగిలిన $(n-1)$ వస్తువులతో రెండవ పెట్టెలో $(n-1)$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు. కాబట్టి ప్రాథమిక గణన సూత్రము నుంచి రెండు పెట్టెలను $n(n-1)$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు. ఇదే విధంగా 3 పెట్టెలను $n(n-1)(n-2)$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

సిద్ధాంతం 7.2 'n' వస్తువుల నుంచి r వస్తువులను అమర్చగలిగే అమరరికల (ప్రస్తారాల) సంఖ్య $n(n-1)\ldots(n-r+1)$. 'n' వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువులను అమర్చ గలిగే అమరికలను ${}^{n}P_{r}$ తో సూచిస్తాం.

కావున ${}^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$ ..... (7.4)

ఉపపత్తి : 'n' వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువులను అమర్చవలెననుకొందాం. అంటే, r స్థానాలలో, 'n' వస్తువుల నుంచి ఏదో ఒక వస్తువును అమర్చడం అని అర్థం. మొదటి స్థానంను 'n' విభిన్న రకాలుగా నింపవచ్చు. తరువాత, రెండవ స్థానాన్ని $(n-1)$ వస్తువులతో, $(n-1)$ రకాలుగా నింపవచ్చు. ఇదే విధంగా 3 వస్థానాన్ని $(n-2)$ విధాలుగా ... నింపవచ్చు. ఆఖరు స్థానం అయిన r – వ స్థానాన్ని $[n-(r-1)]$ అంటే $(n-r+1)$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు / నింపవచ్చు. దీనిని మీరు సులభంగా గుర్తించవచ్చు.

ప్రాథమిక గణన సూత్రము నుపయోగించి మనము 'n' వస్తువుల నుంచి 'r' వస్తువులను అమర్చగలిగే ప్రస్తారాలను

$n\,(n-1)\,(n-2)\,....\,(n-r+1)$ గా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.9 గణించండి. (a) ${}^4P_2$ (b) ${}^6P_3$ (c) ${}^4P_2 / {}^3P_2$

(d) ${}^6P_3 \times {}^5P_2$

సాధన (a) ${}^4P_2 = 4(4-1) = 4 \times 3 = 12$

(b) ${}^6P_3 = 6(6-1)\,(6-2) = 6 \times 5 \times 4 = 120$

(c) $\dfrac{{}^4P_3}{{}^3P_2} = \dfrac{4(4-1)\,(4-2)}{3(3-1)} = \dfrac{4\times3\times2}{3\times2} = 4$

(d) ${}^6P_3 \times {}^5P_2 = 6(6-1)\,(6-2) \times 5\,(5-1)$

$= 6\times5\times4\times5\times4 = 2400$

ఉదాహరణ 7.10 నీ వద్దనున్న 6 కొత్త సంవత్సర గ్రీటింగు కార్డులను నీ మిత్రులు నలుగురికి ఎన్ని విధాలుగా పంపగలవు?

సాధన : మనం 6 వస్తువుల నుండి 4 వస్తువుల ప్రస్తారాల సంఖ్య కనుక్కోవాలి.

ఈ సంఖ్య ${}^6P_3 = 6(6-1)\,(6-2)\,(6-3) = 6.5.4.3 = 360$

$\therefore$ 360 విధాలుగా గ్రీటింగ్ కార్డులను పంపవచ్చు.

${}^nP_r = n(n-1)\,(n-2)\,....\,(n-r+1)$ సూత్రము, $n!$ నుండి $n-r, n-r-1, ... 3, 2, 1$ ల లబ్ధాన్ని తొలగించగా వచ్చినది భావించవచ్చు. $n-r, n-r-1, n-r-2 .... 3, 2, 1$ ల లబ్ధము $(n-r)!$ కావున పై సూత్రాలన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{n!}{(n-r)} = \frac{n.(n-1)\ (n-2)\ .(n-r+1)\ (n-r)...\ 3.2.1}{(n-r)\ (n-r-1)\ ...3.2.1}$$

$$= n(n-1)\ (n-2)\ ....\ (n-r+1)$$

$$= {}^{n}\mathrm{P}_{r}$$

కావున $n\,!$ గుర్తునువుపయోగించి మనం

$${}^{n}\mathrm{P}_{r} = \frac{n!}{(n-r)\,!}$$ (7.5) గా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.11 ${}^{n}\mathrm{P}_{0}$ విలువ కనుగొనుము

సాధన : ఇక్కడ $r = 0$ (7.5) ను ఉపయోగించి,

$${}^{n}\mathrm{P}_{0} = \frac{n!}{n\,!} = 1$$

ఉదాహరణ 7.12 $(n+1)\,.\,{}^{n}\mathrm{P}_{r} = {}^{n+1}\mathrm{P}_{r+1}$ అని చూపుము

సాధన : $(n+1)\,{}^{n}\mathrm{P}_{r} = (n+1)\,.\,\frac{n!}{(n-r)\,!} = \frac{(n+1).n!}{(n-r)!}$

$$= \frac{(n+1)\,!}{\big((n+1)-(r+1)\big)!}$$

$= {}^{n+1}\mathrm{P}_{r+1}$ (నిర్వచనం నుండి)

అభ్యాసం 7.4

1.(a) (i) ${}^{4}\mathrm{P}_{2}$ (ii) ${}^{6}\mathrm{P}_{3}$ (iii) $\frac{{}^{4}\mathrm{P}_{3}}{{}^{3}\mathrm{P}_{2}}$

(iv) ${}^{6}\mathrm{P}_{3} \times {}^{5}\mathrm{P}_{2}$ (v) ${}^{n}\mathrm{P}_{n}$ విలువలు కనుగొనుము

(b) క్రింది ప్రవచనాలు నిజమో కాదో తెలపండి.

(i) $6\times {}^{5}\mathrm{P}_{2} = {}^{6}\mathrm{P}_{3}$ (ii) $4\times {}^{7}\mathrm{P}_{3} = {}^{7}\mathrm{P}_{4}$

(iii) ${}^{4}\mathrm{P}_{2} \times {}^{4}\mathrm{P}_{2} = {}^{12}\mathrm{P}_{4}$ (v) ${}^{3}\mathrm{P}_{2} \times {}^{4}\mathrm{P}_{2} = {}^{7}\mathrm{P}_{4}$

2.(a) ఆంగ్ల భాషలో అచ్చులు లేని మూడక్షరాల పదాలు గరిష్టంగా ఎన్ని వుంటాయి.

(b) ఆంగ్ల భాషలో a తప్ప మరే యితర అచ్చులు లేని మూడక్షరాల పదాలు గరిష్టంగా ఎన్ని వుంటాయి.

(c) నీ వద్ద 7 దీపావళి గ్రీటింగ్ కార్డులను నీ నలుగురు మిత్రులకు ఎన్ని విధాలుగా పంపగలవు?

3. ${}^{n}\mathrm{P}_{n-1} = {}^{n}\mathrm{P}_{n}$ అని చూపుము.

4. $(n-r)\ {}^{n}\mathrm{P}_{n} = {}^{n}\mathrm{P}_{n+1}$ అని చూపుము.

7.4 కొన్ని నియమాలతో ప్రస్తారాలు

ఇపుడు మనం కొన్ని అదనపు నియమాలతో కూడిన ప్రస్తారాలకు సంబంధించిన ఉదాహరణలు చూద్దాము.

ఉదాహరణ 7.13 ఒక హాస్టల్ గదిలోనున్న 7 మంది విద్యార్థులకు 7 పరుపులను కేటాయించారు. పర్వన్ అనే విద్యార్థి, అంజు అనే విద్యార్థి ప్రక్కన తన పరుపు వుండటానికిష్టపడక పోతే, విద్యార్థులకు పరుపులను ఎన్ని విధాలుగా కేటాయించగలవు?

సాధన : పరుపులను వరుసగా 1 నుండి 7 వరకు సంఖ్యలతో గుర్తిస్తాము.

సందర్భము 1. అంజుకు పరుపు 1ని కేటాయించలేము కనుక పర్విన్‌కు 5 రకాలు 8 గా పరుపును కేటాయించవచ్చు. పర్విన్‌కు పరుపును కేటాయించాక మిగిలిన ఐదు పరుపులను మిగిలిన ఐదు గురు విద్యార్థులకు $5!$ విధాలుగా కేటాయించవచ్చు. కావున ఈ సందర్భంలో పరుపులను $5 \times (5!) = 600$ రకాలుగా కేటాయించవచ్చు.

సందర్భము 2. అంజుకు పరుపు 7 కేటాయిద్దాము. ఇపుడు పర్విన్‌కు 6వ పరుపును కేటాయించలేము. కనుక పై సందర్భంలో లాగా పరుపులను 600 రకాలుగా కేటాయిం కేటాయించవచ్చు.

సందర్భము 3. అంజుకు 2, 3, 4, 5 లేదా 6లో ఏదో ఒక పరుపును కేటాయించామనుకొందాం. అపుడు పర్విన్‌కు అంజుకు కుడివైపున గాని, ఎడమ వైపున గాని కేటాయించలేము కనుక పర్విన్‌కు పరుపును 4 విదాలుగా కేటాయించవచ్చు. మిలిగిన ఐదుగురికి మిగిలిన ఐదు పరుపులను 5! రకాలుగా కేటాయించవచ్చు. కాబట్టి ప్రతి సందర్భంలోను ... రకాలు గా పరుపులను కేటాయించవచ్చు.

$\therefore\ 2 \times 600 + 5 \times 480 = 1200 + 2400 = 3600$ రకాలుగా ఏడుగురు విద్యార్థులకు 7 పరుపులను కేటాయించవచ్చును.

ఉదాహరణ 7.14 : జంతువులకు శిక్షణ నిచ్చే ఒక వ్యక్తి 5 సింహాలను, 4 పులులను, ఏ రెండు పులులు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండా ఎన్ని విధాలుగా ఒక వరుసలో అమర్చవచ్చు.

సాధన : ఆ జంతువులను క్రింది విధంగా అమర్చవచ్చు.

L	T	L	T	L	T	L	T	L

L తో గుర్తించిన ఐదు స్థానాలలో 5 సింహాలను 5 ! రకాలుగా అమర్చవచ్చు. మిగిలిన 4 స్థానాల (T లో గుర్తించినవి) లో 4 పులులను 4 ! రకాలుగా అమర్చవచ్చు. కావున ఏ రెండు పులులు ప్రక్కన లేకుండా 5 సింహాలను, 4 పులులను $5! \times 4! = 2880$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.15 4 కథల పుస్తకాలు, 5 నవలలు, 3 బొమ్మల పుస్తకాలున్నవి. కథల పుస్తకాలన్నీ ఒక చోట, నవలలన్నీ ఒకచోట, బొమ్మల పుస్తకాలన్నీ ఒక చోటువుండేటట్లు ఒక వరుస క్రమంలో ఎన్ని రకాలుగా అమర్చగలవు?

సాధన : కథల పుస్తకాలన్నీ ఒకే చోట వుండాలి కనుక వాటిని 4 ! రకాలుగా అమర్చవచ్చు. ఇలాగే 5 నవలలను 5 ! రకాలుగా, 3 బొమ్మల పుస్తకాలను 3 ! రకాలుగా ఒక చోట అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ గణన సూత్రము ప్రకారము అన్ని పుస్తకాలను ఒక చోట $(4!) \times (5!) \times (3!) =$ 17280 రకాలుగా అమర్చవచ్చు

ఉదాహరణ 7.16 4 కథల పుస్తకాలు, 5 నవలలు, 3 బొమ్మల పుస్తకాలున్నవి. కథల పుస్తకాలన్నీ ఒక చోట, నవలలన్నీ ఒక చోట, బొమ్మల పుస్తకాలన్నీ ఒక చోట వుండాలి కాని అవి ఒక వరుస క్రమంలో వుండనవసరములేనిచో ఈ పుస్తకాలను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చగలవు?

సాధన : కథల పుస్తకాలను, నవలలను, బొమ్మల పుస్తకాలను ఒక్కొక్క వస్తువుగా భావిస్తే, పై ఉదాహరణలో లాగా వాటిని 17,280 రకాలుగా అమర్చవచ్చు. కాని ఒక్కొవస్తువుగా భావించిన కథల పుస్తకాలు, నవలలు, బొమ్మల పుస్తకాలను వాటిలో వాటిని $3! = 6$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు. కావున వరుస క్రమంలో వుండనవసరము లేనపుడు మొత్తం పుస్తకాలను $6 \times 17280 = 103680$ రకాలుగా అమర్చవచ్చును.

ఉదాహరణ 7.17 4 గురు అమ్మాయిలు, 5 గురు అబ్బాయిలను, అమ్మాయిలందరూ ఒకే జట్టుగా వుండేటట్లు ఒక వరుసలో ఎన్ని రకాలుగా అమర్చగలవు.

సాధన : 4 గురు అమ్మాయిలను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే, మొత్తం 6 యూనిట్లవుతాయి. వీటిని 6 ! రకాలుగా అమర్చవచ్చు. ప్రతి అమరికలోను ఒక యూనిట్‌గా వున్న 4 గురు అమ్మాయిలను వారిలో వారిని 4 ! రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

కావున 4 గురు అమ్మాయిలు ఒకే చోటవుండేటట్లు అమర్చగలిగిలిగిన విధానాల సంఖ్య

$$= (6\ !) \times (4\ !) = 720 \times 24 = 17280.$$

ఉదాహరణ 7.18 BENGALI పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి

(i) ఏ రెండు అచ్చులు కలసిలేకుండా

(ii) అచ్చులు బేసి స్థానాలలో మాత్రమే వుండేటట్లు ఎన్ని పదాలు ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన : BENGALI పదంలోని 7 అక్షరాలలో 3 అచ్చులు 4 హల్లులున్న

(i) a, e, i అచ్చులను ఒక అక్షరంగా భావిస్తే, $4 + 1 = 5$ అక్షరాలను $5\ !$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు. ఈ మూడు a, e, i అచ్చులను వాటిలో వాటిని $3\ ! = 6$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

$\therefore$ మొత్తం పదాలు $= (5\ !) \times (3\ !) = 120 \times 6 = 720.$

(ii) ఇక్కడ 4 బేసి స్థానాలు, 3 సరిస్థానాలున్నాయి. 3 అచ్చులను 4 బేసి స్థానాలలో $4\ P_3$ రకాలుగా, మిగిలిన 4 హల్లులను $4\ P_4$ రకాలుగా అమర్చ వచ్చును.

$\therefore$ మొత్తం పదాలు $= {}^4P_3 \times {}^4P_4 = 24 \times 24$

$= 576.$

అభ్యాసం 7.5

1. శ్రీగుప్తా గారు, తన శ్రీమతి మరియు తన నలుగురు పిల్లలతో రైలు ప్రయాణము చేయుచున్నారు. వారికి 2 కింది, 2 మధ్య, 2 పై బెర్తులు కేటాయించడం జరిగింది. శ్రీ గుప్తాగారికి మోకాలి ఆపరేషన్ జరిగినందున అతను క్రింది బెర్తులోనే ప్రయాణించాలి. శ్రీమతి గుప్తాగారు విశ్రాంతి తీసుకోవాలనుకుంటున్నారు. కావున ఆమె పై బెర్తు కోరుకుంటున్నారు. ఇపుడు వారు వారికి కేటాయించిన బెర్తులలో ఎన్ని రకాలుగా ప్రయాణించగలరు.

2. UNBIASED పదంలోని అక్షరాలనుపయోగించి ఏ రెండు అచ్చులు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండా ఎన్ని పదాలను ఏర్పరచ గలవు?

3. 4 గణితము, 5 ఆంగ్లము, 6 సైన్సు పుస్తకములున్నవి. ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒక చోట కలసి ఉండేటట్లు, గణితం పుస్తకాల తర్వాత ఆంగ్ల పుస్తకాలు, ఆంగ్ల పుస్తకాల తర్వాత సైన్సు పుస్తకాలు వుండేటట్లు ఎన్ని రకాలుగా అమర్చగలవు.

4. 3 ఫిజిక్స్, 4 కెమిస్ట్రీ, 5 బాటనీ, 3 జువాలజీ పుస్తకాలను ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒకే చోట కలసివుండేటట్లు ఎన్ని రకాలుగా అమర్చగలవు?

5. 7 కుర్చీలలో 4 గురు అబ్బాయిలు, 3 గురు అమ్మాయిలను, ఏ యిద్దరు అబ్బాయిలు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండా వుండేటట్లు ఎన్ని రకాలుగా కూర్చోబెట్టగలవు.

6. TENDULKAR పదంలోని అక్షరాలనుఉపయోగించి

(i) T తో మొదలై R తో అంతమయ్యే పదాలనెన్నింటిని వ్రాయగలవు?

(ii) అచ్చులన్నీ ఒక చోట వుండే పదాలనెన్నింటికి వ్రాయగలవు.

(iii) ఏ రెండు అచ్చులు ఒక చోట లేని పదాలనెన్నింటిని వ్రాయగలవు.

7.5 సంయోగాలు

మనం ప్రారంభములో చెప్పుకొన్న షర్టులు, ప్యాంట్ల ఉదాహరణ తీసుకుందాం. అక్కడ నీవు 4 జతల ప్యాంట్లు, షర్టుల నుండి 2 సెట్లను నీ ప్రయాణంలో తీసుకొని వెళ్ళాలనుకున్నావు. దీనిని ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు. మనకున్న 4 సెట్లను S_1, S_2, S_3, S_4 లతో సూచిద్దాము. అపుడు రెండు జతలను క్రిందివిధంగా ఎన్నుకోవచ్చు.

1. $\{S_1, S_2\}$ 2. $\{S_1, S_3\}$ 3. $\{S_1, S_4\}$

4. $\{S_2, S_3\}$ 5. $\{S_2, S_4\}$ 6. $\{S_3, S_4\}$

[$\{S_1, S_2\}$, $\{S_2, S_1\}$ లు రెండూ ఒకటేనని గమనింపుము]. కావున రెండు సెట్లను 6 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. ఒక వేళ నీకు 10 జతల బట్టలుండి, 7 జతలను ఎన్నుకోవాలనుకున్నప్పుడు ఎంపిక మరింత కష్టమవుతుంది.

నీవు యిపుడు 4 సెట్ల నుండి 2 సెట్లను సోమ, మంగళ వారాలలో అదే క్రమంలో ధరించాలనుకున్నావనుకుందాం. దీనిని ${}^4P_2$ రకాలుగా చేయవచ్చని 7.3 లో తెలుసుకున్నావు. ఎన్నుకున్న రెండు సెట్ల డ్రస్సును రెండు రోజులు క్రింద చూపిన విధాలుగా ధరించవచ్చు.

1. $\{S_1, S_2\} \rightarrow S_1$ సోమవారము, S_2 మంగళవారము లేదా S_2 సోమవారము S_1 మంగళవారము
2. $\{S_1, S_3\} \rightarrow S_1$ సోమవారము, S_3 మంగళవారము లేదా S_3 సోమవారము, S_1 మంగళవారము
3. $\{S_1, S_4\} \rightarrow S_1$ సోమవారము, S_4 మంగళవారము లేదా S_4 సోమవారము, S_1 మంగళవారము
4. $\{S_2, S_3\} \rightarrow S_2$ సోమవారము, S_3 మంగళవారము లేదా S_3 సోమవారము, S_2 మంగళవారము
5. $\{S_2, S_4\} \rightarrow S_2$ సోమవారము, S_4 మంగళవారము లేదా S_4 సోమవారము, S_2 మంగళవారము
6. $\{S_3, S_4\} \rightarrow S_3$ సోమవారము, S_4 మంగళవారము లేదా S_4 సోమవారము, S_3 మంగళవారము

$\therefore$ 4 జతల నుండి ఎన్నుకున్న 2 జతలను 12 రకాలుగా ధరించవచ్చు.

సిద్ధాంతము 7.3 n వస్తువుల నుండి r వస్తువులను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్యను ${}^nC_r$ తో సూచిస్తాము.

$n \geq 1$, పూర్ణాంకము మరియు $r \leq n$, అయితే

$$ {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} \qquad ...(7.6)$$

ఉపపత్తి : n వస్తువుల నుండి r వస్తువులను ${}^nC_r$ రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. ప్రతిసారి ఎన్నుకొన్న r వస్తువులను వాటిలో వాటిని $r!$ రకాలుగా అమర్చవచ్చు. కావున గణన సూత్రము ప్రకారము, n వస్తువుల నుండి r వస్తువులను ఎన్నుకొనె విధాలు, మరియు ఎన్నుకొన్న r వస్తువులను అమర్చే విధాల మొత్తం ${}^nC_r \cdot (r!)$ అవుతుంది. ఇదే మనం చర్చించిన ${}^nP_r$.

$$\therefore \quad {}^nP_r = r! \, {}^nC_r \qquad ....(7.7)$$

$$\Rightarrow \quad {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$$

ఉదాహరణ 7.19 క్రింది వాటిని గణించండి.

(a) $^5C_2$ (b) $^5C_3$

(c) $^4C_3 + {}^4C_2$ (d) $\frac{^6C_3}{^4C_2}$

సాధన (a) $^5C_2 = \frac{^5P_2}{2!} = \frac{5.4}{1.2} = 10$ (b) $^5C_3 = \frac{^5P_3}{3!} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$

(c) $^4C_3 + {}^4C_2 = \frac{^4P_3}{3!} = \frac{^4P_2}{2!} = \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{4.3}{1.2} = 4 + 6 = 10$

(d) $^6C_3 = \frac{^6P_3}{3!} = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = 20$

$$^4C_2 = \frac{4.3}{1.2} = 6$$

$$\therefore \frac{^6C_3}{^4C_2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

ఉదాహరణ 7.20 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} సమితిలో 4 మూలకాల ఉపసమితులు ఎన్ని వుంటాయి.

సాధన : ఇక్కడ మూలకాల ఎన్నికకు వరుస క్రమము అవసరము లేదు. కావున మన సమస్య, 11 మూలకాల నుండి 4 మూలకాలను ఎన్ని విధాలుగా ఎన్నుకోవడమనేదే ?

దీనిని (7.6) నుండి

$$^{11}C_4 = \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} = 330.$$

$\therefore$ 4 మూలకాల ఉపసమితుల సంఖ్య 330.

ఉదాహరణ 7.21 ఒక వృత్తము పై నున్న 12 బిందువులతో ఎన్ని చక్రియ చతుర్భుజాలను ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన : ఏ నాలుగు బిందువులను కలిపినా ఒక చక్రియ చతుర్భుజం వస్తుంది. కావున 12 బిందువుల నుండి 4 బిందువులను $^{12}C_4 = 495$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

$\therefore$ 495 చక్రియ చతుర్భుజాలను ఏర్పరచవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.22 ఒక పెట్టెలో 5 నల్ల పెన్నులు, 3 తెల్లపెన్నులు, 4 ఎర్రపెన్నులున్నవి. దాని నుండి 2 నల్ల పెన్నులు, 2 తెల్లపెన్నులు, 2 ఎర్రపెన్నులను ఎన్ని విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

సాధన : 5 నల్ల పెన్నుల నుండి 2 నల్లపెన్నులను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య

$$= {}^5C_2 = \frac{{}^5P_2}{2!} = \frac{5.4}{1.2} = 10$$

3 తెల్ల పెన్నుల నుండి 2 తెల్లపెన్నులను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య

$$= {}^3C_2 = \frac{{}^3P_2}{2!} = \frac{3.2}{1.2} = 3$$

4 ఎర్రపెన్నుల నుండి 2 ఎర్ర పెన్నులను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య

$$= {}^4C_2 = \frac{{}^4P_2}{2!} = \frac{4.3}{1.2} = 6$$

గణన సూత్రము ప్రకారము 2 నల్ల పెన్నులు, 2 తెల్లపెన్నులు, 2 ఎర్రపెన్నులు ఎంచుకునే విధాల సంఖ్య $= 10 \times 3 \times 6 = 180$

ఉదాహరణ 7.23 ఒక ప్రశ్నాపత్రంలోని 10 ప్రశ్నలను A, B అనే రెండు పార్టులుగా విభజించి ఒక్కొక్క పార్టులో ఐదు ప్రశ్నలనిచ్చారు. విద్యార్థి ప్రతి పార్టు నుండి రెండు ప్రశ్నలకు తప్పని సరిగా జవాబిస్తూ మొత్తం ఆరు ప్రశ్నలను ఎన్ని విధాలుగా ఎన్నుకోగలడు. విద్యార్థికి అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు తెలుసును.

సాధన: విద్యార్థి ప్రతి పార్టునుండి కనీసం రెండు ప్రశ్నలను ఎన్నుకొని మొత్తం ఆరు ప్రశ్నలను క్రింది తెలిపిన విధాలలో ఒక విధంగా ఎన్నుకోగలడు

	పార్టు A	పార్టు B
(i)	2	4
(ii)	3	3
(ii)	4	2

విద్యార్థి (i) ఎన్నుకుంటే, ఆ విధంగా ప్రశ్నలనెన్నుకొనె విధాల సంఖ్య $= {}^5C_2 \times {}^5C_4$

$= 10 \times 5 = 50$

అదే విధంగా (ii) ఎన్నుకుంటే, ప్రశ్నలనెన్నుకునే విధాల సంఖ్య $= {}^5C_3 \times {}^5C_3$

$= 10 \times 10 = 100$

లేదా (iii) ఎన్నుకుంటే, ప్రశ్నలనెన్నుకొనే విధాల సంఖ్య $= {}^5C_4 \times {}^5C = 5 \times 10$

$= 50$

$\therefore$ విద్యార్థి ప్రశ్నలనెన్నుకొనే విధాల సంఖ్య $= 50 + 100 + 50 = 200$

ఉదాహరణ 7.24 6గురు పురుషులు, 4 గురు స్త్రీల నుంచి అయిదు గురు సభ్యులున్న కమిటీని ఏర్పరచాలి. ఆ కమిటీలో

(i) కనీసం ఇద్దరు స్త్రీలైనా వుండేలా

(ii) ఇద్దరు స్త్రీల కంటె మించకుండా వుండేలా ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన: (i) కమిటీ లో కనీసం ఇద్దరు స్త్రీలు వుండే విధంగా, కమిటీని క్రింది విధాలలో ఏర్పాటు చేయవచ్చు.

3 స్త్రీలు, 2 పురుషులు, దీనిని ${}^4C_3 \times {}^6C_2$ విధాలుగా

లేదా 4 స్త్రీలు, 1 పురుషుడు, దీనిని ${}^4C_4 \times {}^6C_1$ విధాలుగా

లేదా 2 స్త్రీలు, 3 పురుషులు, దీనిని ${}^4C_2 \times {}^6C_3$ విధాలుగా

$\therefore$ కమిటిని ఏర్పరచే విధాల సంఖ్య

$= ({}^4C_2 \times {}^6C_2) + ({}^4C_4 \times {}^6C_1) + ({}^4C_2 \times {}^6C_3)$

$= 6 \times 20 + 4 \times 15 + 1 \times 6$

$= 120 + 60 + 6 = 186$

సాధన: (ii) ఇద్దరు స్త్రీల కంటె మించకుండా వుండే విధంగా కమిటీని క్రింది విధాలుగా ఏర్పాటుచేయవచ్చు.

2 స్త్రీలు, 3 గురు పురుషులు, దీనిని ${}^4C_2 \times {}^6C_3$ విధాలుగా,

లేదా 1 స్త్రీ, 4 గురు పురుషులు, దీనిని ${}^4C_1 \times {}^6C_4$ విధాలుగా,

లేదా 5 గురు పురుషులే, దీనిని ${}^4C_5$ విధాలుగా,

$\therefore$ కమిటీని ఏర్పరచే విధానాల సంఖ్య

$= {}^4C_2 \times {}^6C_3 + {}^4C_1 \times {}^6C_4 + {}^6C_5$

$= 6 \times 20 + 4 \times 15 + 6$

$= 120 + 6 + 6 = 186.$

ఉదాహరణ 7.25 భారత క్రికెట్ టీములో 16 మంది ఆటగాళ్ళు వున్నారు. అందులో ఇద్దరు వికెట్ కీపర్లు, ఐదుగురు బౌలర్లు వున్నారు. ఒక వికెట్ కీపరు, మరియు కనీసం 4 గురు బౌలర్లు వున్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు.

సాధన : మనము 11 మంది వుండే క్రికెట్ టీమును 1 వికెట్ కీపరు, 4 గురు బౌలర్లు లేదా 1 వికెట్ కీపరు, 5 గురు బౌలర్లు వుండే విధంగా ఎన్నుకోవాలి.

1 వికెట్ కీపరు, 4గురు బౌలర్లు మిగిలిన 6గురు ఆటగాళ్ళను ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య

$= {}^2C_1 \cdot {}^5C_4 \cdot {}^9C_6$

$= 2 \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} \times \dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$= 2\times5\times \dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 840$

1 వికెట్ కీపరు, 5గురు బౌలర్లు మిగిలిన 5గురు ఆటగాళ్ళను ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య.

$= {}^2C_1 \cdot {}^5C_5 \cdot {}^9C_5$

$= 2\times1\times \dfrac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1} = 2\times1\times \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 252$

మొత్తం టీమును ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య.

$= 840 + 252 = 1092$

అభ్యాసం 8.6

1. (a) గణించము (i) ${}^{13}C_3$ (ii) ${}^aC_5$

(iii) ${}^8C_2 + {}^8C_3$ (iv) $\dfrac{{}^9C_3}{{}^6C_3}$

(b) క్రింది ప్రవచనాలను సరిచూడుము.

(i) ${}^5C_3 = {}^5C_3$ (ii) ${}^4C_3 \times {}^3C_2 = {}^{12}C_6$

(iii) ${}^4C_2 + {}^4C_3 = {}^8C_5$ (iv) ${}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 = {}^{11}C_3$

2. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots. 23\}$ సమితికి 3 మూలకాలు కలిగిన ఉపసమితులు ఎన్ని వుంటాయి

3. ఒక వృత్తముపై 14 బిందువులున్నవి. ఆ బిందువులను కలుపుతూ ఎన్ని పంచభుజులను గీయవచ్చు.

4. ఒక పండ్ల బుట్టలో 5 ఆపిల్, 7 అనాస, 11 ఆరెంజ్ పళ్ళు వున్నాయి. ఆ బుట్ట నుండి రకానికొకటి చొప్పున 3 పళ్ళను ఎన్నిరకాలుగా తీసుకొనవచ్చును.

5. ఒక ప్రశ్నాపత్రంలోని 12 ప్రశ్నలను A, B లనే రెండు పార్టులుగా విభజించారు. పార్టు A లో 5 ప్రశ్నలు, పార్ట్ B లో 7 ప్రశ్నలు యిచ్చారు. విద్యార్థి ప్రతి పార్టు నుండి కనీసం రెండు ప్రశ్నలనెన్నుకొని మొత్తం 6 ప్రశ్నలకు జవాబులను వ్రాయాలి. ఎన్ని విధాలుగా విద్యార్థి ప్రశ్నలను ఎన్నుకోగలడు.

6. 5 గురు పురుషులు, 3 స్త్రీల నుండి ముగ్గురు సభ్యులు గల కమిటీని ఏర్పాటు చేయాలి. ఆ కమిటీలో (i) ఒక్క స్త్రీ మాత్రమే వుండేటట్లు (ii) కనీసం ఒక స్త్రీ వుండేటట్లు ఎన్నిరకాలుగా ఏర్పాటు చేయవచ్చు.

7. 17 మంది సభ్యులు గల క్రికెట్ టీమ్‌లో ఇద్దరు వికెట్ కీపర్లు 4గురు బౌలర్లు వున్నారు. ఒక వికెట్ కీపరు మరియు కనీసం 3 బౌలర్లు వున్న 11 మంది క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు.

8. 5 ఉద్యోగాల భర్తీకి 25 ధరఖాస్తులు వచ్చినవి. దరఖాస్తు చేసుకున్న వారిలో 7 గురు S.C లు, 8 మంది O.B.C లు వున్నారు. రెండు ఉద్యోగాలు S.C లకు , ఒకటి O.B.C లకు రిజర్వు చేసిన, ఆ ఉద్యోగాలను ఎన్ని రకాలుగా భర్తీ చేయవచ్చు.

7.6 ${}^nC_r$ యొక్క కొన్ని ధర్మాలు

ఈ విభాగంలో మనం ${}^nC_r$ కి సంబంధించిన కొన్ని ధర్మాలను నిరూపిస్తాము. అవి ఈ ${}^nC_r$ గుణకాలను సులభముగా గణించడానికి తోడ్పడుతాయి. సిద్ధాంతము 7.3లో ఉత్పాదించిన సంబంధము 7.7ను మరో విధంగా

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \ldots(8.8)$$

అని వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.26 $^{n}C_{0}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : ఇచట $r = 0, \therefore {}^{n}C_{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!} = 1$

(0! అని నిర్వచించితిమి)

7.3 సిద్ధాంతంలో ఇచ్చిన సూత్రమును వాడితిమి. క్రింది భాగంలో వెంటనే 7.8 సిద్ధాంతంతో ఇచ్చిన సూత్రము. $^{n}C_{r}$ ధర్మాలను నిరూపించుటలో ఉపయోగపడునని చూస్తాము.

$$^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r} \quad \ldots (8.9)$$

అంటే n వస్తువుల నుంచి r వస్తువులను ఎన్నుకొను విధానాల సంఖ్య, మరియు n వస్తువుల నుంచి $n-1$ వస్తువులను ఎన్నుకొను విధానాల సంఖ్య సమానము. ఉదాహరణకు, ఉపోద్ఘాతములో ఇచ్చిన మాదిరి, 2 రకాల డ్రస్సులను ఎన్నుకొనే విధానాలు, మరియు $4 - 2 = 2$ డ్రస్సులను నిరాకరించే విధానాలు సమానము. 8.20 ఉదాహరణలో గా, 4 మూలకాలను ఎన్నుకునే విధానాలు, ఉపసమితుల నుంచి 8 మూలకాలను నిరాకరించే విధానాలు సమానము. ఎందుకంటే, సూచించిన 4 ఉపసమితుల నుంచి 4 మూలకాలను ఎన్నుకోవడం అనేది. 8 మూలకాలను నిరాకరించడానికి సమానం.

ఈ సంబంధాన్ని 7.8 సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి నిరూపిస్తాము. RHS లో వున్న హారము $r!\,.\,(n-r)!$. ఇది r ను $(n-r)$ తో మార్చిననూ విలువ మారదు.

$$(n-r)!\,.\,[n-(n-r)]! = (n-r)!\,r!$$

దీని లవము 'r' కు సంబంధం లేదు. కావున r ను $(n-r)$ గా మార్చిననూ 7.8 సమీకరణంలో అదే ఫలితం వస్తుంది.

7.9 సంబంభం ఎలా ఉపయోగపడుతుంది? ఉదాహరణకు $^{100}C_{98}$ మరియు $^{100}C_{2}$ సమానమే. రెండవ దాని విలువ కనుక్కోవడం తేలిక.

ఉదాహరణ 7.27 గణించుము.

(a) ${}^{7}C_{5}$ (c) ${}^{10}C_{9}$

(b) ${}^{11}C_{9}$ (d) ${}^{12}C_{9}$

సాధన (a) సంబంధం 7.9 నుంచి

$${}^{7}C_{5} = {}^{7}C_{7-5} = {}^{7}C_{2} = \frac{7.6}{1.2} = 21$$

(b) ఇదే విధంగా ${}^{10}C_{9} = {}^{10}C_{10-9} = {}^{10}C_{1} = 10$

(c) $${}^{11}C_{9} = {}^{11}C_{11-9} = {}^{11}C_{2} = \frac{11.10}{1.2} = 55$$

(d) $${}^{12}C_{10} = {}^{12}C_{12-10} = {}^{12}C_{2} = \frac{12.11}{1.2} = 66$$

${}^{n}C_{r}$ ను సంతృప్తిపరచే మరొక సంబంధం కలదు. క్రింది సంబంధాన్ని చూద్దాం

$${}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r} = {}^{n}C_{r} \qquad ...(7.10)$$

$${}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r} = \frac{(n-1)^{n}}{(n-r)!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)\ (n-r-1)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r(n-r-1)!(r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\ (r-1)!}\left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\ (r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)r}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!\ (r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ r!} = {}^{n}C_{r}$$

ఉదాహరణ 7.28 గణించండి

(a) ${}^6C_2 + {}^6C_4$ (b) ${}^8C_2 + {}^8C_4$

(a) ${}^5C_3 + {}^5C_2$ (a) ${}^{10}C_2 + {}^{10}C_4$

సాధన :

(a) 7.10 సంబంధాన్ని, $n = 7, r = 2$ లకు వాడతాము.

కావున ${}^6C_2 + {}^6C_1 = {}^7C_2 = 21$

(b) ఇచ్చట $n = 9, r = 2$ కాబట్టి ${}^8C_2 + {}^8C_1 = {}^9C_2 = 36$

(c) ఇచ్చట $n = 6, r = 3$ కాబట్టి ${}^5C_3 + {}^5C_2 = {}^6C_2 = 20$

(d) ఇచ్చట $n = 11, r = 3$ కాబట్టి ${}^{10}C_2 + {}^{10}C_1 = {}^{11}C_3 = 165$

సంబంధము 7.10 ని బాగా అర్థం చేసుకొనుటకు, ఉదాహరణ 7.20ను చూస్తాము. ఈ ఉదాహరణ యందు {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} సమితి యొక్క ఉపసమితుల సంఖ్యను లెక్కిస్తాం. వాటిని 1 ని కలిగి ఉన్న సమితులు, 1ని కలిగి వుండని సమితులు అని రెండుగా విభజిస్తాం. 4 మూలకాలు కలిగి 1ని కలిగి ఉన్న సమితుల సంఖ్య, మరియు {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} కి 3 మూలకాలు కల్గిన ఉపసమితుల సంఖ్య సమానము. ఇచ్చట ఉటువంటి ఉపసమితులు ${}^{10}C_3$ కలవు.

మూలకము 1 లేని 4 మూలకాల ఉపసమితుల సంఖ్య {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} సమితి యొక్క 4 మూలకాల ఉపసమితుల సంఖ్యకు సమానము. ఇది ${}^{10}C_4$. కావున {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} సమితికి 4 మూలకాల ఉపసమితుల సంఖ్య ${}^{10}C_3 + {}^{10}C_4$. కాని దీనిని ${}^{11}C_4$ గా ఉదాహరణలలో చూశాము. కాబట్టి ${}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 = {}^{11}C_4$. ఇలాగే n మూలకాల సమితి r మూలకాల ఉపసమితులు కనుగొనవచ్చు.

ఈ సంబంధాన్ని ఫ్రెంచి గణిత వేత్త బ్లెయిస్ పాస్కల్ కనుగొన్నాడు. దీనిని దిగువ ఇచ్చిన పాస్కల్ త్రిభుజము (Pascal Triangle) లో ఉపయోగించారు.

$n = 0$			1			
$n = 1$			1	1		
$n = 2$		1	2	1		
$n = 3$		1	3	3	1	
$n = 4$	1	4	6	4	1	
$n = 5$	1	5	10	10	5	1

మొదటి వరుసలో ఒకే మూలకము ${}^0C_0 = 1$ వున్నది. రెండవ వరుసలో ${}^1C_0$ మరియు ${}^1C_1$ రెండు మూలకాలున్నాయి. మూడవ వరుస నుండి మూలకాలను వ్రాయడానికి క్రింది పద్ధతిని పాటిస్తాము. ముందు వరుసలోని రెండు వరుస మూలకాలను కూడి, దాని విలువను ప్రస్తుత వరుసలో వాటి రెంటికి మధ్యన వ్రాయాలి. ఇలా అన్ని మూలకాలను వ్రాసిన పిదప ప్రారంభములోను, చివరలోను 1ని వ్రాయాలి. ఉదాహరణకు పై మూడవ వరుసను యిలా రాశారు. రెండవ వరుసలో వున్నవి రెండు మూలకాలు 1, 1లు వాటిని కూడగా అది 2, దానిని 1, 1కి మధ్య మూడవ వరుసలో 2గా నింపి ఇటు వైపు అటు వైపు 1ని రాశారు. నాలుగవ వరుస వ్రాయడానికి మూడవ వరుసలో Tని 4వ వరుసలో 1, 2 లకు 2,లకు మధ్య దిగువన అనగా 4వ వరుసలో వ్రాసి ఇటు చివర, ఇటు చివర 1ని వ్రాశారు. సంబంధము 7.10ని ఉపయోగించి, ${}^2C_0$, ${}^2C_1$, ${}^2C_2$ ల నుండి ${}^3C_1$, ${}^3C_2$ లు వ్రాసాము. ద్విపద విస్తరణలో ${}^nC_r$ లు గుణకాలుగా వున్నాయి కాబట్టి వాటిని ద్విపదగుణకాలని కూడ అంటారు.

ఉదాహరణ 7.29 ${}^nC_{10} = {}^nC_{12}$

సాధన : ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ను ఉపయోగించి

$$n - 10 = 12$$

or, $n = 12 + 10 = 22$

అభ్యాసం 7.7

1. (a) ${}^nC_{n-1}$ విలువను కనుగొనుము. ${}^nC_{n-1} = {}^nC_n$ అగునా ?

   (b) ${}^nC_n = {}^nC_0$ అని చూపుము

2. గణించము.

   (a) ${}^9C_5$ (b) ${}^{14}C_{10}$

   (c) ${}^{13}C_9$ (d) ${}^{15}C_{12}$

3. గణించుము

(a) ${}^{7}C_5 + {}^{7}C_2$ (b) ${}^{8}C_4 + {}^{8}C_5$

(c) ${}^{7}C_2 + {}^{9}C_2$ (d) ${}^{12}C_3 + {}^{12}C_2$

4. ${}^{7}C_2 + {}^{9}C_2$ అయిన 'r' విలువను కనుగొనుము.

5. ${}^{18}C_r + {}^{18}C_{r+2}$ అయిన ${}^{n}C_5$ విలువను కనుక్కోండి.

ప్రస్తారాలు మరియు సంయోగాలు రెండునూ కలిగిన సమస్యలను సాధించుట

ఇప్పటి వరకు, కేవలం ప్రస్తారాలు లేక సంయోగాలు మాత్రమే కలిగిన సమస్యలను సాధించాము. ఈ విభాగంలో రెండు భావనలు కలిసిన సమస్యలను సాధిస్తాము.

ఉదాహరణ 7.30 5 నవలలు మరియు 4 కథల పుస్తకాలు కలవు. 4 నవలను, మరియు 2 కథల పుస్తకాలను అలమార నందు ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చును?

సాధన 5 నవలల నుంచి 4 నవలలను ${}^{5}C_4$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు 4 కథల పుస్తకాలనుంచి, 2 కథల పుస్తకాలను ${}^{4}C_2$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. నవలలను మరియు కథల పుస్తకాలను కలిపి క్రింది విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

$$= {}^{5}C_4 \times {}^{4}C_2 = 5 \times 6 = 30$$

6 పుస్తకాలను (4 నవలలు మరియు 2 కథల పుస్తకాలు) 30 విధాలుగా ఎన్నుకొన్న తరువాత, వాటిని అలమారనందు $6! = 720$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

ప్రాధమిక గణన నియమం ప్రకారం మత్తం అమరికలు $= 30 \times 720 = 21{,}600$

ఉదాహరణ 7.31 5 హల్లులు మరియు 4 అచ్చులు నుండి 3 హల్లులు మరియు 2 అచ్చులు గల పదాలను ఎన్ని తయారు చేయవచ్చు?

సాధన 5 హల్లులు నుంచి 3 హల్లులను ${}^{5}C_3$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. 4 అచ్చుల నుండి, 2 అచ్చులను ${}^{4}C_2$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. ఇప్పుడు ప్రతీ ఎన్నిక నుంచి, 5 అక్షరాలను అమర్చగలిగే అమరికల సంఖ్య ${}^{5}P_5$

$\therefore$ మొత్తం పదాల సంఖ్య $= {}^{5}C_3 \times {}^{4}C_2 \times {}^{5}P_5$

$$= \frac{5\times4}{2\times1} \times \frac{4\times3}{2\times1} \times 5!$$

$$= 10 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7200$$

అభ్యాసం 7.8

1. 5 గణితము, 4 భౌతిక శాస్త్రం, మరియు 5 రసాయన శాస్త్ర పుస్తకములు కలవు. వీటి మంచి 4 గణితం, 3 భౌతిక శాస్త్రం, 4 రసాయన శాస్త్ర పుస్తకాలను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చ వచ్చు ?

   (a) ఒకే సబ్జక్టుకు చెందిన పుస్తకాలను ప్రక్కన ప్రక్కన ఉండంలో ఎన్ని రకాలుగా అమర్చ వచ్చు?

   (b) క్రమం పాటిస్తూ, ఒకే సబ్జక్టుకు సంబంధించిన పుస్తకాలు ప్రక్కన ప్రక్కన వుండే ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

2. 9 హల్లులు, 5 అచ్చులు కలవు. 7 అక్షరాలు పదాలను వాటిలో 4 హల్లులు, 3 అచ్చులు వుండేలగా ఎన్ని వ్రాయవచ్చు?

3. మీ 6 గురు స్నేహితులలో ఒక్కరిని ఎన్ని విధాలుగా విందుకు పిలువవచ్చు?

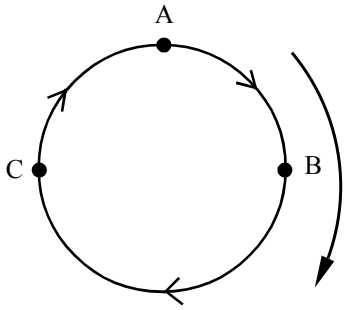
4. ఒక పరీక్షలో, పరీక్షార్థి 4 సబ్జక్టులలో ఉత్తీరులు కావాలి. ఎన్ని విధాలుగా అతడు ఫెయిల్ కాగలడు?

7.7 వృత్తాకార ప్రస్తారాలు

7.9.1 నిర్వచనం : సమితిలోని మూలకాల నుంచి కొన్ని లేదా అన్నీ ఎంచుకొని వాటిని వృత్తాకారంగా అమర్చడాన్ని "వృత్తాకార ప్రస్తారం" అంటాం.

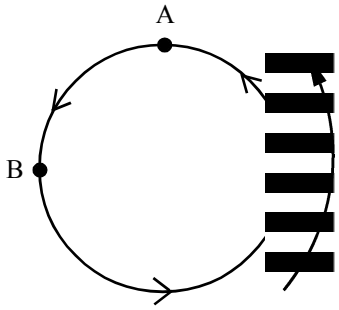
7.9.2 n విభిన్న వస్తువుల నుండి "r" వస్తువులు తీసుకొన్నప్పుడు ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $\frac{{}^{n}p_{r}}{r}$.

7.9.3 n విభిన్న వస్తువుల నుండి అన్ని వస్తువులను తీసుకఉంటే వచ్చే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $\lfloor(n-1)$.



సవ్యదిశ

పటం. 7.1



అపసవ్యదిశ

పటం. 7.2

ABC, ACB వృత్తాకార ప్రస్తారాలను గమనించండి. మొదటి ప్రస్తారంలో A, B, C లు సవ్యదిశలోను, రెండవ ప్రస్తారం లో A, B, C లు అపసవ్యదిశలోను వున్నాయి. దిశను పాటించకపోతే ఈ రెండు ప్రస్తారాలు ఒకే ప్రస్తారాన్ని సూచిస్తాయి.

∴ ప్రస్తారాల సంఖ్య = $\lfloor\underline{(n-1)}$ (ఏదో ఒక దిశలో మాత్రమే తీసుకోవాలి అనగా దిశను పరిగణించాలి.)

7.7.4 n విభిన్న వస్తువుల నుండి అన్ని వస్తువులను తీసుకొని, దిశను పరిగణించకుండా ఉండే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య = $\frac{1}{2}\lfloor\underline{(n-1)}$.

7.7.5 సమితిలోని మూలకాల నుంచి కొన్ని లేదా అన్నీ పంచుకొని వాటిని ఒక వరసలో (సరళరేఖలో) అమర్చడాన్ని "రేఖీయ ప్రస్తారం" లేదా "ప్రస్తారం" అంటాం.

ముఖ్యగమనిక : రేఖీయ ప్రస్తారానికి మొదటి స్థానం, చివరిస్థానం కూడా ఉంటుంది. కాని వృత్తాకార ప్రస్తారంలో మొదటిస్థానం లేదా చివరి స్థానం అంటూ ప్రత్యేకంగా ఉండవు. దానిలో గల ఏ స్థానాన్నైనా ఆ వృత్తాకార ప్రస్తారానికి మొదటి స్థానంగా భావించి, మిగిలిన మూలకాలను ఏవిధంగా అమర్చాం అనేది గమనిస్తాం.

7.7.6 A, B, C, D ల నుంచి ఎన్నుకొనే విధానం

రేఖీయ పద్ధతి

(i) 4 వస్తువుల నుండి 2 వస్తువులను ఎన్నుకొనే ఎన్నుకొను ప్రస్తారాలు

(ii) 4 వస్తువుల నుండి 2 వస్తువులను

సంయోగాలు	ప్రస్తారాలు
$4C_2 = \frac{4.3}{2.1} = 6$ విధాలు	$4P_2 = 4.3 = 12$విధాలు
AB	AB, BA
AC	AC, CA
AD	AD, DA
BC	BC, CB
BD	BD, DB
CD	CD, DC

(b)

(i) 4 వస్తువుల నుండి 3 వస్తువులను ఎన్నుకొనే ఎన్నుకొనే

(ii) 4 వస్తువుల నుండి 3 వస్తువులను

సంయోగాలు	రేఖీయ ప్రస్తారాలు
$4C_3 = 4C_1 = 4$విధాలు $(\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r})$	$4P_3 = 4.3.2 = 24$ విధాలు
ABC — ABC	ACB
ABD	BCA
ACD	BAC
BCD	CAB
BD	CBA
CD — BCD	BDC
	CDB
	CBD
	DBC
	DCB
	ఇలా 4 × 6 = 24 విధాలు

(c) 4 వస్తువుల నుండి అన్నింటినీ ఎన్నుకొనే

(c) 4 వస్తువుల నుండి 4 వస్తువులను

సంయోగాలు	రేఖీయ ప్రస్తారాలు
$4C_4 = 4C_0 = 1$విధం ABCD	$4P_4 = 4.3.2.1 = 24$ విధాలు పైన ఉదహరించి (2) నుంచి D ABC D ACB D BCA D BAC D CAB D CBA ఇలా 4 × 6 = 24 విధాలుగా రేఖీయ ప్రస్తారాలు ఏర్పడతాయి.

అదే విధంగా వృత్తాకార ప్రస్తారాలను పరిశీలిద్దాం.

7.9.7 ${}^{n}\mathrm{P}_{r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$

$${}^{n}p_{r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor (n-r)}$$

$${}^{n}p_{n} = \lfloor n$$

$${}^{n}p_{0} = 1$$

$${}^{n}p_{r} = n({}^{n-1}p_{\mathrm{r}-1}). \quad (1 \le r \le n)$$

$${}^{n}p_{r} = n \cdot {}^{(n-1)}\mathrm{P}_{(r-1)}.$$

ఉదాహరణ 7.32 : 9 మంది బాలురు, 9 మంది బాలికలను ఒక వృత్తం చుట్టూ అమర్చే విధానాలు కనుక్కోండి.

సాధన: మొత్తం బాల, బాలికలు = 18

కనక వీరిని వృత్తం చుట్టూ అమర్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య = $\lfloor 18-1 = \lfloor 17$



ఉదాహరణ 7.33 : నిర్దేశించిన ఒకే రంగు గల పక్కపక్కన ఉండేటట్లుగా 8 కుర్చీలను ఒక వృత్తాకార బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు కనుక్కోండి.

సాధన: నిర్దేశించిన ఒకే రంగు గల రెండు కుర్చీలను ఒక యూనిట్‌గా భావిస్తే, మొత్తం కుర్చీలు = 6 + 1 = 7

ఈ కుర్చీలను బల్ల చుట్టూ అమర్చే విధానాలు = $\lfloor\underline{(7-1)} = \lfloor\underline{6}.$

ఒకే రంగు గల రెండు కుర్చీలను వాటిలో వాటిని $\lfloor\underline{2}$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

కనక, వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య = $\lfloor\underline{6} \times \lfloor\underline{2}$ విధాలు

$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1$

$= 1440.$

ఉదాహరణ 7.34: ఆరుగురు విద్యార్థులను గుండ్రని బల్ల చుట్టూ ఎన్ని విధాలుగా అమర్చగలరు ?

సాధన: 6 మందిని వృత్తాకారంగా అమర్చే విధాలు $\lfloor\underline{6-1} = \lfloor\underline{5} = 120$

సవ్యదిశ, అపసవ్యదిశలను పరిగణించకుండా, కుర్చీ పెట్టగలిగిన విధాలు = $\frac{120}{2} = 60.$

ఉదాహరణ 7.35: వివిధ రంగులు గల 9 ముత్యాలతో ఒక దండను ఎన్ని విధాలుగా తయారు చేయవచ్చు ?

సాధన: సవ్యదిశలో ఆ దండను అమర్చండి. కనుక దిశను పరిగణలో తీసుకోకుండా ఉంటే, అమర్చగలిగిన విధాలు

$$= \frac{\lfloor\underline{9-1}}{2} = \frac{\lfloor\underline{8}}{2} = \frac{2016}{2} = 1008$$

ఉదాహరణ 7.36 : 7గురు పురుషులు, 5గురు స్త్రీలు ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ (i) ఏ ఇద్దరు స్త్రీలు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండా (ii) అందరు స్త్రీలు కలసి ఉండేటట్లు కూర్చొనే విధాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన : (i) ఏ ఇద్దరు స్త్రీలు ప్రక్క ప్రక్కన ఉండకూడదు. కావున మొదటగా 7 పురుషులను వృత్తాకారంగా అమర్చవలెను.

$\therefore$ విధాల సంఖ్య = $\lfloor\underline{6}.$

ఇప్పుడు 5 గురు స్త్రీలు కూర్చోవడానికి 7 స్థానాలు ఉంటాయి.

ఈ 7 స్థానాలలో 5 స్త్రీలు కూర్చునే విధాల సంఖ్య = $7P_5.$

$\therefore$ కావలసిన అమరికల సంఖ్య = $\lfloor\underline{6} \times 7P_5$ విధాలు.

(ii) అందరు స్త్రీలు కలసి ఉండవలెనంటే, అందరిని కలిపి ఒక వస్తువుగా బావిస్తే వారిలో వారిని అమర్చే విధాల సంఖ్య $\lfloor\underline{5}$.

ఇప్పుడు 7 పురుషులను 7 వస్తువులుగా భావిస్తే మొత్తం వస్తువుల సంఖ్య = 8. ఈ వస్తువులను వృత్తాకారంగా అమర్చే విదానాల సంఖ్య = $\lfloor\underline{7}$.

$\therefore$ కావలసిన అమరికల సంఖ్య = $\lfloor\underline{5} \cdot \lfloor\underline{7}$ విధాలు.

ఉదాహరణ 7.37: 14 పువ్వులతో, నిర్దేశించిన రెండు పువ్వులు పక్కపక్కన ఉండేట్లు ఎన్నిరకాల మాలికలను తయారు చేయవచ్చు.

సాధన: నియమం ప్రకారం రెండు పువ్వులను ఒకటిగా అనుకుంటే ఇప్పుడు (14 – 1) = 13 పువ్వులను వృత్తాకారంగా $\lfloor\underline{13}$ విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

నియమించిన రెండు పువ్వులను వాటిల్లో వాటిని $\lfloor\underline{2}$ = 2 విధాలుగా అమర్చవచ్చు.

కనక ఇచ్చిన షరతు ప్రకారం 14 పువ్వులను వృత్తాకారంగా అమర్చువిధాలు = $2 \times \lfloor\underline{13}$.

కాని పువ్వులతో మాలిక తయారుచేసేటపుడు సవ్యాపసవ్యాలను లెక్కలోకి తీసుకోము కనక

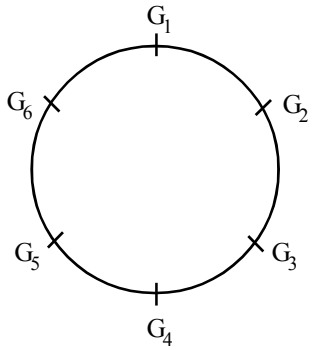
మాలికలు తయారు చేసే సంఖ్య = $\frac{2\times\lfloor\underline{13}}{2}$

= $\lfloor\underline{13}$. విధాలు.

ఉదాహరణ 7.38: 6గురు బాలురు, 6 బాలికలు వృత్తాకారంగా ప్రతి ఇద్దరి బాలికల మద్య ఒక బాలుడు ఉండేటట్లు ఎన్ని విధాలుగా కూర్చోవచ్చు.

సాధన: 6 బాలికలు వృత్తాకారంగా $\lfloor\underline{6-1} = \lfloor\underline{5}$ =

= 5.4.3.2.1 = 120 విధాలుగా కూర్చోవచ్చు.



పటం. 7.3

పటంలో విధంగా బాలికల మధ్య ఉన్న 6 ఖాళీ స్థానాలలో 6గురు బాలురు కూర్చోవాలి. బాలికలను ముందే కూర్చోపెట్టిన తరువాత మొదటి బాలుడు ఏ ఖాళీలో కూర్చొనేది కూడా పరిగణించాలి. అంటే 6గురు బాలురు ఒకే వరుసలో కూర్చొన్నట్లు పరిగణిస్తే వారు 6 ఖాళీలలో $\lfloor\underline{6}$ = 720 విధాలలో కూర్చోవచ్చు. కనక 6గురు బాలురు, 6గురు బాలికలు ఇచ్చిన షరతు ప్రకారం 120 × 720 = 26,400 విధాలుగా కూర్చోవచ్చు.

అభ్యాసం 7.9

1. 5గురు బాలురు, ముగ్గురు బాలికలను ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ (i) ఏ ఇద్దరు బాలికలు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండ

   (ii) అందరు బాలికలు కలిసి ఉండేట్లు

   (iii) అందనే బాలికలు కలసి లేకుండా ఉండేటట్లు కూర్చునే విధాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

   జవాబులు: (i) $\lfloor\underline{4} . \lfloor\underline{5} P_3 = 1440$

   (ii) $\lfloor\underline{3} . \lfloor\underline{5} = 720$

   (iii) $\lfloor\underline{7} - \lfloor\underline{3} . \lfloor\underline{5} = 4320$

2. 5గురు జపానీయులు, 5గురు ఇండియన్‌లు ఒక గుండ్రని బల్ల చుట్టూ ఎన్ని విధాలుగా కూర్చోవచ్చును. వీటిలో ఒకే దేశానికి చెందిన ఇద్దరు వ్యక్తులు ప్రక్క ప్రక్కన లేకుండా ఎన్ని విధాలుగా కూర్చోవచ్చు.

   జవాబు : $\lfloor\underline{9}$

   $\lfloor\underline{4} \lfloor\underline{5} = 2880$

3. 8 వస్తువుల నుండి 5 వస్తువులను తీసుకున్నప్పుడు ఏర్పడే వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

   జవాబు : $\frac{8P_5}{5} = 1344$

4. 8 పుష్పాలతో నిర్దేశించిన రెండు పుష్పాలు పక్కపక్కన ఉండేట్లు ఎన్ని రకాల మాలికలు తయారు చేయవచ్చు?

5. రకరకాల రంగులున్న 9 పూసలతో ఒక కంఠాభరణాన్ని ఎన్ని విధాలుగా చేయవచ్చు?

గమనిక

- $p_1, p_2, ... p_k$ లు ప్రధాన సంఖ్యలు, $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_k$ ధనపూర్ణాంకాలు.

  $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.... p_k^{\alpha_k}$ అయితే n యొక్క ధన భాజకాల సంఖ్య (1, nతో సహా)

  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) ..... (\alpha_k + 1)$

ఉదాహరణ 7.39 : 1080 కు ధన భాజకాల సంఖ్యకు కనుక్కొందాం.

సాధన: 1080 ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా రాస్తే

$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5^1$

$\therefore$ 1080 కు ధన భాజకాల సంఖ్య = $(3 + 1)(3 + 1)(1 + 1)$

$= 32.$

- 'n' శూన్యేతర అంకెలను ఉపయోగించి ఏర్పరచగల 'r' అంకెల $(1 \leq r \leq n \leq 9)$ సంఖ్యల మొత్తం

  = ${}^{(n-1)}p_{(r-1)}$ × దత్త n అంకెల మొత్తం × 111..1 (r సార్లు).

ఉదాహరణ 7.40: 1, 3, 5, 7, 9 అంకెలను ఉపయోగించి ఏర్పర్చగల 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.

సాధన: $r = 4$

$n = 5$

$= {}^{(n-1)}p_{(r-1)}$ × అంకెల మొత్తం × 1111

$= {}^{(5-1)}p_{(4-1)} \times (1+3+5+7+9) \times 1111$

$= {}^{4}p_3 \times 25 \times 1111$

$= 24 \times 25 \times 1111 = 6,66,600.$

కీలకపదాలు

- ప్రాథమిక గణన నియమం స్థాయిలు

  n ఘటనలలో మొదటిది m_1 విధాలుగా, రెండవది m_2 విధాలుగా, మూడవది m_3 విధాలుగా ఏర్పడుతుందే, అన్ని 'n' ఘటనలు కలిపి

  $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_{n-1} \times m_n$ విధాలుగా ఏర్పడుతాయి.

- n వస్తువుల నుంచి ఏర్పడు ప్రస్తారాల సంఖ్య n !
- $^{n}\mathrm{P}_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- $^{n}\mathrm{P}_{n} = n!$
- n వస్తువుల నుంచి r వస్తువులు ఎన్నుకొను విధానాలు $^{n}\mathrm{C}_{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- $^{n}\mathrm{C}_{r} = {}^{n}\mathrm{C}_{n-r}$
- $^{n-1}\mathrm{C}_{r} + {}^{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}^{n}\mathrm{C}_{r}$.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : // www.wikipedia.org

http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. ఒక పరీక్ష నందు సత్యము – అసత్యము రకపు ప్రశ్నలు 8 కలవు. ఎన్ని రకాల సమాధానాలు వచ్చును.?
2. 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6 సంఖ్యలను ముఖముపై గుర్తించిన, రెండు పాచికలను దొర్లించిరి. వాటిపై ముఖాలపై ఎన్ని రకాల ఫలితాలు వస్తాయి?
3. ఒక హోటల్ నందు 3 కాయగురలు, 2 సలాడ్లు మరియు 2 రకాల రొట్టెముక్కలు కలవు. ఒక కొనుగోలుదారుడు 1 కాయగూర, 1 సలాడు, 1రొట్టెను ఎన్ని రకాలుగా కొనగలడు?

4. మీ గోడకు పేపర్లను అతికించాలను కొందాం. వాల్ పేపర్లు, 4 విభిన్న బ్యాక్ గ్రౌండ్ రంగులు 7 విభిన్న డిజైన్లు 5 విభిన్న రంగులలో లభిస్తున్నాయి. మీరు ఎన్ని రకాలుగా వాల్ పేపర్లను ఎన్నుకొనగలరు?

5. 7 మంది విద్యార్థులను ఒక వరుసలో గల 7 స్థానాలలో ఎన్ని రకాలుగా కూర్చోపెట్టవచ్చును?

6. ALTRUISM పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి ఎన్ని 8 అక్షరాల పదాలు తయారు చేయవచ్చు?

7. మీకు 5 కిటికీలు మరియు 8 పరదాలు ఇటిలో ఉన్నాయనుకోండి. మీరు ఎన్ని విధాలుగా ఆ కిటికీలకు పరదాలను అమర్చగలరు?

8. POLICY పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి 3 అక్షరాల పదాలను గరిష్టంగా ఎన్ని తయారు చేయవచ్చు?

9. 10 మంది ఆటగాళ్ళు ఒక పందెంలో పాల్గొంటున్నారు. ఆ పందెంలో 3 బహుమతులు మొదటి, రెండవ, మూడవ బహుమతులు కలవు. ఎన్ని రకాలుగా బహుమతులను ఇవ్వవచ్చు?

10. ATTAIN పదంలోని అక్షరాలను 'T' అక్షరాలు ప్రక్క ప్రక్కనే ఉండే విధంగా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

11. 12 మంది స్నేహితులు ఒక కార్యక్రమంలో కలుసుకొన్నారు. ప్రతీ వ్యక్తీ అందరిలో ఒక్కొక్క సారి చేతిని కలుపుతారు. మొత్తం అందరూ ఎన్ని రకాలుగా చేతులు కలుపుతారు?

12. మీకు టెలివిజన్లు అమ్మే అంగడి ఉందనుకొందాం. మీరు 5 రకాల టెలివిజన్ సెట్లు అమ్ముతున్నారనుకోండి. కానీ మీ అరలో కేవలం 3 రకాల టెలివిజన్ సెట్లను పెట్టుటకు అవకాశం కలదు. మీరు ఎన్ని రకాలుగా టెలివిజన్ సెట్లను చూపించగలరు?

13. ఒక కాంట్రాక్టర్‌కు 4 గురు కార్పెంటర్లు కావలెను. 5 మంది సమాన అర్హత గలవారు ఆ ఉద్యోగానికి దరఖాస్తు చెట్టుకొన్నారు. కాంట్రాక్టరు ఎన్ని రకాలుగా వారిని ఎన్నుకొంటారు?

14. 13 మంది గల బృందం నుంచి, 9 మంది గల కమిటీని ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు?

15. 15 మంది పురుషులు మరియు 12 మంది స్త్రీల నుంచి, 3 పురుషులు, 2 స్త్రీలు గల కమిటీని ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు?

16. 4 గురు గ్రేడ్-I మరియు 7 గురు గ్రేడ్-II ఆఫీసర్ల నుంచి 6 గురు ఆఫీసర్లను, ప్రతి గ్రేడ్ నుంచి కనీసం 2 ఆఫీసర్లు ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చును?

17. 6 గురు అబ్బాయిలు, మరియు 4 గురు అమ్మాయిలు నుంచి 5 గురు సభ్యులున్న కమిటీని ఎన్నుకోవాలి.
    (a) ఖచ్చితంగా 2 అమ్మాయిలు
    (b) కనీసం 2 అమ్మాయిలు ఉండే విధంగా ఎన్ని రకాలుగా కమిటీలను నిర్మించవచ్చు?

18. ఆంగ్ల భాషనందు 5 అచ్చులు మరియు 21 హల్లులు కలవు. 2 విభిన్న అచ్చువీ, 2 విభిన్న హల్లులు ఉండే విధంగా ఎన్ని రకాల పదాలను వ్రాయవచ్చు?

19. 5 హల్లులు మరియు 5 అచ్చుల నుండి, 3 హల్లులు, 2 అచ్చులు గల పదాలను ఎన్ని వ్రాయవచ్చు?

20. ఒక స్కూల్ వార్షికోత్సవంలో ఒక వినూత్న కార్యక్రమం పెట్టిరి. దానిలో, 3 తక్కువ విడివి గల నాటకాలు, 6 కంఠస్థ పద్యాలు, మరియు 4 నాట్య ప్రదర్శనలు పెట్టాలను కొన్నారు. ఆ వార్షికోత్సవానికి విచ్చేసిన ముఖ్య అతిధి ప్రసంగించుటకు చాలా ఎక్కువ సమయం తీసుకొన్నారు. కేవలం 2 నాటకాలు, 4 కంఠస్థ పద్యాలు మరియు 3 నాట్య ప్రదర్శనలను ఇచ్చుటకు ఎన్ని రకాల అవకాశాలు కలవు?

జవాబులు

అభ్యాసం 7.1

1. (a) 180 (b) 8 (c) 12 (d) 20
2. (a) 48 (b) 36

అభ్యాసం 7.2

1. (a) 17576 (b) 900
2. (a) 105 (b) 60
3. (a) 24 (b) 24

అభ్యాసం 7.3

1. (a)(i) 720 (ii) 5040 (iii) 5046
   (iv) 17280 (v) 10
   (b) (i) False (ii) False
   (iii) True (iv) False
2. (a) 120 (b) 40320 (c) 24

అభ్యాసం 7.4

1. (a) (i) 12 (ii) 120 (iii) 4
   (iv) 7200 (v) $n!$
   (b) (i) False (ii) True (iii) False
   (iv) False
2. (a) (i) 7980 (ii) 9240 (b) 20
   (c) 840

అభ్యాసం 7.5

1. 96 2. 1152 3. 2073600
4. 2488320
5. 144
6. (i) 5040 (ii) 30240 (iii) 332640

అభ్యాసం 7.6

1. (a)(i) 286 (ii) 126 (iii) 84
   (iv) $\frac{21}{5}$
   (b) (i) సత్యము (ii) అసత్యము (iii) అసత్యము
   (iv) సత్యము

2. 1771 3. 2002 4. 57750
5. 805
6. (i) 30 (ii) 46 7. 3564
8. 7560

అభ్యాసం 7.7

1. (a) n, కాదు
2. (a) 126 (b) 1001 (c) 715 (d) 455
3. (a) 56 (b) 126 (c) 120 (d) 286
4. 3 5. 56

అభ్యాసం 7.8

1. (a) 600 (b) 207 3600 2. 6350400 3. 63
4. 15

అభ్యాసం 7.9

1. (i) $\lfloor\underline{4} . \lfloor\underline{5} P_3 = 1440$

   (ii) $\lfloor\underline{3} . \lfloor\underline{5} = 720$

   (iii) $\lfloor\underline{7} - \lfloor\underline{3} . \lfloor\underline{5} = 4320$

2. $\lfloor\underline{9} \ \lfloor\underline{4} \ \lfloor\underline{5} = 2880$

3. $\frac{8P_5}{5} = 1344$

4. 720

5. $\frac{\lfloor\underline{8}}{2}$

సాధనా అభ్యాసం

1. 256
2. 36
3. 12
4. 140
5. 5040
6. 40320
7. 6720
8. 120
9. 720
10. 120
11. 66
12. 10
13. 5
14. 715
15. 30030
16. 371
17. (a) 120 (b) 186
18. 50400
19. 12000
20. (a) 65318400 (b) 1080 (c) 311040

అధ్యాయం

8

ద్విపద సిద్ధాంతము

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠము చదివిన తర్వాత నీవు

- గణితానుగమన సూత్రాన్ని ప్రవచించగలవు
- $n = 1$ కు ప్రవచనము $P(n)$ యొక్క నిజానిజాలను పరీక్షించగలవు
- ప్రవచనము $P(K)$ వాస్తవమయినపుడు అది $P(K + 1)$ కు కూడా వాస్తవ మవుతుందో లేదో పరిశీలించగలవు.
- గణితాను గమన పద్ధతి ద్వారా గణిత ప్రవచనాల వాస్తవికతను పరీక్షించగలవు.
- ధన పూర్ణాంకానికి ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి దానిని గణితాను గమన పద్ధతిలో నిరూపించగలవు.
- ద్విపద సిద్ధాంతాన్నుపయోగించి, వివిధ విలువలు x, y లకు $(n + y)^n$ విస్తరణను వ్రాయగలవు.
- ద్విపద విస్తరణలో సాధారణ పదాన్ని, మధ్య పదాన్ని వ్రాయగలవు.
- ఋణ మరియు అకరణీయ విలువలకు ద్విపద విస్తరణను వ్రాయగలవు
- ద్విపద సిద్ధాంతాన్నుపయోగించి $\sqrt[3]{9}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ వంటి వాటికి ఉజ్జాయింపు విలువలు వ్రాయ గలవు.

- x విలువ మరో చిన్నదయినపుడు, x^2 మరియు అంతకు పై ఘాతాల విలువలను తృణీకరించి, $\left(3-\frac{5}{x}\right)^7$ వంటి బీజీయ విస్తరణలను వ్రాసి, x కు వాటి విలువలు కనుగొనగలవు.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంఖ్యామానము
- సంఖ్యలు, సమాసాలపై నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలు
- బీజీయ రూపాలు వాటి క్లుప్తీకరణలు
- సూచికలు మరియు ఘాతాలు

పరిచయం

"ద్విపదం" అంటే రెండు పదాలను '+' లేదా '–' గుర్తుతో అనుసంధానించడం అని అర్థం. మనం కింది తరగతులలో "ద్విపదం" యొక్క వర్గాలు, ఘనాలు నేర్చుకొన్నాం. ఉదాహరణకు

$$(x+y)^1 = x^1 + y^1 = x + y$$
$$(x-y)^1 = x^1 - y^1 = x - y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

పైన ఉదహరించినవన్నీ రెండు పదాల మొత్తం లేదా భేదానికి ఘాతం యొక్క విస్తరణలని గమనించవచ్చు. వీటినే మనం "ద్విపద విస్తరణలు" అంటాం. $(x+y)^1$ విస్తరణలోని గుణకాలు 1, 1; $(x+y)^2$ విస్తరణలోని గుణకాలు 1, 2, 1; $(x+y)^3$ విస్తరణలోని గుణకాలు 1, 3, 3, 1; $(x+y)^4$ విస్తరణలోని గుణకాలు 1, 4, 6, 4, 1 లను "ద్విపద గుణకాలు" అని అంటాం.

పై విస్తరణలలోని ద్విపద గుణకాలు కింది విధంగా ఉన్నాయని గమనించవచ్చు.

ఘాతం	ద్విపద గుణకాలు
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	.....

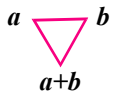
పటం 8.1

పైన ఇచ్చిన పటంలో ఒక అడ్డువరసను దాని పైన ఉన్న అడ్డువరస నుంచి ఏ విధంగా రాబట్టవచ్చో చూద్దాం.

(i) ప్రతీ అడ్డువరస 1 తో మొదలయి 1 తో అంతమవుతుంది.

(ii) ప్రతీ ధనపూర్ణాంకం n కూ, n వ అడ్డు వరసలో $(n+1)$ పదాలు (సంఖ్యలు) ఉన్నాయి.

(iii) ఒక అడ్డువరసలోని (మొదటిది, చివరిది తప్ప) మిగిలిన సంఖ్యలు వాటికి ఇరుపక్కలా పై అడ్డువరసలో ఉన్న సంఖ్యలు కలపడం ద్వారా వచ్చాయి (మొదటి అడ్డువరస తప్ప). ఈ సంకలనాన్ని కిందచూపిన త్రిభుజం ద్వారా గమనించవచ్చు.



పటం 8.1 ని 'పాస్కల్ త్రిభుజం' అంటారు. దీనిని కనిపెట్టిన ఫ్రెంచ్ గణితశాస్త్రవేత్త 'బ్లేయీ పాస్కల్' (1623-1662) పేరుతోనే దీనిని పిలుస్తారు. కాని ఇదే విషయాన్ని క్రీ.పూ. 200 సంవత్సరం లో 'పింగళ' అనే భారతీయ శాస్త్రవేత్త తన గ్రంథం "చందశ్శాస్త్రం" లో 'మేరు-ప్రస్తారం' అనే పేరుతో వివరించాడు.

ప్రారంభంలో చెప్పినట్లు $(x+y)$ పదాన్ని n సార్లు గుణించడం ద్వారా $(x+y)^n$ విస్తరణను రాబట్టడం n పెరిగే కొద్దీ కష్టతరమవుతుంది. ఈ అధ్యాయంలో మనం ఏ ధనపూర్ణాంకం n కైనా, $(x+y)^n$ యొక్క విస్తరణను ఉత్పాదిస్తాం. ఈ ఫలితం 'ద్విపద సిద్ధాంతం' అని పిలువబడుతోంది. ఈ ఫలితంలోని $x^i y^j$ పదాల గుణకాలను 'ద్విపద గుణకాలు' అని అంటాం. ఈ అధ్యాయంలో మనం ద్విపద గుణకాల ధర్మాలు, ఒక ద్విపద విస్తరణలోని మధ్యపదం (పదాలు), ఒక ద్విపద విస్తరణలోని సంఖ్యాపరంగా గరిష్ఠపదం (పదాలు) గురించి నేర్చుకొంటాం.

మాడ్యూల్ -II
నిరూపక జ్యామితి



ఇంకా n ఒక రుణపూర్ణాంకం లేదా అకరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు $(x+a)^n$ యొక్క విస్తరణను ఉపపత్తి లేకుండా ప్రవచిస్తాం. $(x+a)^n$ విస్తరణలో (n ఒక రుణ పూర్ణాంకం లేదా అకరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు) x యొక్క ఏదైనా ధనఘాతం యొక్క గుణకాన్ని కనుక్కొంటాం. చివరగా కొన్ని కరణీయ సంఖ్యల ఉజ్జాయింపు విలువలను ద్విపద విస్తరణలను ఉపయోగించి కనుక్కొంటాం.

8.1 ప్రవచనమనగానేమి?

సత్యమనికాని. అసత్యమనికాని నిర్దుష్టంగా చెప్పగల వాక్యమును ప్రవచనం (Statement) అంటాము.

ఉదాహరణకు "నా వయస్సు ఇరవై ,సంవత్సరాలు" $x = 3$ అయితే $x^2 = 9$ అవుతందనేవి ప్రవచనాలు, " ఎపుడు వెళుతున్నావు?" అనునవి ప్రవచనాలు కావు.

ఏదేని వాస్తవ సంఖ్య x కు, $x - 5 = 7 \Rightarrow x = 12$ మరియు $x - 5 = 7$ అనునవి రెండూ ప్రవచనాలేకాని ఇందులో మొదటిది ఒప్పు రెండవది తప్పు.

ఉదాహరణ 8.1 క్రింది వాక్యాలలో పని ప్రవచనాలు?

(i) 17 బేశి సంఖ్య

(ii) 5 సరిసంఖ్య

(iii) $x^n > 1$

(iv) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

సాధన : (i) మరియు (ii) లు ప్రవచనాలు. ఇందులో (i) ఒప్పు (ii) తప్పు. n విలువ x విలువ తెలియకుండా (iii) తప్పో, ఒప్పో నిర్ణయించలేము కనుక (iii) ప్రవనము కాదు. ఏ విలువలు a, b లకైనా (iv) ఒక సర్వసమీకరణము. కాబట్టి (iv) ఒక ప్రవచనము.

దిగువ యిచ్చిన ప్రవచనమును పరిశీలిద్దాం.

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ఈ ప్రవచనము సహజ సంఖ్య n లో వున్నది. ఈ ప్రవచనమును $P(n)$ తో సూచిద్దాము.

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$, $P(1)$ అవుతుంది.

అలాగే $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$ ప్రవచనమవుతుంది.

ఉదాహరణ 8.2 $2^n > n - 1$ ను $P(n)$ తో సూచిస్తే $P(1)$, $P(k)$, $P(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$ ను వ్రాయండి

సాధన : $P(n)$: $2^n > n - 1$ అని యిచ్చారు.

n బదులు 1, K మరియు K + 1 లను ప్రతిక్షేపించగా,

$P(1) : 2^1 > 2 - 1$ i.e $2 > 1$

$P(K) : K^2 > K-1$

$P(K+1) : 2^{K+1} > (K + 1) - 1$ i.e. $2^{K+1} > K$

ఉదాహరణ 8.3 ప్రవచనము $P(n) : 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ అయితే $P(1), P(K)$ మరియు $P(K+1), K \in \mathbb{N}$ వ్రాయండి.

సాధన : $P(1)$ వ్రాయడానికి, $P(n)$ లో ఎడమ చేతివైపు (L.H.S) $3 \times 1 - 2$ అంటే 1 వచ్చేటట్లు వ్రాస్తాము. అనగా ఎడమ చేతి వైపు ఒక పదము, అనగా మొదటి పదము వస్తుంది. అలాగే కుడి చేతి వైపు (RHS) $P(1) = \frac{1\times(3\times1-1)}{2} = 1$

$\therefore \quad P(1) = 1$

n బదులు 2 ప్రతిక్షేపిస్తే

$P(2) = 1 + 4 = \frac{2\times(3\times2-1)}{2}$ అంటే $5 = 5$ అని వస్తుంది.

n బదులు $k, k + 1$ లు వరుసగా ప్రతిక్షేపిస్తే

$$P(k) = 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{K(3K-1)}{2}$$

$$P(k+1) = 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) + [3(k+1) - 2]$$

$$= \frac{(K+1)\ [3(K+1) - 1]}{2}$$

అంటే $1 + 4 + 7 + ... + (3k + 1) = (K+1)\ \frac{(3K+2)}{2}$

మాడ్యూల్ -II
నిరూపక జ్యామితి
నోట్స్

అభ్యాసం 8.1

1. క్రింది వానిలో ప్రవచనాలు ఏవి.

   (a) $1 + 2 + 4 + ... + 2^n > 20$ (b) $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 99$

   (c) ముంబాయి కన్న చెన్నై బావుంటుంది. (d) తాజ్‌మహల్ ఎక్కడ వున్నది?

   (e) $\frac{1}{1\times 2} + ...+ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2. $P(n) : 3^n + 5n$ కు 6 ఒక కారణాంకము, అయితే P(1), P(2), (K) మరియు P(K + 1) (K సహజ సంఖ్య) లను వ్రాయండి.

3. క్రింది ప్రవచనాలు $P(n)$ లకు P(1), P(K) మరియు P(K+1) లను వ్రాయండి.

   (a) $2^n \geq n + 1$ (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

   (c) $n(n + 1) (n + 2)$, ను భాగిస్తుంది. (d) $x^n - y^n$, ను $x - y$ భాగిస్తుంది.

   (e) $(ab)^n = a^n b^n$

   (f) $\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7^n}{15}\right)$ సహజ సంఖ్య

4. క్రింది ప్రవచనాలు $p(n)$ లకు $p(1), p(2), p(k)$ మరియు $p(k+1)$ లను వ్రాయండి.

   a) $\frac{1}{1\times 2} + ...+ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

   c) $(1\times 2) + (2 \times 3) + ... + n(n + 1) < n(n + 1)^2$

   d) $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + ...+ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

ఉదాహరణలు 2, 3, లలో యిచ్చిన ప్రవచనాలు తప్పో, ఒప్పో ఎలా నిర్ణయించగలవుఒ దానిని తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగించే గణితానుగమన పద్ధతిని యిపుడు చర్చిద్దాము.

8.2 గణితానుగమన సూత్రము

మనదైనందిన జీవితములో మనకు ఎన్నో రకాల అనుభవాలు, వాటి కారణాలు ఎదురవుతుంటాయి. ఉదాహరణకు మీ మిత్రుడు తనకు బిడ్డ పుట్టిందని చెపితే వెంటనే నీవు ఆడామగా అని ప్రశ్నిస్తావు. ఇక్కడ నీవు సార్వత్రిక విషయాన్ని ప్రత్యేక విషయానికి వర్తిస్తున్నావు. ఈ రకమైన తర్కాన్ని నిగమన తర్కమంటారు. మరొక విషయాన్ని చర్చిద్దాము. నీ చుట్టూ వున్న బాగా చదివే విద్యార్థులు పరీక్షలు బాగా వ్రాస్తే నీవు దానిని "బాగా చదివే విద్యార్థులు పరీక్షలు కూడా చక్కగా వ్రాస్తారు." అని సిద్ధాంతీ కరిస్తావు. దీనిని నీవు ప్రత్యేక విషయాలను పరిగణలోకి తీసుకొని దానిని సార్వత్రీకరించావు. దీనిని అనుగమన తర్కమంటారు. దీన్ని అన్ని శాస్త్రాలలోను, గణితములోనూ ఉపయోగిస్తారు.

గణితములో, గణితాను గమనము దీనికి పరిపూర్ణరూపము. గణితంలో ఒక ప్రవచనాన్ని అంగీకరించాలంటే అన్ని సందర్భాల్లోను అది వాస్తవమని ఋజువుకావాలి.

గణితాను గమన సూత్రము

సహజ సంఖ్య n తో $P(n)$ ఒక ప్రవచనము

(i) $n = 1$ కి నిజము అంటే $P(1)$ నిజము

(ii) $k > 1$ కు $P(k)$ నిజమైనపుడు $P(k+1)$ కు కూడా నిజము అయితే $P(n)$ ప్రతి సహజ సంఖ్యకు నిజము.

గమనిక: (ii) లో $P(k)$ నిజమని కాదు. $P(k)$ నిజమైనప్పుడు $P(k + 1)$ నిజమవ్వాలి అని తెలుపుతున్నది.

ఉదాహరణకు $n = 1$ కు $P(n)$ వాస్తవమని తెల్పడానికి, (i) ప్రకారం $P(1)$ వాస్తవము. $P(1)$ నిజము కాబట్టి (ii) లో $k = 1$ ప్రతిక్షేపిస్తే $P(1 + 1)$ అంటే $P(2)$ నిజము. మళ్ళీ $P(2)$ నిజము కాబట్టి (ii) లో $k=2$ ప్రతిక్షేపిస్తే, $P(2+1)$ అంటే $P(3)$ నిజము. ఇలాగే (ii) లో $k = 3$ ప్రతిక్షేపిస్తే $P(4)$ నిజమని చూపవచ్చు. ఇలా చేస్తూ పోతే $P(11)$ వాస్తవమని తెలుపుతాము. ఇచ్చట $n = 11$ కు మాత్రమే కాదు, $n = 137$ కు కూడ అంటే $P(137)$ కూడ నిజమని చెప్పవచ్చు. కావున ప్రతిసహజ సంఖ్య $n > 1$ కు $P(n)$ నిజము.

ఉదాహరణ 8.4 సహజ సంఖ్య n కు

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ అని నిరూపించుము

సాధన : $P(n) : 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ $P(1), 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$ నిజము.

ఇపుడు $P(k)$ నిజమనుకొని $P(k=1)$ నిజమని చూపుదాం.

మనకు $P(k) : 1 + 2 + ... + K = \frac{K}{2}(K+1)$ ...(i)

ఇపుడు $P(k+1) : 1 + 2 + ... k + (k+1) = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$

ఇందులో LHS = RHS అని చూపుదాము.

$P(k+1)$ కు L.H.S $= 1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1$

$= [1 + 2 + 3 + ... + k] + (k+1)$

$= \frac{K}{2}(k+1) + (k+1)$ ((i) నుండి)

$= (k+1)\left(\frac{K}{2}+1\right)$

$= \left(\frac{K+1}{2}\right)(K+2)$

$=$ P(K + 1) కు RHS.

$\therefore$ P(K) నిజమైనపుడు P(K+1) నిజము.

గణితానుగమన సూత్రములోని నియమాలన్నీ తృప్తిపరచినది కావున ఇచ్చిన ప్రవచనము.

ప్రతి సహజ సంఖ్య n కు నిజమవుతుంది.

ఉదాహరణ 8.5 సహజ సంఖ్య n కు

$1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + ... + n.2^n = (n-1).2^{n+1} + 2$, అని నిరూపించుము.

సాధన : $P(n) : 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + ... + n.2^n = (n-1).2^{n+1} + 2$

$\therefore$ $P(1) : 1.2^1 = (1-1)2^{1+1} + 2$, i.e., $2 = 2$.

కావున P(1) నిజము.

P(K+1) నిజమనుకుందాం.

i.e. $1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + ... + k.2^k = (k-1)\,2^{k+1} + 2$ ... (i)

ఇపుడు P(K+1) నిజమని నిరూపిద్దాము.

P(K+1) ఇపుడు

$1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + ... + k.2^k + (k+1)2^{k+1} = [(k+1)-1]2^{(k+1+1)} + 2$

$= k.2^{k+2} + 2$

P($k+1$) లో LHS $= (1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 + ... + k.2k + (k+1)2^{k+1}$

$= 2^{k+1}[(k-1) + (k+1)] + 2$

$= 2^{k+1}(2k) + 2$ (1) నుండి

$= k2^{k+2} + 2$

$=$ P($k+1$) లో RHS

$\therefore$ P($k+1$) నిజము.

కావున గణితానుగమన సూత్రము ప్రకారము ఇచ్చిన ప్రవచనము ప్రతి సహజ సంఖ్య n కు నిరూపితము.

ఉదాహరణ 8.6 ప్రతి సహజ సంఖ్య n కు $(x^{2n-1} + y^{2n-1})$ ను $(x+y)$ భాగిస్తుందని చూపుము. $x, y \in \mathbb{N}$.

సాధన : P(n) : $(x^{2n-1} + y^{2n-1})$ ను $(x+y)$ భాగిస్తుంది అని ప్రవచనాన్ని వ్రాసుకుందాం.

అపుడు P(1) : $x^{2-1} + y^{2-1}$ ను $(x+y)$ భాగిస్తుంది.

అంటే $(x+y)$ ను $(x+y)$ భాగిస్తుంది. ఇది నిజం

$\therefore$ P(1) నిజము.

సహజ సంఖ్య k కు P(k) వాస్తవమనుకుందాం.

అంటే $(x^{2k-1} + y^{2k-1})$ ను $(x+y)$ భాగిస్తుంది.

$\Rightarrow x^{2k-1} + y^{2k-1} = (x+y)\,t$, t సహజసంఖ్య

ఇపుడు P($k+1$) అనగా $(x^{2(k+1)-1} + y^{2(+1)-1})$ ను $x+y$ భాగిస్తుందని నిరూపిద్దాం.

$$x^{2(k+1)-1} + y^{2(+1)-1}) = x^{2k+1} + y^{2k+1}$$

$$= x^{2k-1+2} + y^{2k+1}$$

$$= x^2\, x^{2k-1} + y^{2k+1}$$

$$= x^2\,[(x+y)t - y^{2k-1}] + y^{2k+1} \qquad (1) \text{ నుండి})$$

$$= x^2\,(x+y)t - x^2\, y^{2k-1} + y^{2k+1}$$

$$= x^2\,(x+y)t - x^2\, y^{2k-1} + y^2\, y^{2k-1}$$

$$= x^2\,(x+y)t - y^{2k-1}\,(x^2 - y^2)$$

$$= (x+y)\,[x^2\, t - (x-y)\, y^{2k-1}]$$

ఇది $(x+y)$ చే భాగింపబడుతుంది.

$\therefore$ $P(k+1)$ నిజము

కావున గణితానుగమన సూత్రము లో ప్రతి సహజ సంఖ్య n కు యిచ్చిన ప్రవచనము నిజమని నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 8.7 ప్రతి సహజ సంఖ్య n కు $2^n > n$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $P(n) : 2^n > n.$

$\therefore$ $P(1) : 2^1 > 1$ i.e $2 > 1$ ఇది నిజము

$P(k)$ నిజమనుకుందాం.

i.e., $2k > k$ ...(i)

(i) ని ఇరువైపుల 2తో గుణించగా

$2 \,.\, 2k > 2k$

$\Rightarrow$ $2^{k+1} > k + 1,$ $(k > 1$ కావున)

$\therefore$ $P(k+1)$ నిజము.

కావున గణితానుగమన సూత్రము ప్రకారము ఇచ్చిన ప్రవచనము ప్రతి సహజ సంఖ్య n కు నిరూపించబడినది.

కొన్ని సందర్భాలలో మనం ఇచ్చిన సహజ సంఖ్య a (అనుకుందాం) కన్నా పెద్దదైన సహజ సంఖ్యలకు ప్రవచనాలను నిరూపించవలసి వుంటుంది. (క్రింది ఉదా. 8.8) అలాంటి సందర్భాలలో గణితాను గమన సూత్రముపయోగించునపుడు $P(1)$ స్థానాన్ని $P(a+1)$ ఆక్రమిస్తుంది.

ఉదాహరణ 8.8 సహజ సంఖ్య n కు

$n^2 > 2(n + 1),\ n \geq 3$ ను నిరూపించండి.

సాధన : $P(n)$: $n^2 > 2(n + 1)$, అనుకుందాం.

ఇచ్చిన ప్రవచనాన్ని $n \geq 3$ కు నిరూపించవలసివున్నది కనుక మొదట $P(3)$ యొక్క వాస్తవికతను పరిశీలించాలి.

$P(3) : 3^2 > 2(3 + 1)$ .. i.e $9 > 8$

$\therefore$ $P(3)$ నిజము.

$P(k) : k^2 > 2(k + 1),\ k \geq 3$ ...(i)

ప్రవచనము నిజమనుకుందాం.

ఇపుడు $P(k + 1)$ నిజమని నిరూపిద్దాం.

$P(k + 1)$ లో LHS $= (k + 1)^2$

$= k^2 + 2k + 1$

$> (2k + 1) + 2k + 1$ (i) నుండి

$> 3 + 2k + 1$ ($\because$ $2(k + 1) > 3$)

$= 2\ (k + 2)$

$\therefore$ $(k + 1)^2 > 2(k + 2)$.

కావున $P(k+1)$ నిజము

$\therefore$ గణితాను గమన సూత్రము ద్వారా యిచ్చిన ప్రవచనము ప్రతి సహజ సంఖ్య $n \geq 3$ కు నిజమని నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 8.9 గణితానుగమన సూత్రమునుపయోగించి

$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ ఒక సహజ సంఖ్య అని ప్రతి n కు సహజ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన : $P(n)$: $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ అనుకుందాం.

$\therefore$ P(1) : $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right)$ సహజ సంఖ్య

లేదా $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}=\frac{3+5+7}{15}=\frac{15}{15}=1$, సహజ సంఖ్య

$\therefore$ P(1) నిజం

P(k) : $\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)$ సహజ సంఖ్య అనుకుందాం. ...(i)

ఇపుడు $\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{7(k+1)}{15}$

$$=\frac{1}{5}[5^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1]+\frac{1}{3}[k^3+3k^2+3k+1]+\left(\frac{7}{15}k+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+(k^4+2k^3+3k^2+2k)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+(k^4+2k^3+3k^2+2k)+1 \quad ...(ii)$$

(i) నుండి $\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}$ సహజ సంఖ్య

1 మరియు $k^4+2k^3+3k^2+2k$ లు సహజ సంఖ్యలు.

(ii) రెండు సహజ సంఖ్యల మొత్తం కావున, (ii) కూడా ఒక సహజ సంఖ్య.

$\therefore$ P(k) నిజమైనపుడల్లా P($k+1$) నిజము.

$\therefore$ అన్ని సహజ సంఖ్యలు n కు P(n) నిజము.

కావున అన్ని సహజ సంఖ్యలకు $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$

అనునది సహజ సంఖ్య.

అభ్యాసం 8.2

1. గణితానుగమన సూత్రమునుపయోగించి ఏ సహజ సంఖ్య n కైనా క్రింది ప్రవచనాలను నిరూపించండి.

   (a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}\ (n + 1\ (2n + 1)$

   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \ (1 + 2 + ...+ n)^2$

   (c) $1 + 3 + 5 + ... + (n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$

   (d) $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \ \frac{n}{2}\ (3n - 1)$

2. గణితానుగమన పద్ధతిలో క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

   (a) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ...+ \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (n సహజ సంఖ్య)

   (b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ ....+ \ \frac{1}{(n-1)\ (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   (c) $(1\times 2) + (2\times 3) +....+ n(n+1)\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. ఏ సహజ సంఖ్య n కైనా క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

   (a) $n^3 + 5n$, 6 చే భాగించబడుతుంది.

   (b) $(x^n - 1)$, $x - 1$ చే భాగించబడుతుంది.

   (c) $n^3 + 2n$, 3 చే భాగించబడుతుంది.

   (d) $n^4 + 2n^3 + n^2$, 4 చే భాగించబడుతుంది.

4. ఏ సహజ సంఖ్య n కైనా క్రింది అసమానతలను నిరూపించండి.

   (a) $3^n \geq 2n + 1$ (b) $4^{2n} > 15n$

   (c) $1 + 2 + ... + n < \frac{1}{8}\ (2n + 1)^2$

5. గణితాను గమనపద్ధతినుపయోగించి క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

   (a) $2^n > n^2,\ n \geq \mathrm{N}$ n సహజసంఖ్య

   (b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ...+ \frac{1}{2n} > \frac{13}{24},\ n \geq 1,$ సహజ సంఖ్య.

6. ప్రతి సహజ సంఖ్య $n \geq 1$ కు, $n(n^2 - 1)$ 3చే భాగింపబడుతుందని చూపుము.

$n \in \mathbb{N}$ కు $P(n)$ ప్రవచనాన్ని నిరూపించునపుడు ప్రారంభ మరియు గణితానుగమనమనే రెండుసోపానాలను పాటించాలి. ఇందులో ఒకటి నిజం కాకపోయినా యిచ్చిన ప్రవచనం నిరూపితము కానట్టే ఉదాహరణకు అన్ని వాస్తవా సంఖ్యలు a, b లకు $P(n) : (a + b)^n < a^n + b^n$ వాస్తవం అయితే $P(1)$ తప్పని సరిగా నిజమవుతుంది కాని $P(k)$ వాస్తవమయినపుడల్లా $P(k + 1)$ వాస్తవమవుతుంది చెప్పలేము. (ఉదాహరణకు $(2 +3)^2\ 2^2 \not\leq 3^2$) కావున ఈ ప్రవచనం అన్ని సహజ సంఖ్యలకు నిజం కాదు.

మరొక ఉదాహరణ $P(n) : n > \frac{n}{2} + 20$ ను తీసుకుందాం.

ఇక్కడ $P(1) : 1 > \frac{1}{2} + 20$ వాస్తవం కాదు. కావున $P(k)$ వాస్తవమయినపుడల్లా $P(k + 1)$ వాస్తవము.

$$P(k) : k > \frac{k}{2} + 20$$

$$P(k+1) : k+1 > \left(\frac{k}{2} + 20\right) + 1 > \frac{k}{2} + 20 > \frac{1}{2}$$

$$= \frac{k+1}{2} + 20$$

$\Rightarrow$ $P(k + 1)$ వాస్తవము.

8.3 ద్విపద సిద్ధాంతము - సహజ సంఖ్య ఘాతం

ఒక ద్విపదాన్ని అదే ద్విపదంతోను, లేక మరొక ద్విపదంతో గుణించి వుంటావు. యిపుడొక ద్విపదం $(x + y)$ తీసుకుని పరిశీలిద్దాం.

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = (x + y)\ (x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = (x + y)\ (x + y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = (x + y)\ (x + y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6\ x^2\ y^2 + 4x\ y^3 + y^4$$

$(x+y)^5 = (x+y)\,(x+y)^4 \;=\; x^5 + 5x^4y + 10\,x^3y^2 + 10x^2\,y^3 \;+ 5xy^4 + y^5$

పై సమీకరణాల్లో కుడి చేతి వైపున్న వాటిని ఎడమ చేతి వైపు వున్న వాటి ద్విపద విస్తరణ అంటాము.

పై విస్తరణల నుండి క్రింది విషయాలను గమనించగలవు.

1. ద్విపద విస్తరణలోని పదాల సంఖ్య, ద్విపద ఘాతానికి ఒకటి ఎక్కువ వుంటుంది. ఉదాహరణకు $(x+y)^4$ విస్తరణలో 5 పదాలున్నాయి.
2. పై విస్తరణలలో ప్రతిపదంలోను x యొక్క ఘాతాలు ఒక్కొక్కటి తగ్గుతూ, y యొక్క ఘాతాలు ఒక్కొక్కటి పెరుగుతున్నాయి.
3. మొదటి, చివరి పదాల ఘాతాలు, ద్విపద ఘాతానికి సమానము.
4. ప్రతి పదంలోను x, y ల ఘాతాల మొత్తం, ద్విపద ఘాతానికి సమానము

పై విస్తరణలను క్రింది విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చు.

$(x+y)^3 \;=\; {}^3C_0\,x^3 + {}^3C_1\,x^2\,y + {}^3C_2\,xy^2 + {}^3C_3\,y^3$

$(x+y)^4 \;=\; {}^4C_0\,x^4 + {}^4C_1\,x^3\,y + {}^4C_2\,x^2y^2 + {}^4C_3\,x\,y^3 + {}^4C_4\;y^4$

$(x+y)^5 \;=\; {}^5C_0\,x^5 + {}^5C_1\,x^4\,y + {}^5C_2\,x^3y^2 + {}^5C_3\,x^2y^3 + {}^5C_4\,x\,y^4 + {}^5C_5\,y^5$

ప్రతిధన పూర్ణాంకం n కు ద్విపద విస్తరణను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు. దీనినే ధన పూర్ణాంక ఘాతానికి (లేదా సహజ సంఖ్య) కి ద్విపద సిద్ధాంతమంటారు.

సిద్ధాంతము 8.1 n ఒక సహజ సంఖ్య, x, y లు వాస్తవ సంఖ్యలయితే,

$$(x+y)^n \;=\; {}^nC_0\,x^n + {}^nC_1\,x^{n-4}\,y^1 + {}^nC_2\,x^{n-3}y^2 + .. + {}^nC_{n-3}\,xy^{n-1} + {}^nC_n\,y^n \quad ...(A)$$

ఉపపత్తి ఈ సిద్ధాంతాన్ని గణితానుగమన సూత్రం ఉపయోగించి నిరూపిస్తాము.

$P(n) : (x+y)^n$

$= {}^nC_0\,x^n + {}^nC_1\,x^{n-1}\,y^1 + {}^nC_2\,x^{n-2}y^2 + .. + {}^nC_{n-1}\,xy^{n-1} + {}^nC_n\,y^n \quad ...(i)$

అనుకుందాం.

(i) నుండి $P(1) : (x+y)^1 = {}^1C_0\,x + {}^1C_1\,y = 1 \text{ x } x + xy$

అంటే $(x+y)^1 = x + y.$

$\therefore \;\; n = 1$ కు $P(1)$ నిజము.

ఇపుడు $P(k)$ నిజమనుకుందాం.

$P(k)$: $(x+y)^k$

$= {}^kC_0\, x^k + {}^kC_1\, x^{k-1} y + {}^kC_2\, x^{k-2} y^2 + ... + {}^kC_{k-1}\, x\, y^{k-1} + {}^kC_k\, y^k$ ...(ii)

ఇపుడు

$P(k+1) : (x+y)^{k+1} = (x+y)\,(x+y)^k$

$= (x+y)\,({}^kC_0\, x^k + {}^kC_1\, x^{k-1} y + {}^kC_2\, x^{k-2} y^2 + ... + {}^kC_{k-1}\, x\, y^{k-1} + {}^kC_k\, y^k)$

$= {}^kC_0\, x^{k+1} + {}^kC_0\, x^k y + {}^kC_1\, x^k y + {}^kC_1\, x^{k-1} y^2 + {}^kC_2\, x^{k-2} y^3 + ...$

$+ {}^kC_{k-1}\, x^2\, y^{k-1} + {}^kC_{k-1}\, xy^k + {}^kC_k\, xy^k + {}^kC_k\, y^{k+1}$

అంటే $(x+y)^{k+1} = {}^kC_0\, x^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1)\, x^k y + ({}^kC_1 + {}^kC_2)\, x^{k-1} y^2 +$

$.... + ({}^kC_{k-1} + {}^kC_k)\, x\, y^k + {}^kC_k\, y^{k+1}$ ....(iii)

${}^kC_0 = 1 = {}^{k+1}C_0$

${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k-1}$ ....(iv)

మరియు ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad {}^kC_0 + {}^kC_1 = {}^{k+1}C_1$ ....(v)

${}^kC_1 + {}^kC_2 = {}^{k+1}C_2$

${}^kC_2 + {}^kC_3 = {}^{k+1}C_3$

.....

.....

(iv), (v) లనుపయోగించి (iii) ను

$(x+y)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\, x^{k+1} + {}^{k+1}C_1 x^k y + {}^{k+1}C_2\, x^{k-1} y^2 + ... + {}^{k+1}C_k\, xy^k$

$+ {}^{k+1}C_{k+1}\, y^{k+1}$ గా వ్రాయవచ్చు.

$\Rightarrow$ $P(k+1)$ నిజము.

కాబట్టి మనం (a) $P(1)$ నిజమని (b) $P(k)$ నిజమైనపుడు $P(k+1)$ కూడా నిజమని నిరూపించాము.

కావున అన్ని n విలువలకు $P(n)$ వాస్తవమని గణితానుగమన పద్ధతిలో నిరూపించాము. కాబట్టి ఏ సహజ సంఖ్య n కైనా ద్విపద సిద్ధాంతమును నిరూపించాము.

ఉదాహరణ 8.10 $(x + 3y)^5$ విస్తరణను వ్రాయుము.

సాధన : ఇందులో మొదటి పదము x, రెండవ పదము $3y$ ద్విపద సిద్ధాంతమునుపయోగించి,

$$(x + 3y)^5 = {}^5C_0\, x^5 + {}^5C_1\, x^4\,(3y)^1 + {}^5C_2\, x^3\,(3y)^2 + {}^5C_3\, x^2\,(3y) + {}^5C_4\, x(3y)^4 + {}^5C_5\,(3y)^5$$

$$= 1 \times x^5 + 5x^4 \times 3y + 10x^3 \times (9\,y^2) + 10x^2 \times (27y^3) + 5x \times (81y^4) + 1 \times 243y^5$$

$$= x^5 + 15x^4\,y + 90x^3\,y^2 + 270\,x^2\,y^2 + 405\,xy^4 + 243y^5$$

$$\therefore\ (x + 3y)^5 = x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$$

ఉదాహరణ 8.11 వాస్తవ సంఖ్య a కు $(1 + a)^n$ ను a పదాలలో విస్తరించుము.

సాధన : ద్విపద సిద్ధాంతములో $x = 1, y = a$ ను తీసుకొనిన,

$$(1 + a)^n = {}^nC_0\,(1)^n + {}^nC_1\,(1)^{n-1}\,.\,a + {}^nC_2\,(1)^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}\,(1)a^{n-1} + {}^nC_n\,a^n$$

అంటే $(1 + a)^n = 1 + {}^nC_1\,a + {}^nC_2\,a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}\,a^{n-1} + a^n$.

(B) ద్విపద సిద్ధాంతమునకు మరో రూపము

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^5, \left(\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right)^5, \left(\frac{a}{4} + \frac{2}{9}\right)^5, \left(\frac{2t}{3} - \frac{3}{2t}\right)^6$$

లాంటి వాటిని కూడా ద్విపద సిద్ధాంతమునుపయోగించి విస్తరించవచ్చును.

ఉదాహరణ 8.12 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5, \left(\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right)^4$, $x \neq 0,\ y \neq 0$ ను విస్తరించుము

సాధన : $$\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right)^4 = {}^4C_0\left(\frac{y}{x}\right)^4 + {}^4C_1\left(\frac{y}{x}\right)^3\left(\frac{1}{y}\right) + {}^4C_2\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)^2 + {}^4C_3\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{1}{y}\right)^4$$

$$= 1 \times \frac{y^4}{x^4} + 4 \times \frac{y^3}{x^3} \times \frac{1}{y} + 6 \times \frac{y^2}{x^2} \times \frac{1}{y^2} + 4 \times \left(\frac{y}{x}\right) \times \frac{1}{y^3} + 1 \times \frac{1}{y^4}$$

$$= \frac{y^4}{x^4} + 4\,\frac{y^2}{x^3} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{xy^2} + \frac{1}{y^4}$$

ఉదాహరణ 8.13 ఒక పట్టణంలో జనాభా సంవత్సరానికి 3 శాతం చొప్పున వృద్ధి చెందుచున్నది. 5 సంవత్సరముల తర్వాత పట్టణ జనాభా ఎంతశాతం వృద్ధిచెందుతుంది? సమాధానాన్ని రెండు దశాంశాలకు సవరించి కనుగొనుము?

సాధన : ప్రస్తుత పట్టణ జనాభా a అనుకుందాం. ఒక సంవత్సరం తర్వాత

$$a + \frac{3}{100}a = a\left(1 + \frac{3}{100}\right)$$

రెండేళ్ళ తర్వాత, $a\left(1+\frac{3}{100}\right) + \frac{3}{100}\left[a\left(1+\frac{3}{100}\right)\right]$

$$= a\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1+\frac{3}{100}\right) = a\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$$

ఇలాగే 5 ఏళ్ళ తర్వాత $a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5$

ద్విపద సిద్ధాంతమునుపయోగించి మూడు దశాంశ స్థానాలకు సవరించిన పిదప)

$$a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 \approx a[1+5(0.03)+10(0.03)^2] = a \times 1.159$$

$\therefore$ 5 సంవత్సరాల తర్వాత పట్టణ జనాభా వృద్ధి శాతము =

ఉదాహరణ 8.14 ద్విపద సిద్ధాంతమునుపయోగించి క్రింది వాటి విలువల కనుక్కోండి

(i) 102^4 (ii) 97^3

సాధన : క్రింది వాటి విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $102^4 = (100+2)^4$

$= {}^4C_0(100)^4 + {}^4C_1(100)^3.2 + {}^4C_2(100)^2.2 + {}^4C_3(100).2^3 + {}^4C_4.2^4$

$= 100000000 + 8000000 + 240000 + 3200 + 16$

$= 108243216$

(ii) $(97)^3 = (100-3)^3$

$= {}^3C_0(100)^3 - {}^3C_1(100)^2.3 + {}^3C_2(100).3^2 - {}^3C_3 3^3$

$= 1000000 - 90000 + 2700 - 27$

$= 1002700 - 90027$

$= 912673.$

అభ్యాసం 8.3

1. క్రింది వాటిని విస్తరించండి.

   (a) $(2a + b)^3$ (b) $(x^2 - 3y)^6$ (c) $(4a - 5b)^4$ (d) $(ax + by)^n$

2. క్రింది వాటిని విస్తరించండి

   (a) $(1 - x)^7$ (b) $\left(1+\frac{x}{y}\right)^7$ (c) $(1 + 2x)^5$

3. క్రింది వాటిని విస్తరించండి.

   (a) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)^5$ (b) $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^7$ (c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ (d) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^5$

4. నేను ఒక లక్ష రూపాయలను సాలుకు 18 శాతం చొప్పున చక్రవడ్డీకి పెట్టుబడిపెట్టితే పది సంవత్సరాలకు నాకు తిరిగి వచ్చే మొత్తమెంత? సమాధానాన్ని రెండు దశాంశ స్థానాలకు సవరించి కనుగొనుము.

5. గంటకు 2 శాతం చొప్పున బ్యాక్టీరియా వృద్ధిచెందుతున్నది. ఉదయం 9 గంటలకు 1.5×10^5 m బ్యాక్టీరియా వుంటే, అదే రోజు మధ్యాహ్నం 1 గం. ఎంత బ్యాక్టీరియా వృద్ధి చెంది వుంటుంది?

6. ద్విపద సిద్ధాంతమునుపయోగించి క్రింది వాటిని గణించండి.

   (i) $(101)^4$ (ii) $(99)^4$ (iii) $(1.02)^3$ (iv) $(0.98)^3$

8.4 ద్విపద విస్తరణలో మధ్య, సాధారణ పదాలు

$(x + y)^n$ ద్విపద విస్తరణలోను పదాలను పరిశీలిద్దాము.

i.e., $(x + y)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, y + {}^nC_2\, x^{n-2}y^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}\, xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n$

ఇందులో మొదటి పదము ${}^nC_0\, x^n$ అంటే ${}^nC_{1-1}\, x^n\, y$;

రెండవ పదము ${}^nC_1\, x^{n-1}\, y$, అంటే ${}^nC_{2-1}\, x^{n-1}\, y^1$;

మూడవ పదము ${}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2$ అంటే ${}^nC_{3-1}\, x^{n-2}\, y^2$;

దీనిని సార్వత్రికరించగా,

$r+1$ వ పదము ${}^nC_{(r+1)-1}\, x^{n-r}\, y^r$; అంటే ${}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r$

ఈ పదాన్ని T_{r+1} తో సూచిస్తే,

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, y^n$$

T_{r+1} ను సాధారణ పదము అంటారు.

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 8.15 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ $n \in \mathbb{N}$ లో $(r+1)$ వ పదం కనుక్కోండి నీ సమాధానాన్ని విస్తరణలోని మొదటి పదంతో సరిచూడండి.

సాధన విస్తరణలో సాధారణపదము

$$T_{r+1} = {}^nC_r\,(x^2)^{n-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= {}^nC_r\, x^{2n-2r} \cdot \frac{1}{x^r}$$

$$= {}^nC_r\, x^{2n-3r} \qquad \ldots(i)$$

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ విస్తరణలో మొదటి పదం $(x^2)^n$ లేదా x^{2n} (i) లో $r = 0$ ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$T_{0+1} = T_1$$

$$T_1 = {}^nC_0\, x^{2n-0} = x^{2n}$$

$r+1 = 1$ కు T_{r+1} పదము సరిపోయినది.

ఉదాహరణ 8.16 $\left(1 - \frac{2}{3}x^3\right)^6$ విస్తరణలో 5వ పదాన్ని కనుక్కోండి

సాధన : ఇక్కడ $T_{r+1} = T_5 \Rightarrow r+1 = 5$ అంటే $r = 4$

$n = 6$ మరియు $a = -\frac{2}{3}x^3$.

$$\therefore\ T_5 = {}^6C_4 \left(-\frac{2}{3}x^3\right)^4$$

$$= {}^6C_4 \left(\frac{16}{81}x^{12}\right)$$

$$= \frac{6\times5}{1\times2} \times \frac{16}{81} \times x^{12} = \frac{80}{27}x^{12}$$

$\therefore$ విస్తరణలో 5వ పదము $\frac{80}{27}x^{12}$

అభ్యాసం 8.4

1. క్రింది విస్తరణలలో $(r+1)$ వ పదం కనుక్కోండి.

   (a) $(2x + y)^n$ (b) $(2a^2 - 1)^n$

   (c) $(1 - a)^n$ (d) $\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^n$

2. క్రింది విస్తరణలలో, ప్రక్కన తెలిపిన పదాలను కనుక్కోండి.

   (a) $(1 + 2y)^8$; 6వ పదము (b) $(2x + 3)^7$; 4వ పదము

   (c) $(2a - b)^{11}$; 7వ పదము (d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; 4వ పదము

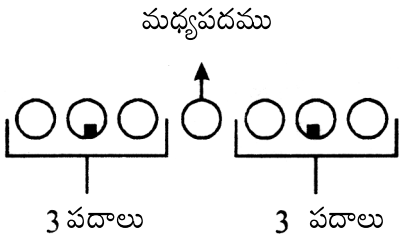
   (e) $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^7$; 5వ పదము

ద్విపద విస్తరణలో సాధారణ పదాలను కనుగొనడ మెలాగో యింత వరకు నేర్చుకున్నాము. ఇపుడు మధ్య పదము కనుగొనుటను నేర్చుకుందాము. ద్విపద విస్తరణలో పదాల సంఖ్య ఘాతము కన్న ఒక్కటి ఎక్కువ వుంటుందని మీకు తెలిసు.

కావున ఘాతము సరిసంఖ్య అయితే విస్తరణలో బేసిసంఖ్య పదాలుంటాయి. అలాగే ఘాతము బేసి సంఖ్య అయితే విస్తరణలో సరిసంఖ్య పదాలుంటాయి. కాబట్టి ద్విపద విస్తరణలో మధ్య పదము కనుగొనుటకు రెండు సందర్భాలెదురవుతాయి. అవి ;

సందర్భము 1: ఘాతము n సరిసంఖ్య.

ఉదాహరణకు $n = 6$ అయినపుడు విస్తరణలోని మొత్తం పదాల సంఖ్య 7 అవుతాయి. కావున క్రింది పటం 8.1లో చూపిన విధంగా నాలుగవ పదానికి యిరువైపుల మూడేసి పదాలుంటాయి.

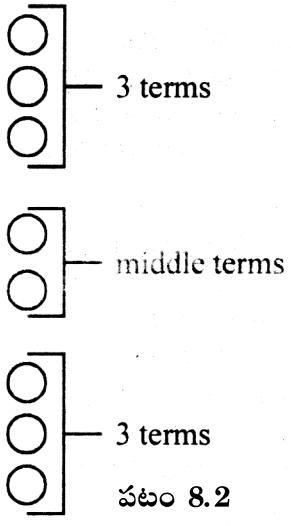


పటం 8.1

$\therefore n$ సరిసంఖ్య అయినపుడు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ పదానికి యిరువైపుల $\frac{n}{2}$ పదాలుంటాయి. కావున $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ పదము మధ్య పదము.

సందర్భము 2 : ఘాతము n బేసి సంఖ్య

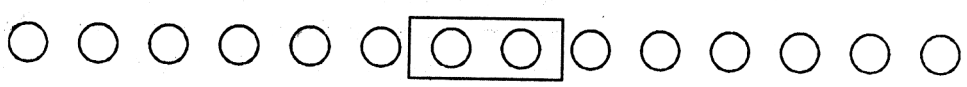
ఉదాహరణకు $n = 7$ అయినపుడు విస్తరణలోని మొత్తం పదాల సంఖ్య 8 అవుతుంది. ఇక్కడ మధ్య పదాన్ని కనుగొనడానికి క్రింది పటం 8.2లో చూపిన విధంగా మొత్తం పదాలను మూడు భాగాలుగా విభజిద్దాము. ఇపుడు మధ్యభాగానికి క్రింద, పైన పదాల సంఖ్య సమానంగా వున్నది. కావున మధ్య భాగంలో నున్న రెండుపదాలు మధ్య పదాలే.



పటం 8.2

కావున ఈ సందర్భాలలో 4వది అనగా $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ మరియు 5వది అనగా $\left(\frac{7+3}{2}\right)$ లు రెండు మధ్యపదాలు.

ఇలాగే $n = 13$ అయిన $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{13+3}{2}\right)$లు మధ్యపదాలు అంటే 7, 8 లు మధ్య పదాలు. (పటం 8.3)



పటం 8.3

ద్విపద విస్తరణలో ఘాతము n సరిసంఖ్య అయినపుడు మధ్య పదము $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ అవుతుంది. అలాగే ఘాతములు n బేసి సంఖ్య అయినపుడు $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ లు మధ్య పదాలవుతాయి.

ఉదాహరణ 8.17 $(x^2 + y^2)^8$ లో మధ్య పదాన్ని కనుక్కోండి

సాధన ఇక్కడ $n = 8$

$\therefore \quad \frac{8}{2} + 1$ i.e 5 పదము మధ్యపదము.

$T_{r+1} = {}^8C_r\,(x^2)^{8-r} \,.\, (y^2)^r$ లో $r = 4$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$T_5 = {}^8C_5\,(x^2)^{8-4}\; y^8$

లేదా $\quad T_5 = {}^8C_5\,(x^2)^{8-4}\;(y^2)^4 = 70\,x^8\,y^8.$

ఉదాహరణ 8.18 $(2x^2 + 1/x)^9$ విస్తరణలో మధ్య పదం (పదాలు) కనుక్కోండి.

సాధన : ఇక్కడ $n = 9$ (బేసిసంఖ్య) కావున $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{9+3}{2}\right)$ లు అనగా T_5, T_6 లు మధ్యపదాలు.

సాధారణ పదము

$T_{r+1} = {}^9C_r\,(2x^2)^{9-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n$ లో $r = 4$ మరియు $r = 5$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$T_5 = {}^9C_4\,(2x^2)^{9-4}\ \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= \frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4} \cdot 32\ x^{10} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 4032\,x^6.$$

ఇలాగే $T_6 = {}^9C_5\,(2x^2)^{9-5}\ \left(\frac{1}{x}\right)^5 = 2016\ x^3$

$\therefore$ $4032x^6$, $2016\ x^3$ లు మధ్యపదాలు.

అభ్యాసం 8.5

1. క్రింది విస్తరణలలో మధ్య పదము (పదాలు)ను కనుక్కోండి.

   (a) $(2x + y)^{10}$ (b) $\left(1 + \frac{2}{3}x^3\right)^8$

   (c) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ (d) $(1 - x^2)^{10}$

2. క్రింది విస్తరణలలో మధ్య పదము (పదాలు) కనుక్కోండి.

   (a) $(a + b)^7$ (b) $(2a - b)^9$

   (c) $\left(\frac{3x}{4} - \frac{4y}{3}\right)^7$ (d) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{11}$

8.5 ద్విపద సిద్ధాంతము - అకరణీయ ఘాతము

ద్విపదాల మొత్తానికి ఘాతము సహజ సంఖ్య అయినపుడు ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని యింతవరకు చూశాము. ఇపుడు ఘాతము ఋణపూర్ణాంకమైనా లేదా భిన్నరూపంలో వుండే సంఖ్యకైనా ద్విపద సిద్ధాంతము వర్తిస్తుందనీ, ఈ సందర్భంలో ద్విపద విస్తరణలో అనంతపదాలుంటాయని చూడబోతున్నాము.

సిద్ధాంతము 8.2 అకరణీయ ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతము r ఒక అకరణీయ సంఖ్య, $|x| < 1$అయ్యేటటువంటి x ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

దీని నిరూపణ మన పరిధికి మించినది కావున, మనమిక్కడ దీని నిరూపణను చర్చించడంలేదు. దీనిని ప్రవచించిన ఘనతను దక్కించుకున్న సర్ ఐజాక్ న్యూటన్ తన రెండు ఉత్తరాల (1676A.D) లో ప్రవచనాలను మాత్రమే వ్రాసారు. దీని తర్వాతి గణిత వేత్తలు దశలు వారీగా నిరూపించారు. ఆంగ్ల గణితవేత్త Colin Mechaurin (A.D. 1698 - 1746) అకరణీయ సంఖ్య ఘాతమయినపుడు, Giovinni Francesco Francesco, M.M. Salvemini (A.D. 1708-1783)మరియు జర్మనీ గణితవేత్త Abraham G. Kasther (A.D. 1719 - 1800)లు పూర్ణాంకము ఘాతమయినపుడు, స్విస్ గణితవేత్త Leonard Euler (A.D. 1707 - 1707) భిన్న సంఖ్య ఘాతమయినపుడు మరియు నార్వే గణితవేత్త Neils Henrik Abel (1802-1829)సంకీర్ణసంఖ్య ఘాతమయినపుడు ఈ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించారు. ఈ సిద్ధాంతాన్ని వివరించే కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాము.

ఉదాహరణ 8.19 $|x| < 1$ అయితే $(1+x)^{-1}$ ను విస్తరించుము.

సాధన ఇక్కడ $r = -1$ [D ప్రకారము]

$$\therefore (1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \ldots\ldots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots$$

అదే విధంగా, $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$

$(1+x)^{-1}$ విస్తరణలో ధన, ఋణ గుర్తులు ఒక దాని తర్వాత మరొకటి మార్చి మార్చి వుండడము, $(1-x)^{-1}$ విస్తరణలో అన్నీ ధనాత్మక గుర్తులే వుండడము నీవు గమనించగలవు. ద్విపద విస్తరణ (D)లో క్రింది విషయాలను కూడ గమనించి వుంటావు. అవి

1. r సహజ సంఖ్య అయితే (C), (D) లు $|x| < 1$ కు ఒక్కటే

2. ${}^rC_0 = 1, {}^rC_1 = r, {}^rC_2 = \frac{r(r-1)}{2!}$, కావున (D) లోని $1, r, \frac{r(r-1)}{2!}, \ldots\ldots$ లు సంయోగ గుణకాలు లాంటివి. కాని ${}^nC_r$ ను సహజ సంఖ్యలు లేదా పూర్ణసంఖ్యలకు మాత్రమే నిర్వచిస్తారు. కావున ఈ సందర్భంలో ${}^rC_0, {}^rC_1$ లు అర్థరహితాలు.

3. (D) విస్తరణలో అనంత పదాలుంటాయి

4. (D) లో కుడి చేతి వైపు నున్న శ్రేణి మొత్తము $|x| < 1$ అయితే అర్థరహితము.

ఉదాహరణకు, $x = 2$ కు $(1 + 2)^{-1} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + ...$

అంటే $\frac{1}{3} = (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + ...$

అంటే $\frac{1}{3} = -1 - 4 - 16 - ....$, అది అసత్యము.

కావున (D) వాస్తవం కావాలంటే $|x| < 1$ కావాలి.

ఉదాహరణ 8.20 అకరణీయ సంఖ్య r మరియు $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ అయినపుడు $(x + y)^r$ ను విస్తరించుము. తద్వారా $|p| < \frac{3}{5}$ అయినపుడు $(3 + 5p)^{2/5}$ ను విస్తరించుము.

సాధన : $(x+y)^r = x^r \left(1 + \frac{y}{x}\right)^r$ ...(1)

$\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, అని యిచ్చారు, కావున

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^r = 1 + r\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + ...$$

$\therefore$ (1) నుండి

$$(x+y)^r = x^r\left[1 + r\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + ...\right]$$

i.e., $(x+y)^r = x^r + rx^{r-1}y + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}y^3 +$ ..(2)

$|p| < \frac{3}{5}$, అనుకుందాం.

అపుడు $\left|\frac{5p}{3}\right| < 1$, (2) లో $x = 3, y = 5p, r = \frac{2}{5}$ ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$(3+5p)^{2/5} = 3^{2/5} + \frac{2}{5}(3)^{\frac{2}{5}-1}(5p)^1 + \frac{\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}-1\right)}{2!}(3)^{\frac{2}{5}-2}(5p)^2 + ...$$

$$= 3^{2/5} + (3)^{-3/5}(2p) + \frac{\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}(3)^{-\frac{8}{5}}25p^2 + ...$$

$$= 3^{2/5} + 3^{-3/5}(2p) - 3^{-3/5}p^2 + ...$$

పై ఉదాహరణ అకరణీయ ఘాతంతో ద్విపద సిద్ధాంతానికి మరో రూపము. అనగా

అకరణీయ సంఖ్య, r మరియు $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ అయితే

$$(x+y)^r = x^r + r\,x^{r-1}\,y + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}\,y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}\,y^3 + ... \text{(E)}$$

$\left|\frac{y}{x}\right| > 1$ అయినపుడు $(x+y)^r$ ను

$(x+y)^r = y^r\left(1+\frac{x}{y}\right)^r = y^r + r\,y^{r-1}x + ..., \left|\frac{x}{y}\right| < 1$ గా విస్తరించవచ్చు.

$\therefore$ అకరణీయ సంఖ్య rకు $(ax+by)^n$ ను $\left|\frac{by}{ax}\right| < 1$ లేదా $\left|\frac{ax}{by}\right| < 1$ లను బట్టి రెండు రకాలుగా విస్తరించవచ్చు.

ఉదాహరణ 8.21 (i) $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ మరియు (ii) $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ అయినపుడు $(x+y)^{-5}$ ను విస్తరించండి.

సాధన : (i) $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, కావున, (E) నుండి

$$(x+y)^{-5} = x^{-5} + (-5)x^{-5-1}y + \frac{(-5)(-6)}{2!}$$

$$+ x^{-5-2}y^2 + \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}x^{-5-3}y^3 + ...$$

$$= \frac{1}{x^5} - \frac{5y}{x^6} + \frac{15y^2}{x^7} - \frac{35y^3}{x^8} + ...$$

(ii) $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ కావున $(x+y)^{-5}$ ను $(y+x)^{-5}$ రూపంలో వ్రాస్తే (E) నుండి,

$$(y+x)^{-5} = y^{-5} + (-5)\, y^{-5-1}\, x + \frac{(-5)\,(-6)}{2!}\, y^{-5-2}x^2 + \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}\, y^{-5-3}x^3 + ...$$

$$= \frac{1}{y^5} - \frac{5x}{y^6} + \frac{15x^2}{y^7} - \frac{35x^3}{y^8} + ...$$

(i) లో యొక్క పెరిగే ఘాతాలు (ii) లో x యొక్క పెరిగే ఘాతాల్లో విస్తరించాం అని గమనించండి.

అకరణీయ ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతం

x వాస్తవ సంఖ్య, n ఒక ధన పూర్ణాంకం అయినప్పుడు

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + ... + {}^nC_r\, x^r + ... + {}^nC_n\, x^n$$

అని ముందు విభాగంలో నేర్చుకొన్నాం. దీనిని

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\, x + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}\, x^r + ... \quad ... (1)$$

అనే అనంతశ్రేణిగా రాయవచ్చు. n ఒక ధన పూర్ణాంకం అయితే (1) లో కుడిచేతి పక్క $(n+2)$ వ పదం నుంచి అన్ని పదాలలో $(n-n)$ ఒక కారణాంకం కనక కుడిచేతి పక్క $(n+1)$ పదాలు మాత్రమే ఉంటాయి. కాని n ఒక రుణ పూర్ణాంకం లేదా ధనపూర్ణాంకంకాని ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\left(\frac{p}{q}\right)$ అయితే (1) లో కుడి వైపు ఉన్నది ఒక అనంతశ్రేణి, అయినప్పటికీ $|x| < 1$ అయినప్పుడు (1) నిజమవుతుంది.

ఇప్పుడు ఒక అకరణీయ సంఖ్య 'n' కు ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని ఉపపత్తి లేకుండా కింద ఇచ్చాం.

సిద్ధాంతం (అకరణీయ ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతం)

m ఒక ధన పూర్ణాంకంకాని అకరణీయ సంఖ్య, x ఒక వాస్తవ సంఖ్య, $|x|<1$ (అంటే $-1 < x < 1$), అయితే

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{r!}x^r + \ldots$$

$$= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{r!}x^r . \quad \ldots (*)$$

ఇప్పుడు కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో ఈ సిద్ధాంతాన్ని పరిశీలిద్దాం.

రుణ పూర్ణాంక ఘాతం

m ఒక రుణ పూర్ణాంకం అనుకొందాం. $m=-n$ గా రాస్తే (n ఒక ధనపూర్ణాంకం), ఇంకా $|x|<1$ అయితే

1. $$(1+x)^{-n} = 1+\frac{(-n)}{1!}x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

$$= 1-\frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \cdots + (-1)^r\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}x^r + \cdots$$

$$\therefore (1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\, {}^{n+r-1}C_r . x^r$$

2. పైన చెప్పిన (1) లో x స్థానంలో $-x$ రాస్తే

$$(1-x)^{-n} = 1-\frac{n}{1!}(-x) + \frac{n(n+1)}{2!}(-x)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}(-x)^3 + \cdots + (-1)^r\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}(-x)^r + \cdots$$

$$= 1+\frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}x^r + \cdots$$

$$\therefore (1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}{}^{(n+r-1)}C_r . x^r$$

అకరణీయ ఘాతం

m ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య అనుకొందాం. అప్పుడు $m = \frac{p}{q}$ అయ్యేలా p, q ధనపూర్ణాంకాలు $(q \neq 1)$ ఉంటాయి. $|x| < 1$ అయ్యేటట్లు x ఒక వాస్తవ సంఖ్య అనుకొందాం. ఇప్పుడు

3. $$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{\frac{p}{q}}{1!}x + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)(\frac{p}{q}-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\frac{p}{q}(\frac{p}{q}-1)\ldots(\frac{p}{q}-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

$$= 1 + \frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p-q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \cdots + \frac{p(p-q)\ldots(p-(r-1)q)}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \cdots$$

ఇదే విధంగా కింది విస్తరణలు కూడా రాబట్టవచ్చు.

4. $$(1-x)^{\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p-q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 - \frac{p(p-q)(p-2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \cdots + (-1)^r \cdot \frac{p(p-q)\ldots(p-(r-1)q)}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \cdots$$

5. $$(1+x)^{\frac{-p}{q}} = 1 - \frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 - \frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \cdots + (-1)^r \cdot \frac{p(p+q)\ldots(p+(r-1)q)}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \cdots$$

6. $$(1-x)^{\frac{-p}{q}} = 1 + \frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \ldots + \frac{p(p+q)\ldots(p+(r-1)q)}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r + \cdots$$

సమస్యలు

1. సమస్య: కింది అనంతశ్రేణి మొత్తం కనుక్కోండి.

$$1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2.5.8}{3.6.9}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\infty$$

సాధన : దత్త శ్రేణిని, ప్రామాణికరూపంలో కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$S=1+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2.5}{1.2}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2.5.8}{1.2.3}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\cdots\infty$$

కుడివైపు ఉన్న శ్రేణి

$$1+\frac{p}{1!}\cdot\frac{x}{q}+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots\infty$$

రూపంలో ఉంది.

ఇక్కడ $p=2,\ p+q=5,\ \frac{x}{q}=\frac{1}{6}$ లేదా $p=2,\ q=3,\ x=\frac{1}{2}$

కనక అకరణీయ ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతం 8.2.1(6) ప్రకారం

$$S = (1-x)^{\frac{-p}{q}} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}.$$

2. సమస్య: కింది అనంతశ్రేణి మొత్తం కనుక్కోండి.

$$\frac{3.5}{5.10}+\frac{3.5.7}{5.10.15}+\frac{3.5.7.9}{5.10.15.20}+\cdots\infty.$$

సాధన : $S=\frac{3.5}{5.10}+\frac{3.5.7}{5.10.15}+\frac{3.5.7.9}{5.10.15.20}+\cdots\infty$ గా తీసుకొందాం.

ఇరుపక్కలా $1+\frac{3}{5}$ కలిపితే,

$$1+\frac{3}{5}+S = 1+\frac{3}{5}+\frac{3.5}{5.10}+\frac{3.5.7}{5.10.15}+\cdots\infty$$

$$= 1+\frac{3}{1!}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3.5.7}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots\infty$$

$$= 1+\frac{p}{1!}\cdot\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots$$

$$\left(p=3,\ \ p+q=5,\ \ \frac{x}{q}=\frac{1}{5}\right)$$

$$= (1-x)^{\frac{-p}{q}},\ \text{ఇక్కడ}\ \ p=3,\ \ q=2,\ \ x=\frac{2}{5}$$

$$= \left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow\ S = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}-\frac{8}{5}.$$

3. సమస్య: $x=\frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+\cdots\infty$ అయితే $3x^2+6x$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $x=\frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+\cdots\infty$

$$\Rightarrow\ 1+x=1+\frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+\cdots\infty$$

$$=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots\infty$$

=

$$1+\frac{p}{1!}\cdot\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots\infty$$

$$\left(p=1,\ \ p+q=3,\ \ \frac{x}{q}=\frac{1}{5}\ \ \text{తీసుకొంటే}\right)$$

$$= (1-x)^{\frac{-p}{q}},\ \ \text{ఇక్కడ}\ \ p=1,\ q=2,\ x=\frac{2}{5}$$

$$= \left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow (1+x)^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow x^2+2x+1 = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x^2+6x+3 = 5$$

కనక $3x^2 + 6x = 2$.

అభ్యాసం 8.6

1. క్రింది వాటిని విస్తరింపుము.

   (a) $(1-p)^{-3}, \ |p| < 1$ (b) $(1+3x)^{4/3}, |x| < \frac{1}{3}$

   (c) $(1-5z)^{6/5}, \ |z| < \frac{1}{5}$

2. క్రింది వాటిని విస్తరింపుము.

   (a) $(27-6x)^{\frac{-2}{3}}, \left|\frac{2x}{9}\right| < 1$ (b) $(2a+x)^{-3}, \left|\frac{x}{2a}\right| < 1$

   (c) $(2+3y)^{1/7}, \ |y| < \frac{2}{3}$

3. (a) $(x + 2y)^{-5}$ యొక్క ద్విపద విస్తరణలో

   (i) x యొక్క ఘాతాలు (powers) ఆరోహణ క్రమంలో

   (ii) y యొక్క ఘాతాలు (powers) అవరోహణ క్రమంలో వుండటానికి నియమాన్ని రాబట్టి, రెండు సందర్భాలలోను విస్తరించుము.

   (b) ఏ y విలువలకు $(3 + 6y)^{-4/3}$ ను విస్తరించవచ్చునో కనుగొని, విస్తరించుము.

8.6 ద్విపద సిద్ధాంతం ఉపయోగించి ఉజ్జాయింపులు

కొన్ని ద్విపద విస్తరణలలో అనంత పదాలుంటాయని మీకు తెలుసు. అలాంటి సందర్భాలలో ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొనడానికి మొదటి కొన్ని పదాలను తీసుకొనిన చాలు. ఇలాంటి ఉదాహరణలను కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 8.22: 1.03 యొక్క ఘనమూలాన్ని మూడు దశాంశ స్థానాలకు సవరించి కనుక్కోండి.

సాధన $(1.03)^{1/3} = (1 + 0.03)^{1/3}$

$10.031 < 1$ కావున (E) నుండి

$$(1+0.03)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}(0.03) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(0.03)^2 + \ldots\ldots \qquad \text{(i)}$$

మనం కనుగొనవలసిన విలువ మూడు దశాంశ స్థానాలకు సవరించవలసి వున్నది. నాలుగవ దశాంశ స్థానములో నున్న శూన్యేతర అంకె, మూడవ దశాంశ స్థానాన్ని ప్రభావితము చేయగలదు కావున, పదాలను ఉపేక్షించే క్రమంలో విస్తరణలోని మొదటి, రెండు, మూడు లేదా నాలుగు దశాంశ స్థానాల వరకు వున్న శూన్యేంతర అంకెలను పరిగణలోకి తీసుకోవాలి.

$\therefore$ (i) లోని మొదటి మూడు పదాల మొత్తాన్ని తీసుకొని, మిగిలిన వాటిని ఉపేక్షిస్తే,

$$(1.03)^{1/3} \approx 1 + 0.01 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(0.0009)$$

$$= 1 + 0.01 - 0.0001$$

≈ 1.010 (మూడు దశాంశ స్థానాలకు సవరించి) ఇక్కడ మూడువ దశాంశ స్థానానికి తరువాత అంకె 5 కన్న ఎక్కువ కాబట్టి, మనం మూడవ దశాంశ స్థానానికి ఒకటి కలిపాము.

$\therefore 1.03$ యొక్క ఘన మూలాన్ని మూడు దశాంశ స్థానాలకు సవరించిన విలువ 1.010

ఉదాహరణ 8.23: y^2 ఆపై y ఘాతాలను ఉపేక్షించేంతగా y స్వల్పమైతే

$(1 - 2y)^{2/3}(4 + 5y)^{3/2}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : y స్వల్పము కావున $|y| < 1/2$ అనుకుందాం.

ద్విపద సిద్ధాంతము నుండి

$$(1-2y)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}(-2y) + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}(-2y)^2 + \ldots..$$

మరియు

$$(4+5y)^{\frac{-3}{2}} = 4^{\frac{-3}{2}} + \left(-\frac{3}{2}\right)(4)^{\frac{-3}{2}-1}(5y)$$

$$+ \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(4)^{\frac{-3}{2}-2}.(5y)^2 + \ldots$$

y^2 ఆపై ఘాతాలను ఉపేక్షించగా

$$(1-2y)^{\frac{2}{3}} \approx 1 + \frac{2}{3}(-2y) = 1 - \frac{4}{y}y,$$

$$(4+5y)^{\frac{-3}{2}} \approx (4)^{\frac{-3}{2}} - \frac{3}{2}(4)^{\frac{-5}{2}}(5y)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{15}{64}y$$

కావున యిచ్చిన లబ్ధము ఉజ్జాయింపుగా

$$\left(1-\frac{4}{3}y\right)\left(\frac{1}{8}-\frac{15}{64}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{6}y - \frac{15}{64}y + \frac{5}{16}y^2 \ldots.$$

$$\approx \frac{1}{8} - \frac{77}{192}y, \quad (\text{మళ్లీ } y^2 \text{ ఆ పై ఘాతాలను విస్మరించగా})$$

$$(1-2y)^{\frac{2}{3}}(4+5y)^{\frac{-3}{2}} \approx \frac{1}{8} - \frac{77}{192}y, \quad (y^2, \text{ ఆ పై ఘాతాలను విస్మరించగా}).$$

అభ్యాసం 8.7

1. క్రింది వాటి విలువలను మూడు దశాంశ స్థానాలకు సవరించి కనుగొనుము.

(a) $(1.02)^2$ (b) $(1.01)^{-3}$ (c) $(0.97)^4$

(d) $\sqrt[4]{7.60}$ [Hint : $(7.60)^{1/3} = (8-0.4)^{1/3}$]

(e) $\sqrt[4]{82}$ [Hint : $(82)^{\frac{1}{4}} = (81+1)^{\frac{1}{4}} = 3\left(1+\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$]

(f) $(24)^{\frac{-1}{2}}$ [Hint : $(24)^{\frac{-1}{2}} = (25-1)^{\frac{-1}{2}}$]

2. z^2 , ఆ పై ఘాతాలను ఉపేక్షించి క్రింది విలువలను కనుగొనుము.

(a) $(3 + 2z)^{-5}$

(b) $(1 + 3z)^{\frac{2}{3}}(1-5z)^{-2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{1+z}+(1-z)^{2/3}}{(1+z)+\sqrt{1+z}}$

[Hint : LHS $\dfrac{1+\frac{1}{2}z+1-\frac{2}{3}z}{(1+z)+(1+\frac{1}{2}z)}$]

(d) $\dfrac{(1-z)^{\frac{1}{3}}+(11-5z)^2}{\sqrt[4]{16-z}}$

8.7 పాక్షిక భిన్నాలు

లక్ష్యాలు

- ఒక భిన్నాన్ని క్రమ 'పాక్షిక భిన్నాలు'గా విడగొట్టుట
- పాక్షిక భిన్నాల అవకలన సమీకరణాల ప్రత్యేక సమాకలనిని కనుక్కోవడం తెలుసుకుంటాము.
- అనంత శ్రేణులను విస్తరించడంలోను ఉపయోగపడతాయి.

పూర్వాకాంక్షితాలు

ఒక భిన్నాన్ని క్రమ "పాక్షిక భిన్నాలు" గా విడగొట్టవచ్చు. ఈ విడగొట్టడం భిన్నంలోని హారం మూలాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

పాక్షిక భిన్నాలు అవకలన సమీకరణాల ప్రత్యేక సమాకలనిని కనుక్కోవడంలోను, సమాకలనులను కనుక్కోవడంలోను, అనంత శ్రేణులను విస్తరించడంలోను ఉపయోగపడతాయి.

నిర్వచనం (క్రమ, అపక్రమ భిన్నాలు)

$f(x)$ తరగతి $g(x)$ తరగతి కంటే తక్కువ అయితే $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ను క్రమ భిన్నమనీ, లేక పోతే అపక్రమ భిన్నమనీ అంటాం.

8.7.1 నిర్వచనం (పాక్షిక భిన్నం)

ఒక క్రమ భిన్నాన్ని, రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ క్రమ భిన్నాల మొత్తంగా రాయగలిగితే, అప్పుడు అలాంటి ప్రతీ క్రమ భిన్నాన్ని దత్త భిన్నానికి ఒక పాక్షిక భిన్నం అంటాం. పాక్షిక భిన్నాలలోని హారాలలోని పదాలు ఇక విడగొట్టలేని బహుపదుల ఘాతాలుగా ఉంటాయి.

8.8 $g(x)$ కు పునరావృత్తం కాని ఏక ఘాత కారణాంకాలున్నప్పుడు $\frac{f(x)}{g(x)}$ కు పాక్షిక భిన్నాలు

8.8.1 నియమం I

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ఒక క్రమ భిన్నం అనుకొందాం. $g(x)$ కు $(ax+b), a \neq 0$ ఒక పునరావృతం కాని ఏక ఘాత కారణాంకం అయితే $(ax+b)$ కారణాంకానికి అనుగుణంగా $\frac{A}{ax+b}$ రూపంలో ఒక పాక్షిక భిన్నం ఉంటుంది. ఇక్కడ A అనే శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యను నిర్ణయిస్తాం.

ఉదాహరణ 1

$\frac{3x}{(x+3)(x-6)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

సాధన :

$$\frac{3x}{(x+3)(x-6)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-6} \text{ అనుకొందాము.}$$

$$\therefore \frac{3x}{(x+3)(x-6)} = \frac{A(x-6) + B(x+3)}{(x+3)(x-6)}$$

$$\therefore \quad 3x = A(x-6) + B(x+3) \quad .....(1)$$

సమీకరణం (1) లో $x = 6$ రాస్తే

$$3(6) = B(6+3) \Rightarrow B = \frac{18}{9} = 2$$

సమీకరణం (1) లో $x = -3$ రాస్తే

$$3(-3) = A(-3 - 6)$$

$$A = \frac{-9}{-9} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{3x}{(x+3)(x-6)} = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-6}$$

ఉదాహరణ 2

$\frac{2x-1}{(2x+3)(x-1)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

సాధన : $\frac{2x-1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x-1}$ అనుకొందాము.

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = A(x-1) + B(2x+3) \qquad ...(1)$$

(1) లో $x = 1$ రాస్తే

$$2(1) - 1 = A(0) + B(2+3)$$

$$\Rightarrow 5B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$

(1) లో $x = \frac{-3}{2}$ రాస్తే

$$2\left(\frac{-3}{2}\right) - 1 = A\left(\frac{-3}{2} - 1\right) + B(0)$$

$$\Rightarrow -4 = A\left(\frac{-5}{2}\right) \Rightarrow A = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{2x-1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{8}{5(2x+3)} + \frac{1}{5(x-1)}$$

నియమము 2

$\frac{f(x)}{g(x)}$ క్రమ భిన్నం అనుకొందాము. $g(x)$ కు పునరావృతం అయ్యేవి, కానివి ఏక ఘాత కారణాంకాలున్నప్పుడు, $g(x)$ కు $(ax + b)^n$ $n \in N$ రూపంలో ఉండే ప్రతి పునరావృత కారణాంకానికి సంబంధించి

$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ అనే n పాక్షిక భిన్నాలుంటాయి. ఇక్కడ $A_1, A_2, ... A_n$ లు వాస్తవ స్థిరాంకాలు.

ఉదాహరణ 3

$\frac{x-1}{(x+1)\,(x+2)^2}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి

సాధన : $\frac{x-1}{(x+1)\,(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$ అనుకొందాము

అప్పుడు $\frac{x-1}{(x+1)\,(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$

$\Rightarrow x - 1 = A(x + 2)^2 + B(x + 1)\,(x + 2) + C(x + 1)$ ..... (1)

(1) లో $x = -2$ రాస్తే

$-2 - 1 = A(0) + B(0) + C(-2 + 1)$

$\Rightarrow -C = -3 \Rightarrow C = 3$

(1) లో $x = -1$ రాస్తే

$-1 - 1 = A(-1 + 2)^2 + B(0) + C(0)$

$\Rightarrow -2 = A \Rightarrow A = -2$

(1) లో x^2 గుణకాలను పోలిస్తే

$A + B = 0$

$\Rightarrow B = -A \Rightarrow B = -(-2) \Rightarrow B = 2$

$\therefore \quad \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^3}$

ఉదాహరణ 4

$\frac{1}{x^3(2+x)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలు మొత్తంగా వ్రాయండి.

సాధన : $\frac{1}{x^3(2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2+x}$ అనుకొందాం.

అపుడు $\frac{1}{x^3(2+x)} = \frac{A(x^2)(2+x) + Bx(2+x) + C(2+x) + Dx^3}{x^3(2+x)}$

$\therefore \quad Ax^2(2+x) + Bx(2+x) + C(2+x) + Dx^3 = 1 \qquad \ldots (1)$

$x = 0$ రాస్తే

$$A(0) + B(0) + C(2) + D(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$x = -2$ రాస్తే

$$A(0) + B(0) + C(0) + D(-2)3 = 1 \Rightarrow D = \frac{-1}{8}$$

x^3 గుణకాలను పోల్చగా

$$A + D = 0 \Rightarrow A = -D = \frac{1}{8}$$

x^2 గుణకాలను పోల్చగా

$$2A + B = 0 \Rightarrow B = -2A = -2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^3(x+2)} = \frac{1}{8x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8(x+2)}$$

ఉదాహరణ 5

$\frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}$ ను పాక్షిక భిన్నాలు మొత్తంగా వ్రాయండి.

సాధన : $\frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}$ అనుకొందాము.

అప్పుడు

$$\therefore \quad \frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3} = \frac{A(x-3)^2+B(x-3)+C}{(x-3)^3}$$

$$\therefore \quad x^2 + 5x + 7 = Ax^2 + (B - 6A)\,x + (9A - 3B + C) \qquad ....(1)$$

సమీకరణం (1) లో గుణకాలను పోలిస్తే

$$A = 1,\ B - 6A = 5,\ 9A - 3B + C = 7$$

ఈ సమీకరణాలను సాధిస్తే,

$$A = 1,\ B = 11,\ C = 31$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3} = \frac{1}{x-3} + \frac{11}{(x-3)^3} + \frac{31}{(x-3)^3}$$

గమనిక : పై సమస్యను కింద విశదీకరించిన పద్ధతిలో కూడా సాధించవచ్చు.

$x - 3 = y$ అనుకొందాము. అప్పుడు $x = y + 3$ అవుతుంది.

$$\therefore \quad \frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3} = \frac{(y+3)^2+5(y+3)+7}{y^3}$$

$$= \frac{(y^2 + 11y + 31}{y^3}$$

$$= \frac{1}{y} + \frac{11}{y^2} + \frac{31}{y^3}$$

$$= \frac{1}{x-3} + \frac{11}{(x-3)^2} + \frac{31}{(x-3)^3}$$

అభ్యాసం 8.8

కింది భిన్నాలను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

1. $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$

2. $\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$

3. $\frac{2x+3}{(x-1)^3}$

4. $\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x-1)^2}$

5. $\frac{1}{x^3(x+a)}$

8.8.1 నియమం III

$\frac{f(x)}{g(x)}$ క్రమ భిన్నం అనుకొందాం. $g(x)$ కు $ax^2 + bx + c$ రూపంలో పునరావృతం కాని అవిభాజ్య కారణాంకం ఉన్నప్పుడు, $g(x)$ కు $ax^2 + bx + c$ రూపంలో ఉన్న ప్రతి కారణాంకానికి సంబందించి $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ వాస్తవ స్థిరరాసులు, రూపంలో ఒక పాక్షిక భిన్నం ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 6

$\frac{5x^2+2}{x^3+x}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

సాధన : $\frac{5x^2+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Ax+C}{x^2+1}$ అనుకొందాము.

అప్పుడు $\frac{5x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)}$

$\Rightarrow 5x^2 + 2 + A(x^2 + 1) + (Bx + C)\,x$ .... (1)

(1) లో $x = 0$ రాస్తే

$5(0) + 2 = A \Rightarrow A = 2$

(1) లో x^2 గుణకాన్ని ఇరువైపుల పోల్చగా

$5 = A + B$

$\Rightarrow 5 = 2 + B \Rightarrow B = 3$

(1) లో x గుణకాన్ని ఇరువైపుల పోల్చగా

$0 = C$

$\therefore \quad \frac{5x^2+2}{x^3+x} = \frac{2}{x} + \frac{3x}{x^2+1}$

ఉదాహరణ 7

$\frac{3x-1}{(1-x+x^2)\,(x+2)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

సాధన: $\frac{3x-1}{(1-x+x^2)\,(x+2)} = \frac{A}{2+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2}$ అనుకొందాము.

అప్పుడు

$$\frac{3x-1}{(1-x+x^2)\,(x+2)} = \frac{A(1-x+x^2) + (Bx+C)(2+x)}{(1-x+x^2)\,(x+2)}$$

$\Rightarrow 3x - 1 = A(1-x + x^2) + (Bx + C)(2 + x)$ ...(1)

(1) లో $x = -2$ రాస్తే

$3(-2) - 1 = A(1 + 2 + 4) + [B(-2) + C]\,(0)$

$\Rightarrow \quad -7 = 7A \quad \Rightarrow A = -1$

(1) లో x^2 గుణకాలను పోల్చగా

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -(-1) = 1$

(1) లో $x = 0$ వ్రాయగా

$-1 = A + 2C$

$\therefore \quad 2C = -1 - A = -1 - (-1) = 0$

$\Rightarrow C = 0$

$\therefore \quad \frac{3x-1}{(1-x+x^2)\,(2+x)} = \frac{-1}{2+x} + \frac{x}{1-x+x^2}$

అభ్యాసం 8.9

I. కింది భిన్నాలను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

1. $\frac{x^2+1}{(x^2+4)\,(x-2)}$

2. $\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

3. $\frac{x^2-3}{(x+2)\,(x^2+1)}$

Partial Fractions

- Resolve $\frac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$ into partial fractions

Solution: Let $\frac{5a+b}{(2+x)(1-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{1-x}$

$$5x + 6 - A(1 - x) + B(2 + x)$$

$x = 1 \Rightarrow 5(1) + 6 = B(2 + 1)$

$$11 = 3B \Rightarrow B = \frac{11}{3}$$

$x = -2 \Rightarrow 5(-2) + 6 = A(-1 - (-2)) + 0$

$$-4 = 3A \Rightarrow A = \frac{-4}{3}$$

$$\therefore \frac{5x+6}{(2+x)(1-x)} = \frac{-4/3}{2+x} + \frac{11/3}{1-x}$$

$$= \frac{-4}{3(2+x)} + \frac{11}{3(1-x)}$$

- Resolve $\frac{2x+3}{(x-1)^3}$ into partial fraction.

Solution: $\frac{2x+3}{(x-1)^3}$

Let $x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$

$$= \frac{2(y+1)+3}{y^3} = \frac{2y+5}{y^3}$$

$$= \frac{2}{y^2} + \frac{5}{y^3}$$

$$= \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{5}{(n-1)^3}$$

$$= (x - 1)^2 (x - 1)^3.$$

కీలకపదాలు

- గణితానుగమన సూత్రము

  సహజ సంఖ్య $n \geq 1$ కు ప్రవచనము $P(n)$ కు

  (i) $P(1)$ నిజము మరియు

  (ii) $P(k)$ వాస్తవమైనపుడు, $P(k+1), k \in \mathbb{N}$ వాస్తవము

- సహజ సంఖ్య n కు

  $(x + y)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, y + {}^nC_2\, x^{n-2}y^2 + .. + {}^nC_{n-1}\, xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n..$

  దీనిని ధన పూర్ణాంక (లేదా సహజ సంఖ్య) ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతమంటారు.

- మరో రూపంలో ధన పూర్ణాంక ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతము

  $(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, a + {}^nC_2\, a^2 + ... + {}^nC_{n-1}\, a^{n-1} + {}^nC_n\, a^n.$

- $(x + y)^n$ విస్తరణలో సాధారణ పదము ${}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r$, $(1 + a)^n$ విస్తరణలో సాధారణ పదము ${}^nC_r\, a^r$, (n సహజ సంఖ్య, $0 \leq r \leq n$).

- $(x + y)^n$ విస్తరణలో నిఘాతము సహజ సంఖ్య n సరిసంఖ్య అయితే ఒక మధ్య పదము, n బేసి, సంఖ్య అయితే రెండు మధ్య పదాలు వుంటాయి.

- సాధారణ పదాన్ని కనుగొనే సూత్రము ద్వారా మధ్య పదము (పదాల)ను, కావాల్సిన యితర పదాలను కనుగొనవచ్చును.
- అకరణీయ సంఖ్య $r, |x| < 1$ కు

$$(1+x)^n = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + ...$$

విస్తరణను అకరణీయ ఘాతానికి ద్విపద సిద్ధాంతము అంటారు. r పూర్ణ సంఖ్య అయితే ఈ విస్తరణలో అనంత పదాలుంటాయి.

- $(x+y)^n = rx + r x^{r-1} y + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}y^3 + ...$

r అకరణీయ సంఖ్య మరియు $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ ఇది ద్విపద సిద్ధాంతానికి మరో రూపము.

- అకరణీయ సంఖ్య r కు, $(ax+by)^n$ ను $\left|\frac{by}{ax}\right| < 1$ లేదా $\left|\frac{ax}{by}\right| < 1$ ను బట్టి రెండు రకాలుగా విస్తరించవచ్చు.+ అకరణీయం భిన్నం $\frac{f(x)}{g(x)}$ కు $g(x)$ యొక్క కారణాంకాలకు అనుగుణంగా వ్యవస్థితమయ్యే పాక్షిక భిన్నాల వివిధ రూపాలను కింద పట్టికలో ఇచ్చాం.

క్రమసంఖ్య	$g(x)$ కారణాంకం	$\frac{f(x)}{g(x)}$ యొక్క పాక్షిక భిన్నాల రూపం
1.	$ax + b$	$\frac{A}{ax+b}$
2.	$(ax+b)^n, a \neq 0$ $n(>1) \in N$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ...+ \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
3.	$a x^2 + bx + c, a \neq 0$ అవిభాజ్యం	$\frac{A_x + B}{ax^2+bx+c}$
4.	$(ax^2+bx+c)^n, a \neq 0$	$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + ... + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. గణితానుగమన సూత్రమునుపయోగించి క్రింది ప్రవచనాలను నిరూపించుము.

   (a) n మూలకాల సమితికి ఉపసమితుల సంఖ్య 2^n.

   (b) ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్యలు a, b ల $(a + b)^n > a^n + b^n, \forall\ n \geq 2$

   (c) $r > 1$, వాస్తవ సంఖ్య a కు

   $$a + ar + ar^2 + ... + a\,r^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

   (d) $\forall\ x \in \mathbb{N}$ కు, $(x^{2n}-1)$ ను $(x + 1)$ భాగిస్తుంది.

   (e) $10^{2n-1} + 1$, 11 యొక్క గుణిజము.

   [Hint : $10^{2k+1} = 10^2\,[(10^{2k-1} + 1) - 99]$

   (f) $(4.10^{2n} + 9.10^{2n-1} + 5)$, 99 యొక్క గుణిజము.

   (g) . n బేసిసంఖ్య అయితే, $n(n^2 - 1)$, 24 యొక్క గుణిజము.

   [n బేసిసంఖ్య కావున, $P(2k+1)$ నిజమనుకొని, తర్వాతి బేసి సంఖ్య $2k + 3$ కి $P(2k+3)$ నిజమని నిరూపినిచాలి].

   (h) . $x > 0$ కు $(1 + x)^n > 1 + nx$

   (i) . f, g లు x లో వాస్తవ బహుపదులై, $f + g \neq 0$ అయితే $f^{2n-1} + g^{2n-1})$ ను $f + g$ భాగిస్తుంది. $n \in \mathbb{N}$

2. క్రింది వాటిని విస్తరింపుము

   (a) $(3x + 2y)^5$ (b) $(P - 2)^8$ (c) $(1 - x)^8$

   (d) $\left(1 + \frac{2}{3}\,x\right)^6$ (e) $\left(x + \frac{1}{2x}\,x\right)^6$ (f) $(3x - y^2)$

(g) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{2}{x}\right)^4$ (h) $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^7$ (i) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^5$

(j) $\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)^4$

3. క్రింది విస్తరణలలో $(r+1)$ వ పదం వ్రాయండి

(a) $(3x-y^2)^n$ (b) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^n$

4. క్రింది విస్తరణలలో నిర్ధేశిత పదాలను కనుక్కోండి.

(a) $(1-2x)^7$; 3వ పదము (ఇక్కడ $r=2$)

(b) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$; మధ్య పదము (పదాలు)

(c) $(3x-4y)^6$; 4వ పదము (d) $\left(y^2-\frac{1}{y}\right)^{11}$; మధ్య పదము

(e) $(x^3-y^3)^{12}$; 4వ పదము (f) $(1-3x^2)^{10}$; మధ్య పదము

(g) $(-3x-4y)^6$; 5వ పదము (h) $(x-2y)^6$; r పదము

5. x యొక్క ఆరోహణ ఘాతాలలో $(1+x)^n$ విస్తరణలో r వ పదాన్ని T_r తో సూచిస్తే,

$r(r+1)\,T_{r+2}=(n-r+1)\,(n-r)\,x^2\,T_r$ అని నిరూపించండి.

[Hint : $T_r={}^nC_{r-1}\,.\,x^{r-1}$ మరియు $T_{r+2}={}^nC_{r+1}\,x^{r+1}$]

6. x యొక్క ఆరోహణ ఘాతాలలో $(1+2x)^{10}$ విస్తరణలో x^{r-1} యొక్క గుణకము k_r మరియు $k_{r+2}=4k_r$ అయితే r విలువ కనుక్కోండి.

[Hint : $k_r={}^{10}C_{r-1}\,2^{r-1}$ మరియు $k_{r+2}={}^{10}C_{r+1}\,2^{r+1}$]

7. $(1+a)^n$ విస్తరణలో 5, 6, 7 పదాలు A.P లో వుండే $(n\in\mathbb{N})$, n విలువ కనుక్కోండి.

[Hint : ${}^nC_5-{}^nC_4={}^nC_6-{}^nC_5$]

8. $(1+y+y^2)^4$ ను విస్తరించండి.

[Hint : $(1+y+y^2)^4=\{(1+y)+y^2]^4$

9. క్రింది వాటిని విస్తరించండి.

(a) $(1-x)^{-4},\ |x|<1$ (b) $\frac{1}{(1+x)^3},\ |x|<1$

(c) $(3-z)^{-4},\ |z|<3$ (d) $\frac{1}{(1+3x)^{3/2}},\ |x|<\frac{1}{3}$

10. x, y ఆరోహణ ఘాతాలలో $(x-2y)^{-3}$ విస్తరణ ఎపుడు సాధ్యమవుతుందో తెలిపి, విస్తరించుము.

11. x ఆరోహణ ఘాతాలలో $(x-3y)^{-1/2}$ విస్తరణ ఎపుడు సాధ్యమవుతుందో తెలిపి, విస్తరించుము.

12. క్రింది విస్తరణలలో y కి ఎపుడు సాధ్యమవుతాయో తెలిపి, వాటిని విస్తరించండి.

(a) $\frac{1}{(2+y)^4}$ (b) $(3-y)^{-2/3}$

13. విస్తరణలో కావలసినన్ని పదాలనుపయోగించి క్రింది వాటి యొక్క విలువలను మూడు దశాంశస్థానాలకు సవరించి కనుక్కోండి.

(a) $(0.99)^{-4}$ (b) $(1.03)^{-3}$

(c) $\sqrt[3]{26}$ [Hint : $(26)^{\frac{1}{3}} = (27-1)^{\frac{1}{3}}$]

(d) $\sqrt[7]{13}$ [Hint : $(127)^{\frac{1}{7}} = (128-1)^{\frac{1}{7}}$]

(e) $\sqrt[5]{35}$ [Hint : $(35)^{\frac{1}{5}} = \{32+3)^{\frac{1}{5}}$]

(f) $\sqrt[5]{31}$ [Hint : $(31)^{\frac{1}{5}} = \{32-1)^{\frac{1}{5}}$]

(g) $\sqrt[3]{1001}$ [Hint : $(1001)^{\frac{1}{3}} = (1000+1)^{\frac{1}{3}}$]

14. y^2 ఆపై ఘాతాలను ఉపేక్షించేంతగా y స్వల్పమయితే క్రింది వాటి విలువలు కనుక్కోండి.

(a) $(1+5y)^{-2}(1+2y)^{\frac{-3}{2}}$ (b) $\frac{(1-4y)^{-3}(1-2y^2)^{\frac{1}{2}}}{(4-y)^{3/2}}$

(c) $\frac{\sqrt{1-3y}+(1-y)^{5/3}}{\sqrt{4-y}}$

15. ఒక విద్యార్థి $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + ... + x^n$ లో $n = 0$ ను ప్రతిక్షేపించి,

$(1+x)^0 = 1 + 0 + 0 + ... + x^0$. i.e $1 = 1 + 1$ అని రాబట్టితే, అతని సాధనలోని దోషాన్ని కనుగొనగలవా?

16. $(1-4y)^2 (1-2y)^{1/2}$ విస్తరణ సాధ్యమనుకొని, y^3 గుణకాన్ని కనుగొనుము.

17. $(1+x+x^2+x^3+...)\ (1-x+x^2-x^3+...) = 1+x^2+x^4+x^6+.....$ అని నిరూపించుము.

[Hint : LHS $= (1-x)^{-1}\ (1+x)^{-1} = (1-x^2)^{-1}$].

జవాబులు

అభ్యాసం 8.1

1. (b), (e), (f) లు ప్రవచనాలు (a)లో n యొక్క విలువలను నిర్దేశించలేదు కావున అది నిజమో కాదో నిర్ధారించలేము కనుక అది ప్రవచనము కాదు. (c) గణిత ప్రవచనము కాదు (d) ప్రశ్నార్థకము కావున ప్రవచనము కాదు. (f) సార్వత్రిక వాస్తవికత అని గమనింపుము.

2. P(1) : $1^3 + 5.1$ కు 6 ఒక కారణాంకము.

   P(2) : $2^3 + 5.2$ కు 6 ఒక కారణాంకము.

   P(k) : $k^3 + 5k$ కు 6 ఒక కారణాంకము.

   P($k+1$) : $(k+1)^3 + 5(k+1)$ కు 6 ఒక కారణాంకము.

3. (a) P(1) : $2 \geq 2$

   P(k) : $2^k \geq k+1$

   P($k+1$) : $2^{k+1} \geq k+2$

(b) P(1) : $1 + x \geq 1 + x$

P(k) : $(1 + x)^k \geq 1 + kx$

P($k + 1$) : $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

(c) P(1) : 6, 6 చే భాగింపబడుతుంది.

P(k) : $k(k + 1)(k + 2)$ 6 చే భాగింపబడుతుంది.

P($k + 1$): $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ 6 చే భాగింపబడుతుంది.

(d) P(1) : $(x - y)$ ను $(x - y)$ భాగిస్తుంది

P(k) : $(x^k - y^k)$ ను $(x - y)$ భాగిస్తుంది

P($k + 1$): $(x^{k+1} - y^{k+1})$ ను $(x - y)$ భాగిస్తుంది.

(e) P(1) : $ab = ab$

$P(k)$: $(ab)^k = a^k b^k$

P($k + 1$) : $(ab)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$

(f) P(1) : $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15}$ సహజసంఖ్య

P(k) : $\frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15}$ సహజసంఖ్య

P($k + 1$): $\frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15}$ సహజసంఖ్య.

4. (a) P(1) : $\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$

P(2) : $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{2}{3}$

$$P(k): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+....+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

$$P(k+1): \frac{1}{1\times 2}+....+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

(b) $P(1): 1 = 1^2$

$P(2): 1 + 3 = 2^2$

$P(k): 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

$P(k + 1): 1 + 3 + 5 +.... + (2k - 1) + [2(k + 1)-1] = (k + 1)^2$

(c) $P(1): 1 \times 2 < 1(2)^2$

$P(2): (1\times2) + (2\times3) < 2(3)^2$

$P(k): (1\times2) + (2\times3) + ... + k(k + 1) < k(k + 1)^2$

$P(k + 1): (1\times2) + (2\times3) +.... + (k + 1)(k + 2) < (k + 1)(k + 2)^2$

(d) $P(1): \frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$

$P(2): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}=\frac{2}{5}$

$P(k): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+.....+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

$P(k+1): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+.....+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$

అభ్యాసం 8.3

1. (a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

(b) $x^{12} - 18x^{10}y + 135x^8y^2 - 540x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$

(c) $256a^4 - 1280a^3b + 2400a^2b^2 - 2000ab^3 + 625b^4$

(d) $a^n x^n + na^{n-1}x^{n-1}by + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^{n-2}b^2y^2 + ... + b^n y^n$

2. (a) $1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$

(b) $1 + \frac{7x}{y} + \frac{21x^2}{y^2} + \frac{35x^3}{y^3} + \frac{35x^4}{y^4} + \frac{21x^5}{y^5} + \frac{7x^6}{y^6} + \frac{x^7}{y^7}$

(c) $1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$

3. (a) $\frac{a^5}{243} + \frac{5a^4b}{162} + \frac{5a^3b^2}{54} + \frac{5a^2b^3}{36} + \frac{5ab^4}{48} + \frac{b^5}{32}$

(b) $2187x^7 - 25515x^4 + 127575x -$

$$\frac{354375}{x^2} + \frac{590625}{x^5} - \frac{590625}{x^8} + \frac{328125}{x^{11}} - \frac{78125}{x^{14}}$$

(c) $x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

(d) $\frac{x^5}{y^5} + 5\frac{x^3}{y^3} + 10\frac{x}{y} + 10\frac{y}{x} + 5\frac{y^3}{x^3} + \frac{y^5}{x^5}$

4. రూ. 4.96 లక్షలు

5. 162360

6. (i) 104060401

(ii) 96059601

(iii) 1.061208

(iv) 0.941192

మాడ్యూల్ -II
నిరూపక జ్యామితి
నోట్స్

అభ్యాసం 8.4

1. (a) ${}^{n}C_{r}\,2^{n-r}\,x^{n-r}\,y^{r}$

   (b) ${}^{n}C_{r}\,2^{n-r}\,a^{2n-2r}\,(-1)^{r}$

   (c) ${}^{n}C_{r}\,(-1)^{r}\,a^{r}$

   (d) ${}^{n}C_{r}\,3^{n-r}\,x^{-2r}$

2. (a) $1792y^5$

   (b) $15120x^4$

   (c) $14784a^5b^6$

   (d) 20

   (e) $35x$

అభ్యాసం 9.5

1. (a) $8064\,x^5y^5$

   (b) $\frac{1120}{81}x^{12}$

   (c) 20

   (d) $-252x^{10}$

2. (a) $35a^4b^3,\ 35a^3b^4$

   (b) $4032a^5b^4,\ -2016a^4b^5$

   (c) $\frac{-105}{4}x^4y^3,\ \frac{140}{3}x^3y^4$

(d) $\frac{462}{x^4}, \frac{462}{x^7}$

అభ్యాసం 8.6

1. (a) $1 + 3p + 6p^2 + 10p^3 + ...$

   (b) $1 + 4x + 2x^2 + ...$

   (c) $1 - 6z + 3z^2 + 4z^3 + ...$

2. (a) $\frac{1}{9}+\frac{4x}{243}+\frac{20}{6561}x^2+....$

   (b) $\frac{1}{8a^3}-\frac{3x}{16a^4}+\frac{3x^2}{16a^5}-....$

   (c) $3^{\frac{1}{7}}y^{\frac{1}{7}}\left[1+\frac{2}{21y}-\frac{4}{147y^2}+....\right]$

3. (a) (i) $\left|\frac{x}{2y}\right|<1:\frac{1}{32y^5}-\frac{5x}{64y^6}+\frac{15x^2}{128y^7}-.....$

   (ii) $\left|\frac{2y}{x}\right|<1:\frac{1}{x^5}-\frac{10y}{x^6}+\frac{60y^2}{x^7}-.....$

   (b) $|y|<\frac{1}{2}:3^{-4/3}-8(3)^{-7/3}y+56(3)^{-10/3}y^2+.....$

అభ్యాసం 8.7

1. (a) 1.041

   (b) 0.971

   (c) 1.130

(d) 1.968

(e) 3.009

(f) 0.204

2. (a) $\frac{1}{243}-\frac{10z}{729}$

(b) $1 + 12z$

(c) $1-\frac{5z}{6}$

(d) $61-\frac{10409}{192}z$

అభ్యాసం 8.8

1. $\frac{11}{3(1-x)}-\frac{4}{3(2+x)}$

2. $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{1}{x+1}$

3. $\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{(x-1)^3}$

4. $\frac{3}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}$

5. $\frac{1}{a^3x}-\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{ax^3}-\frac{1}{a^3(x+a)}$

అభ్యాసం 8.9

1. $\frac{3x+6}{8(x^2+4)}+\frac{5}{8(x-2)}$

2. $\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}$

3. $\frac{1}{5(x+2)} + \frac{4x-8}{5(x^2+1)}$

సాధనా అభ్యాసం

2. (a) $243x^5 + 810x^4y + 1080x^3y^2 + 720x^2y^3 + 240xy^4 + 32y^5$

(b) $p^8 - 8p^7q + 28p^6q^2 - 56p^5q^3 + 70p^4q^4 - 56p^3q^5 + 28p^2q^6 - 8pq^7 + q^8$

(c) $1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$

(d) $1+4x+\frac{20}{3}x^2+\frac{160}{27}x^3+\frac{80}{27}x^4+\frac{64}{81}x^5+\frac{64}{729}x^6$

(e) $x^6+3x^4+\frac{15}{4}x^2+\frac{5}{2}+\frac{15}{16x^2}+\frac{3}{16x^4}+\frac{1}{64x^6}$

(f) $243x^5 - 405x^4y + 270x^3y^4 - 90x^2y^6 + 15xy^8 - y^{10}$

(g) $\frac{x^8}{256}+\frac{x^5}{8}+\frac{3}{2}x^2+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^4}$

(h) $x^{14}-7x^9+21x^4-\frac{35}{x}+\frac{35}{x^6}-\frac{21}{x^{11}}+\frac{7}{x^{16}}-\frac{1}{x^{21}}$

(i) $x^{14}-7x^9+21x^4-\frac{35}{x}+\frac{35}{x^6}-\frac{21}{x^{11}}+\frac{7}{x^{16}}+\frac{1}{x^{21}}$

(j) $\frac{1}{x^8}-\frac{4}{x^3}+6x^2-4x^7+x^{12}$

3. (a) $(-1)^r\ {}^nC_r 3^{n-r}\ x^{n-r}\ y^{2r}$ (b) ${}^nC_r\ x^{3n-4r}$

4. (a) $84x^2$ (b) $\frac{5}{2}$

(c) $-34560\ x^3y^3$

(d) $-462y^7, 462\,y^4$

(e) $-220x^{27}y^9$

(f) $-61236x^{10}$

(g) $34560x^2y^4$

(h) $(-2)^{r-1}\ {}^6C_{r-1}\,x^{7-r}\,y^{r-1}$

(i) $-2^{r-2}\ {}^8C_{r-2}\,x^{r-2}$

6. 5 7.7, 14

8. $1 + 4y + 10y^2 + 16y^3 + 19y^4 + 16y^5 + 10y^6 + 4y^7 + y^8$

9. (a) $1 + 4x + 10x^2 + ...$

(b) $1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + ...$

(c) $\frac{1}{81}+\frac{4}{243}z+\frac{10}{729}z^2+.....$

(d) $1-\frac{9}{2}x+\frac{135}{8}x^2-\frac{945}{16}x^3+.....$

10. $\left|\frac{2y}{x}\right|<1 : \frac{1}{x^3}+\frac{6y}{x^4}+\frac{24y^2}{x^5}+.....$

11. $\left|\frac{x}{3y}\right|<1 : \frac{1}{\sqrt{-3y}}+\frac{x}{6y\sqrt{-3y}}+\frac{x^2}{24y^2\sqrt{-3y}}+.....$

12. (a) $\frac{1}{16}-\frac{y}{8}+\frac{5y^2}{32}-\frac{5y^3}{32}+...\,|\,y\,|<2$

(b) $\frac{1}{3^{2/3}}+\frac{2x}{9\times 3^{2/3}}+\frac{5x^2}{81\times 3^{2/3}}+.....,\,|\,y\,|<3$

అధ్యాయం

9

కార్టీసియన్ నిరూపక వ్యవస్థ

అభ్యసన ఫలితాలు

మీరు ఈ పాఠ్యాంశాన్ని చదివిన తర్వాత గ్రహించవలసినవి.

- కార్టీసియన్ వ్యవస్థలో నిరూపకాలు, మూలబిందువు, నిరూపకాక్షాలు, పాదాలను నిర్వచించడం.
- రెండు బిందువుల మధ్యదూరం, విభజన సూత్రంను ఉత్పాదించుట
- బిందువులు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం ABC వైశాల్యం ఉత్పాదించుట
- మూడు బిందువులు ఇచ్చినపుడు సరేఖీయాలేమో సరిచూచుట
- ఒక సరళరేఖ వాలు, నిమ్నత అర్థాలను నిర్వచించడం
- రెండు బిందువులు ఇచ్చినపుడు సరళరేఖ వాలును కనుగొనడం
- రెండు సరళరేఖల వాలులు ఇచ్చినపుడు

  i) సమాంతరంగా

  ii) లంబంగా ఉండడానికి నియమము
- సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలు మీద చేసే అంతర ఖండాలను కనుగొనడం

- కొన్ని జ్యామితీయ నియమాలను పాటిస్తూ సమతలంలో చరించే బిందువుల సమితిని బిందుపథంగా నిర్వచిస్తాము.
- ఇచ్చిన నియమాలతో బిందుపథ సమీకరణంను కనుగొనడం

పూర్వాకాంక్షితాలు

- సంఖ్యావ్యవస్థ
- నిరూపక తలంలో బిందువులను గుర్తించడం
- ఏకఘాత సమీకరణాలను గ్రాఫ్స్ ద్వారా చిత్రీకరించడం
- ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించడం

పరిచయం

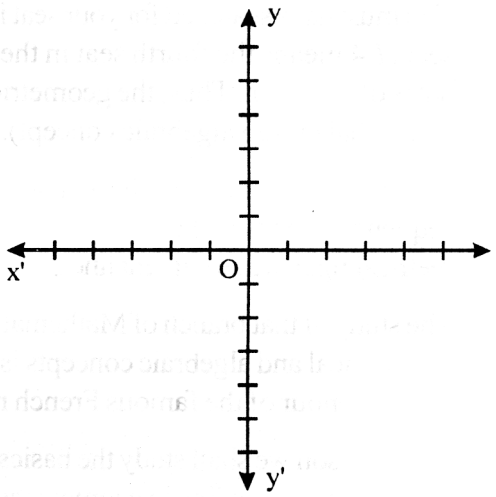
నిరూపక పద్ధతిలో జ్యామితిని అధ్యయనము చేయడం క్రీ.పూ. మూడవ శతాబ్దంలో ప్రారంభమైంది. గ్రీకు గణితశాస్త్రవెత్త మెనాక్మస్ (క్రీ.పూ. సుమారు 380–320) ప్రస్తుత నిరూపక జ్యామితిలోని పద్ధతులను పోలిన పద్ధతులను ఆనాడే ఉపయోగించాడు. అపలోనియస్ (క్రీ.పూ. సుమారు 262–190) ఏక పరిమాణ వైశ్లేషిక జ్యామితిని ప్రతిబింబించే విధానంలో సమస్యలను సాధించాడు. అతను వైశ్లేషిక జ్యామితిని కనుక్కొనే ప్రయత్నంలో దరిదాపులకు చేరుకోగలిగినా, రుణ పరిమాణాలను పరిగణనలోకి తీసుకోకపోవడం వల్ల సఫలీకృతుడు కాలేకపోయాడు. అయినప్పటికి, తరువాత డెకార్టె, ఫెర్మాలు నిరూపక జ్యామితిని ఒక శాస్త్రంగా అభివృద్ధి చేసే ప్రయత్నానికి పూనుకొన్నారు. అబ్రహం డిమోయర్ (1667–1924) నిరూపక జ్యామితి అభివృద్ధికి తమ వంతు దోహదం చేశాడు.

జ్యామితీయ మరియు బీజీయ భావనల మధ్య అంతర సంబందాలను అధ్యయనము చేసే గణిత శాఖను వైశ్లేషిక జ్యామితి లేదా నిరూపక జ్యామితి అంటాం. ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రవేత్త రెనె డెకార్టె గౌరవార్థం దీనికి ఆ పేరు వచ్చింది.

ఈ అధ్యాయములో మనము నిరూపక జ్యామితి ప్రాథమిక భావనల గురించి తెలుసుకుంటాం. మరియు వీటి మొక్క బీజీయ అర్థాలను అధ్యయనము చేస్తాము.

9.1 దీర్ఘచతురస్ర నిరూపకాక్షాలు

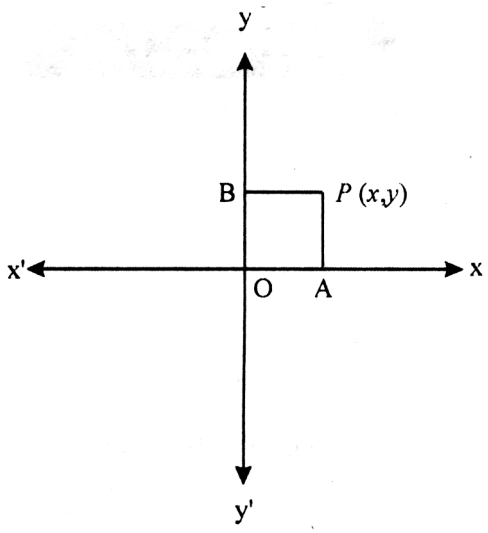
ఒక సమతలంలో రెండు పరస్పర లంబరేఖలు XOX', YOY' తీసుకుందాం. ఈ సరళరేఖలను నిరూపకాక్షాలు అంటాం. వీటి ఖండన బిందువును మూలబిందువు (origin) అంటాం. దీన్ని 'O' తో సూచిస్తాం. క్షితిజ సమాంతర రేఖ XOX' ను X-అక్షము అని, ఊర్ధ్వరేఖ YOY' ను Y-అక్షము అని అంటాం.



పటం 9.1

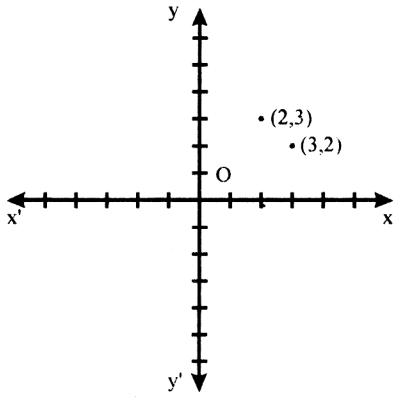
9.1.1 ఒక బిందువు యొక్క కార్టీసియన్ (నిరూపకాలు)

సమతలంలో ఒక బిందువు P ని తీసుకొందాం. Y-అక్షం నుంచి P లంబదూరాన్ని x అని, X-అక్షం నుంచి P లంబదూరాన్ని y అని అనుకుందాం. O నుంచి A కి గల దూరాన్ని OA X–అక్షంలో x నిరూపకమని, O నుండి B కి గల దూరాన్ని OB, y – అక్షంలో y నిరూపకమని అంటాం.



పటం 9.2

ఈ x, y నిరూపకాలను బిందువు యొక్క నిరూపకాలు అంటాము. P బిందువును ఈ వాస్తవ సంఖ్యల x, y నిరూపకాల క్రమయుగ్మంతో అదే వరుసలో $P(x, y)$ తో సూచిస్తాం. సంగ్రహంగా బిందువు $Q(a, b)$ ని రాసినపుడు a, b లు వరుసగా Q యొక్క x, y నిరూపకాలు ఔతాయి.



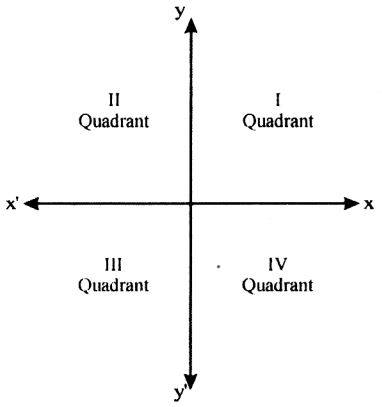
పటం 9.3

పటం 9.3లో చూపిన విధంగా బిందువులు (3, 2), (2, 3)లు విభిన్నము. కావున సమతలంలో (x, y) మరియు (y, x) క్రమయుగ్మాలు వేర్వేరు బిందువుల స్థానాలను $(x \neq y = 0)$ తెలియజేస్తాయి.

9.1.2 పాదాలు

నిరూపకాక్షాలు XOX', YOY' సమతలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజిస్తాయి. వీటిని పాదాలు (Quadrants) అంటాం. పటం (9.4) చూపిన విధంగా ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాల గుర్తులు వేర్వేరు పాదాలలో క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

1. ఒకటో పాదం : $x > 0,\ y > 0$
2. రెండో పాదం : $x < 0,\ y > 0$
3. మూడో పాదం : $x < 0,\ y < 0$
4. నాలుగో పాదం : $x > 0,\ y < 0$

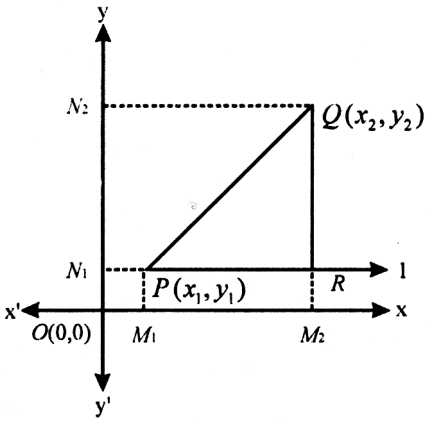


పటం 9.4

9.2 రెండు బిందువుల మధ్యదూరం

సమతలంలో $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ బిందువు మధ్యదూరాన్ని PQ తో సూచిస్తాం.

XX' కు సమాంతరంగా $p(x, y)$ ద్వారా l అనే సరళరేఖను గీయాలి. Q నుండి l మీదకు R వద్ద ఖండించేటట్లు QR అనే లంబంను గీయుము.



పటం 9.5

అపుడు ΔPQR లంబకోణ త్రిభుజం

కావున $PR = M_1M_2$

$= OM_2 - OM_1$

$= x_2 - x_1$

మరియు $QR = QM_2 - RM_2$

$= QM_2 - PM_1$

$= ON_2 - ON_1$

$= y_2 - y_1$

ఇపుడు $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

గమనిక :

1. ఈ నియమం (సూత్రం) అన్ని పాదాలలోని బిందువులకు వర్తిస్తుంది.
2. మూలబిందువు $O(0, 0)$ నుండి బిందువు $P(x, y)$కి గల దూరం $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కొన్ని ఉదాహరణ లెక్కలు ఇవ్వడమైంది.

ఉదాహరణ: 9.1 : క్రింది బిందుయుగ్మాల మధ్యదూరం కనుక్కొందాం.

i) A(14, 3) మరియు B(10, 6) ii) M(−1, 2) మరియు N(0, −6)

సాధన :

i) రెండు బిందువుల మధ్యదూరం = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ఇచ్చట $x_1 = 14, \quad y_1 = 3$

$x_2 = 10, \quad y_2 = 6$

A మరియు B బిందువుల మధ్య దూరం = $\sqrt{(10-14)^2 + (6-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{16+9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

A మరియు B బిందువుల మధ్య దూరం 5 యూనిట్లు.

ii) ఇక్కడ $x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ x_2 = 0,\ y_2 = -6$

M మరియు N ల మధ్యదూరం $= \sqrt{(0-(-1))^2 + (-6-2)^2}$

$= \sqrt{1+(-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

M మరియు N ల మధ్యదూరం $\sqrt{65}$ యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 9.2 P(−1, 1), Q(2, 3) మరియు R(−2, 6) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం ఒక లంబకోణత్రిభుజం అని చూపండి.

$PQ^2 = (2 + 1)^2 + (3 + 1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 6 = 25$

$QR^2 = (-4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$

మరియు $RP^2 = 1^2 + (-7)^2 = 1 + 49 = 50$

$PQ^2 + QR^2 = 25 + 25 = 50 = RP^2$

$\therefore$ కావున ΔPQR ఒక లంబకోణ త్రిభుజం (విపర్యయంగా పైథాగారస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

ఉదాహరణ 9.3 : A(1, 2), B(4, 5) మరియు C(−1, 0) బిందువులు సరళరేఖ మీద ఉన్నాయని చూపండి.

సాధన : ఇక్కడ $AB = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2}$ యూనిట్స్

$= \sqrt{18}$ యూనిట్స్

$AB = 3\sqrt{2}$ యూనిట్స్

$BC = \sqrt{(-1-4)^2+(0-5)^2}$ యూనిట్స్

$= \sqrt{50}$ యూనిట్స్

$= 5\sqrt{2}$ యూనిట్స్

మరియు $AC = \sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2}$ యూనిట్స్

$= \sqrt{4+4}$ యూనిట్స్

$= 2\sqrt{2}$ యూనిట్స్

ఇపుడు $AB + AC = \left(3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)$ యూనిట్స్

$= 5\sqrt{2}$ యూనిట్స్

$= BC$

$AB + AC = BC$ కావున

A, B, C లు సరళరేఖ మీద ఉన్నాయి. వేరొక విధంగా A, B, C లు సరేఖీయాలు.

ఉదాహరణ 9.4 : $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ మరియు $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ బిందువులు సమబాహు త్రిభుజ శీర్షాలని అని చూపి దాని భుజం '$2a$' అని చూపుము.

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులను వరసగా $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ మరియు $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ అనుకొనుము.

$AB = \sqrt{0+(2a)^2} = 2a$ యూనిట్స్

$BC = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(-a)^2}$ యూనిట్స్

$= \sqrt{3a^2+a^2} = 2a$ యూనిట్స్

మరియు $AC = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(a)^2} = 2a$ యూనిట్స్

$\Rightarrow$ AB + BC > AC

BC + AC > AB మరియు

AB + AC > BC మరియు AB = BC = AC = $2a$

$\Rightarrow$ A, B, C లు సమబాహు త్రిభుజశీర్షాలు మరియు దాని భుజం '$2a$'.

అభ్యాసం 9.1

1. క్రింది బిందు క్రమయుగ్మాల మధ్యదూరంను కనుకొనండి.
   (a) (5, 4) మరియు (2, −3) (b) (a, $-a$) మరియు (b, b)
2. క్రింద ఇచ్చిన బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలని చూపుము.
   (a) (4, 4) (3, 5) (−1, −1) (b) (2, 1), (0, 3), (−2, 1)
3. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల సమితి త్రిభుజ శీర్షాల రూపంలో ఉందని చూపుము.
   (a) (3, 3) (−3, 3) మరియు (0, 0)
   (b) (0, a) (a, b) మరియు (0, 0) (ab = 0 అయితే)
4. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల సమితి సరేఖీయాలు అని చూపండి.
   (a) (3, −6) (2, −4) మరియు (−4, 8) (b)(0, 3) (0, −4) మరియు (0, 6)
5. (a) (0, −1) (−2, 3) (6, 7) మరియు (8, 3) బిందువులు దీర్ఘచతురస్ర శీర్షాలని చూపుము.
   (b) (3, −2) (6, 1) (3, 4) మరియు (0, 1) బిందువులు చతురస్ర శీర్షాలని చూపుము.

9.3 విభజనసూత్రం

9.3.1 అంతరంగా విభజిస్తుంది

l అనే సరళరేఖపై $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ రెండు బిందువులు ఈ సరళరేఖపై $R(x, y)$ ఉండే రేఖాఖండం $\overline{PQ}$ ని బిందువు R అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

కనుగొనుట :- బిందువు R యొక్క x నిరూపకం, y నిరూపకం

నిర్మాణము :- P, Q మరియు R ల నుండి వరుసగా XX' అక్షం మీదికి PL, QN మరియు RM లంబాలను గీయుము. మరియు L, M, N లు XX' మీద ఉన్నాయి. RT ⊥ QN మరియు PV ⊥ QN లను కూడా గీయండి.

పద్ధతి :- PQ రేఖాఖండాన్ని R అంతరంగా విభజించే నిష్పత్తి $m_1 : m_2$

$\Rightarrow$ R, PQ మీద మరియు $\frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$

ΔRPS మరియు ΔQRT ల నుండి

$\angle RPS = \angle QRT$ (PS||RT ఏకాంతరకోణాలు)

మరియు $\angle RSP = \angle QTR = 90^0$

$\therefore \Delta RPS \sim \Delta QRT$ (AAA ఒకే విధంగా)

$\Rightarrow \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT} = \frac{PS}{RT}$ (i)

మరియు PS = LM

$= OM - OL$

$= x - x_1.$

RT = MN = ON – OM

$= x_2 - x.$

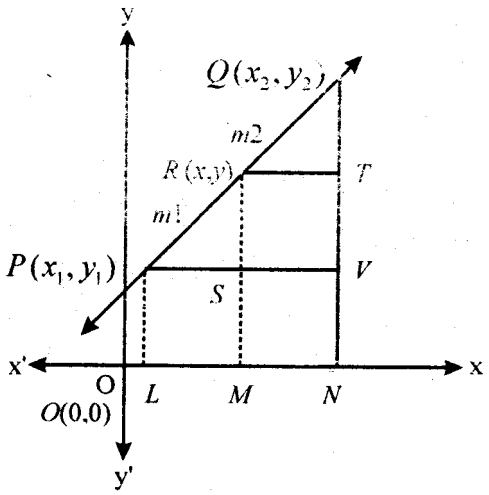
RS = RM – SM

$= y - y_1$

QT = QN – TN

$= y_2 - y.$

(i) నుండి



పటం 12.6

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$

$\Rightarrow \quad m_1(x_2 - x) = m_2(x - x_1)$

మరియు $m_1(y_2 - y) = m_2(y - y_1)$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \text{ మరియు } y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m+n}$$

కావున R నిరూపకాలు $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m+n}\right)$

రేఖఖండపు మధ్యబిందువు నిరూపకాలు

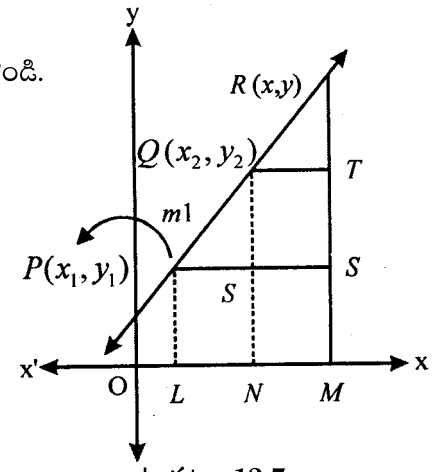
PQ మధ్యబిందువు R అయితే అపుడు

$m_1 = m_2 = 1$ (R, PQ ను 1:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది)

$\therefore$ మధ్యబిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

9.3.2 బాహ్యంగా విభజించుట

R, $\overline{PQ}$ ను బాహ్యంగా విభజిస్తుంది అనుకోండి.



పటం 12.7

కనుగొనుట: R నిరూపకాలు

నిర్మాణము : P, Q మరియు R ల నుండి వరసగా XX' అక్షం మీదికి PL, QN మరియు RM లంబాలను గీయుము. మరియు PS $\perp$ RM, QT $\perp$ RM.

స్పష్టంగా $\Delta RPS \sim \Delta RQT$

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT}$$

లేదా $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 (x - x_2) = m_2(x - x_1)$$

మరియు $m_1 (y - y_2) = m_2(y - y_1)$

వీటి నుండి $x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$ మరియు $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

కావున బాహ్యంగా విభజించే బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

ఇపుడు కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 9.5 : (4, −2) మరియు (−3, 5) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని 2:3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా, బాహ్యంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనుము.

సాధన : $P(x, y)$ అంతరంగా విభజించే బిందువు అనుకొనుము.

$$x = \frac{2(-3)+3(4)}{2+3} = \frac{6}{5} \quad \text{మరియు} \quad y = \frac{2(5)+3(-2)}{2+3} = \frac{4}{5}$$

కావలసిన P నిరూపకాలు (6/5, 4/5)

$Q(x', y')$ బాహ్యంగా విభజించే బిందువు అయితే, అపుడు

$$x' = \frac{2(-3)-3(4)}{2-3} = 18 \quad \text{మరియు} \quad y' = \frac{2(5)-3(-2)}{2-3} = -16$$

కావున బాహ్యంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు (16, –16).

ఉదాహరణ 9.6 : A(1, 4) మరియు B(−3, 16) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని (3, −2) బిందువు ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుగొనుము.

సాధన : A, B బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని P(3, −2) బిందువు $k : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది అనుకొనుము.

$\therefore$ P నిరూపకాలు $\left(\frac{-3k+1}{k+1}, \frac{16k+4}{k+1}\right)$

దత్త P నిరూపకాలు (3, –2)

$$\therefore \frac{-3k+1}{k+1} = 3 \Rightarrow -3k+1 = 3(k+1) = 3k+3$$

$$-3k + 1 = 3k + 3$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$\therefore$ రేఖాఖండాన్ని P బాహ్యంగా విభజించే నిష్పత్తి 1:3

ఉదాహరణ 9.7 : చతుర్భుజం ABCD లో (1, 4), (−2, 1), (0, −1), (3, 2) లు శీర్షాలు A, B, C, D. AB, BC, CD మరియు DA భుజాల మధ్యబిందువులు వరుసగా E, F, G, H అయితే EFGH చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందని చూపుము.

సాధన: AB, BC, CD మరియు DA భుజాల మధ్య బిందువులు వరుసగా E, F, G, H మరియు E, F, G మరియు H మధ్య బిందువులు నిరూపాలు.

$\left(\frac{1-2}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right)\left(\frac{0+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

కావలసిన బిందువులు $E\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $F(-1, 0)$, $G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ మరియు $H(2, 3)$

అదేవిధంగా కర్ణం EG యొక్క మధ్యబిందువు నిరూపకాలు

$$\left[\frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

మరియు కర్ణం FH యొక్క మధ్యబిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

కర్ణాల మధ్యబిందువు నిరూపకాలు సమానము కావున అవి ఒకదానికొకటి సమద్విఖండనం చేసుకుంటాయి. కావున EFGH ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

అభ్యాసం 9.2

1. క్రింది ఇచ్చిన అంత్యబిందువులనుండి రేఖాఖండపు మధ్యబిందువును కనుగొనుము.
   (a) (−2, 3) మరియు (3, 5) (b) (6, 0) మరియు (−2, 10)
2. (−5, −2) మరియు (3, 6) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్నే 3:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనుము.
3. a) ఒక సమాంతర చతుర్భుజ మూడు శీర్షాలు (0, 3), (0, 6) (2, 9) అయితే నాలుగో శీర్షాన్ని కనుగొనుము.

b) ఒక చతురస్ర శీర్షాలు (4, 0) (−4, 0), (0, −4) మరియు (0, 4) అయితే చతురస్ర భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపితే ఏర్పడే చతుర్భుజం కూడా చతురస్రం అవుతుందని చూపుము.

4. (2, 3) మరియు (5, −1) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులను కనుగొనుము.

5. ఒక దీర్ఘచతురస్ర భుజాల మధ్యబిందువులను కలిపితే ఏర్పడే చిత్రము రాంబస్ అనిచూపుము. (సమచతుర్భుజం)

9.4 త్రిభుజశైశాల్యం

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజశైశాల్యంను కనుగొనుట.

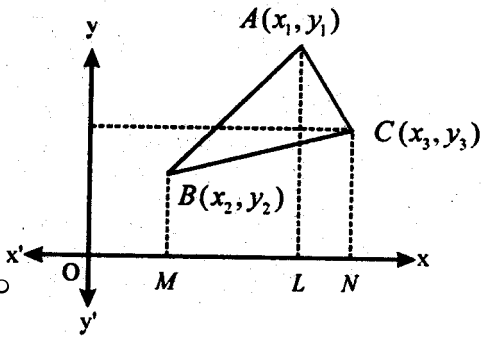
XX' అక్షం మీద AL, BM, CN లంబాలను గీయండి.

ΔABC వైశాల్యం

= సమలంబ చతుర్భుజం BMLA వైశాల్యం

+ సమలంబ చతుర్భుజం ALNC వైశాల్యం

− సమలంబ చతుర్భుజం BMNC వైశాల్యం



పటం 12.8

$$= \frac{1}{2}(BM+AL)ML + \frac{1}{2}(AL+CN)LN - \frac{1}{2}(BM+CN)MN$$

$$= \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2) + \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) - \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_3y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$$

దీనిని మాత్రికా నిర్ధారక రూపంలో క్రింది విధంగా చేయవచ్చు.

$$\Delta ABC \text{ వైశాల్యము } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ఉదాహరణ 9.8 : A(3, 4), B(6, –2) మరియు C(–4, –5) శీర్షాలు గల త్రిభుజవైశాల్యంను కనుగొనుము.

సాధన: ΔABC వైశాల్యము $= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left[3(-2+5)-4(6+4)+1(-30-8)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[9-40-38\right] = -\frac{69}{2}$$

ఎప్పుడు వైశాల్యాన్ని ధనాత్మకముగా తీసుకుంటాం.

$\therefore$ ΔABC వైశాల్యము $= \frac{69}{2}$ చదరపు యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 9.9 : $(1, k), (4, -3)$ మరియు $(-9, 7)$ త్రిభుజశీర్షాలు మరియు త్రిభుజవైశాల్యం 15 చదరపు యూనిట్లు అయితే k విలువను కనుగొనండి.

సాధన: త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left[-3-7-k(4+9)+1(28-27)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-10-13k+1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-9-13k\right]$$

దత్త త్రిభుజవైశాల్యం 15 చ.మీ. కావున

$$\frac{-9-13k}{2} = 15$$

లేదా $-9 - 13k = 30$

$-13k = 39$

లేదా $k = -3.$

అభ్యాసం 9.3

1. క్రింది ఇచ్చిన బిందువులు శీర్షాలుగాగల ప్రతిదాని త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.
   (a) (0, 5) (5, −5) మరియు (0, 0) (b)(2, 3), (−2, −3) మరియు (−2, 3)
   (c) $(a, 0)$ $(0, -a)$ మరియు (0, 0)
2. A(2, −3), B(3, −2) మరియు $C\left(\frac{5}{2}, k\right)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం ABC వైశాల్యం $\frac{3}{2}$ చ॥యూనిట్లు అయితే k విలువ ఎంత?
3. $(5, 4)$ $(5, -4)$ $(-5, 4)$ మరియు $(-5, -4)$ బిందువులు శీర్షాలుగా గల దీర్ఘచతురస్రము వైశాల్యంను కనుగొనుము.
4. (5, −2), (4, −7) (1, 1) మరియు (3, 4)లు శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజ వైశాల్యంను కనుగోనండి.

9.5 మూడు బిందువులు సరేఖీయాలు అవ్వడానికి నియమము

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలైనపుడు, త్రిభుజ ABC వైశాల్యం శూన్యము.

i.e., $$\frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right| = 0$$

i.e., $$x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0$$

దీన్ని క్లుప్తంగా క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

క్రింది ఉదాహరణల సహాయంతో కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 9.10: $A(a, b+c), B(b, c+a)$ మరియు $C(c, a+b)$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపుము.

సాధన : త్రిభుజం ABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

కావున బిందువులు సరేఖీయాలు.

ఉదాహరణ 9.11: $(1, 5), (k, 1), (4, 11)$ బిందువులు k యొక్క ఏ విలువలకు సరేఖీయాలు?

సాధన : దత్త బిందువుల నుండి ఏర్పడిన త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}[-10-5k+20+11k-4]$$

$$= \frac{1}{2}[6k+6] = 3k+3$$

ఇచ్చిన బిందువు సరేఖీయాలు $\Leftrightarrow 3k+3=0 \Rightarrow k=-1$.

కావున $\therefore k=-1$ కు ఇచ్చిన బిందువులు సరేఖీయాలు.

అభ్యాసం 9.4

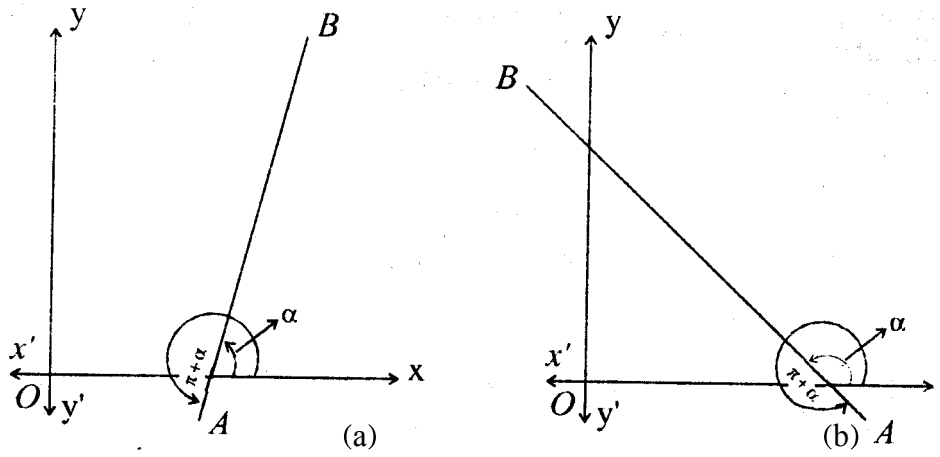
1. (−1, −1) (5, 7) మరియు (8, 11) బిందువులు సరేఖీయాలని చూపుము.
2. (3, 1), (5, 3) మరియు (6, 4) బిందువులు సరేఖీయాలని చూపుము.
3. $(a, 0), (0, b)$ మరియు (1, 1) బిందువులు సరేఖీయాలు అయితే $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ అని రుజువు చేయుము.
4. $(a, b), (a_1, b_1)$ మరియు $(a - a_1, b - b_1)$ బిందువులు సరేఖీయాలు అయితే $a_1 b = ab_1$ అని చూపుము.
5. (5, 7), $(k, 5)$ మరియు (0, 2) బిందువులు k యొక్క ఏ విలువకు సరరేఖీయాలు.
6. $(k, 2–2k)$ $(–k+1, 2k)$ మరియు $(–4–k, 6–2k)$ బిందువులు k యొక్క ఏవిలువలకు సరేఖీయాలు.

9.6 సరళరేఖ వాలు మరియు నిమ్నత

పటం 9.9 ను పరిశీలించినట్లైతే సరళరేఖ AB X- అక్షంతో α కోణం లేదా $\pi+\alpha$ కోణం (అపసవ్యదిశలో చేస్తుంది).

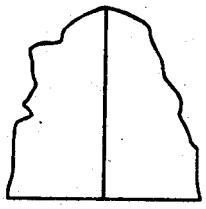
నిమ్నత అనేది ఒక సరళరేఖ X- అక్షం ధనదిశలో చేసే కోణం విలువను తెలియజేస్తుంది. (అపసవ్య దిశలో కొలుస్తారు).

ప్రత్యేకంగా ఒక సరళరేఖ నిమ్నత అనేది సరళరేఖ X- అక్షానికి సమాంతరంగా లేదా X- అక్షంతో ఏకీభవించినట్లు ఉన్నట్లు అయితే దాని నిమ్నత O అని నిర్వచించవచ్చు.

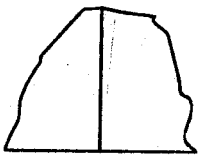


పటం 9.9

అదేవిధంగా (మరల) క్రింది చూపబడిన రెండు పర్వతల పటాలను గమనించినట్లు అయితే పటము 9.10(a)లో చూపినట్లు అయితే పటం 9.10(b) కంటే ఎక్కువ నిటారుతనం ఉన్న పర్వతము కనబడుతుంది.



(a)



(b)

పటం 9.10

పటం 9.10(a) పర్వతంలో నిమ్నత కోణాలు, పటం 9.10(b) కంటే ఎక్కువగా భూమి మీద నుండి చూసినపుడు కనిపిస్తాయి. ప్రతి సందర్భంలో భూమి మీద నుండి పర్వతాలను చూసినట్లయితే వాటి గరిష్ఠ ఎత్తులలో బేధాలను, వాటి నిష్పత్తిని పరిశీలించవచ్చు. (అనగా భూమి మరియు ఎత్తు)

సహజంగా, సందర్భం (b) కంటే సందర్భం (a)లో ఎక్కువ నిష్పత్తి ఉన్నట్లు కనుగొనవచ్చు. అనగా మనము భూమికి, ఎత్తుకు గల నిష్పత్తిని Tan కోణంలో అనుసంధానిస్తు, గణిత నిష్పత్తి ప్రకారం టాన్‌జెంట్ నిమ్నతను గణితంలో 'వాలు' అవుతుంది. కనుక మనము $\tan\theta$ ను ఆ సరళరేఖ వాలు అంటాం.

నిర్వచనం : X-అక్షం ధనదిశలో అపసవ్యదిశలో సరళరేఖ θ కోణం చేస్తే $\tan\theta$ ను ఆ సరళరేఖ వాలు అంటాం. దీనిని 'm'లో సూచిస్తాం. ($m = \tan\theta$).

గమనిక : సరళరేఖ X-అక్షంలో 90^0 లేదా 270^0 చేసినట్లు అయితే అటువంటి సరళరేఖవాలు నిర్వచింపబడదు

ఉదాహరణ 9.12 : పటం 9.9 చూపిన విధంగా సరళరేఖ AB మరియు BA వాలును కనుగొనుము.

సరళరేఖ AB వాలు $= \tan\alpha$

సరళరేఖ BA వాలు $= \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.

గమనిక : పై ఉదాహరణను గమనించినట్లు అయితే ఒక సరళరేఖా ఖండము వాలు దిశా స్వతంత్రము అని తెలుస్తుంది.

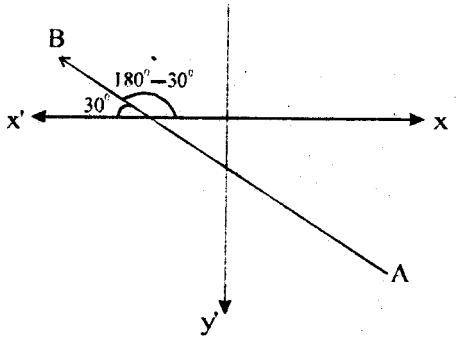
ఉదాహరణ 9.13: సరళరేఖ X-అక్షంతో రుణదిశలో చేసి కోణం 30^0 అయితే దాని వాలును కనుగొనండి.

సాధన : $\theta = 180^0 - 30^0 = 150^0$

$m =$ సరళరేఖవాలు

$= \text{Tan}(180^0 - 30^0)$

$= -\text{Tan } 30^0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$



పటం 9.11

ఉదాహరణ 9.14: సరళరేఖ Y-అక్షంలో ధనదిశలో చేసే కోణం 60^0 అయితే ఆ సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

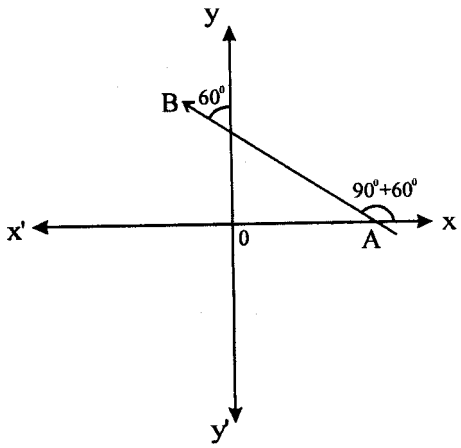
సాధన: ఇక్కడ $\theta = 90^0 + 60^0$

$m =$ సరళరేఖవాలు

$= \text{Tan}(90^0 + 60^0)$

$= -\cot 60^0$

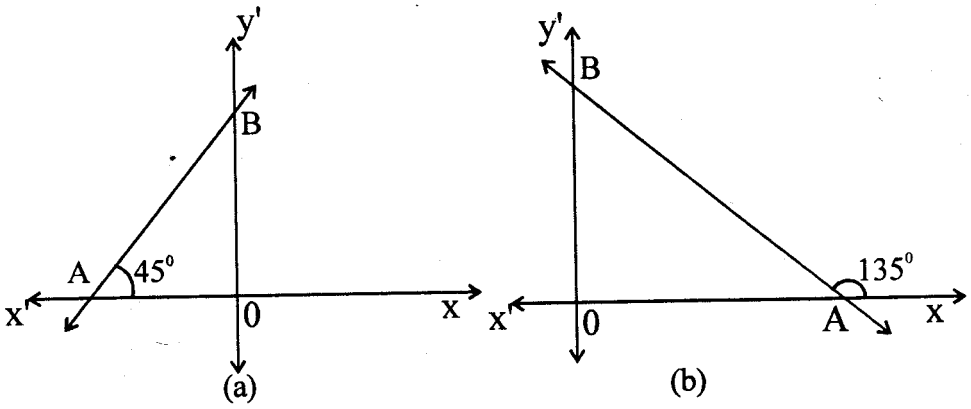
$= -\tan 30^0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$



పటం 9.12

ఉదాహరణ 9.15: సరళరేఖ నిరూపకాలతో సమాన నిమ్నత కలిగి ఉంటే ఆ సరళరేఖ వాలు ± 1 అనిచూపుము.

సాధన: పటం 9.13లో చూపిన విధంగా సరళరేఖ AB నిరూపకాక్షలతో సమాన నిమ్నత కల్గి, అది అక్షాలను A, B లలో కలుస్తుంది.



పటం 9.13

9.13(a) పటం నుండి

సరళరేఖ AB నిమ్నత = $\angle XAB = 45^0$

సరళరేఖ AB వాలు = $\tan 45^0 = 1$

9.13(b) పటం నుండి

సరళరేఖ AB నిమ్నత = $\angle XAB = 180^0 - 45^0$

$= 135^0$

సరళరేఖ AB వాలు = $\tan 135^0 = \tan (180^0 - 45^0)$.

$= -\tan 450$

$= -1$

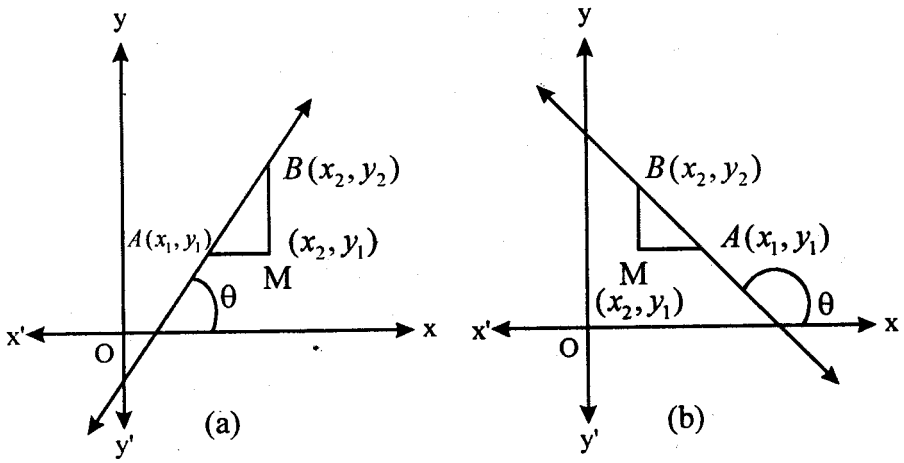
కావున సరళరేఖ అక్షాలతో సమాన నిమ్నత కల్గి ఉంటే వాటి వాలు ± 1 అవుతుంది.

అభ్యాసం 9.5

1. సరళరేఖ X-అక్షంలో ధనదిశలో చేసే కోణాలు i) 60^0 ii) 150^0 అయితే ఆ సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.
2. సరళరేఖ Y-అక్షంలో ధనదిశలో చేసే కోణం 30^0 అయితే ఆ సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.
3. సరళరేఖ X-అక్షంలో రుణదిశలో చేసే కోణం 60^0 అయితే ఆ సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

9.7 ఒక సరళరేఖ రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోలుండే ఆ రేఖ వాలు

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ రెండు వేర్వేరు బిందువులు. సరళరేఖ A మరియు B ల ద్వారా పోతూ 'θ' నిమ్నత కల్గియున్నది. A ద్వారాపోయే క్షితిజ రేఖ, మరియు B ద్వారా పోయే ఊర్ధ్వ రేఖ ఖండన బిందువు M అనుకోండి. M నిరూపకాలు పటం 9.14లో చూపిన విధంగా ఉన్నాయి.



పటం 9.14

(A) పటం 9.14 నుండి MAB నిమ్నత కోణం 'θ' కి సమానం. (లఘు) అదేవిధంగా

$$\tan\theta = \tan(\angle MAB) = \frac{MB}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(B) పటం 9.14(b) నుండి నిమ్నత కోణం 'θ' గురుకోణం కావున θ మరియు ∠MAB లు పూరకకోణాలు దీని నుండి

$$\tan\theta = -\tan(\angle MAB) = \frac{-MB}{MA} = \frac{-(y_2 - y_1)}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ఈ రెండు సందర్భాలలో $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలు m

$$\therefore m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

గమనిక:

$x_1 = x_2$ అయితే m నిర్వచింపబడదు. ఈ సందర్భములో సరరేఖ Y–అక్షానికి సమాంతరము.

వాలు 1గా గల సరళరేఖ ఉందా ?

అవును ఉంది.

X–అక్షం ధనదిశతో చేసే సరళరేఖ నిమ్నత 45^0

వాలు $\sqrt{3}$ గా గల సరళరేఖ ఉందా?

అవును ఉంది.

X–అక్షంతో ధనదిశతో చేసే సరళరేఖ నిమ్నత 60^0.

పై ప్రశ్నలకు సమాధానాల నుండి ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య 'm' సరళరేఖవాలు 'm' అవుతుంది అని గ్రహిస్తాము. (కావున ఎల్లపుడు కోణం 'α'ను కనుగొంటాం, $\tan\alpha = m$.

ఉదాహరణ 9.16 : A(6, 3) మరియు B(4, 10) బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

సాధన : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ బిందువుల గుండా పోయే రేఖవాలు = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ఇక్కడ $x_1 = 6,\ y_1 = 3,\ x_2 = 4,\ y_2 = 6$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చే వాలు $= \frac{10-3}{4-6} = -\frac{7}{2}$.

ఉదాహరణ 9.17 : (3, 6) మరియు $(x, 4)$ బిందువుల గుండాపోయే వాలు '2' అయితే x విలువను రాబట్టండి.

సాధన : వాలు = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{x-3} = \frac{-2}{x-3}$

దత్తాంశం ప్రకారం వాలు = 2

$$\therefore \frac{-2}{x-3} = 2$$

$$-2 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 = -2$$

$$x = 2.$$

అభ్యాసం 9.6

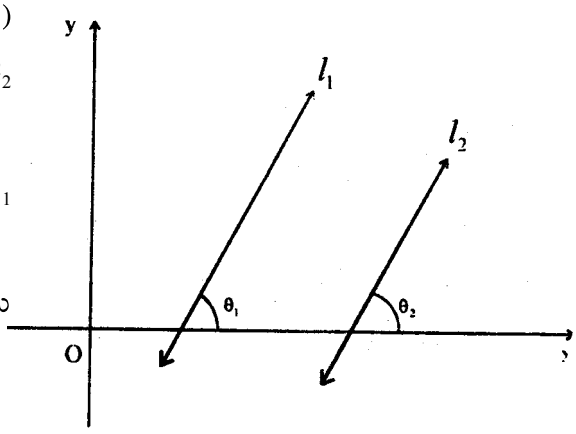
1. A(6, 8) మరియు B (4, 14) బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వాలు ఎంత ?
2. A(6, 12) మరియు B(x, 8) బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలు 4 అయితే x విలువను రాబట్టండి.
3. A(−8, 11) మరియు B($2, y$) బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలు $-\frac{4}{3}$ అయితే y విలువను రాబట్టండి.
4. A(2, 3), B(0, 4) మరియు C(−5, 0) లు త్రిభుజం ABC శీర్షాలు. B బిందువు గుండాపోయే సరళరేఖ వాలు మరియు AC మధ్య బిందువుగా గల సరళరేఖ వాలులను కనుగొనుము.
5. A(−2, 7), B(1, 0), C(4, 3) మరియు D(1, 2) లు చతుర్భుజ శీర్షాలు అయితే
   i) AB వాలు = CD వాలు
   ii) BC వాలు = AD వాలు అని చూపుము.

9.8 సరళరేఖకు సమాంతరంగాను, లంబంగాను ఉండడానికి నియమము

9.8.1 సమాంతర రేఖల వాలులు

l_1 మరియు l_2 రెండు (ఊర్ధ్వేతర) సరళరేఖల వాలులు m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము.

ఈ సరళరేఖల నిమ్నతలు θ_1 మరియు θ_2 అనుకొనుము.



పటం 12.15

సందర్భం 1: l_1 మరియు l_2 లు సమాంతరరేఖలు అనుకొనుము.

అపుడు $\theta_1 = \theta_2$

$\Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow \quad m_1 = m_2$

కావున రెండు సరళరేఖలు సమాంతరాలు అయితే వాలులు సమానం.

సందర్భం 2 : l_1 మరియు l_2 లు రెండు సరళరేఖలు. వాటి వాలులు సమానము అనుకొనుము

i.e., $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

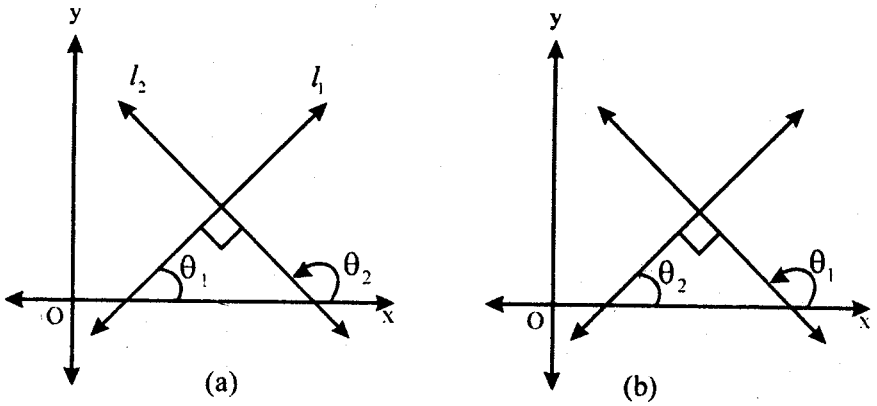
$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \qquad (0^0 \le \theta \le 180^0)$

$\Rightarrow l_1 \parallel l_2$

కావున రెండు (ఊర్ధ్వేతర) సరళరేఖలు సమాంతరాలు అయినపుడు $m_1 = m_2$.

9.8.2 లంబంగా ఉన్న సరళరేఖల వాలులు

l_1 మరియు l_2 లు రెండు (ఊర్ధ్వేతర) సరళరేఖల వాటి వాలులు m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము. అదేవిధంగా θ_1 మరియు θ_2 లు సరళరేఖల నిమ్నతలు అనుకొనుము.



(a) (b)

పటం 9.16

సందర్భం 1: $l_1 \perp l_2$ అనుకొనుము

$\Rightarrow \quad \theta_2 = 90^0 + \theta_1 \qquad \text{or} \qquad \theta_1 = 90^0 + \theta_2$

$\Rightarrow \quad \tan\theta_2 = \tan(90 + \theta_1) \quad \text{or} \quad \tan\theta_1 = \tan(90^0 + \theta_2)$

$\Rightarrow \quad \tan\theta_2 = -\cot\theta_1) \qquad \text{or} \qquad \tan\theta_1 = -\cot\theta_2$

$\Rightarrow \quad \tan\theta_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1} \qquad \text{or} \qquad \tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2}$

$\Rightarrow$ ఈ రెండింటి నుండి

$$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$$

or $$m_1 m_2 = -1$$

కావున రెండు సరళరేఖలు లంబంగా ఉండాలంటే వాటి వాలుల లబ్ధం −1కు సమానం కావాలి.

సందర్భం 2:

రెండు సరళరేఖలు l_1 మరియు l_2 లు అయితే వాటి వాలుల లబ్ధం −1.

i.e., $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow$ $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

$$\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2} = -\cot\theta_2 = \tan(90^0 + \theta_2)$$

$\Rightarrow$ $\theta_1 = 90^0 + \theta_2$ లేదా $\theta_2 = 90^0 + \theta_1$

ఈ రెండింటి వల్ల $l_1 \perp l_2$

రెండు సరళరేఖలు లంబాలు అయినపుడు

$$m_1 m_2 = -1$$

ఉదాహరణ 9.18. సరళరేఖ A(5, 6) మరియు B(2, 3) బిందువుల గుండా పోతూ, C(9, −2) మరియు D(6, −5) గుండా పోయే సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటుందని చూపుము.

సాధన: సరళరేఖ AB వాలు $= \frac{3-6}{2-5} = \frac{-3}{-3} = 1$

సరళరేఖ CD వాలు $= \frac{-5+2}{6-9} = \frac{-3}{-3} = 1$

రెండు సరళరేఖలు AB, CD వాలులు సమానం

$\therefore$ AB $\parallel$ CD.

ఉదాహరణ 9.19 : సరళరేఖ A(2, −5) మరియు B(−2, 5) బిందువుల గుండా పోతూ, L(6, 3) మరియు M(1, 1) బిందువుల నుంచి పోయే సరళరేఖకు లంబంగా ఉంటుందని అని చూపుము.

సాధన: $m_1 = \text{AB}$ సరళరేఖ వాలు $= \dfrac{5+5}{-2-2} = \dfrac{10}{-4} = \dfrac{-5}{2}$

$m_2 = \text{LM}$ సరళరేఖ వాలు $= \dfrac{1-3}{1-6} = \dfrac{2}{5}$

ఇప్పుడు $m_1 m_2 = \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{2}{5} = -1$

కావున సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్నాయి.

ఉదాహరణ 9.20 : $A(4, 4), B(3, 5)$ మరియు $C(-1, -1)$ లు శీర్షాలు. వాలు (భావము) ను ఉపయోగించి లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలు చూపుము.

సాధన: AB సరళరేఖ వాలు $= m_1 = \dfrac{5-4}{3-4} = -1$

BC సరళరేఖ వాలు $= m_2 = \dfrac{-1-5}{-1-3} = \dfrac{3}{2}$

AC సరళరేఖ వాలు $= m_3 = \dfrac{-1-4}{-1-4} = 1$

ఇప్పుడు $m_1 \times m_3 = -1$

$\Rightarrow$ $\text{AB} \perp \text{AC}$

$\Rightarrow$ ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజము.

ఉదాహరణ 9.21 : $A(3, y), B(2, 7)$ మరియు $C(-1, 4)$ మరియు $D(0, 6)$ బిందువుల గుండా పోయే రేఖకు లంబంగా ఉండే y విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: AB సరళరేఖ వాలు $= m_1 = \dfrac{7-4}{2-3} = y - 7$

CD సరళరేఖ వాలు $= m_2 = \dfrac{6-4}{0+1} = 2$

సరళరేఖ లంబాలు కావున $m_1 \times m_2 = -1$

లేదా $(y-7) \times 2 = -1$

లేదా $2Y - 14 = -1$

లేదా $2Y = 13 \qquad \Rightarrow y = \dfrac{13}{2}$

అభ్యాసం 9.7

1. $(2, -3)$ మరియు $(-4, 1)$ బిందువులను కలిపే రేఖ

   (i) $(7, -1)$ మరియు $(0, 3)$ బిందువులను కలిపే రేఖ సమాంతరము అని చూపుము.

   (ii) $(4, 5)$ మరియు $(0, -2)$ బిందువులను కలిపే రేఖ లంబంగాను ఉండునని చూపుము.

2. $(-4, 1)$ మరియు $(2, 3)$ బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ వాలును కనుకొనుము.

3. $(-5, 7)$ మరియు $(0, -2)$ బిందువులను కలిపే రేఖ, $(1, 3)$ మరియు $(4, x)$ బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉంటే x విలువను కనుగొనుము.

4. A$(-2, 7)$, B$(1, 0)$, C$(4, 3)$ మరియు D$(1, 2)$ లు చతుర్భుజము ABCD శీర్షాలు. అయితే ABCD భుజాలు సమాంతరాలు అని చూపుము.

5. సరళరేఖ వాలు భావము ఉపయోగించి A$(6, -1)$, B$(5, 0)$ మరియు C$(2, 3)$ బిందువులు సరేఖీయాలు అని చూపుము.

6. $(k, 9)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ, $(2, -2)$ మరియు $(6, 4)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే k విలువ ఎంత?

7. సరళరేఖ వాలు (భావము)ను ఉపయోగించి $(-4, -1)$, $(-2, -4)$, $(4, 0)$ మరియు $(2, 3)$ బిందువులు వరసగా దీర్ఘచతురస్ర శీర్షాలు అని చూపుము.

8. A$(-3, 3)$, B$(-1, -4)$ మరియు C$(5, -2)$ లు త్రిభుజం ABC శీర్షాలు. M మరియు N లు వరసగా AB మరియు AC ల మధ్య బిందువులు. కావున MN అనేది BC కి సమాంతరము β మరియు $MN = \frac{1}{2}BC$ అని చూపుము.

9.9 సరళరేఖ నిరూపకాక్షల మీద చేసే అంతర ఖండాలు

L అనే సరళరేఖ X-అక్షాన్ని A వద్దా, Y-అక్షాన్ని B వద్దా పటం 9.17లో చూపిన విధంగా ఖండిస్తుంది.

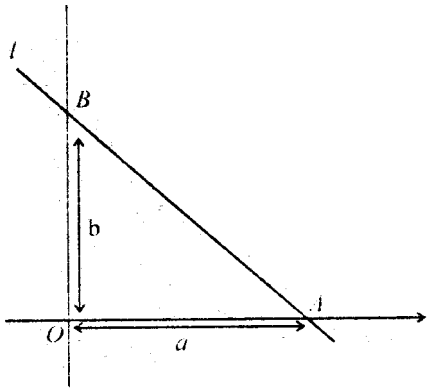
(i) OA ను X-అంతరఖండము లేదా సరళరేఖ X-అక్షంతో చేసే అంతరఖండము అంటారు.

(ii) OB ని Y-అంతర ఖండము లేదా సరళరేఖా Y-అక్షంతో చేసే అంతరఖండము అంటాం.

(iii) OA, OB లను సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే అంతరఖండాలు అంటాం.

(iv) రేఖాండం $\overline{AB}$ ని అక్షాల మధ్య సరళరేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ ఏర్పచిన అంతరఖండం అంటాం.

(v) బిందువు A నిరూపకాలు $(a, 0)$ మరియు బిందువు B నిరూపకాలు $(0, b)$ గా ఉన్నాయి.



పటం 9.17

దత్త తలంలో ఒక సరళరేఖ X-అంతరఖండం కనుగొనడానికి $y = 0$ ప్రతిక్షేపించవలెను. ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణంలో అప్పుడు x విలువ వస్తుంది. దానిని X-అంతర ఖండము అని అంటాం. అదే విధంగా Y-అంతర ఖండం కనుగొనడానికి సరళరేఖ సమీకరణంలో $x = 0$ ను ప్రతిక్షేపించవలెను. అప్పుడు y విలువ వస్తుంది. దానిని Y-అంతరఖండం అంటాం.

గమనిక :

1. మూలబిందువు గుండాపోయే సరళరేఖను అక్షాల మీద అంతర ఖండాలు ఉండవు. లేక ఒక సరళరేఖ మూల బిందువు గుండా పోతుండే దాని అంతర ఖండాలు, రెండు సున్నకు సమానం.

2. క్షితజ రేఖకు X-అంతర ఖండం ఉండదు (నిర్వచితం కాదు) ఊర్ధ్వ రేఖకు Y-అంతర ఖండము ఉండదు (నిర్వచితము కాదు)

3. X-అంతర ఖండాన్ని, Y-అంతర ఖండాన్ని సాధారణంగా a, b లతో సూచిస్తారు. కాని Y-అంతర ఖండాన్ని మాత్రమే తీసుకుంటే c లో సూచిస్తారు.

ఉదాహరణ 9.22 : సరళరేఖ $2x + 3y = 6$ కు X-అంతరఖండము, Y- అంతర ఖండాలను కనుకొనుము.

సాధన: $2x + 3y = 6$ .... (1)

(i) లో $x = 0$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$y = 2$ వచ్చును.

కావున Y-అంతరఖండము 2

మరల Y = 0 (i) లో ప్రతిక్షేపించగా

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$ వచ్చును.

కావున X-అంతరఖండం 3.

అభ్యాసం 9.8

1. కింది సరళరేఖల సమీకరణానల నుండి X-అంతర ఖండము, Y-అంతర ఖండాలను కనుగొనుము.

(i) $x + 3y = 6$ (ii) $7x + 3y = 2$ (iii) $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$

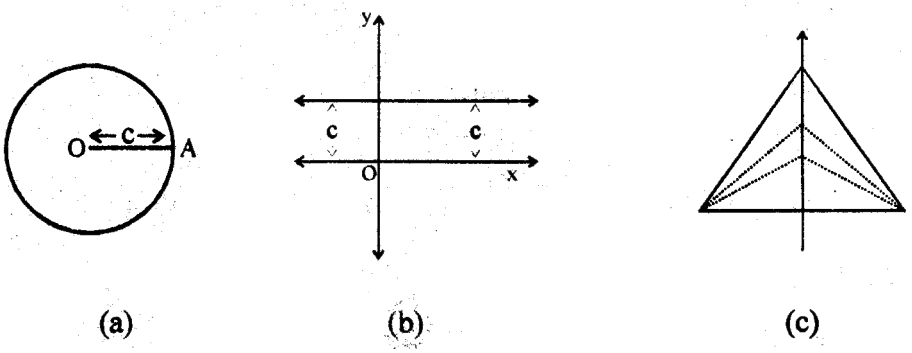
(iv) $ax + by = c$ (v) $\frac{y}{2} - 2x = 8$ (vi) $\frac{y}{3} - \frac{2x}{3} = 7$

9.10 బిందు పథము

9.10.1 బిందు పథ నిర్వచనము

దత్త నియమము లేక నియమాలకి లోబడి చలించే బిందువు యొక్క పథాన్ని బిందుపథం అంటాం. బిందువు పథం ఒక నిర్ధిష్ట ఆకారం. అది సరళరేఖ, వృత్తం లేదా ఏదైనా వక్రం కావచ్చును.

ఉదాహరణకు (i) సమతలంలో ఒక స్థిర బిందువును ఆధారం చేసుకొని స్థిరదూరంలో చలించే బిందువుల పథంను వృత్తం అంటాం. పటం 9.18(ఎ) చూడండి.



పటం 9.18

(ii) X-అక్షము నుంచి స్థిరదూరంలో ఉండే బిందుపథం X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖా యుగ్మం.

(iii) రెండు స్థిరబిందువుల నుంచి సమాన దూరంలో ఉండే బిందువు బిందుపథం, రేఖాఖండానికి లంబసమద్విఖండన రేఖ బిందు పథం అవుతుంది (పటం 12.18c చూడండి)

(a) నియమాలను పాటించే బిందువు బిందువు పథం మీద ఉంటుంది.

(b) బిందుపథంపై ప్రతిబిందువు దత్తనియమాలను పాటించాలి.

9.10.2 బిందుపథ సమీకరణము

బిందుపథ సమీకరణమంటే, బిందు పథం మీది బిందువు (x, y) దత్త నియమాలను తృప్తిపరిచే బీజీయ సంబంధం బిందుపథంపై చలించే బిందువు (x, y) నిరూపకాలన్ని ప్రస్తుత నిరూపకాలు అంటాం. బిందు పథంపైని అన్ని స్థానాలను సూచించే బిందువును సామాన్య బిందువు అంటాం.

ఒక ఉదాహరణకు తీసుకుంటే

$P(4, 3)$ మరియు $Q(7, 11)$ లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉండే బిందువు R అనుకొనుము. వీటి నిరూపకాలు $R(x, y)$ అనుకొనుము.

అప్పుడు $PR = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$

$$QR = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 22y + 170}$$

$\therefore PR = QR$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 22y + 170}$$

ఇరువైపుల వర్గ చేయగా

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 = x^2 + y^2 - 14x - 22y + 170$$

$$\Rightarrow \quad 6x + 16y - 145 = 0$$

దీనికే R బిందుపథ సమీకరణం అంటాం. ఇది P, Q బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉండును.

పై దాని నుంచి ఉంది నిర్వహణ సూత్రాన్ని పరిశీలించగలం.

9.10.3 బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుగొనడానికి సాధనా నియమం

(i) బిందుపథంపై ఏదేని బిందువు (x, y) అనుకొనుము.

(ii) x మరియు y లలో జ్యామితి రూపాన్ని రాయాలి. అవసరమైతే తెలిసిన స్థిరపదార్థం లేదా స్థిర పదాలను సూక్ష్మీకరించాలి.

(iii) దత్త నియమాలను అనుసరించి x మరియు y పదాలలో గణిత రూపంలోకి మార్చవలెను. అవసరమైతే స్థిరపదాలను సూక్ష్మీకరించాలి.

(iv) అలా లభించిన సమీకరణం కావలసిన బిందుపథ సమీకరణం వస్తుంది.

ఉదాహరణ 9.23 : బిందువు $(-a, 0)$ నుండి బిందువు $(a, 0)$ బిందువకు గల దూరం 3 రేట్లున్న బిందుపథం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: బిందుపథం మీది ఒక బిందువు $P(x, y)$ అనుకొనుము.

$A(-a, 0)$ మరియు $B(a, 0)$ లు రెండు బిందువులు అనుకొనుమ.

ఇప్పుడు దత్త నియమము ననుసరించి

$$PA = 3PB$$

$$PA^2 = 9PB^2$$

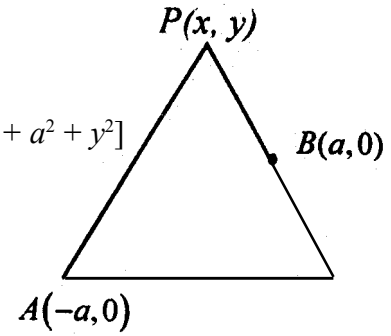
$$\Rightarrow \quad (x + a)^2 + y^2 = 9[(x - a)^2 + y^2)]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 9[x^2 - 2ax + a^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow \quad 8x^2 - 20ax + 8a^2 + 8y^2 = 0$$

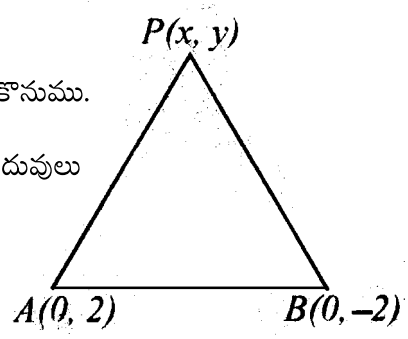
కావలసిన బిందుపథ సమీకరణము

$$2x^2 + 2y^2 - 5ax + 2a^2 = 0.$$



పటం 9.19

ఉదాహరణ 9.24 : $(0, 2), (0, -2)$ బిందువుల నుంచి దూరాల మొత్తం 6 గా గల బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.



పటం 9.20

సాధన: బిందుపథ మీది ఒక బిందువును $P(x, y)$ అనుకొనుము.

$A(0, 2)$ మరియు $B(0, -2)$ ఇచ్చిన రెండు బిందువులు

ఇచ్చిన నియమము ప్రకారం

$$PA + PB = 6$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} = 6$$

లేదా $$\sqrt{x^2+y^2-4y+4} + \sqrt{x^2+y^2+4y+4} = 6$$

$$\sqrt{x^2+y^2-4y+4} = 6 - \sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా, వచ్చిది.

$$x^2+y^2-4y+4 = 36+x^2+y^2+4y+4-12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$

లేదా $$-8y - 36 = -12\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$

లేదా $$2y+9 = 3\sqrt{x^2+y^2+4y+4}$$

మరల ఒసారి ఇరువైపుల వర్గం చేయగా వచ్చినది.

$$(2y + 9)^2 = 9(x^2 + y^2 + 4y + 4)$$

లేదా $$4y^2 + 36y + 81 = 9x^2 + 9y^2 + 36y + 36$$

లేదా $$9x^2 + 4y^2 = 45.$$ ఇదియే కావలసిన బిందుపథ సమీకరణము.

ఉదాహరణ 9.25 : $A(3, 1)$ మరియు $B(-2, 4)$ లు త్రిభుజం ABC యొక్క రెండు శీర్షాలు. C అనే బిందువు సమీకరణం $3x - 4y = 8$ ను తృప్తిపరిచే బిందుపథంపై ఉంటే, త్రిభుజ యొక్క కేంద్రాబాస బిందు పథ సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: ΔABC యొక్క మూడో శీర్షం $C(a, b)$ అనుకొనుము.

$C(a, b)$ ఇచ్చిన బిందు పథంపై ఉంది కావున

బిందు పథ సమీకరణం $3a - 4b = 8$ .... (i)

త్రిభుజం ABC యొక్క కేంద్రబాసం $G(h, k)$ అనుకొనుము.

$$h = \frac{3-2+a}{3},\ k = \frac{1+4+b}{3}$$

$\Rightarrow$ $a = 3h - 1$ మరియు $b = 3k - 5$

a, b విలువలను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా వచ్చునది.

$$3(3h - 1) - 4(3k\ 5) = 8$$

$\Rightarrow$ $3h - 4k + 3 = 0$

కావున కేంద్రాబాసం యొక్క బిందు పథం సమీకరణం $3x - 4y + 3 = 0$

ఉదాహరణ 9.26 : $y^2 = ax$ బిందు పథ సమీకరణం. బిందుపథంపై $(2, -2)$ ఒక బిందువు $(8, 6)$ కూడా బిందుపథంపై బిందువు అయితే 'b' ను కనుగొనుము.

సాధన: $(2, -2)$ అనేది బిందు పథం మీద బిందువు. దీని సమీకరణం

$$y^2 = ax$$

$$(-2)^2 = 2a \Rightarrow a = 2$$

కావున బిందు పథ సమీకరణం $y^2 = 2x$.

$(8, 6)$ అనే బిందువు కూడా బిందుపథంపై ఉంది.

$\therefore$ $b^2 = 2 \times 8$

$\Rightarrow$ $b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$

$\therefore$ కావున b లెక్క విలువ $= \pm 4$

అభ్యాసం 9.9

1. (3, 4) మరియు (–4, 6) బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
2. (4, 2) మరియు X-అక్షం నుండి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
3. ఒక బిందువు (4, 1) కి గల దూరం, (1, 5) కల గల దూరాన్ని రెట్టింపు అయితే బిందువు P పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
4. A(2, 3) మరియు B(0, 2) బిందువులు త్రిభుజం శీర్షాలు. త్రిభుజం PAB వైశాల్యం 3 చ.యూనిట్లుగా ఉండే P బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
5. (2, 3) మరియు (–3, 4) బిందువుల నుండి సమాన దూరాల వర్గాల మొత్తం 16 అయితే P బిందుపథ సమీకరణం కనుక్కోండి.
6. (3, 0) మరియు (–3, 0) బిందువుల నుండి దూరాల బేదం 9 గా గల బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
7. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 36 = 0$ మరియు అనేది బిందు పథ సమీకరణం, దీనిపై $(h, 0)$ ఒక బిందువు ఉండే h విలువలను కనుగొనుము.
8. $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ బిందువుగా గల బిందు పథ సమీకరణం $y^2 = ax$ దీనిపై $(b, 6)$ కూడా బిందువు అయితే b విలువను కనుగొనుము.

9.11 అక్షపరివర్తనం

అభ్యసన ఫలితాలు

1. అక్షాలలో కలిగె మార్పుకు అనుగుణంగా నిరూపకాలలోని మార్పును కనుగొనుట
2. వక్ర సమీకరణము ఏ విధంగా రూపాంతరం చెందుతుందో తెలుసుకుంటారు.

సమతలం అనంతంగా విస్తరించి ఉంది. X, Y–అక్షాలు గీయడం ద్వారా అనంతమైన సమతలాన్ని నాలుగు పాదాలుగా విభజించడం, సమతలంలోని ఏ బిందువునైనా వాస్తవ సంఖ్యల

క్రమ యుగ్మం ద్వారా సూచించడం మనకు తెలుసు. సమతలంలో అక్షాల స్థానం నిర్దిష్టం కాదు కాబట్టి, అక్షాలను మార్చవచ్చు. అక్షాల స్థానం మారినపుడు, బిందువుల నిరూపకాలు కూడా మారుతాయి. పర్యవసానంగా వక్రాల సమీకరణాలు కూడా మారతాయి. తగిన విధంగా అక్షాలను మార్చడం ద్వారా, కొన్ని సమీకరణాలను సులభరూపాల్లోకి మార్చవచ్చు.

అక్షాలను కింది విధాలుగా మార్చవచ్చు.

(i) సమాంతర పరివర్తనం (ii) భ్రమణ పరివర్తనం

(iii) సమాంతర మరియు భ్రమణ పరివర్తనము

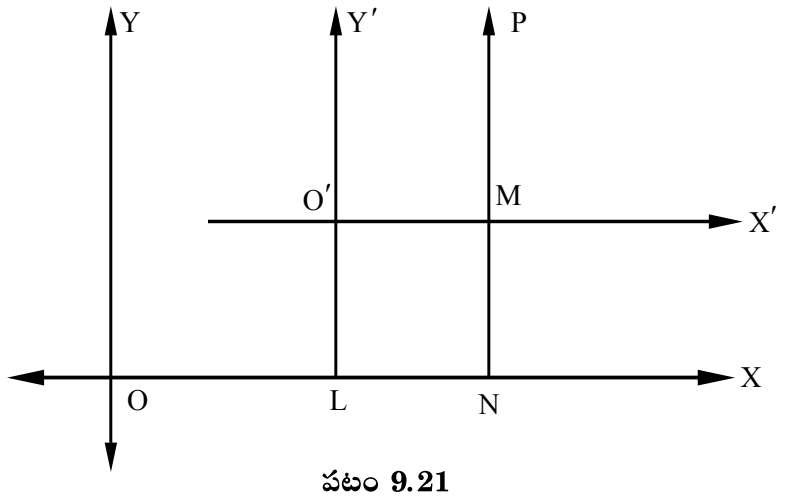
9.11 సమాంతర పరివర్తనం

9.11.1 నిర్వచనం (సమాంతర పరివర్తనం)

సమతలంలోని అక్షాల దిశలను మార్పు చేయకుండా, మూల బిందువు స్థానాన్ని మాత్రమే మార్పు చేస్తే ఏర్పడే పరివర్తనను సమాంతర పరివర్తనం (Translation nof axes) అంటాం.

9.11.2 సమాంతర పరివర్తన వల్ల నిరూపకాలలో మార్పులు

ఇచ్చిన నిరూపకాక్షాలను $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ నిరూపకాక్షాలను సమాంతర అక్షపరివర్తన చేస్తూ మూలబిందువు O ను $O' = (h, k)$ కు మార్చామని అనుకొందాం. పటంలో చూపినట్టు కొత్త అక్షాలను $\overrightarrow{O'X'}, \overrightarrow{O'Y'}$ అనుకోండి. అప్పుడు $\overrightarrow{O'X'}, \overrightarrow{O'Y'}$ ల దృష్ట్యా బిందువు O' నిరూపకాలు $(0, 0)$ $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ అక్షాల దృష్ట్యా (x, y) అనే నిరూపకాలను, $\overrightarrow{O'X'}, \overrightarrow{O'Y'}$ అక్షాల దృష్ట్యా $(x'$ $y')$ అనే నిరూపకాలు గల బిందువును P అనుకొందాము.



పటం 9.21

అప్పుడు $O'L = k,\ OL = h$

ఇప్పుడు $x = ON = OL + LN$

$= OL + O'M$

$= h + x'$

$y = PN = PM + MN$

$= PM + O'L$

$= y' + k$

ఆ విధంగా $x = x' + h, y = y' + k$

లేదా $x' = x - h, y' = y - h$

9.11.3 గమనిక

సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువును (n, k) బిందువుకు మారిస్తే, అప్పుడు

(i) బిందువు $P(x, y)$ నిరూపకాలు $P(x - h, y - k)$ గా రూపాంతరం చెందుతాయి.

(ii) $f(x, y) = 0$ వక్రసమీకరణం $f(x' + h, y' + k) = 0$ గా రూపాంతరం చెందుతుంది.

9.11.4 ఉదాహరణ

ఉదాహరణ 1 : సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువును $(-3, 5)$ బిందువుకు మార్చినప్పుడు కొత్త అక్షాల దృష్ట్యా $(2, 4)$ బిందువు నిరూపకాలు రాయండి.

సాధన : ఇక్కడ $(h, k) = (-3, 5)$

సమాంతర పరివర్తన ద్వారా $(x, y) = (2, 4)$ ను (x', y') కి మారిందని అనుకొందాము.

అప్పుడు $(x', y') = (x - h, y - k) = (2 - (-3), 4 - 5)$

$= (5, -1)$

ఉదాహరణ 2 : అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువును $(3, 1)$ కు మార్చినప్పుడు $x^2 + 4xy + 6y^2 = 0$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : ఇక్కడ $(h, k) = (3, 1)$ ను

దత్త సమీకరణంలో $x = x' + 3, y = y' + 1$ లను

ప్రతిక్షేపిస్తే $(x' + 3)^2 + 4\,(x' + 3)\,(y' + 1) + 6(y' + 1)^2 = 0$

దీన్ని సూక్ష్మీకరిస్తే

$$x'^2 + 4\,x'\,y' + 6\,y'^2 + 10\,x' + 24y' + 27 = 0$$

గా రాయవచ్చు.

9.12 భ్రమణ పరివర్తనం

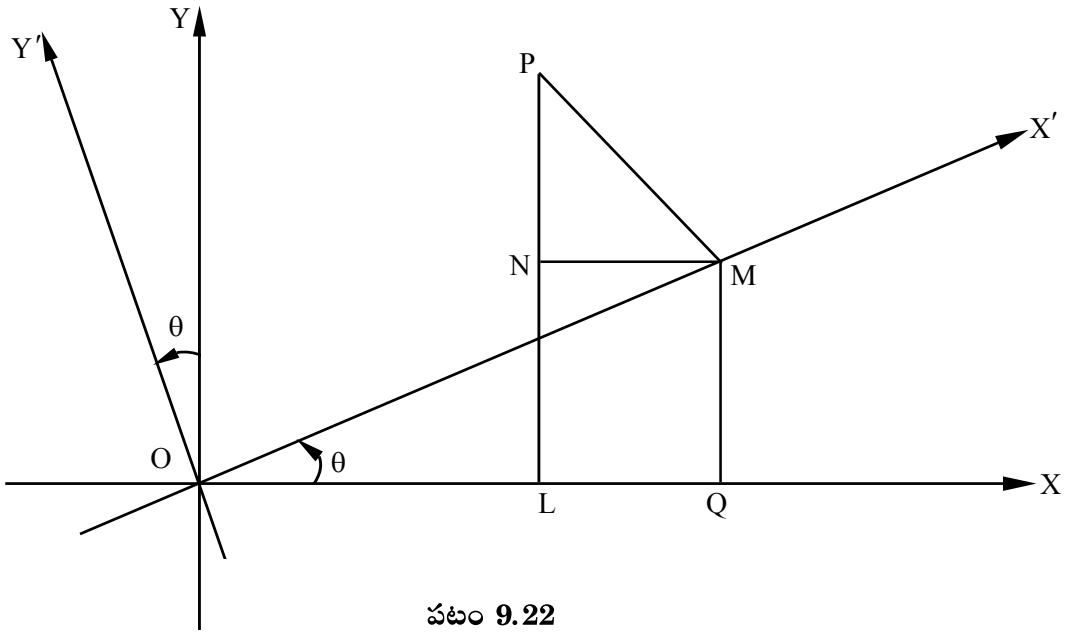
9.12.1 నిర్వచనం (భ్రమణ పరివర్తనం)

మూల బిందువును స్థిరంగా ఉంచి, సమతలంలోని రెండు అక్షాలను ఒకే కోణం ద్వారా పరిభ్రమణం చేస్తే ఏర్పడే పరివర్తనను భ్రమణ పరివర్తనం (Rotation Axes) అంటాం.

9.12.2 'θ' కోణంలో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు నిరూపకాలలో మార్పులు

$\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ అక్షాల దృష్ట్యా $P = (x, y)$ అనుకొందాం. కొత్త అక్షాలు $\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'}$ లు రావడానికి, అక్షాలను మూల బిందువు 'O' దృష్ట్యా ధన దిశలో 'θ' కోణంలో భ్రమణం చేశామనుకొందాం.

కొత్త అక్షాలు దృష్ట్యా $P(x', y')$ అనుకొందాము.



పటం 9.22

భ్రమణ కోణం 'θ' అయినందువల్ల

$$\angle XOX' = \angle YOY' = \theta$$

P నుంచి $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'}$ ల పైకి గీసిన లంబాల పాదాలను L, M అనుకొందాం.

రెండు రేఖల మధ్య కోణం, వాటి లంబరేఖల మధ్య కోణానికి సమానం.

అందువల్ల $\angle LPM = \angle XOX' = \theta$

M నుంచి $\overline{PL}$ మీద లంబపాదం N అనుకొందాం.

ఇప్పుడు $x = OL = OQ - LQ$

$= OQ - NM$

$= OM\cos\theta - PM\sin\theta$

$= x'\cos\theta - y'\sin\theta$ ...(1)

$y = PL = PN + NL$

$= PN + MQ$

$= PM\cos\theta + OM\sin\theta$

$= y'\cos\theta - x'\sin\theta$ ...(2)

అందువల్ల

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad ...(3)$$

ఈ సమీకరణాల నుంచి x', y' విలువలను

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \quad ...(4)$$

గా రాయవచ్చు

(3), (4) లలోని ఫలితాలను కింది పట్టిక ద్వారా సులభంగా గుర్తుపెట్టుకోవచ్చు.

	x'	y'
x	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
y	$\sin\theta$	$\cos\theta$

9.2.3 గమనిక

'θ' కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు

i) బిందువు $P(x, y)$ నిరూపకాలు

$P(x', y') = P(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ గా రూపాంతరం చెందుతాయి.

ii) $f(x, y) = 0$ వక్రం సమీకరణం

$f(x'\cos\theta - y'\sin\theta,\ x'\sin\theta + y'\cos\theta) = 0$ గా రూపాంతరం చెందుతుంది.

ఉదాహరణ 3

60^0 కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, కొత్త అక్షాల దృష్ట్యా $P(-1, 2)$ బిందువు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన : $P(x, y) = (-1, 2)$ అనుకొందాం. కొత్త అక్షాల దృష్ట్యా బిందువు P నిరూపకాలు (x', y') అనుకొందాము.

అప్పుడు

$$x' = (-1)\cos 60^0 + 2(\sin 60^0) = -\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

$$y' = -(-1)\sin 60^0 + 2\cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

అందువల్ల, P బిందువు కొత్త నిరూపకాలు $\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$

ఉదాహరణ 4 :

అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువును (1, 6)కు మారిస్తే, ఒక బిందువు నిరూపకాలు (3, 5) గా మారాయి. మూల వ్యవస్థ (original system) లో ఆ బిందువు నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన : ఇక్కడ $(h, k) = (1, 6)$; $(x' y') = (3, 5)$

కావలసిన బిందువును (x, y) అనుకొంటే, అప్పుడు

$$x = x' + h = 3 + 1 = 4$$

$$y = y' + k = 5 + 6 = 11$$

అందువల్ల, మూల వ్యవస్థలో ఆ బిందువు నిరూపకాలు $= (4, 11)$

ఉదాహరణ 5

60^0 కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, P బిందువు (3, 4) గా మారితే మూల వ్యవస్థ దృష్ట్యా P నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన : $(x', y') = (3, 4)$; $\theta = 60^0$

బిందువు P నిరూపకాలు (x, y) అనుకొందాము.

అప్పుడు $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

$$x = 3 \cos 60^0 - 4 \sin 60^0$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{2}$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

$$= 3\sin 60^0 + 4 \cos 60^0$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}+4}{2}$$

అందువల్ల, మూల వ్యవస్థ దృష్ట్యా P నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}+4}{2}\right)$$

గమనికలు

1) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad h^2 \neq ab$ సమీకరణంలో మొదటి తరగతి పదాలు లోపింప చేయడానికి, మూలబిందువును అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా $\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$ కు మార్చాలి.

2) $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \quad a \neq 0$ సమీకరణంలో మొదటి తరగతి పదాలను లోపింప చేయడానికి, మూలబిందువును అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా $\left(\frac{-g}{a}, \frac{-f}{b}\right)$ కు మార్చాలి.

(దత్త సమీకరణంలో xy పదం లేదు. అంటే $h = 0$, కాబట్టి గమణిక (1) లోని ఫలితంలో $h = 0$ రాస్తే కావలసిన బిందువు $\left(\frac{-g}{a}, \frac{-f}{b}\right)$ వస్తుంది).

3) $a \neq b$ అయితే, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సమీకరణంలో xy పదం లోపింపచేయడానికి, అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేయవలసిన కోణం $\frac{1}{2}\text{Tan}^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right)$ అవుతుంది.

అభ్యాసం 9.10

1. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువు (2, 3) కు మారింది, P బిందువు

   (i) (0, 0)గా మారితే మూల వ్యవస్థలో P నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

   (ii) (4, −3) గా మారితే మూల వ్యవస్థలో P నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

2. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువు (4, −5) కు మారిస్తే కొత్త అక్షాల దృష్ట్యా కింది బిందువుల నిరూపకాలు రాయండి.

   (i) $(-2, 4)$ (ii) $(3, 2)$ (iii) $(0, 3)$

3. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా (5, −1) ను (4, 3) కు మార్చడానికి మూలబిందువును ఏ బిందువుకు మార్చాలో కనుక్కోండి.

4. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ సమీకరణంలో మొదటి తరగతి పదాలు లోపింప చేయడానికి మూలబిందువును ఏ బిందువుకు మార్చాలో కనుక్కోండి.

5. 30^0 కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, కింది బిందువుల కొత్త నిరూపకాలను రాయండి.

   (i) $(0, 5)$ (ii) $(-2, 4)$ (iii) $(0, 0)$

6. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువును $(2, 3)$ కు మార్చినప్పుడు, ఒక వక్రం రూపాంతరం చెందిన సమీకరణం $x^2 + 3xy - 2y^2 + 17x - 7y - 11 = 0$ అయితే వక్రం యొక్క మూల సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

7. 135^0 కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు P బిందువు $(4, -3)$ గా మారితే మూల వ్యవస్థ దృష్ట్యా P నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

8. $\frac{\pi}{4}$ కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తనం చేసినప్పుడు, $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 9$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

కీలకపదాలు

- (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అనేది బిందువుల మధ్య దూరము $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అనే బిందువులను కలిపే రేఖాండాన్ని అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువుల నిరూపకాలు $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_2y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$
- (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అనే బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని బాహ్యంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే నిరూపకాలు. $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_2y_2 - m_2y_1}{m - n}\right)$

- (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అనే బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము యొక్క మధ్య బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ మరియు (x_3, y_3) బిందువులు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం వైశాల్యం

$$\left|\frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]\right|$$

- మూడు బిందువులు ABC లు సరేఖీయాలు అయితే అవి ఏర్పరచే త్రిభుజ వైశాల్యం శూన్యం.
- X-అక్షం ధనదిశలో చేసే కోణం θ అపుడు సరళరేఖ వాలు $m = \text{Tan}\,\theta$.
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వాలు (m) ఇచ్చినప్పుడు $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- m_1 వాలుగాగల ఒక సరళరేఖ, m_2 వాలుగాగల సరళరేఖకు సమాంతరమైతే $m_1 = m_2$.
- మూలబిందువు గుండా పోనటువంటి ఒక సరళరేఖ X-అక్షాన్ని A వద్ద, Y-అక్షాన్ని B వద్ద ఖండిస్తే, OA ను X-అంతర ఖండమని, OB ని Y-అంతరఖండం అంటాం.
- దత్త నియమాలకు లోబడి చలించే బిందువు యొక్క పథం బిందుపథం.
- సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూలబిందువును (h, k) బిందువుకు మారిస్తే అప్పుడు

  (i) P బిందువు నిరూపకాలు (x, y), $(x - h, y - k)$ గా రూపాంతరం చెందుతాయి.

  (ii) వక్రం సమీకరణము $f(x, y) = 0$, $f(x' + h, y' + k = 0$ గా రూపాంతరం చెందుతుంది.

- 'θ' కోణంతో భ్రమణ పరివర్తనము చేసినప్పుడు

  (i) P బిందువు నిరూపకాలు (x, y), $(x', y') = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$ గా రూపాంతరం చెందుతాయి.

  (ii) వక్రం సమీకరణం $f(x, y) = 0, f(x'\cos\theta - y'\sin\theta, x'\sin\theta + y'\cos\theta) = 0$ గా రూపాంతరం చెందుతుంది.

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. కింది బిందు యుగ్మాల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనుము.

   (a) $(2, 0)$ మరియు $(1, \cot\theta)$ (b) $(-\sin A, \cos A)$ మరియు $(\sin B, \cos B)$

2. కింద ఇచ్చిన ఏ బిందువుల సమితి త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

   (a) $(3, 2), (-3, 2)$ మరియు $(0, 3)$ (b) $(3, 2), (3, -2)$ మరియు $(3, 0)$

3. $(3, -5)$ మరియు $(-6, 8)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం మధ్య బిందువును కనుగొనుము.

4. కింద ఇచ్చిన శీర్షాలతో త్రిభుజ వైశ్యాలను కనుగొనుము.

   (a) $(1, 2), (-2, 3), (-3, -4)$ (b) $(c, a), (c + a, a), (c - a, a)$

5. ఈ కింది బిందు సమితి సరేఖీయాలు అని చూపుము. (దాని వైశాల్యం శూన్యం అని చూపుము)

   (a) $(-2, 5), (2, -3)$ మరియు $(1, 0)$

   (b) $(a, b + c), (b, c + a)$ మరియు $(c, a + b)$

6. $(-3, 12), (7, 6)$ మరియు (x, a) లు లు సరేఖీయాలు అయితే x విలువను కనుగొనుము.

7. $(4, 3), (-5, 6), (0, 7)$ మరియు $(3, -6)$ బిందువులు శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజ వైశాల్యాలను కనుగొనుము.

8. కింది బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.

   (a) $(1, 2), (4, 2)$ (b) $(4, -6), (-2, -5)$

9. $(3, y), (2, 7)$ బిందువులను కలిపే రేఖ $(-1, 4), (0, 6)$ బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే y విలువను కనుగొనుము.

10. $(4, 4), (3, 5)$ మరియు $(2, 7)$ బిందువులతో పైథాగరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించకుండా లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలు అని చూపుము.

11. కింద ఇచ్చిన ఏ బిందువుల సమితి వాలు భావన ఉపయోగించి సరేఖీయాలవుతాయో కనుగొనుము.

(i) $(-2, 3), (8, -5)$ మరియు $(5, 4)$ (ii) $(5, 1), (1, -1)$ మరియు $(11, 4)$

12. $A(2, -3), B(3, 5)$ లు దీర్ఘచతురస్రం ABCD యొక్క రెండు శీర్షాలు అయితే

(i) BC వాలును కనుగొనుము

(ii) CD వాలును కనుగొనుము

(iii) DA వాలును కనుగొనుము

13. $(7, 3), (3, 0), (0, -4)$ మరియు $(4, -1)$ లు చతుర్భుజ శీర్షాలు వాలులును ఉపయోగించి చతుర్భుజ భుజాల మధ్య బిందువులతో ఏర్పడే చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందని చూపుము.

14. కింది సరళరేఖల అంతరఖండాలను కనుగొనుమ.

(i) $2x - 3y = 8$ (ii) $3x - 7y + 9 = 0$ (iii) $x - \frac{y}{2} = 3$

15. $(2, 4)$ మరియు Y-అక్షానికి సమాన దూరంలో గల బిందువు బిందు పథాన్ని కనుగొనుము.

16. $(a + b, a - b)$ మరియు $(a - b, a + b)$ బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉండే బిందువు బిందుపథం కనుగొనుము.

17. $A(a, 0), B(-a, 0)$ రెండు స్థిరబిందువులు అయితే $3|PA| = 2|PB|$ అయ్యేటట్లు బిందువు P చలించే బిందుపథం కనగొనుము.

18. $(1, 2)$ మరియు $(3, 4)$ బిందువుల దూరాల వర్గాల మొత్తం 25 అయితే బిందుపథ సమీకరణం కనుగొనుము.

జవాబులు

అభ్యాసం 9.1

1. (a) $\sqrt{58}$ (b) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

అభ్యాసం 9.2

1. (a) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ (b) $(2, 5)$ 2. $(1, 4)$

3. (a) $(2, 6)$ 4. $\left(3, \frac{5}{3}\right), \left(4, \frac{1}{3}\right)$

అభ్యాసం 9.3

1. (a) $\frac{25}{2}$ చ.యూనిట్లు (b) 12 చ.యూనిట్లు (c) $\frac{a^2}{2}$ చ.యూనిట్లు

2. $k = \frac{5}{3}$ 3. 80 చ.యూనిట్లు 4. $\frac{41}{2}$ చ.యూనిట్లు

అభ్యాసం 9.4

5. $k = 3$ 6. $k = \frac{1}{2}, -1$

అభ్యాసం 9.5

1. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $-\sqrt{3}$

3. $-\sqrt{3}$

అభ్యాసం 9.6

1. -3 2. 5 3. $-\frac{7}{3}$ 4. $\frac{5}{3}$

అభ్యాసం 9.7

2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$ 6. $k = \frac{10}{3}$

అభ్యాసం 9.8

1. (i) X- అంతర ఖండం = 6; Y- అంతర ఖండం = 2

(ii) X- అంతర ఖండం = $\frac{2}{7}$; Y- అంతర ఖండం = $\frac{2}{3}$

(iii) X- అంతర ఖండం = $2a$; Y- అంతర ఖండం = $2b$

(iv) X- అంతర ఖండం = $\frac{c}{a}$; Y- అంతర ఖండం = $\frac{c}{b}$

(v) X- అంతర ఖండం = -4; Y- అంతర ఖండం = 16

(vi) X- అంతర ఖండం = $-\frac{21}{3}$; Y- అంతర ఖండం = 21

అభ్యాసం 9.9

1. $14x - 4y + 27 = 0$
2. $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$
3. $3x^2 + 3y^2 - 38y + 87 = 0$
4. $x - 2y = 2$
5. $x^2 + y^2 + x - 7y + 11 = 0$
6. $20x^2 + 36y^2 < 405$
7. $3 \pm 3\sqrt{5}$ 8. $\frac{27}{2}$

అభ్యాసం 9.10

1) (i) (2, 3) (ii) (6, 0)

2) (i) (–6, 9) (ii) (–1, 7) (iii) (–4, 8)

3) $(1, -4)$

4) $(1, -2)$

5) (i) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ (ii) $(2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$ (iii) $(0, 0)$

6) $x^2 + 3xy - 2y^2 + 4x - y - 20 = 0$

7) $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

8) $8x^2 - 2y^2 = 9$

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) $\operatorname{cosec}\theta$ (b) $2\sin\frac{A+B}{2}$

2. ఇచ్చిన ఏ బిందువుల సమితీ త్రిభుజాన్ని ఏర్పచవు.

3. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

4. (a) 11 చ. యూనిట్లు (b) a^2 చ. యూనిట్లు

6. $\frac{51-5a}{3}$ 7. 29 చ.యూనిట్లు

8. (a) 0 (b) $-\frac{1}{6}$

9. $y = 3$ 11. (ii) మాత్రమే

12. (i) $-\frac{1}{8}$ (ii) 8 (iii) $-\frac{1}{8}$

14. (i) 4 (ii) -3 (iii) 3

15. $y^2 - 8y - 4x + 20 = 0$ 16. $x - y = 0$

17. $5x^2 + 5y^2 - 26ax + 5a^2 = 0$

18. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 5 = 0$

అధ్యాయం

10

సరళరేఖలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠాన్ని చదవడం వలన క్రింది విషయాలు తెలుస్తాయి.

- నిరూపక – అక్షాలకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖను సమీకరణం రాబట్టుట
- రేఖల వివిధ రూపాల సమీకరణాలను రాబట్టుట (వాలు – అంతరఖండము, బిందు–వాలు, రెండు బిందువులు, అంతరఖండము, పరామితి, అభిలంబం)
- ఇచ్చిన నియమాలను అనుసరించిపై రూపాలలోని రేఖా సమీకరణాలను కనుగొనుట.
- ఏకఘాత సమీకరణమే సరళరేఖ సమీకరణానికి సాధారణరూపం
- సాధారణ సరళరేఖా సమీకరణం క్రింది వాటిని తెలియజేస్తాయి.

  i) వాలు–అంతరఖండరూపం ii) అంతరఖండరూపం మరియు iii) అభిలంబరూపం
- వాలులు ఇచ్చినపుడు రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణం సూత్రాన్ని రాబట్టుట
- వాలు ఇచ్చినపుడు రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణంను కనుగొనుట
- రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగాను, లంబంగాను ఉండటానికి నియమాలను రాబట్టుట
- ఇచ్చిన రెండు సరళరేఖలు సమాంతరాలు / లంబాలా కనుగొనుట
- ఒక సరళరేఖ నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని రాబట్టుట
- ఒక సరళరేఖ ఇచ్చిన బిందువు గుండాపోతూ మరొక సరళరేఖకు సమాంతరంగా, లేదా లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణాన్ని రాబట్టుట

- ఒక బిందువు గుండా పోతూ

  i) సమాంతరంగా లేదా లంబంగా ఉన్న

  ii) X- అంతరఖండం; Y-అంతరఖండం ఇచ్చినపుడు

  iii) ఖండన బిందువు గుండా పోయే రెండు సరళరేఖలకు సరళరేఖ సమీకరణాలను వ్రాయండి?

- నిరూపక జ్యామితిని ఉపయోగించి వివిధ జ్యామితీయ ఫలితాలను రుజువు చేయుట.

పూర్వాకాంక్షితలు

- సరూప త్రిభుజాలు మరియు సర్వసమానత

పరిచయం

ఉన్నత పాఠశాల స్థాయి గణితంలో తలంలోని బిందువులను నిరూపకాలు అనిపిలిచే వాస్తవ సంఖ్యల క్రమ యుగ్మంతో సూచించడం, రెండు బిందువుల మధ్యదూరం, విభజన సూత్రము, శీర్షాల నిరూపకాల దృష్ట్యా త్రిభుజ వైశాల్యం, సరళ రేఖవాలు, ప్రాముణిక రూపంలో సరరేఖ సమీకరణము మరియు సరళరేఖకు విభిన్న రూపాలలో సమీకరణాలు, సరళరేఖలు సమాంతరము మరియు లంబాలు కావడానికి నియమాలు అనే ప్రాథమిక భావనలతో విద్యార్థికి పరిచయం ఉంది.

ఇప్పుడు మనము ఈ పాఠ్యాంశములో సరళరేఖకు విభిన్న రూపములలో సమీకరణాలు కనుగొంటాము. సరళరేఖకు సంబంధించిన మరిన్ని ఫలితాలను రాబడుతాం. ఈ ఫలితాలను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధిస్తాము.

10.1 అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ

నీవు ఒక గది నందు నిలబడి భుజాల వెంబడి చేతులు చాపితే దీనికి అనుగుణంగా క్షితిజంతో ఒక రేఖను గీచిన అది ఒక సమాంతర రేఖను సూచిస్తుంది. నిలబడిన వ్యక్తి క్షితిజానికి లంబంగా ఉన్నట్లు గమనించవచ్చు. దానిని బట్టి మనకు, సమాంతర రేఖ, లంబరేఖలను సులువుగా గుర్తించవచ్చు. ఈ పరిస్థితులలో సమాంతరంగా ఉన్న రేఖను X-అక్షం అని దానికి నిలువుగా ఉన్నదానిని Y-అక్షం అని అంటాం. X-అక్షానికి కుడివైపున ధనాత్మకమని, ఎడమవైపున రుణాత్మకమని Y-అక్షము ఎగువ భాగాన్ని ధనాత్మకమని, దిగువ భాగంను రుణాత్మకమని అంటాం.

నీ నుండి b- యూనిట్లదూరం ఉన్నరేఖ సమీకరణం $y = b$ X అక్షం నుంచి b యూనిట్లదూరంలో ఉంటే, అపుడు ఆ బిందువుపై క్షితిజరేఖపై ఉంటుంది. ఈ క్షితిజ రేఖపై ఉండే బిందువులు మాత్రమే $y = b$ సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తాయి. ఇదేవిధంగా X- అక్షానికి దిగువ బాగంలో ఉండి X- నుంచి b యూనిట్ల దూరం ఉండే క్షితిజ సమాంతర రేఖ సమీకరణం $y = b$ అవుతుంది. అనగా X అక్షం నుండి b యూనిట్ల (పరమూల్య) దూరంలో ఉండును.

$b > 0$ అయితే X-అక్షానికి పై భాగంలో ఉండును (X- అక్షానికి $\|$ గా)

$b < 0$ లో X-అక్షానికి దిగువ భాగంలో ఉండును.

$b = 0$ అయితే సరళరేఖ X-అక్షంపై ఉండును.

మరల నీకు కుడివైపున c యూనిట్ల దూరంలో X-అక్షం గుండాపోయే సరళరేఖ (Y-అక్షానికి సమాంతరం) అపుడు $x = c$ అవుతుంది.

c అనేది Y అక్షం నుండి పరమూల్య దూరం సమానంగా ఉంటుంది.

ఒకవేల $c > 0$ అయితే ఈ రేఖ Y అక్షానికి కుడివైపున ఉందనుకుందాం.

$c < 0$ అయితే ఈ రేఖ Y అక్షానికి ఎడమవైపున ఉండును. $c = 0$ అయితే ఈ రేఖ Y అక్షం పైన ఉండును.

ఉదాహరణ 10.1:

సరళరేఖకు (2, 3) బిందువు గుండాపోతూ i) X-అక్షానికి సమాంతరంగా ii) Y- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్నా ఏ సరళ సమీకరణమైనా $y = b$ రూపంలో ఉండును.

కావున ఇది (2, 3) గుండా పోతూ ఉంది. అపుడు $b = 3$ కావున రేఖ సమీకరణం $y = 3$ అవుతుంది.

ii) Y - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x = c$.

కావున ఇది (2, 3) గుండా పోతుంది. అప్పుడు $c = 2$ అవుతుంది. కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $x = 2$.

ఉదాహరణ 10.2:

ఒక బిందువు (-2, -3) గుండాపోతూ

i) X- అక్షానికి సమాంతరంగా

ii) Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన :

i) X - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $y = b$.

ఇది (−2, −3) గుండా పోతుంది. కావున $b = -3$

కావలసిన సమీకరణం $y = -3$ సరళరేఖ.

ii) Y - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x = c$.

ఇది (−2, −3) గుండా పోతుంది. కావున $c = -2$ అవుతుంది.

కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $x = -2$.

అభ్యాసం 10.1

1. మనము ఒక పేపరును చుట్టి వత్తడం వలన ఏర్పడిన ముడతలు ఏ విధంగా కనిపిస్తాయి.
2. a) X-అక్షం ధనదిశతో 45^0 కోణం చేసినపుడు

   b) Y-అక్షం ధనదిశతో 45^0 కోణం చేసినపుడు

   c) X-అక్షం ఋణదిశతో 45^0 కోణం చేసినపుడు

   సరళరేఖ చేసే వాలును కనుగొనుము.
3. (2, −3) మరియు (3, 4) బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.
4. (2, 5) మరియు (7, x) బిందువుల గుండా పోయే రేఖ వాలు '3' అయితే x విలువ ఎంత?
5. (−3, −4) బిందువు గుండా పోతూ

   a) X −అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న

   b) Y−అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణాలను కనుగొనుము.
6. (5, −3)బిందువు గుండా పోతూ X−అక్షానికి లంబంగా ఉన్న సరళ రేఖా సమీకరణంను కనుగొనుము.
7. (−3, −7) బిందువు గుండా పోతూ Y−అక్షానికి లంబంగా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణంను కనుగొనుము.

10.2 సరళరేఖా సమీకరణాన్ని వివిధ ప్రామాణిక రూపాలలో రాబట్టుట

మనము ఇంతకు ముందు ఒక సరళరేఖ వాలు, దాని నిమ్నత, రేఖలు అక్షాలకు సమాంతరంగా ఉండటం గూర్చి చదువుకున్నాము. x మరియు y ల మధ్య ఉన్న సంబంధం, బిందువు (x, y) రేఖ మీద ఉందా లేదా అనే విషయం, బిందువు నిరూపకాలు ఆ రేఖ సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తాయా లేదా అనేది ప్రశ్న?

x మరియు y ల మధ్య ఉన్న సంబంధం యాదృచ్ఛిక బిందువు నిరూపకాలు ఆ రేఖమీద ఉండి తృప్తి పరిస్తే అటువంటి దానిని సరళరేఖా సమీకరణం అంటాం. సరళరేఖ సమీకరణాలను వివిధ రూపాలలో క్రింది నియమాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని కనుగొనవచ్చును.

(a) ఒక రేఖ వాలు, y- అంతరఖండం ఇచ్చినపుడు

(b) ఒక రేఖ వాలు మరియు దత్త బిందువు గుండా పోయినపుడు

(c) ఒక రేఖ రెండు బిందువుల గుండా పోయినపుడు

(d) రేఖ నిరూపకాక్షలతో అంతరఖండాలు చేసినపుడు

(e) మూలబిందువు నుంచి రేఖకి గీసిన అభిలంబ పొడవు, అది x - అక్షంతో చేసే కోణం ఇచ్చినపుడు

(f) x-అక్షం ధనదిశలో 'α' కోణం చేస్తు దత్తబిందువు గుండా పోయినపుడు (పరామితి రూపం)

పై అన్ని సందర్భాలలో ఒక్కొక్క దాన్ని చర్చించుకుంటూ సరళరేఖ సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో కనుగొనుట.

(A) వాలు - అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖా సమీకరణం

సరళరేఖ AB X అక్షంతో θ కోణం చేస్తు, ఇది Y- అక్షాన్ని D వద్ద ఖండిస్తూ, OD అంతరఖండం OD = c ను (OY నుండి) చేస్తోంది. Y-అక్షం మీద చేసే అంతరఖండం OD = c అని పిలుస్తారు. AB, OX' ను T వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకొనూ AB మీద P(x, y) బిందువు అనుకొనుము. PM $\perp$ OX ను గీయుము.

అపుడు $OM = x$, $MP = y$

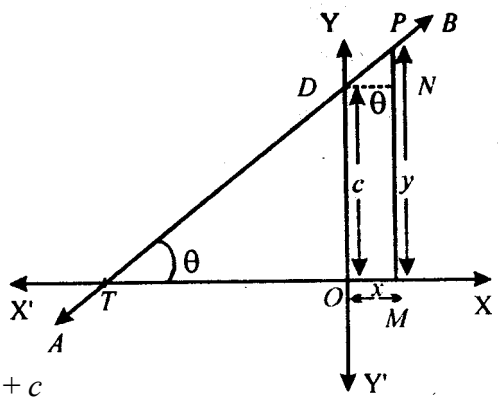
$DN \perp MP$ అయ్యేటట్లు గీయుము.

లంబకోణ త్రిభుజం DNP నుండి

$$\tan\theta = \frac{NP}{DN} = \frac{MP - MN}{OM}$$

$$\tan\theta = \frac{y - OD}{OM}$$

$$\tan\theta = \frac{y - c}{x}$$



పటం 14.1

$$x\tan\theta = y - c \Rightarrow y = x\tan\theta + c$$

$\tan\theta = m$(వాలు)

కావున $y = mx + c$

కావున AB రేఖ మీద ఉన్న ప్రతిబిందువు కు సమీకరణము నిజం. మరియు తలంలో ఏ ఇతర బిందువుకు ఈ రేఖ సమీకరణం నిజం కాదు.

గమనిక :

1. $c = 0$ అయితే $y = mx + c$ మూలబిందువు గుండాపోతుంది. ఆవిధంగా m వాలు కలిగి మూలబిందువు గుండాపోయే ఊర్ధ్వేతర రేఖ సమీకరణం : $y = mx$
2. $c = 0;\ m = 0$ అయితే రేఖ X-అక్షంతో ఏకీభవిస్తుంది. అపుడు రేఖా సమీకరణం రూపం : $y = 0$
3. $c \neq 0;\ m = 0$ అయితే రేఖ X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది మరియు సమీకరణ రూపం $y = c$ గా ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 10.3: వాలు 4; Y-అంతర ఖండం '0' గా గల రేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : ఇక్కడ $m = 4;\ c = 0$

వాలు-అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $y = mx + c$

పై విలువలను, సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా $y = 4x$ వచ్చును.

ఇది కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం.

ఉదాహరణ. 10.4: సమీకరణం $8x+3y=5$ యొక్క వాలు, Y- అంతరఖండంను కనుగొనుము.

సాధన : దత్త సమీకరణం $8x + 3y = 5$

$$y = -\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}$$

దీనిని $y = mx + c$ తో పోల్చగా (వాలు అంతరఖండరూపం)

$m = -\frac{8}{3}$ మరియు $c = \frac{5}{3}$

కావున సరళరేఖ వాలు = $-\frac{8}{3}$

Y- అంతరఖండం = $\frac{5}{3}$.

ఉదాహరణ. 10.5: X-అక్షం ధనదిశతో అపసవ్యదిశలో 120^0 కోణం చేస్తూ Y-అంతర ఖండం -2గా గల సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: రేఖ వాలు - అంతరఖండ రూపం నుండి

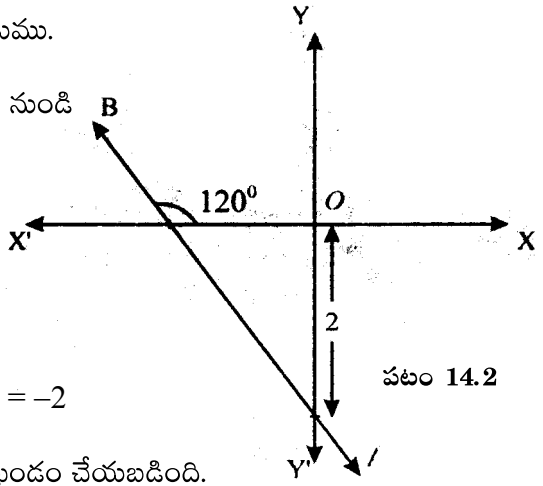
$y = x\tan 120^0 + (-2)$

$y = -\sqrt{3}\,x - 2$

లేదా $y + \sqrt{3}\,x + 2 = 0$

ఇక్కడ $m = \tan 120^0$ మరియు $c = -2$

$\because$ Y అక్షంపై రుణదిశలో అంతరఖండం చేయబడింది.



పటం 14.2

(B) బిందువు - వాలు రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

ఇక్కడ $A(x_1, y_1)$ బిందువు గుండా పోతూ m వాలు గల్గిన సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుట.

$P(x, y)$ అనేది ఇచ్చిన సరళరేఖ మీద బిందువు A కాక, వేరొక బిందువు అనుకొనుము.

$A(x_1, y_1)$ మరియు $P(x, y)$ బిందువులను కలిపే రేఖ వాలు

$(\tan\theta)$ అయితే

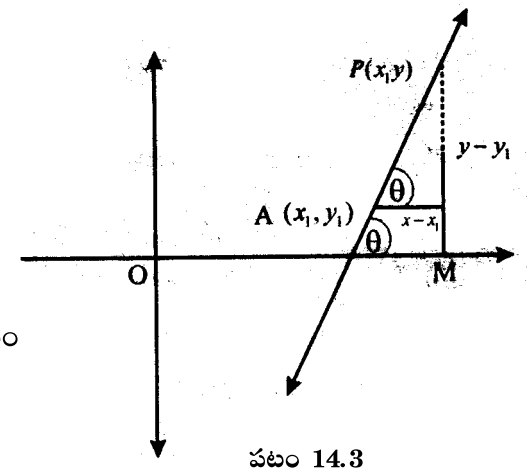
$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

రేఖ AP వాలు m అని ఇచ్చినారు.

$$\therefore m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖా సమీకరణం

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



పటం 14.3

గమనిక: Y–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖవాలు m నిర్వచించబడదు. $A(x_1, y_1)$ బిందువుగుండా పోతూ Y–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణం బిందువు వాలు రూపంలో ఇచ్చిన సమీకరణం కాదు. దీన్ని నుండి ఏ ఇబ్బంది లేదు. ఏదైన ఒక సరళరేఖ ఇంకొక రేఖకు మధ్యగత రేఖ అయినపుడు దాని మీద x_1 బిందువు ఉంటే అటువంటి రేఖా సమీకరణం $x = x_1$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 10.6: $(2, -1)$ బిందువు గుండా పోతూ వాలు $\frac{2}{3}$ గా గల సరళరేఖా సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: బిందువు వాలు రూపంలో గల సరళ రేఖ సమీకరణంలో $x_1 = 2;\ y_1 = -1;$ మరియు $m = \frac{2}{3}$ ప్రతిక్షేపించగా వచ్చునది.

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow\ y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}\ \ \therefore \text{ ఇదియే కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం.}$$

(C) రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ రెండు వేర్వేరు బిందువులు అనుకొనుము. ఈ రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ వాలు m అయితే

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

కావున బిందువు - వాలు రూపంలో ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ (x - x_1)$$

ఇదియే రెండు బిందువుల గుండాపోయే సరళరేఖ సమీకరణం.

ఉదాహరణ 10.7: (3, −7) మరియు (−2, −5) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \text{...(i)}$$

కావున $x_1 = 3; y_1 = -7,$ మరియు $x_2 = -2, y_2 = -5$

సమీకరణం (i) నుండి

$$y + 7 = \frac{-5 + 7}{-2 - 3}(x - 3)$$

లేదా $$y + 7 = \frac{2}{-5}(x - 3)$$

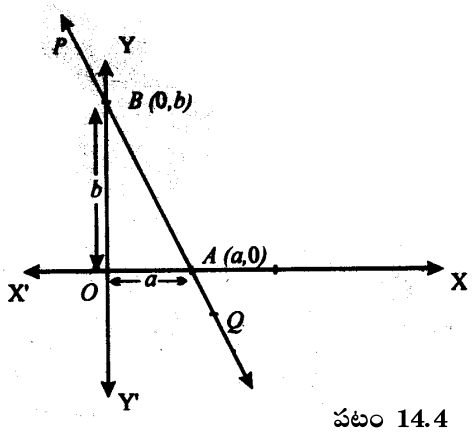
లేదా $2x + 5y + 29 = 0$

(D) అంతరఖండాల రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

సరళరేఖ, నిరూపకాక్షాలపై a, b అంతర ఖండాలు చేస్తే ఏర్పడే సరళ సమీకరణం కనుగోనుట

PQ అనే సరళరేఖ X-అక్షాన్ని A వద్ద, Y-అక్షాన్నే B వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకొనుము.

OA = a; OB = b అనుకొనుము.



పటం 14.4

అపుడు A నిరూపకాలు $(a, 0)$, B నిరూపకాలు $(0, b)$ అవుతాయి.

A మరియు B బిందువులను కలిపే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

లేదా $y = \frac{-b}{a}(x-a)$ లేదా $\frac{y}{b} = \frac{-x}{a} + 1$

లేదా $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ నిరూపకాక్షాలమీద a, b లు అంతరఖండాలుగా గల సరళరేఖ సమీకరణం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 10.8: X- అంతర ఖండం 5, Y- అంతరఖండం −3 గా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన: X - అంతర ఖండం $a = 5$

Y - అంతర ఖండం $b = -3$

కావలసిన సమీకరణం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$3x - 5y - 15 = 0$$

ఉదాహరణ 10.9: (3, 4) బిందువు గుండాపోతూ నిరూపకాక్షలతో సమాన శూన్యేతర అంతరఖండాలు చేసే (వ్యతిరేఖ గుర్తులు కల్గి ఉన్నాయి) సరళ రేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన :

X- అంతరఖండం a

మరియు Y-అంతరఖండం $-a$ గా గల సరళరేఖ సమీకరణాలు

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$$

$$x - y = a \qquad \text{(i)}$$

(3, 4) బిందువు (i) గుండా పోయినచో

$3 - 4 = a$ లేదా $a = -1$

కావున, కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $x - y = -1$

లేదా $x - y + 1 = 0.$

ఉదాహరణ 10.10: (−1, 1) బిందువు గుండాపోతూ X− అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను రాబట్టుము.

సాధన: X− అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖ వాలు శూన్యం.

కావున బిందువు − వాలు రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 0[x - (-1)]$

$y - 1 = 0$ ఇదియే కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం.

ఉదాహరణ 10.11: $3x - 2y + 12 = 0$ సమీకరణం నిరూపకాక్షలతో చేసే అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

సాధన : ఇచ్చిన రేఖ సమీకరణం $3x - 2y = -12$

-12 తో ఇరువైపుల భాగించగా వచ్చునది.

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$$

దీన్నే ప్రామాణిక అంతరఖండ రూపంలో సమీకరణాలతో పోల్చగా $a = -4;\ b = 6$

$\therefore$ కావున X − అంతరఖండం −4; Y− అంతరఖండం 6 అవుతాయి.

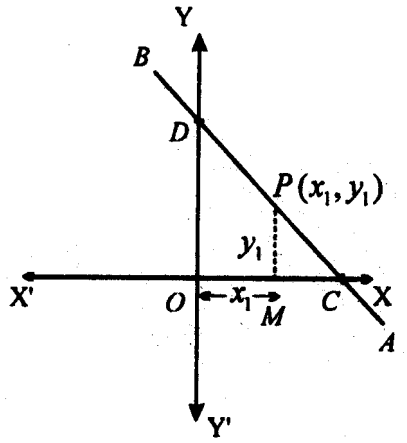
ఉదాహరణ 10.12: ఒక సరళరేఖ నిరూపకాక్షాల మధ్య ఏర్పరచే రేఖఖండం మధ్య బిందువు $P(x_1, y_1)$ అయితే, ఆ సరళరేఖ సమీకరణాన్నే కనుగొనుము.

సాధన: AB రేఖ నిరూపకాక్షల మధ్య చేసే అంతరఖండాలు CD రేఖా ఖండంపై $P(x_1, y_1)$ మధ్యబిందువు అనుకోండి.

$PM \perp OX$ గీయండి.

$\therefore$ $OM = x_1,\ MP = y_1$

$\therefore$ $OC = 2x_1,\ OD = 2y_1$ ఇప్పుడు



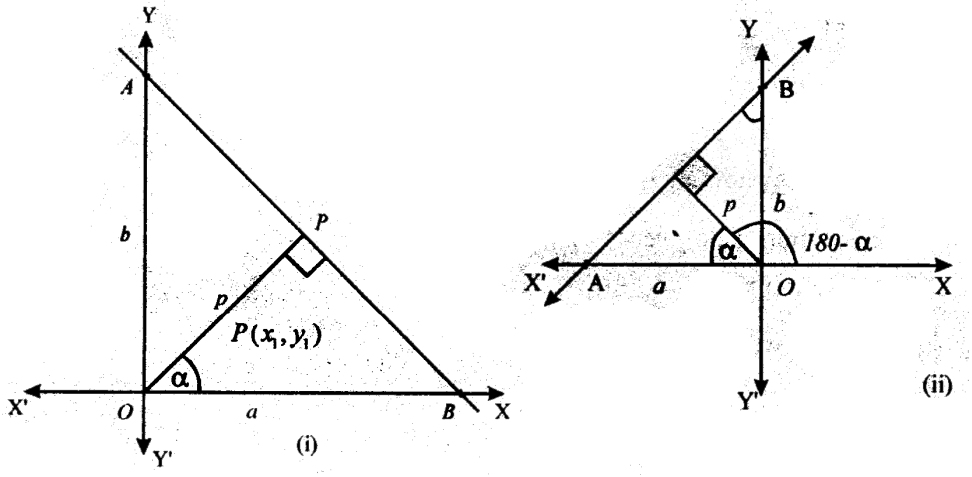
పటం 14.5

అంతరఖండం రూపంలో సమీకరణం $\frac{x}{2x} + \frac{y}{2y_1} = 1$

లేదా $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2.$ ఇదియే కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం

(E) సరళరేఖ సమీకరణానికి అభిలంబరూపం

ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుంచి P దూరంలో ఉండి, మూలబిందువు నుంచి దానికి గీసిన అభిలంబ కిరణం ధన X- అక్షంతో అపసవ్యదిశలో α కోణం చేస్తుంది.



పటం 10.6

(i) X- అంతరఖండం a, Y-అంతరఖండం b గా గల AB అనే సరళరేఖ నిరేపక అక్షాలను ఖండిస్తుంది.

మూలబిందువు 'O' నుండి AB సరళరేఖ మీదికి OP అనే లంబాన్నే గీయుము.
మరియు $\angle POB = \alpha$ (పటం 10.6(i) చూడండి)

$\therefore \frac{P}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = P\sec\alpha$

మరియు $\frac{P}{b} = \sin\alpha \Rightarrow b = P\,\text{cosec}\,\alpha$

AB సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{P\sec\alpha} + \frac{y}{P\,\text{cosec}\,\alpha} = 1$$

లేదా $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

$\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = P.$

(ii) $\frac{P}{a} = \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ (పటం 10.6 నుండి)

$\Rightarrow a = -P\sec\alpha$ అదేవిధంగా $b = P\,\text{cosec}\,\alpha.$

AB సరళరేఖ సమీకరణం $\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P.$$

గమనిక: (1) మూలబిందువు నుంచి సరళరేఖ మీదికి గీసిన లంబం పొడవు P, ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకం.

(2) మూలబిందువు నుంచి సరళరేఖకు గీసిన అభిలంబ కిరణం మరియు ధన X-అక్షంతో అపసవ్యదిశలో చేసే కోణం 'α'.

ఉదాహరణ 10.13: ఒక సరళ రేఖ మూలబిందువు నుంచి $\sqrt{2}$ యూనిట్ల దూరంలో ఉండి, మూలబిందువు నుంచి ఆ రేఖకు గీసిన అభిలంబకిరణం X- అక్షం దిశతో 135^0 కోణం చేస్తే ఆ సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: దత్త సరళరేఖ ప్రామాణిక రూపం

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$$

$P = \sqrt{2}$; $\alpha = 135^0$ తో

లేదా $\frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

లేదా $-x + y - 2 = 0$

లేదా $x - y - 2 = 0$ ఇదియే కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం.

ఉదాహరణ 10.14: ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుంచి '6' యూనిట్ల దూరంలో ఉండి మూలబిందువు నుంచి X రేఖకు గీసిన అభిలంబ కిరణం X- అక్షం ధన దిశతో 30^0 కోణం చేస్తే ఆ సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: ఇక్కడ $\alpha = 30^0$; $P = 6$

$\therefore$ సరళరేఖ సమీకరణం $x\cos 30^0 + y \sin 30^0 = 6$

లేదా $x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ లేదా $\sqrt{3}x + y = 12$

(F) పరామితి రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం

$Q(x_1, y_1)$ బిందువు గుండా పోతూ ధన X-అక్షంతో అపసవ్యదిశలో α కోణం చేసే సరళరేఖ సమీకరణం రూపం

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha} = r$$

సరళరేఖ మీద (x, y) బిందువు నుంచి

$Q(x_1, y_1)$ బిందువు దూరాన్ని $|r|$ సూచిస్తుంది.

AB అనే సరళరేఖ $Q(x_1, y_1)$ బిందువు గుండా పోతూ ధన X-అక్షంతో చేసే కోణం 'α' అయితే

ఆరేఖ మీద $P(x, y)$ ఏదైనా బిందువు అయితే $QP = r$ అనుకొనుము.

QL, PM అనే లంబాలను X- అక్షం మీదకు గీయండి.

మరియు $QN \perp PM$

లంబకోణ త్రిభుజం ΔPNQ నుండి

$$\cos\alpha = \frac{QN}{QP},\ \sin\alpha = \frac{PN}{QP}$$

కాని $QN = LM = ON - OL$

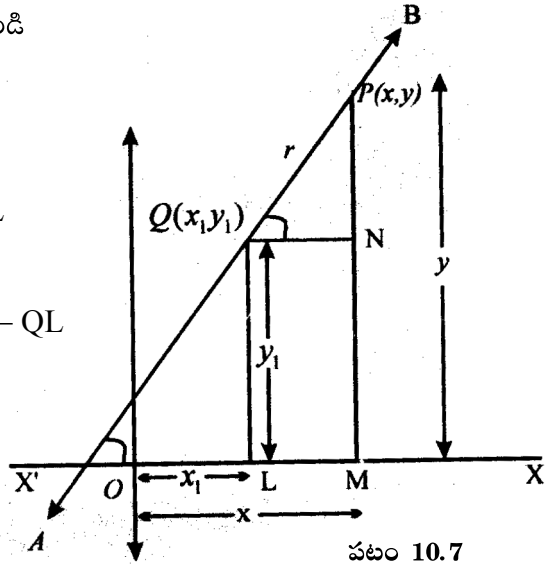
$= x - x_1,$

$PN = PM - MN = PM - QL$

$= y - y_1$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{x-x_1}{r},\ \sin\alpha = \frac{y-y_1}{r}$$

లేదా $\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y-y_1}{\sin\alpha} = r$



పటం 10.7

$\therefore$ ఇదియే కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం.

గమనిక: 1. సరళరేఖ మీద $P(x, y)$ బిందువును $(x = x_1 + r\cos\alpha,\ y = y_1 + r\sin\alpha)$ లేదా $(x_1 + r\cos\alpha,\ y_1 + r\sin\alpha)$ లు నిరూపకాలయ్యేటట్లు ఉంటుంది. ఈ నిరూపకాలు r విలువపై ఆధారపడి వుంటాయి. ఈ చలరాశి 'r'ను పరామితీ అంటాము.

2. $x = x_1 + r\cos\alpha,\ y = y_1 + r\sin\alpha$ సమీకరణాలను సరళరేఖ పరామితీయ సమీకరణాలంటాం.

3. సరళరేఖకు 'r' విలువ ఒకవైపున ఉన్న బిందువులకు ధనాత్మకం మరియు వేరొకవైపున అన్ని బిందెవెలకు రుణాత్మకంగా ఉండును.

ఉదాహరణ 10.15: సరళరేఖ $A(-1, -2)$ బిందువు గుండా పోతూ X- అక్షం ధనదిశతో 30^0 కోణం చేసే సరళరేఖ పరామితీయ రూపంలో సమీకరణాలను కనుగొనుము. మరియు ఆ సరళరేఖపై A నుంచి 2 యూనిట్ల దూరంలో గల ఒక బిందువును కనుగొనుము.

సాధన: ఇక్కడ $x_1 = -1,\ y_1 = -2$ మరియు $\alpha = 30^0$

$\therefore$ సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x+1}{\cos 30^0} = \frac{y+2}{\sin 30^0}$$

లేదా $$\frac{x+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y+2}{\frac{1}{2}}$$

$$AP = 2, \quad r = 2$$

$$\frac{x+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y+2}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} - 1, \; y = -1$$

కావున P నిరూపకాలు $\left(\sqrt{3} - 1, -1\right)$.

ఉదాహరణ 14.16: సరళరేఖ (1, 2) బిందువు గుండా పోతూ X- అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తుంది. $2x - 3y + 9 = 0$ రేఖ నుండి బిందువుకు గల దూరాన్నే కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ (1, 2) బిందువు గుండాపోతూ X- అక్షంతో 45 కోణం చేసే సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x-1}{\cos 45^0} = \frac{y-2}{\sin 45^0} = r$$

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = r$$

ఏదైన బిందువు $\left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}}, \; 2 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ గా ఉంటుంది.

ఇది $2x - 3y + 9 = 0$ రేఖ మీద ఉంటుంది.

$$2\left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(2 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) + 9 = 0$$

లేదా $\quad 2 - 6 + 9 - \frac{r}{\sqrt{2}} = 0$

లేదా $\quad r = 5\sqrt{2}$

కావున కావలసిన దూరం $5\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

అభ్యాసం 10.2

1. Y-అంతరఖండము -2, సరళ వాలు 2గా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
   (b) రేఖ $4x+3y=6$ కు నిరూపకాక్షలమీద చేసే అంతరఖండాలు, వాలును రాబట్టుము.
2. X-అక్షం ధనదిశలో 120^0 కోణం చేసే ఒక సరళరేఖ Y- అక్షం రుణదిశలో $\frac{1}{\sqrt{3}}$ అంతరఖండం చేసే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
3. రేఖ $3x-6y=12$ కు వాలు మరియు Y- అంతరఖండమును కనుగొనుము.
4. సరళరేఖ (−7, 4) గుండా పోతూ -3/7 వాలుగా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
5. సరళరేఖ (1, 2) గుండా పోతూ నిరూపకాక్షల మీద సమాన అంతరఖండాలు చేసే సరళరేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.
6. సరళరేఖ (2, 3) గుండా పోతూ బిందువులు (2, −2) మరియు (6, 4)లను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుట.
7. (a) (3, −4) మరియు (−4, 3) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
   (b) A(3, 2), B(11, 8), C(8, 12) మరియు D(0, 6)లు దీర్ఘతురస్రం ABCD యొక్క శీర్షాలు. అయితే ఈ దీర్ఘచతురస్ర కర్ణాల సమీకరణాలను కనుగొనుము.
8. బిందువులు (2, 0), (0, 2) మరియు (4, 6)లు త్రిభుజ శీర్షాలు అయితే వాటి మధ్యగత రేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.
9. X- అంతర ఖండం 3 యూనిట్లు, Y- అంతరఖండం 2 యూనిట్లు వద్ద సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలను ఖండిస్తే ఏర్పడే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
10. నిరూపకాక్షల మధ్య చేసే సరళరేఖాఖండపు మధ్యబిందువు (1, 3) అయితే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
11. (3, −2) బిందువు గుండా పోతూ X, Y- అంతరఖండాలు (ధన అంతర ఖండాలు) 4:3 నిష్పత్తిలో గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుక్కోండి.
12. ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుంచి 2యూనిట్ల దూరంలో ఉండి, మూలబిందువు నుంచి ఆ రేఖకు గీసిన అభిలంబ కిరణం X- అక్షం ధనదిశలో 45^0 కోణం చేస్తే ఆ సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

13. నిరూపకాక్షాల మీద a, b లు అంతరఖండాలు చేస్తే మూలబిందువు నుంచి సరళరేఖకు గల లంబదూరం 'P' అయితే $\frac{1}{P^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

14. A(2, 1) బిందువు గుండాపోతూ X- అక్షం ధనదిశతో 45^0 కోణం చేసే సరళరేఖ పరామితీయ సమీకరణాలను రాయండి. A నుండి 1 యూనిట్ దూరంలో గల P నిరూపకాలను కనుగొనుము.

10.3 సరళరేఖ సమీకరణానికి సాధారణ రూపం

రెండు చరరాశులు x మరియు y లలో ఏకఘాత సమీకరణం $Ax + By + C = 0$ అని మనకు తెలుసు. దీనిని మనము రేఖాచిత్రాల ద్వారా సూచింపవచ్చును. అదేవిధంగా ఈ క్రింది మూడు సందర్భాలు అవసరం.

సందర్భం 1. (A మరియు Bలు రెండు శూన్యానికి సమానమైనప్పుడు)

ఈ సందర్భంలో C విలువ కూడా శూన్యం అవుతుంది. మరియు సమీకరణం ఉండదు.

సందర్భం 2: ($A = 0$ మరియు $B \neq 0$ అయినపుడు)

ఈ సందర్భంలో సమీకరణం (1) నుండి

$$By + C = 0 \text{ అగును.}$$

లేదా $y = -\frac{C}{B}$ అవుతుంది.

అదేవిధంగా X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటూ రేఖపై ఉన్న అన్ని బిందువులను తృప్తి పరుస్తుంది. మరియు రేఖపై ఉన్న ప్రతి బిందువు Y నిరూపకం $-\frac{C}{B}$ అవుతుంది. కావున ఇది ఒక సరళరేఖ సమీకరణం. సందర్భం $B = 0$ మరియు $A \neq 0$ దాని అనురూపంగా ఉంటుంది.

సందర్భం 3: ($A \neq 0$ మరియు $B \neq 0$ అయినపుడు)

సమీకరణం 1ని లో సాధించవచ్చును.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ఇది ఒక సరళరేఖ వాలు $-\frac{A}{B}$ అని మరియు Y - అంతరఖండం $-\frac{C}{B}$ కి సమానమని సూచిస్తుంది.

10.3.1 సరళరేఖ సాధారణ సమీకరణంను వివిధ రూపాలలోకి మార్చు

$Ax + By + C = 0$ అనే సాధారణ సమీకరణాన్ని ఇచ్చినపుడు వేర్వేరు రూపాలలోకి మార్చుట గురించి తెలుసుకొందాం.

10.3.2 వాలు – అంతరఖండరూపంలోకి మార్చుట

x మరియు y లలో ఏకఘాత సమీకరణం $Ax + By + C = 0$ ఇచ్చినారు. మనం సరళరేఖ వాలు మరియు Y– అంతరఖండం రూపం గుర్తు చేసుకుని

సమీకరణాన్ని మార్పు చేద్దాం.

$Ax + By + C = 0$ ను

$By = -Ax - C$

లేదా $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ($B \neq 0$ ఇచ్చినపుడు)

ఇదియే కావలసిన రూపం.

కావున వాలు = $-\frac{A}{B}$, Y – అంతరఖండం = $-\frac{C}{B}$.

ఉదాహరణ 10.17 : $x + 7y - 4 = 0$ అనే సమీకరణాన్ని వాలు – అంతరఖండం రూపంలోకి మార్చుట

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణం $x + 7y - 4 = 0$

లేదా $7y = -x + 4$

లేదా $y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$

ఇది వాలు – అంతరఖండ రూపంలో ఉంది.

ఉదాహరణ 10.18 : సరళరేఖ $x + 4y - 3 = 0$ యొక్క వాలు, Y– అంతరఖండంను కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం

$x + 4y - 3 = 0$

లేదా $4y = -x + 3$

లేదా $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

వాలు – అంతరఖండ రూపంలో పోల్చగా వచ్చునది.

వాలు $= -\frac{1}{4}$, Y–అంతరఖండం = $\frac{3}{4}$.

10.3.3 అంతరఖండం రూపంలోకి మార్చుట

x మరియు y లలో ఏకఘాత సమీకరణం

$$Ax + By + C = 0 \qquad ...(i)$$

(i)ని అంతరఖండ రూపంలోకి మార్చగా

$$Ax + By = -C$$

లేదా $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$

లేదా $\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1 \quad (A \neq 0, B \neq 0$ఇచ్చినపుడు$)$

ఇదియే రూపాంతరం చెందిన సమీకరణం

కావున X – అంతరఖండం $= -\frac{C}{A}$

Y– అంతరఖండం $= -\frac{C}{B}$ గుర్తించడమైంది.

ఉదాహరణ 10.19: సరళరేఖ $3x + 5y = 7$ను అంతరఖండం రూపంలోకి మార్చి అది నిరూపకాక్షలపై చేసే అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణం $3x + 5y = 7$

లేదా $\frac{3}{7}x + \frac{5}{7}y = 1$

లేదా $\frac{x}{\left(\frac{7}{3}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{7}{5}\right)} = 1$

$\therefore$ X – అంతరఖండం = $\frac{7}{3}$; Y– అంతరఖండం = $\frac{7}{5}$.

ఉదాహరణ 10.20: $3x-2y=5$ సరళరేఖ యొక్క x మరియు y అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

సాధన: దత్త సమీకరణం

$$3x-2y=5$$

లేదా $$\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}y=1$$

లేదా $$\frac{x}{\left(\frac{5}{3}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{5}{2}\right)}=1$$

కావున x- అంతరఖండం $=\frac{5}{3}$;

y - అంతరఖండం $=-\frac{5}{2}$.

10.3.4 అభిలంబరూపంలోకి మార్చుట

x మరియు y లలో ఏకఘాత సమీకరణం

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{...(i) అనుకొనుము.}$$

అభిలంబ రూపంలోకి మార్చుటకు ఇచ్చిన సమీకరణం (i)ని రూపాంతరం చేయగా

$$Ax + By = - C$$

ఇరువైపుల λ చే గుణించగా

$$\lambda Ax + \lambda By = -\lambda C \qquad \text{...(ii)}$$

$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$ అయ్యేటట్లు λని ఎంచుకొనగా

లేదా $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (ధనాత్మక గుర్తును తీసుకొనగా)

λ యొక్క విలువను (ii)లో ప్రతిక్షేపించగా వచ్చునది

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{...(iii)}$$

ఇది (i) కి కావలసిన అభిలంబరూపం యొక్క రూపాంతరం. రెండు సందర్భాలలో Cకి ధన లేదా రుణ గుర్తు ఉన్నప్పుడు

(i) $C < 0$ అయితే (ii)వ సమీకరణ కావలసిన రూపం

(ii) $C > 0$ అయితే (iii)వ సమీకరణం కుడిభాగం రుణాత్మకం సమీకరణం (iii)ను -1చే ఇరువైపుల గుణించగా

$\therefore$ కావలసిన రూపం

$$-\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} - \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

కావున మూలబిందువు నుంచి లంబదూరం $= \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

X-అక్షంతో ధనదిశలో చేసే లంబం యొక్క కోణం విలువ

$$\cos\theta = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

లేదా $$\sin\theta = \left[\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]$$

$C > 0$ అయితే ఎగువ గుర్తును తీసుకొంటుంది.

$C < 0$ అయితే దిగువ గుర్తును తీసుకొంటుంది.

$C = 0$ అయితే సరళరేఖ మూలబిందువు గుండా పోతుంది.

మరియు మూలబిందువు నుండి సరళరేఖకు లంబం ఉండదు.

పై మూడు సందర్భాల సహాయంతో మనం ఇలా చెప్పగలం.

A మరియు B లు ఒక దాని తర్వాత ఒకటి శూన్యం కానట్లైతే x మరియు y లలో ఏకఘాత సమీకరణం ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది.

పై ప్రవచనం విపర్యంగా సత్యమా? విపర్యంగా పై ప్రవచనం చెప్పునది ప్రతి సరళరేఖ x, y లలో ఏకఘాత సాధారణ సమీకరణంను సూచిస్తుంది.

ఈ పాఠ్యంశం నందు మనము వివిధ రూపాలలో ఉన్న సమీకరణాలను గూర్చి చదువుకున్నాము.

ఉదాహరణకు కొన్నింటిని తీసుకుంటే $y = mx + c$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ మరియు $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ అన్నియు x మరియు y లలో ఏకఘాత సమీకరణాలు. వరసగా వీటిని తిరిగి మార్చి వ్రాయగా $b - mx - c = 0$, $bx + ay - ab = 0$ మరియు $x \cos \alpha + y \sin \alpha - P = 0$ కావున ఈ సమీకరణాలన్ని x మరియు y లలో మార్పు చెందిన ఏకఘాత సమీకరణాలు. కావున మనము ఇలా చెప్పగలం.

"ప్రతి సరళరేఖ x మరియు y లలో ఒక ఏకఘాత సాధారణ సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది".

ఉదాహరణ 10.21: సమీకరణం $x + \sqrt{3}y + 7 = 0$ ను అభిలంబ రూపంలోకి మార్చుము.

సాధన: దత్త రేఖ సమీకరణం

$$x + \sqrt{3}y + 7 = 0 \qquad ...(i)$$

(i)ని సరళరేఖ సాధారణ సమీకరణం

$Ax + By + C = 0$ తో పోల్చగా

$A = 1$ మరియు $B = \sqrt{3}$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 2$$

సమీకరణం(i) 2 చేత భాగించగా వచ్చునది.

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{7}{2} = 0$$

లేదా $$\left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y - \frac{7}{2} = 0$$

లేదా $$x\cos\frac{4\pi}{3} + y\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{7}{2}$$

$\cos \theta$, $\sin \theta$ లో మూడో పాదంలో రుణాత్మకం కావున 'θ' అనేది మూడోపాదంలో ఉండును. కావున ఇది ఒక సరళరేఖ యొక్క అభిలంబ రూపాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 10.22: మూలబిందువు నుండి $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ సరళరేఖకు గల లంబదూరం కనుగొనుము. మూలబిందువు నుండి సరళరేఖకు అభిలంబ రేఖ కోణంను కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణం $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$

ఇరువైపులా $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}$ తో లేదా 2చే భాగించగా వచ్చునది

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+1=0$$

లేదా $$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=-1$$

ఇరువైపులా (-1)చే గుణించగా

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=1$$

లేదా $$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}=1$$

ఇక్కడ $\cos\theta$ విలువ రెండోపాదంలో రుణాత్మకం

$\sin\theta$ విలువ రెండపాదంలో ధనాత్మకం

కావున θ అనేది రెండో పాదంలో ఉండును.

$\therefore$ మూలబిందువు నుండి సరళరేఖలకు గీసిన లంబము యొక్క నిమ్నత లేదా కోణం విలువ 150^0; మరియు దూరం 1కి సమానం.

ఉదాహరణ 14.23: సరళరేఖ (3, 1) బిందువు గుండాపోతూ, $3x+4y=12$ ను ఖండిస్తుంది. అయితే ఆ సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొని దత్త రేఖ నిరూపకాక్షలతో చేసే అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

సాధన: మొదట $3x + 4y = 12$ అనే సరళరేఖ నిరూపకాక్షలతో చేసే అంతరఖండాలను కనుగొందాం.

దత్తరేఖ: $3x + 4y = 12$

లేదా $$\frac{x}{\frac{12}{3}}+\frac{y}{\frac{12}{4}}=1$$

$\therefore$ కావున వరుసగా x - అంతరఖండం 4; y - అంతరఖండం -3 అని తెలుస్తుంది.

సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలపై బిందువులు A(4, 0) మరియు B(0, 3) వద్ద కలుస్తుంది.

$\therefore$ AB మధ్యబిందువు $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ కావున బిందువులు (3, 1) మరియు $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ ల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

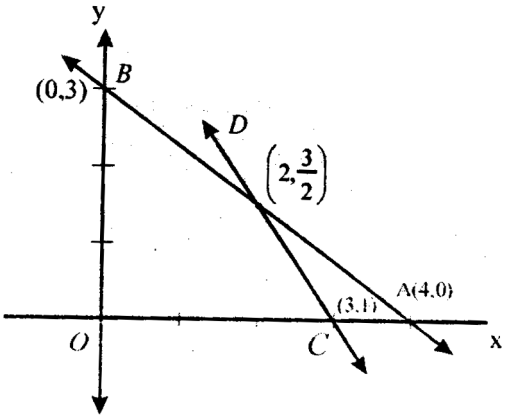
$$y - y_1 = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 - 3}\ (x - 3)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\ (x - 3)$$

లేదా $2(y - 1) + (x - 3) = 0$

లేదా $2y - 2 + x - 3 = 0$

లేదా $x + 2y - 5 = 0$



పటం 10.8

ఉదాహరణ 10.24: బిందువులు (8, 7) మరియు (6, 9) గుండా పోయే రేఖ నిరూపకాక్షాలతో సమాన అంతరఖండాలు చేస్తుంది అని చూపుము.

సాధన: (8, 7) మరియు (6, 9) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$$

$$y - 7 = \frac{9 - 7}{6 - 8}\ (x - 8)$$

లేదా $y - 7 = -(x - 8)$

లేదా $x + y = 15$

లేదా $\frac{x}{15} + \frac{y}{15} = 1$

కావున, రెండు అంతరఖండాలు '15'.

ఉదాహరణ 10.25: (−5, 1) మరియు (1, −3) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ (3, 4) మరియు (7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని ఏ నిష్పత్తి విభజిస్తుందో కనుగొనుము.

సాధన: C(−5, 1) మరియు D(1, −3) బిందువుల గుండాపోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - 1 = \frac{-3 - 1}{1 + 5}\ (x + 5)$$

లేదా $y-1=\frac{-4}{6}(x+5)$

లేదా $3y-3=-2x-10$

లేదా $2x+3y+7=0$

A(3, 4) మరియు B(7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని రేఖ (i) విభజించే బిందువు అనుకొనుము.

A(3, 4) మరియు B(7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖను సరళరేఖ (i) $\lambda : 1$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు P నిరూపకాలు

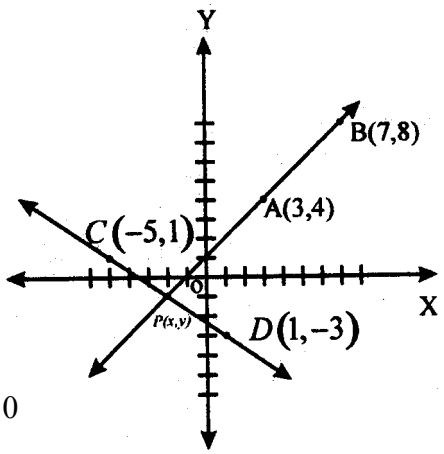
$$\left(\frac{7\lambda+3}{\lambda+1}, \frac{8\lambda+4}{\lambda+1}\right)$$

P బిందువు సరళరేఖ (i) మీద ఉంది కావున

$$2\left(\frac{7\lambda+3}{\lambda+1}\right)+3\left(\frac{8\lambda+4}{\lambda+1}\right)+7=0$$

$$\Rightarrow 14\lambda+6+24\lambda+12+7\lambda+7=0$$

$$\Rightarrow 45\lambda+25=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{5}{9}$$



పటం 10.9

$\therefore$ (−5, 1) మరియు (1, −3) బిందువులను కలిపే సరళరేఖ, (3, 4) మరియు (7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని బాహ్యంగా 5:9 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

10.3.5 రెండు సరళ రేఖల ఖండన బిందువు

సిద్ధాంతము: $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ సమీకరణాలు రెండు ఖండన రేఖలను సూచిస్తే వాటి ఖండన బిందువు నిరూపకాలు.

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$$

ఉపపత్తి: దత్త సరళరేఖలు $a_1x+b_1y+c_1=0$ ...(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ ...(2)

ఈ సరళరేఖలు ఖండించుకుంటున్నాయి. కావున వాలులు సమానం కాదు.

$$\frac{-a_1}{b_1} \neq \frac{-a_2}{b_2} \Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

ఖండన బిందువు $P(\alpha, \beta)$ అనుకుందాం. అపుడు

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \qquad ...(3)$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \qquad ...(4)$$

గుణకార పద్ధతి నుండి

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & 1 & \\ b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\beta}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \beta = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

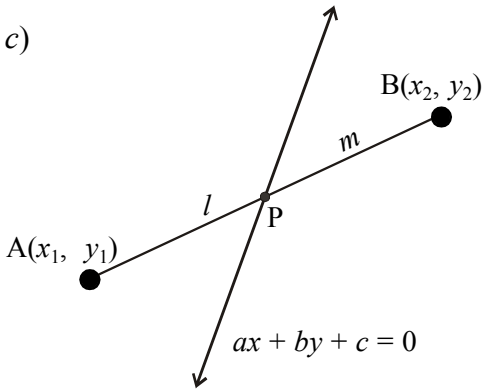
$$\therefore \text{ ఖండన బిందువు } (\alpha, \beta) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

10.3.6 సిద్ధాంతము: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని సరళరేఖ $ax + by + c = 0$ విభజించే నిష్పత్తి

$$-(ax_1 + by_1 + c) : (ax_2 + by_2 + c)$$

ఉపపత్తి: $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని

$ax + by + c = 0$ సరళరేఖ P వద్ద విభజించే నిష్పత్తి $l : m$ అనుకుందాం.



పటం. 10.10

$$P = \left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$$

P బిందువు $ax + by + c = 0$ సరళరేఖపై ఒక బిందువు

కావున $a\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}\right) + b\left(\frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right) + c = 0$

$\Rightarrow \quad a(lx_2 + mx_1) + b(ly_2 + my_1) + c(l + m) = 0$

$l(ax_2 + by_2 + c) + m(ax_1 + by_1 + c) = 0$

కాబట్టి $\quad l : m = -(ax_1 + by_1 + c) : (ax_2 + by_2 + c)$

గమనిక:

(i) $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని X-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి - $y_1 : y_2$

(ii) $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని Y-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి - $x_1 : x_2$

10.3.7 ఖండన రేఖలు (లేదా) అనుషక్త రేఖలు

మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రేఖలకు ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉంటే ఆ రేఖలను అనుషక్తరేఖలు లేదా ఖండన రేఖలు అంటాం. ఉమ్మడి బిందువును అనుషక్త బిందువు అంటాం.

10.3.7(1) అనుషక్త రేఖలు కావడానికి నియమము

సిద్ధాంతము : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3$ మూడు సరళరేఖలు. వీటిలో ఏ రెండు సమాంతరం కావని అనుకుందాం. అప్పుడు ఈ రేఖలు అనుషక్తాలు కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము.

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

ఉపపత్తి: దత్త సరళరేఖలు $\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad ...(1)$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad ...(2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \qquad ...(3)$$

(2) మరియు (3) ల ఖండన బిందువు

$$P\left(\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \frac{c_2a_3 - c_3a_2}{a_2b_3 - a_3b_2}\right)$$

దత్తరేఖలు అనుషక్తాలు

$\Leftrightarrow$ P బిందువు (1) పై ఉంటుంది.

$$\Leftrightarrow a_1\left(\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}\right) + b_1\left(\frac{c_2a_3 - c_3a_2}{a_2b_3 - a_3b_2}\right) + c_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

10.3.8 సరళరేఖల కుటుంబం

సిద్ధాంతము : $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ రెండు ఖండనరేఖలు అనుకుందాం. అపుడు

(i) $\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 = 0$ అయ్యే పరామితీయ విలువలు λ_1, λ_2 లకు $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ సమీకరణము $L_1 = 0, L_2 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండా పోయే ఒక సరళరేఖల కుటుంబాన్ని సూచిస్తుంది.

(ii) విపర్యయంగా, $L_1 = 0, L_2 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండా పోయే ఏ సరళరేఖా సమీకరణమైనా $\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 = 0$ (λ_1, λ_2 లు వాస్తవ సంఖ్యలు, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$) అనే రూపంలో ఉంటుంది.

10.3.9 అనుషక్త రేఖలు – త్రిభుజానికి సంబంధించిన ధర్మాలు

10.3.9(1) సిద్ధాంతము: త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలు

ఉపపత్తి: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ లు త్రిభుజ శీర్షాలు అనుకుందాం.

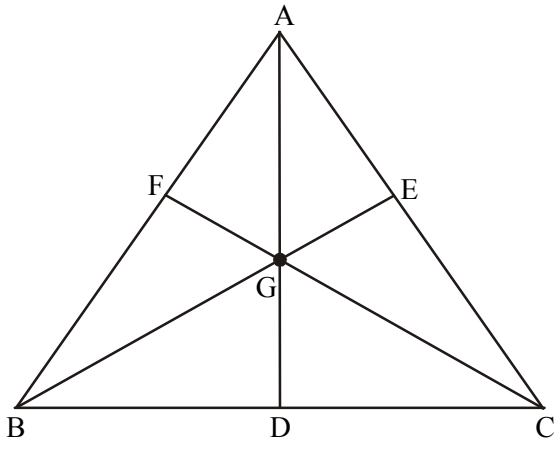
$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ భుజాల మధ్య బిందువులు వరుసగా D, E, F అనుకుందాం.

$$\therefore D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$E = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$$

$$F = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$\overleftrightarrow{AD}$ వాలు $= \dfrac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1}$



పటం. 10.11

$\overleftrightarrow{AD}$ సమీకరణము $y - y_1 = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1}(x - x_1)$

$\Rightarrow (y - y_1)(x_2 + x_3 - 2x_1) = (y_2 + y_3 - 2y_1)(x - x_1)$

$\Rightarrow L_1 \equiv (x - x_1)(y_2 + y_3 - 2y_1) - (y - y_1)(x_2 + x_3 - 2x_1) = 0$

ఇదేవిధంగా $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ ల సమీకరణాలు $L_2 = 0, L_3 = 0$.

$L_2 \equiv (x - x_2)(y_3 + y_1 - 2y_2) - (y - y_2)(x_3 + x_1 - 2x_2) = 0$

$L_3 \equiv (x - x_3)(y_1 + y_2 - 2y_3) - (y - y_3)(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0$

ఇక్కడ $1.L_1 + 1.L_2 + 1.L_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$ ఇక్కడ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\Rightarrow$ మధ్యగత రేఖలు $L_1 \equiv 0$, $L_2 \equiv 0$, $L_3 \equiv 0$ లు అనుషక్తాలు.

వీటి అనుషక్త బిందువు Gని త్రిభుజము ABC కేంద్రభాసం అంటాం.

10.3.9(2)

సిద్ధాంతము : త్రిబుజములో ఉన్నతులు అనుషక్తాలు

ఉపపత్తి: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ లు త్రిభుజ శీర్షాలు అనుకుందాం.

త్రిభుజము ABCలో A, B, C ల నుండి ఎదుటి భుజాలు $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ లకు గీచిన ఉన్నతులు $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ అనుకుందాం.

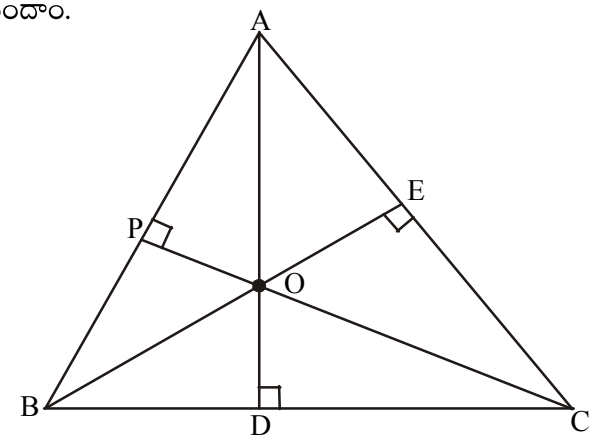
$\overline{BC}$ వాలు = $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ కావున

$\overline{AD}$ వాలు = $-\frac{(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2}$

A గుండా పోయే ఉన్నతి

$\overline{AD}$ సమీకరణము $y - y_1 = -\frac{(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2}(x - x_1)$



పటం. 10.12

$\Rightarrow (y - y_1)(y_3 - y_2) = -(x_3 - x_2)(x - x_1)$

$\Rightarrow L_1 \equiv (x - x_1)(x_3 - x_2) + (y - y_1)(y_3 - y_2) = 0$

ఇదేవిధంగా B, C ల గుండా పోయే ఉన్నతుల సమీకరణాలు

$L_2 \equiv (x - x_2)(x_1 - x_3) + (y - y_2)(y_1 - y_3) = 0$

$L_3 \equiv (x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) = 0$

$\Rightarrow 1.L_1 + 1.L_2 + 1.L_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$ ఇక్కడ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

త్రిభుజ ఉన్నతులు $L_1 \equiv 0$, $L_2 \equiv 0$, $L_3 \equiv 0$ లు అనుషక్తాలు

త్రిభుజము ABCలో ఉన్నతుల అనుషక్త బిందువు "O" ను త్రిభుజానికి లంబకేంద్రం అంటాం.

10.3.9(3)

సిద్ధాంతము : త్రిభుజ భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

ఉపపత్తి: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ లు త్రిభుజశీర్షాలు అనుకుందాం.

త్రిభుజ భుజాలు $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ల మధ్య బిందువులు వరుసగా D, E, F అనుకుందాం.

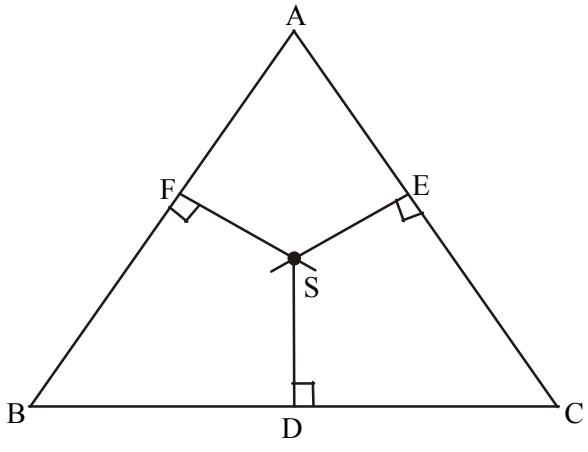
త్రిభుజ భుజాలు $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు S వద్ద కలుస్తాయని అనుకుందాం.

$\therefore D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

$E = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$

$F = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$\overline{BC}$ వాలు $= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$



పటం. 10.13

$\overline{BC}$ లంబసమద్విఖండ రేఖ వాలు $= \frac{-(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2}$

$\overline{BC}$ లంబసమద్విఖండన రేఖ $\overline{SD}$ సమీకరణము

$$y - \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{-(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2}\left(x - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2y(y_3 - y_2) - (y_2 + y_3)(y_3 - y_2) = -2x(x_3 - x_2) + (x_3 - x_2)(x_2 + x_3)$$

$$\Rightarrow L_1 \equiv 2x(x_2 - x_3) + 2y(y_2 + y_3) - (x_2^2 - x_3^2) - (y_2^2 - y_3^2) = 0$$

ఇదేవిధంగా భుజాలు $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ ల లంబసమద్విఖండన రేఖలు $\overline{SE}$, $\overline{SF}$ ల సమీకరణలు.

$$L_2 \equiv 2x(x_3 - x_1) + 2y(y_3 + y_1) - (x_3^2 - x_2^2) - (y_3^2 - y_1^2) = 0$$

$$L_3 \equiv 2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2) - (x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

ఇప్పుడు $1.L_1 + 1.L_2 + 1.L_3 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

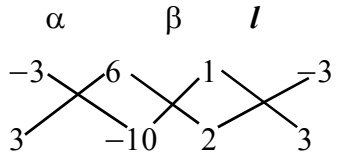
∴ త్రిభుజ భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

ఇక్కడ త్రిభుజ భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువును త్రిభుజానికి పరికేంద్రం అంటాం.

ఉదాహరణ 10.25(1): $x - 3y + 6 = 0$, $2x + 3y - 10 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: సరళరేఖల ఖండన బిందువు $p(\alpha, \beta)$ అనుకుందాం.

$$\therefore \alpha - 3\beta + 6 = 0,\ 2\alpha + 3\beta - 10 = 0$$



$$\frac{\alpha}{30-18} = \frac{\beta}{12+10} = \frac{1}{3+6} \Rightarrow \alpha = \frac{12}{9},\ \beta = \frac{22}{9}$$

∴ ఖండన బిందువు $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{22}{9}\right)$.

ఉదాహరణ 10.25(ii): సరళరేఖలు $x + p = 0, y + 2 = 0$ మరియు $3x + 2y + 5 = 0$ అనుషక్తాలు అయితే P విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సరళరేఖలు $x + p = 0, y + 2 = 0, 3x + 2y + 5 = 0$ లు అనుషక్తాలు కావున

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(5 - 4) + 0(0 - 6) + p(0 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

ఉదాహరణ 10.25(iii)

(a) A(2, –3), B(3, –6) అయితే $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని X-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి కనుగొనండి.

(b) A(2, –3), B(3, –6) అయితే $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని Y-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి కనుగొనండి.

సాధన : (a) $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని X-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి

$$= -y_1 : y_2$$

$$= -(-3) : (-6)$$

$$= -1 : 2$$

(b) $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని Y-అక్షం విభజించే నిష్పత్తి

$$= -x_1 : x_2$$

$$= -2 : 3.$$

ఉదాహరణ 10.25(iv) $(2, -7)$ మరియు $(-1, 3)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని సరళరేఖ $3x - 4y - 7 = 0$ విభజించే నిష్పత్తి కనుగొనండి.

సాధన: బిందువులు $(2, -7), (-1, 3)$ లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని సరళరేఖ $3x - 4y - 7 = 0$

విభజించే నిష్పత్తి $= -[3(2) - 4(-7) - 7] : [3(-1) - 4(3) - 7]$

$= -(6 + 28 - 7) : (-3 - 12 - 7)$

$= -27 : -22$

$= 27 : 22$

ఉదాహరణ 10.25(v) $(-2, 3), (2, -1), (4, 0)$ లను శీర్షాలుగా గల త్రిభుజము పరికేంద్రము కనుగొనండి.

సాధన: త్రిభుజ శీర్షాలు $A(-2, 3), B(2, -1), C(4, 0)$ అనుకుందాం.

భుజాలు $\overline{BC}, \overline{CA}$ మధ్య బిందువులు D, E అనుకుందాం.

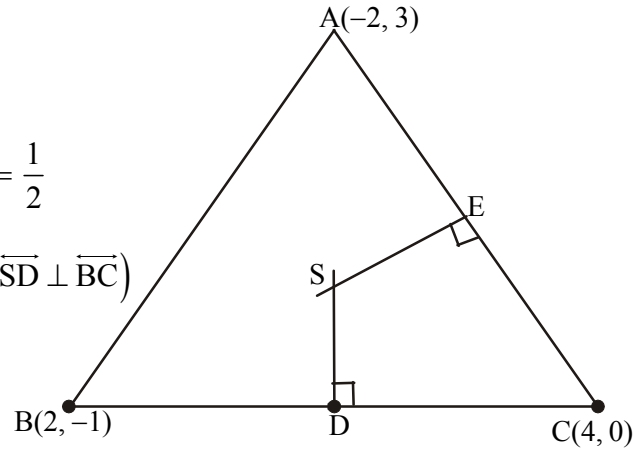
$D\left(3, \frac{-1}{2}\right), E\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$\overleftrightarrow{BC}$ వాలు $= \frac{0+1}{4-2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{SD}$ వాలు $= -2$ $\left(\because \overleftrightarrow{SD} \perp \overleftrightarrow{BC}\right)$

$\overleftrightarrow{SD}$ సమీకరణము

$y + \frac{1}{2} = -2(x - 3)$



పటం. 10.14

$\Rightarrow 4x + 2y - 11 = 0$ ...(1)

$\overleftrightarrow{AC}$ వాలు $= \frac{0-3}{4+2} = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC}$ వాలు $= +2$ $\left(\because \overleftrightarrow{SE} \perp \overleftrightarrow{AC}\right)$

$\overleftrightarrow{SE}$ సమీకరణము $y - \frac{3}{2} = 2(x - 1)$

$\Rightarrow$ $4x - 2y - 1 = 0$ ...(2)

(1) మరియు (2) లను సాధించగా $x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$ పరికేంద్రము $S = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

ఉదాహరణ 10.25(vi) $(-2, -1)$, $(6, -1)$, $(2, 5)$ లను శీర్షాలుగా గల త్రిభుజము లంబకేంద్రము కనుగొనండి.

సాధన: త్రిభుజ శీర్షాలు $A(-2, -1), B(6, -1), C(2, 5)$ అనుకుందాం.

శీర్షాలు A, B ల నుండి ఎదుటి భుజాలు $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$లకు గీచిన ఉన్నతులు $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ అనుకుందాం.

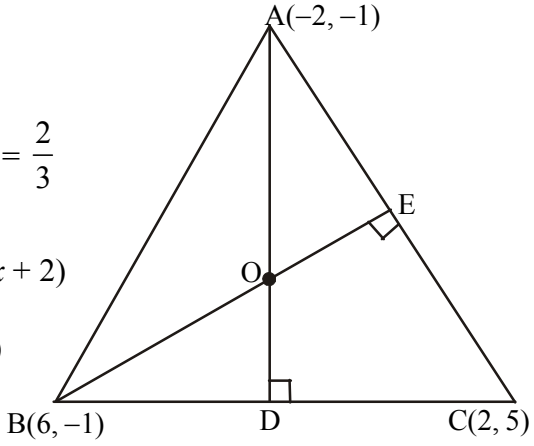
$\overleftrightarrow{BC}$ వాలు $= \frac{5+1}{2-6} = \frac{-3}{2}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ కావున $\overleftrightarrow{AD}$ వాలు $= \frac{2}{3}$

$\overleftrightarrow{AD}$ సమీకరణము $y + 1 = \frac{2}{3}(x + 2)$

$\Rightarrow 2x - 3y + 1 = 0$ ...(1)

$\overleftrightarrow{AC}$ వాలు $= \frac{5+1}{2-6} = \frac{3}{2}$



పటం. 10.15

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}$, కావున $\overleftrightarrow{BE}$ వాలు $= -\frac{2}{3}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BE}$ సమీకరణము $y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 6)$

$2x + 3y - 9 = 0$ ...(2)

(1) మరియు (2) లను సాధించగా $x = 2, y = \frac{5}{3}$

$\therefore$ లంబకేంద్రం O $= \left(2, \frac{5}{3}\right)$.

అభ్యాసం 10.3

1. x మరియు y లలో ప్రథమ తరగతి సాధారణ సమీకరణం $Ax + By + C = 0$ అనేది ఒక సరళరేఖ అని ఏ సందర్భాలలో సూచిస్తుంది.
2. సరళరేఖ $2x + 5y + 3 = 0$ ను వాలు - అంతరఖండ రూపంలోకి మార్చుము.

3. ఈ క్రింది సరళరేఖలకు x మరియు y అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

   (a) $y = mx + C$ (b) $3y = 3x + 8$ (c) $3x - 2y + 12 = 0$

4. సరళరేఖ $3x - 2y + 12 = 0$ రెండు అక్షాల మధ్య చేసే రేఖాఖండము AB పొడవును కనుగొనుము.

5. సరళరేఖ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$ ను అంతరఖండ మాపంలోకి కుదించి, మరియు అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

6. క్రింది సమీకరణాలను అభిలంబరూపంలోకి కుదించుము. (మార్చుము)

   (a) $3x - 4y + 10 = 0$ (b) $3x - 4y = 0$

7. $2x - y + 3 = 0$ మరియు $x - 4y - 7 = 0$ అనే ఈ రెండు రేఖలలో ఏది మూలబిందువుకు దగ్గరగా ఉంటుంది.

8. సరళరేఖలు $2x - 3y + k = 0$, $3x - 4y + 3 = 0$ మరియు $8x - 11y - 33 = 0$ అనుషక్తాలు అయితే k విలువను కనుగొనండి.

9. $3x - y - 5 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువును కనుగొనండి.

10. (1, 3), (–3, 5), (5, –1) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ పరికేంద్రాన్ని కనుగొనండి.

11. (–5, –7), (13, 2), (–5, 6) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ లంబకేంద్రాన్ని కనుగొనండి.

10.4 రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణము

మనము గడియారం నందు రెండు ముల్లుల మధ్యకోణం ఎంత అని తెలుసుకొనవచ్చును. దీనిని రెండు పద్ధతులలో చేయవచ్చును.

10.4.1 రెండు సరళరేఖల వాలులు m_1 మరియు m_2 ఇచ్చినపుడు

AB మరియు CD సరళరేఖల సమీకరణాలు వరసగా

$y = m_1x + c_1$ మరియు $y = m_2x + c_2$

AB మరియు CD రేఖల ఖండన బిందువు P అనుకొనుము.

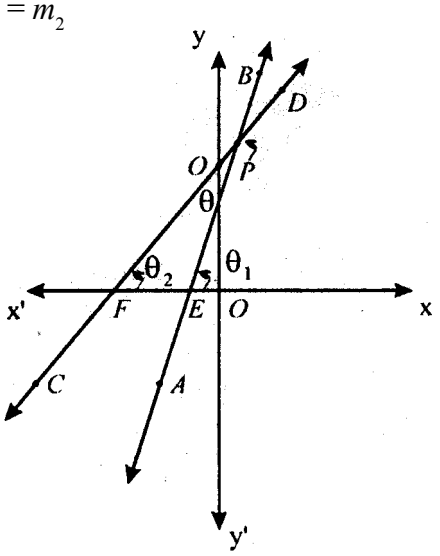
$\angle XEB = \theta_1$, $\angle XFD = \theta_2$

అపుడు $\text{Tan}\,\theta_1 = m_1$ మరియు $\text{Tan}\,\theta_2 = m_2$

AB మరియు CD రేఖల

మధ్య కోణము $\angle EPF = \theta$

అనుకొనుము.



పటం **10.16**

ఇపుడు $\theta_1 = \theta_2 + \theta$

$\theta = \theta_1 - \theta_2$

$\therefore \text{Tan}\,\theta = \text{Tan}\,(\theta_1 - \theta_2)$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

కావున $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణం 'θ' అనేది వాలుల పదాలలో టాంజెంట్ కోణంలో ఇవ్వబడినది.

పై ఫలితం నుండి రెండు సరళరేఖల వాలులు ఇచ్చినపుడు

ఆ సరళరేఖల మధ్యకోణం కనుగొనవచ్చును.

గమనిక :

1. $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} > 0$ అయితే రేఖల మధ్యకోణం లఘుకోణం

2. $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} < 0$ అయితే రేఖల మధ్య కోణం గురుకోణం

3. $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0$ లేక $m_1 = m_2$ అయితే రేఖలు ఏకీభవిస్తాయి. లేదా సమాంతరాలు.

   లేక రెండు సరళరేఖలు సమాంతరాలు అయితే వాటి స్థిరపదాలలో మాత్రమే తేడా ఉంటుంది.

4. $\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ లో లవం శూన్యం అయితే i.e., $m_1 m_2 = -1$ అవుతుంది. అపుడు రేఖలు

   ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 10.26: $7x - y = 1$ మరియు $6x - y = 11$ రేఖల మధ్యకోణంను కనుగొనుము.

సాధన: $7x - y = 1; 6x - y = 11$ రేఖల మధ్యకోణం 'θ' అనుకొనుము. అపుడు ఆ రేఖలను ఈ విధంగా వ్రాసుకోవచ్చు.

$$y = 7x + 1,\ y = 6x - 11$$

ఇక్కడ $m_1 = 7,\ m_2 = 6;\ m_1, m_2$ లు ఇచ్చిన

సరళరేఖల వాలులు $\tan\theta = \frac{7-6}{1+42} = \frac{1}{43}$

రేఖల మధ్యకోణం 'θ' అయితే $\tan\theta = \frac{1}{43}$

∴ దత్త రేఖల మధ్యకోణం = $\tan^{-1}\frac{1}{43}$.

ఉదాహరణ 10.27: $x + y + 1 = 0$ మరియు $2x - y - 1 = 0$ సరళరేఖల మధ్యకోణం కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన సరళరేఖలను వాలు అంతరఖండ రూపంలో వ్రాయగా వచ్చునవి

$$y = -x - 1;\ y = 2x - 1$$

$m_1 = -1;\ m_2 = 2$. ఇక్కడ m_1, m_2 లు సరళరేఖలు వాలులు.

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-1-2}{1+(-1)(2)} = 3$$

∴ ఇచ్చిన సరళరేఖల మధ్యకోణం θ అయితే $\tan\theta = 3$

కాబట్టి $= \tan^{-1}3$.

ఉదాహరణ 10.28: $y = 3x - 5$ మరియు $3x + 4 = y$ సరళరేఖలు సమాంతరాలు లేదా లంబాలా?

సాధన: $y = 3x - 5$ సరళరేఖ వాలు $m_1 = 3$

$y = 3x + 4$ సరళరేఖ వాలు $m_2 = 3$

పై రెండు సరళరేఖల వాలులు ఒక్కటే కావున అవి సమాంతరాలు.

ఉదాహరణ 10.29: $y = 3x$ మరియు $y = -\frac{1}{3}x$ సరళరేఖలు సమాంతరాలా లేదా లంబాలు?

సాధన: $y = 3x$ సరళరేఖ వాలు $m_1 = 3$

$y = -\frac{1}{3}x$ సరళరేఖ వాలు $m_2 = -\frac{1}{3}$

$m_1 m_2 = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$

వాలుల లబ్ధం -1, కావున అవి లంబాలు.

10.4.2 రెండు సరళరేఖల సమీకరణాలు సాధారణ రూపంలో ఉన్నపుడు

రెండు సరళరేఖల సాధారణ సమీకరణాలు వరుసగా

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad ...(i)$$

మరియు $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ...(ii) అనుకొనుము.

పై సమీకరణాలు (i) మరియు (ii) లను వాలు అంతరఖండం రూపంలో వ్రాయగా

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \quad \text{మరియు} \quad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

పై రేఖల వాలులు m_1 మరియు m_2 అయితే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

సాధారణ రూపంలో సమీకరణాలను ఇచ్చినపుడు పైసూత్రాన్ని ఉపయోగించి సరళరేఖల మధ్యకోణంను గణించవచ్చు.

గమనిక : (i) $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ అయితే

లేదా $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

లేక $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ అపుడు సరళరేఖలు సమాంతరాలు.

(ii) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ అయితే అపుడు ఇచ్చిన సరళరేఖలు లంబాలు.

ఉదాహరణ 10.30: $x - 7y + 12 = 0$ మరియు $x - 7y + 6 = 0$ సరళరేఖలు సమాంతరాలు

సాధన: ఇక్కడ $A_1 = 1,\ B_1 = -7, A_2 = 1$ మరియు $B_2 = -7$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ నుండి } = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 1(-7) - (1)(-7) = 0$$

$\therefore$ దత్త రేఖలు సమాంతరాలు

ఉదాహరణ 10.31: $2x + 5y - 8 = 0;\ 5x - 2y - 3 = 0$ సరళరేఖలు సమాంతరాలు లేదా లంబలా ? కనుగొనుము.

ఇక్కడ $A_1 = 2,\ B_1 = 5, A_2 = 5$ మరియు $B_2 = -2$

సాధన: $A_1A_2 + B_1B_2 = 2 \times 5 + 5 \times (-2) = 0$

కావున ఇచ్చిన సరళరేఖలు లంబాలు.

అభ్యాసం 10.4

1. ఇచ్చిన సరళరేఖలు $y = m_1x + C_1$ మరియు $Ax + By + C = 0$ క్రింది విధంగా ఉంటే ఏ నియమాలను పాటించును.

   (a) అవి సమాంతరాలా? (b) లంబాలా?

2. $4x + y = 3$ మరియు $\frac{x}{2} + y = \frac{4}{7}$ సరళరేఖల మధ్యకోణం కనుగొనుము.

3. (a) $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$ అనే రెండు సరళరేఖలు

   (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉండడానికి నియమాలు వ్రాయండి.

   (b) $x - 3y = 7$ మరియు $2x - 6y - 16 = 0$ అనే సరళరేఖలు సమాంతరాలా?

   (c) $x = y + 1$ మరియు $x = -y + 1$ అనే సరళరేఖలు లంబాలా?

10.5 ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖకు దూరం

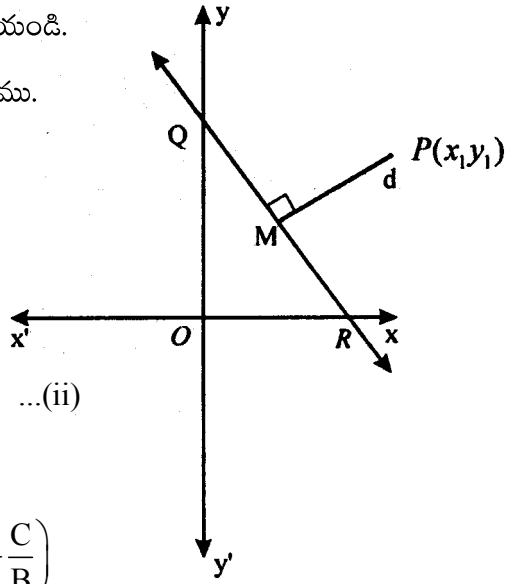
ఈ భాగంలో మనము ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖ (సరళరేఖల)కు గల దూరంను గూర్చి చర్చిద్దాం.

దత్తరేఖ $Ax + By + C = 0$ ను అని దత్త బిందువు $P(x_1, y_1)$ అని అనుకొనుము.

l అనే సరళరేఖ X–అక్షాన్ని, Y–అక్షాన్ని R మరియు Q ల వద్ద ఖండిస్తుంది. అనుకొనుము.

$PM = d$ అయ్యేటట్లు $PM \perp L$ గీయండి.

M నిరూపకాలు (x_2, y_2) అనుకొనుము.



పటం 10.17

$$d = \sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}}$$

$\therefore$ M అనేది రేఖ l మీద ఉంది.

$\therefore Ax_2 + By_2 + C = 0$

లేదా $C = -(Ax_3 + By_2)$ ...(ii)

R మరియు Q ల నిరూపకాలు

వరసగా $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ మరియు $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$

QR యొక్క వాలు $= \frac{0 + \frac{C}{B}}{-\frac{C}{B} - 0} = -\frac{A}{B}$ మరియు

PM యొక్క వాలు $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$PM \perp QR$ కనుక

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \left(-\frac{A}{B}\right) = -1 \quad \text{లేదా}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{B}{A} \qquad \text{...(iii)}$$

(iii) నుండి $\frac{x_1 - x_2}{A} = \frac{y_1 - y_2}{B} = \frac{\sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ...(iv)

(నిష్పత్తి అనుపాత ధర్మాలను ఉపయోగించి)

$$\frac{x_1 - x_2}{A} = \frac{y_1 - y_2}{B} = \frac{A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots(v)$$

(iv) మరియు (v) ల నుండి వచ్చునది.

$$\frac{\sqrt{\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}}}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \frac{A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2)}{A^2 + B^2}$$

లేదా $\frac{d}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} + \frac{(Ax_1 + By_1) - (Ax_2 + By_2)}{A^2 + B^2}$ ((i)ని ఉపయోగించి)

లేదా $\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ ((ii)కి ఉపయోగించి)

దూరం అనేది ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకం, దీనిని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

గమనిక: మూలబిందువు (0, 0) నుండి $Ax + By + C = 0$ కు గల లంబదూరం

$$\frac{A(0) + B(0) + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ఉదాహరణ 10.32: X-అక్షం నుండి సరళరేఖ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ కు గల లంబదూరము 'a' అయితే x-అక్షం మీద బిందువును కనుగొనుము.

సాధన: X- అక్షంపై $(x, 0)$ బిందువు ఉంది అనుకొనుము. ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణం $bx + ay - ab = 0$ బిందువు $(x, 0)$ నుండి ఇచ్చిన సరళరేఖకు లంబదూరం

$$a = \pm \frac{bx_1 + a.0 - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\therefore x_1 = \frac{a}{b} \left\{ b \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right\}$$

$$\therefore \text{X - అక్షం మీద బిందువు } \left(\frac{a}{b}\left(b \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right), 0 \right)$$

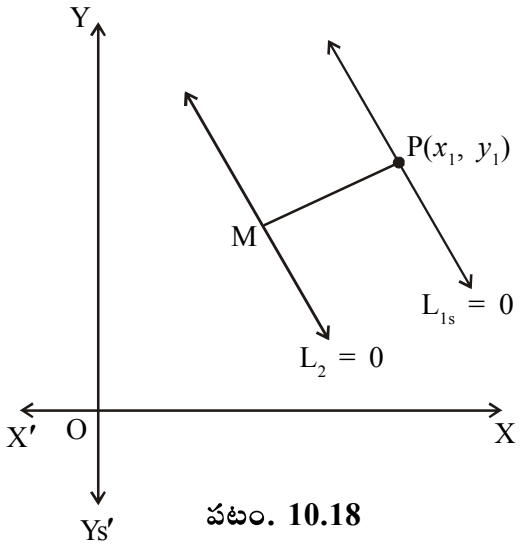
10.5.1 సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం

సిద్ధాంతము: సమాంతర రేఖలు $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ మధ్యదూరము $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ఉపపత్తి :

$L_1 : ax + by + c_1 = 0$ సరళరేఖపై $P(x_1, y_1)$ ఒక బిందువు అనుకుందాం.

$L_2 : ax + by + c_2 = 0$ మరొక సరళరేఖ



పటం. 10.18

ఇపుడు సమాంతర సరళరేఖలు $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ల మధ్యదూరము

= PM

= $P(x_1, y_1)$ నుండి $L_2 = 0$ సరళరేఖల లంబదూరం

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c_1 + c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

($\because$ $P(x_1, y_1)$ అనేది $L_1 = 0$ పై బిందువు i.e., $ax_1 + by_1 + c_1 = 0$)

$\therefore$ సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం = $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

10.5.2 లంబపాదము

సిద్ధాంతము: $P(x_1, y_1)$ బిందువు నుండి సరళరేఖ $ax + by + c = 0$ కి గీచిన లంబపాదము $Q(h, k)$ అయితే

$$\frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$ అని నిరూపించండి.

ఉపపత్తి : $P(x_1, y_1)$ నుండి $ax + by + c = 0$ కి గీచిన లంబపాదం $Q(h, k)$

$Q(h, k)$ బిందువు $ax + by + c = 0$

సరళరేఖపై కలదు కావున

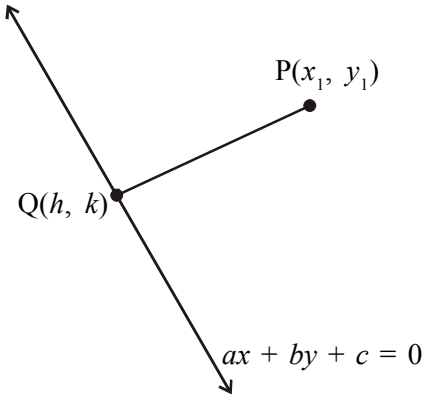
$$\Rightarrow ah + bk + c = 0 \qquad ...(1)$$

($ax + by + c = 0$ రేఖ వాలు)

$\times$ $\overleftrightarrow{PQ}$ రేఖవాలు $= -1$.

$$\frac{-a}{b} \times \frac{k - y_1}{h - x_1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b}$$



పటం. 10.19

$$\therefore \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = \lambda \qquad ...(2) \text{ అనుకుందాము.}$$

$\therefore$ $h = x_1 + a\lambda$, $k = y_1 + b\lambda$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$a(x_1 + a\lambda) + b(y_1 + b\lambda) + c = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \qquad ...(3)$$

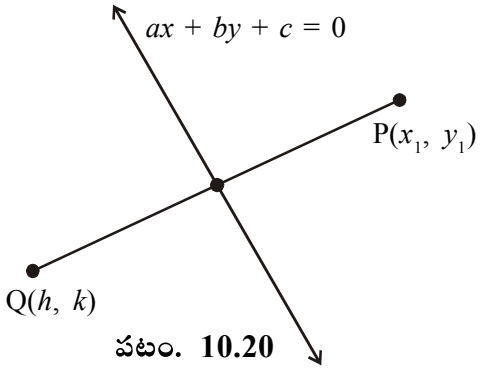
(2) మరియు (3) ల నుండి

$$\Rightarrow \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

10.5.3 సరళరేఖపై బిందువు ప్రతిబింబము

సిద్ధాంతము : $ax + by + c = 0$ సరళరేఖపై $P(x_1, y_1)$ బిందువు ప్రతిబింబము $Q(h, k)$ అయితే $\frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$

నిరూపణ: $ax + by + c = 0$ సరళరేఖ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ యొక్క ప్రతిబింబము $Q(h, k)$ అనుకుందాం.



పటం. 10.20

$\therefore \overline{PQ}$ మధ్యబిందువు R అనుకుందాం.

$$R = \left(\frac{h+x_1}{2}, \frac{k+y_1}{2}\right)$$

$\therefore$ బిందువు R సరళరేఖ $L = ax + by + c = 0$ పై కలదు

$$a\left(\frac{h+x_1}{2}\right) + b\left(\frac{k+y_1}{2}\right) + c = 0;$$

$$ah + by + 2c = -(ax_1 + by_1) \qquad ...(1)$$

$\because$ ($ax + by + c = 0$ వాలు) $\times$ $\overleftrightarrow{PQ}$ వాలు $= -1$

$$\frac{-a}{b} \times \frac{y_1 - k}{x_1 - h} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} \qquad ...(2)$$

$\therefore \frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = \lambda$ అనుకుందాం $\Rightarrow x_1 + a\lambda, k = y_1 + b\lambda$

(1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$a(x_1 + a\lambda) + b(y_1 + b_1) + 2c = -(ax_1 + by_1)$$

$$\lambda = \frac{-2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

(2), (3) ల నుండి $\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = -\frac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$.

ఉదాహరణ 10.32(i) : $x - 2y + 3 = 0$, $4x - 8y - 4 = 0$ సమాంతర సరళరేఖల మధ్యదూరం కనుగొనండి.

సాధన: దత్త సరళరేఖలు $x - 2y + 3 = 0$

మరియు $4x - 8y - 4 = 0 \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$

ఇక్కడ $c_1 = 3,\ c_2 = -1,\ a = 1,\ b = -2$

సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం $= \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$= \dfrac{|-1-3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{4}{5}$

ఉదాహరణ 10.32(ii) $(-1, 3)$ బిందువు నుండి సరళరేఖ $5x - y - 18 = 0$ కి గీచిన లంబపాదము కనుగొనండి.

సాధన: $(-1, 3)$ నుండి $5x - y - 18 = 0$ గీచిన లంబపాదం $Q(h, k)$ అనుకుందాం.

$$\therefore \frac{h+1}{5} = \frac{k-3}{-1} = -\frac{(5(-1)-(3)-18)}{5^2 + (-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h+1}{5} = \frac{k-3}{-1} = -\frac{(-26)}{26}$$

$$\Rightarrow h + 1 = 5,\ k - 3 = -1$$

$$\Rightarrow h = 4,\ k = 2$$

$\therefore$ లంబపాదం $= (h, k) = (4, 2)$.

ఉదాహరణ 10.32(iii) : $3x + 4y + 5 = 0$ సరళరేఖ దృష్ట్యా $(3, 4)$ బిందువు యొక్క ప్రతిబింబాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $3x + 4y + 5 = 0$ సరళరేఖ దృష్ట్యా $(3, 4)$ యొక్క ప్రతిబింబం $Q(h, k)$ అనుకుందాం.

$$\therefore \frac{h-3}{3} = \frac{k-4}{4} = \frac{-2(3\times 3 + 4\times 4 + 5)}{3^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h-3}{3} = \frac{k-4}{4} = \frac{-60}{25} = \frac{-12}{5}$$

$$\Rightarrow h - 3 = -\frac{36}{5},\ k - 4 = \frac{-48}{5}$$

$$\Rightarrow h = -\frac{21}{5},\ k = \frac{-28}{5}$$

$\therefore$ ప్రతిబింబము $= \left(-\dfrac{21}{5}, \dfrac{-28}{5}\right)$

అభ్యాసం 10.5

1. (2, 3) బిందువు నుండి $3x + 2y + 4 = 0$ సరళరేఖకు గల లంబదూరంను కనుగొనుము.
2. Y-అక్షంమీది ఏ బిందువుల నుండి సరళరేఖ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ కు గల లంబదూరం b ఔతుంది ?
3. Y-అక్షంమీది ఏ బిందువుల నుండి సరళరేఖ $3y = 12$ కు గల లంబదూరం 4 ఔతుంది ?
4. మూలబిందువు నుండి $3x + 7y + 14 = 0$ కు గల లంబదూరంను కనుగొనుము.
5. X-అక్షం మీది ఏ బిందువుల నుండి సరళరేఖ $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ కు గల లంబదూరం '3' ఔతుంది?
6. (4, 1) బిందువు నుండి $3x - 4y + 12 = 0$ సరళరేఖకి గీచిన లంబపాదము కనుగొనండి.
7. (–4, 5) బిందువు నుండి సరళరేఖకు గీచిన లంబపాదము (2, –3) అయితే ఆ సరళరేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.
8. $4x – 5y + 8 = 0$ సరళరేఖ దృష్ట్యా (2, 3) బిందువు యొక్క ప్రతిబింబాన్ని కనుగొనండి.
9. క్రింది సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం కనుగొనండి.
   (i) $3x – 4y = 12,\ 3x – 4y = 7$
   (ii) $3y – 5x + 4 = 0,\ 10x – 6y – 9 = 0$

10.6 సమాంతరంగా లేదా (లంబంగా ఉన్న) సరళరేఖల సమీకరణాలు

మనం ఇప్పటివరకు ఇచ్చిన సరళరేఖలు సమాంతరంగా, లంబంగా ఉన్నాయి అనే పద్ధతి ద్వారా తెలుసుకున్నాము. ఇపుడు ఈ విభాగంలో ఇచ్చిన సరళరేఖకి సమాంతరంగా లేదా లంబంగా ఉండే రేఖల సమీకరణాలను కనుక్కుందాం.

10.6.1 సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం

$Ax + By + C = 0$ ...(i)

అనేది దత్త సరళరేఖ

$Ax + By + C = 0$ ...(ii) సమాంతరం అనుకొనుము.

(i) మరియు (ii)లు సమాంతరంగా ఉండడానికి నియమము.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = K_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = AK_1, \quad B_1 = BK_1$$

A_1 మరియు B_1 విలువలను (i)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$AK_1x + BK_1y + C_1 = 0$$

లేదా $\quad Ax + By + \frac{C_1}{K_1} = 0$

లేదా $\quad Ax + By + K = 0$

ఇక్కడ $\quad K = \frac{C_1}{K_1}$ ...(iii)

ఇది దత్తరేఖకు సమాంతరం

మనము సమీకరణాలు (ii) మరియు (iii)లను పరిశీలించినట్లు అయితే

(i) x మరియు y గుణకాలు సమానం, (ii) స్థిరపదాలు వేరు ఇచ్చిన నియమముల నుండి ఈ స్థిరపదాలని కనుక్కోగలం.

ఉదాహరణ 10.33: (1, 2) బిందువు గుండా పోతూ, $2x + 3y + 6 = 0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళ రేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన: ఏదైనా ఇచ్చిన సరళరేఖ సమాంతరంగా ఉండే రేఖా సమీకరణం రాయాలంటే

i) రెండు సరళరేఖ సమీకరణాల్లో x మరియు y గుణకాలు ఒకే విధంగా ఉండాలి

ii) స్థిరపదాలు వ్యత్యాసంగా ఉండి ఇచ్చిన నియాలు తృప్తిపరచాలి. కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం $2x + 3y + K = 0$ (ఒక స్థిరాంకం) ఇది (1, 2) బిందువు గుండా పోతుంది.

$2 \times 1 + 3 \times 2 + K = 0$

లేదా $K = -8$

$\therefore$ కావలసిన సరళరేఖాసమీకరణం $2x + 3y = 8$.

10.7 $Ax + By + C = 0$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణం

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ..(i)

అనే సరళరేఖ దత్త సరళరేఖకు లంబంగా ఉంటుంది. అనుకొనుము.

$Ax + By + C = 0$ ...(ii)

(i), (ii)ల రేఖలు లంబంగా ఉండడానికి నియమము

$$AA_1 + BB_1 = 0$$

$\Rightarrow \frac{A_1}{B} = \frac{-B_1}{A} = K_1$ అనుకొనుము.

$A_1 = BK_1$ మరియు $B_1 = -AK_1$

A_1 మరియు B_1 విలువల (i)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$Bx - Ay + \frac{C_1}{K_1} = 0$$

లేదా $Bx - Ay + K = 0$ ఇక్కడ $K = \frac{C_1}{K_1}$ ...(iii)

కావున సరళరేఖ (iii), సరళరేఖ (ii)కు లంబంగా ఉంది.

ఒక సరళరేఖ, దత్త సరళరేఖకు లంబంగా ఉండడానికి ఈ క్రింది పద్ధతులను పాటించవలెను.

i) x మరియు y గుణకాలను ఒకదానికొకటి మార్చుట

ii) వాటిలో ఒకదాని గుర్తు మార్చుట

iii) స్థిర పదం స్థానంలో కొత్త స్థిరపదము K ను ఉంచుట మరియు ఇచ్చిన నియమమును అనుసరించి సరళరేఖ సమీకరణంను గణించుట.

ఉదాహరణ 10.34: రేఖ (1, 2) బిందువు గుండా పోతూ $2x + 3y + 6 = 0$ కు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన: పై పద్ధతిని అనుసరించి, దత్త సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖాసమీకరణం

$$3x - 2y + K = 0 \qquad ...(i)$$

సమీకరణం (i) (1, 2) బిందువు గుండాపోతుతంది.

$3 \times 1 - 2 \times 2 + K = 0$ లేదా $K = 1$

కావలసిన సరళరేఖసమీకరణం $3x - 2y + 1 = 0$.

ఉదాహరణ 10.35: రేఖ (x_2, y_2) బిందువు గుండా పోతూ $yy_1 = 2a_1(x + x_1)$ సరళ రేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : దత్త సరళరేఖ సమీకరణం

$$yy_1 = 2ax - 2ax_1 = 0 \qquad ...(i)$$

సరళరేఖ (i)కి లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం

$$2ay + xy_1 + C = 0$$

ఇది (a_2, y_2) గుండాపోతుంది.

$$\therefore \quad 2ay + xy_1 + C = 0$$

$$\Rightarrow \qquad C = -2ay_2 - x_2y_1$$

కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం

$$2a(y - y_2) + y_1(x - x_2) = 0$$

అభ్యాసం 10.6

1. రేఖ (0, −2) బిందువు గుండా పోతూ $3x + y = 2$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
2. ఒక రేఖ (−1, 0) గుండా పోతూ $y = 2x + 3$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.
3. బిందువు (0, −3) గుండా పోతూ $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

4. రేఖ (0, 0) బిందువుల గుండాపోతూ $x + y = 3$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

5. రేఖ (2, −3) బిందువు గుండాపోతూ $2a(x + 2) + 3y = 0$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

6. సరళరేఖ $3x + 4y = 2$ కు లంబంగా ఉంటూ X−అంతరఖండం −8గా గల సరళరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.

7. సరళరేఖ $2x - 3y + 7 = 0$ కు సమాంతరంగా ఉంటూ X− అంతరఖండం 2గా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

8. రేఖ $(a \cos^3 \theta, a \sin^3\theta)$ బిందువు గుండాపోతూ $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = a$ కు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x \cos \theta - y \sin \theta = a \cos 2\theta$ అని చూపుము.

10.8 నిరూపక జ్యామితీయ అనువర్తనము

కొన్ని ఉదాహరణలతో నిరూపక జ్యామితిని వాడికొని జ్యామితీయ ఫలితాలను రాబడదాం.

ఉదాహరణ 10.36: దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు సమానమని రుజువు చేయుము.

సాధన: దీర్ఘచతుస్రం ఒక శీర్షం మూలబిందువు అనుకొనుము. ఒక భుజం X−అక్షం వెంబడి దానిపొడవు 'a' మరొక భుజం పొడవు 'b' ఇది Y− అక్షం వెంబడి ఉన్నాయి. తీసుకొనుము. పటం 10.12లో చూపిన విధంగా A, B, C నిరూపకాలు వరుసగా $(a, 0)$, (a, b) మరియు $(0, b)$

$\therefore$ AC కర్ణం పొడవు $= \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2}$

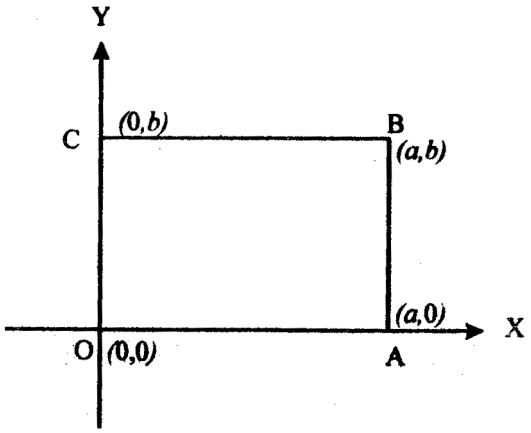
$= \sqrt{a^2 + b^2}$

OB కర్ణం పొడవు $= \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore$ AC = OB

దీర్ఘచతురస్రంలో AC, OB ల కర్ణాలు సమానము.

సర్వసాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు పొడవులు సమానం.



పటం 10.21

ఉదాహరణ 10.37: అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణము అని చూపుము.

సాధన: $O(0, 0)$ వృత్తకేంద్రం అనుకొనుము. $(-a, 0)$ మరియు $(a, 0)$ బిందువులు వ్యాసం చివరి బిందువులు వృత్తం Y- అక్షాన్ని $(0, a)$ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకొనుము (పటం 14.13 చూపండి)

$$\text{BQ వాలు } = \frac{a-0}{0-a} = 1 = m_1$$

$$\text{AQ వాలు } = \frac{0-a}{a-0} = -1 = m_2$$

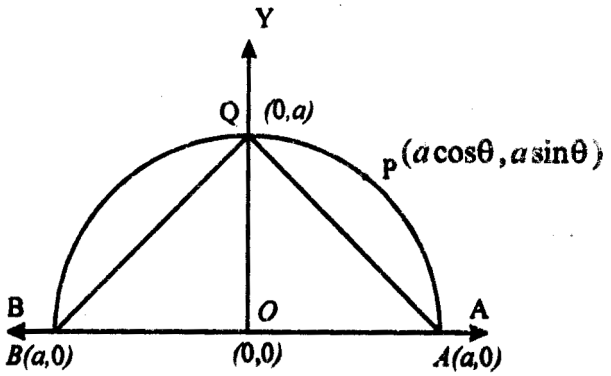
కాని $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow$ AQ అనేది BQ కు లంబంగా ఉంది.

మరల $P(a\cos\theta, a\sin\theta)$ అనే బిందువు వృత్తం మీద ఉంది అనుకొనుము.

$$\text{PB వాలు } = \frac{a\sin\theta}{a\cos\theta + a} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = m_1 \text{ అనుకొనుము.}$$

$$\text{PA వాలు } = \frac{0-a\sin\theta}{a-a\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta} = m_2 \text{ అనుకొనుము.}$$



పటం 10.22

మరియు $m_1.m_2 = \left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\left(\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$

$= \frac{-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

$= -1.$

$\therefore$ PA అనేది PB కి లంబంగా ఉంది.

$\therefore$ $\angle$BPA అనేది లంబకోణం.

ఉదాహరణ 10.38: ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో రెండు శీర్షాల నుండి గీచిన మధ్యగత రేఖలు రెండు సమానం.

సాధన: OAB అనేది ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అనుకొనుము. వాటి శీర్షాలు (0, 0) $(a, 0)$ మరియు $\left(\frac{a}{2}, a\right)$

C మరియు Dలు AB మరియు OB ల మధ్య బిందువులు అనుకొనుము.

అపుడు C నిరూపకాలు $\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{2}\right)$

మరియు D నిరూపకాలు $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$

OC పొడవు $= \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{9a}{16}+\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}$$

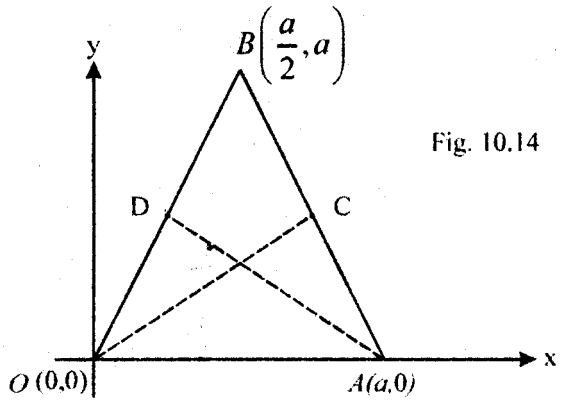


Fig. 10.14

పటం 10.23

మరియు AD పొడవు $= \sqrt{\left(a-\frac{a}{4}\right)^2+\left(a-\frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \frac{a}{4}\sqrt{13}$$

కావున OC పొడవు = AD పొడవు.

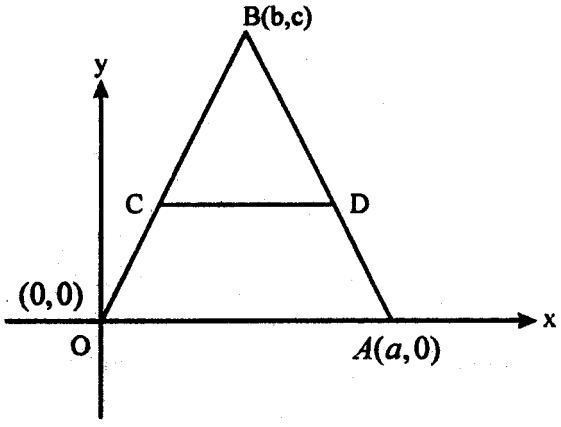
అలా రెండు మధ్యగత రేఖలు సమానం.

ఉదాహరణ 10.39: ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలిపే రేఖాఖండం మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను, మ

సాధన: శీర్షాల నిరూపకాలు O(0, 0), $A(a,0)$ మరియు $B(b,c)$ అనుకొనుము

C మరియు Dలు OB మరియు AB ల మధ్యబిందువులు అనుకొనుము.

$\therefore$ అపుడు C నిరూపకాలు $\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$



పటం 10.24

D నిరూపకాలు $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

CD వాలు $\frac{\frac{c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}}=0$

OA వాలు X-అక్షం $=0$

$\therefore$ CD అనేది OA కు సమాంతరం.

CD పొడవు $=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$

OA పొడవు $=a$

$$\therefore \text{ CD} = \frac{1}{2}\text{OA}.$$

ఇది పై ఫలితాన్ని ఋజువు చేస్తుంది.

ఉదాహరణ 10.40: చతుర్భుజములో కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటే చతుర్భుజము సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుంది.

సాధన: పటం 10.16 చూపిన విధంగా కర్ణాలు OX మరియు OY ల వెంబడి సూచించబడినవి.

(కర్ణాలు) వాటి పొడవులు వరుసగా

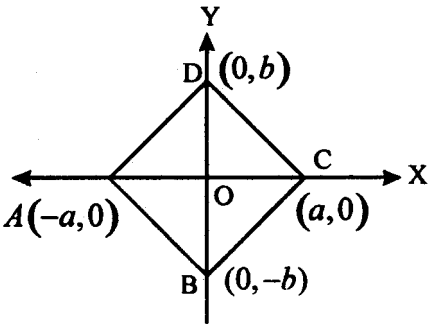
$2a$ మరియు $2b$

OA = OC = a మరియు OD = OB = b

$\text{AD} = \sqrt{\text{OA}^2 + \text{OD}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\text{AB} = \sqrt{\text{OB}^2 + \text{OA}^2}$

$= \sqrt{a^2+b^2}$



పటం 10.25

అదేవిధంగా $\text{BC} = \sqrt{a^2+b^2} = \text{CD}$

కాని AB = BC = CD = DA

$\therefore$ కావున ABCD ఒక సమలంబ చతుర్భుజం.

అభ్యాసం 10.7

నిరూపక జ్యామితిని ఉపయోగించి క్రింది జ్యామితీయ ఫలితాలను రుజువు చేయుము.

1. ఒక త్రిభుజంలో రెండు మధ్యగత రేఖలు సమానమైన ఆ త్రిభుజం సమద్విబాహు త్రిభుజం.
2. చతురస్రంలోకి కర్ణాలు సమానము. అవి ఒకదానినొకటికి లంబంగా ఉండును.
3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజపు కర్ణాలు సమానమైతే ఆ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అవుతుంది.
4. ΔABC లో భూమి BC యొక్క మధ్యబిందువు 'D' అయితే $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
5. ఒక త్రిభుజంలోని ఒక భుజానికి సమాంతర రేఖను గీచిన అది మిగిలిన రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించును.
6. ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు అసమానము, అయితే పెద్ద భుజానికివెదురుగా నున్నది పెద్దకోణం.
7. ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే పెద్దది.
8. ఒక త్రిభుజంలోని మధ్యగత రేఖలొకే బిందువు గుండా పొతాయి.
9. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణం దానిని సమాన వైశాల్యలు గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
10. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాల పొడవులు సమానము.

10.8 సరళ రేఖా యుగ్మాలు

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠమును చదువుట వలన మనము క్రింది వాటిని తెలుసుకొనగలము.

- రెండు సరళరేఖల యుగ్మ సమీకరణము నుండి ఖండన బిందువును, మధ్య కోణాన్ని గుర్తించుట
- x, y లలో ఒక ద్విఘాత సమీకరణం, ఒక సరళరేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తుంది అని తెలుసుకొనుట

- మూల బిందువు గుండా పోయే రేఖా యుగ్మ సమీకరణం తెలుసుకొనుట
- మూల బిందువు గుండా పోని రేఖాయుగ్మాన్ని సూచించుట

పరిచయం

రెండు సరళరేఖల సమీకరణాలు ఇచ్చినప్పుడు, వాటి ఖండన బిందువును, వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోవడం గురించి మూడో అధ్యాయంలో చర్చించాం. ఈ అధ్యాయంలో x, y లలో ఒక ద్విఘాత సమీకరణం ఒక సరళరేఖా యుగ్మాన్ని సూచించడానికి గల నియమాలను కనుక్కొంటాం.

10.8.1 సరళ రేఖాయుగ్మం సంయుక్త సమీకరణం

$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ లు రెండు విభిన్న సరళరేఖలైన $L_1 L_2 = 0$, అంటే $(a_1x + b_1y + c_2)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ అనేది రెండు రేఖల సంయుక్త సమీకరణము ఎందుకంటే $L_1 = 0$ లేక $L_2 = 0$ రేఖ మీద ఉండే ప్రతి బిందువు $L_1 L_2 = 0$ ను సంతృప్తి పరుస్తుంది. పైగా ఏ ఇతర బిందువు $L_1 L_2 = 0$ ను తృప్తిపరచదు. కావున $L_1L_2 = 0$ సమీకరణమును $L_1 = 0, L_2 = 0$ రేఖల సంయుక్త సమీకరణము అంటారు.

ఉదాహరణ 10.41 :

$6x^2 + 11xy - 10y^2 \equiv (3x - 2y)(2x + 5y)$ కాబట్టి $6x^2 + 11xy - 10y^2 = 0$ రెండో ఘాతపు సమీకరణం, $3x - 2y = 0, 2x + 5y = 0$ సరళ రేఖలను సూచిస్తుంది.

Similarly, we consider the euqation $(3x + 2y - 1) = 0$

$$\& \quad 2x - 3y + 1 = 0$$

Since $(3x + 2y - 1)(2x - 3y + 1) \equiv 6x^2 - 5xy - 6y^2 + x + 5y - 1 = 0$, the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + x + 5y - 1 = 0$ represents the pair of straight lines $3x + 2y - 1 = 0$ and $2x - 3y + 1 = 0$

10.8.2 నిర్వచనం

a, b, h లు అన్నీ సున్నా కాని వాస్తవ సంఖ్యలు అయితే $H \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ను x, y లలో ద్విఘాత సమ ఘాత సమీకరణము అంటాము.

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ను x, y లలో సాధారణ ద్విఘాత సమీకరణం అంటాము.

గమనికలు

(i) a, b, h లలో ఒకటైనా శూన్యేతరమైతే, $H \cong ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సమీకరణం ఒక సరళరేఖాయుగ్మాన్ని సూచించడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమం : $h^2 \geq ab$

(ii) $h^2 \geq ab$ అయితే $H \cong (l_1x + m_1y)(l_2x + m_2y)$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ $l_1 l_2 = a,\ m_1 m_2 = b,\ l_1m_2 + l_2m_1 = 2h$.

10.8.3 Angle between pair of lines

రెండు సరళరేఖల సమీకరణాలు విడిగా ఇచ్చినప్పుడు, వాటి మధ్య కోణం కనుక్కోవడాన్ని ముందటి అధ్యాయంలో చర్చించాం. ఈ విభాగంలో ఒక జత సరళరేఖల సంయుక్త సమీకరణం ఇచ్చినప్పుడు, వాటి మధ్య కోణం కనుక్కోవడాన్ని నేర్చుకొందాం.

10.8.3.1 సిద్ధాంతము

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సమీకరణం ఒక జత సరళ రేఖలను సూచిస్తుందనుకొందాం. వాటి మధ్యకోణం θ అనుకొంటే,

$$\cos\theta = \frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

గమనికలు

(i) $h^2 = ab$ అయితే $H \cong ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ఒక జత సమాంతర (కలిసిపోయిన) రేఖలను సూచిస్తుంది. $H = 0$ సూచించు రేఖలు లంబాలు $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow a + b = 0$ (x^2, y^2 గుణకాల మొత్తం సున్న)

(ii) $H = 0$ సూచించు రేఖలు లంబాలు కావు ఆ పరిస్థితిలో ఆ రేఖల మధ్య కోణం θ ను ఇచ్చే సూత్రం

$$\text{Tan}\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b},\ \text{Sin}\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

ఉదాహరణ 10.42 :

$3x^2 - 4xy + 1y^2 = 0$ సమీకరణము సూచించే సరళరేఖల మధ్య కోణము కనుక్కోండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని $a x^2 + 2h xy + b y^2 = 0$ తో పోలిస్తే, $a = 3,\ b = 1,$ $h = -\frac{4}{2} = -2$ కనక ఆ జత రేఖల మధ్య కోణము θ అనుకొంటే

$$\text{Tan } \theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2\sqrt{4-(3)(1)}}{3+1} = \frac{2\sqrt{1}}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ఆ రేఖల మధ్యకోణం $= \text{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

10.8.4 రెండు ఖండన రేఖల మధ్య కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు

గమనిక :

$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = c,\ L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ సమీకరణాలు రెండు ఖండన సరళరేఖలను సూచిస్తే $L_1 = 0, L_2 = 0$ రేఖల మధ్యకోణ సమద్వి ఖండన రేఖల సమీకరణాలు

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

ఉదాహరణ 10.43 :

$5x + y + 3 = 0,\ x + 5y + 2 = 0$ రేఖల మధ్య కోణాలను సమద్విఖండన చేసే సరళరేఖల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తరేఖల మధ్య కోణాలను సమద్వి ఖండన చేసే సరళరేఖల సమీకరణాలు

$$\left[\frac{5x + y + 3}{\sqrt{26}}\right] \pm \left[\frac{x + 5y + 2}{\sqrt{26}}\right] = 0$$

అంటే $5x + 5 + 3 + (x + 5y + 2) = 0$

లేదా $6x + 6y + 5 = 0,\ 4x - 4y + 1 = 0$

అభ్యాసం 10.8

1. క్రింది సమీకరణాలు సూచించే రేఖాయుగ్మం మధ్య లఘు కోణాన్ని కనుక్కోండి

   (i) $12x^2 + 25xy + 12y^2 = 0$

   (ii) $4x^2 - 7xy - 11y^2 = 0$

   (iii) $x^2 - 2xy\ \sec\alpha + y^2 = 0$

   (iv) $x^2 + 2xy\ \cot\alpha - y^2 = 0$

2. $(ax+by)^2 = c(bx-ay)^2, c>0$ సరళ రేఖల మధ్య కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు $ax+by+k=0$ రేఖకు సమాంతరంగాను, లంబంగాను ఉంటాయని చూపండి.

3. కింద ఇచ్చిన రేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజం కేంద్రాబాసం, వైశాల్యం కనుక్కోండి.

(i) $2y^2 - xy - 6x^2 = 0,\ x+y+4=0$

(ii) $3x^2 - 4xy + y^2 = 0,\ 2x - y = 6$

10.8.5 ఒక రేఖాయుగ్మాన్ని సూచించే రెండో తరగతి సాధారణ సమీకరణం

10.8.5.1 సిద్ధాంతము

x, y చలరాశులలో ద్విఘాత సమీకరణం $S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ఒక జత సరళరేఖలను సూచిస్తే, అప్పుడు

(i) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

(ii) $h^2 \geq ab, g^2 \geq ac, f^2 \geq bc$

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణం ఒక జత సరళరేఖలను సూచిస్తే, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సమీకరణం, మూల బిందువు గుండా పోతూ పై రెండు సరళరేఖలను సమాంతరంగా ఉండే రేఖా యుగ్మాన్ని సూచిస్తుంది.

10.8.6 సమాంతర రేఖల మధ్య దూరము – నిబంధనలు

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణము ఒక జత సరళరేఖలను సూచిస్తే ఈ జతరేఖలు మధ్యకోణం, $H \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సూచించే రేఖల, మధ్య కోణం ఒకటే, అందువల్ల, $S = 0$ సూచించే రేఖల మధ్యకోణం

$$\text{Cos}^{-1}\left[\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}\right] = \text{Tan}^{-1}\left[\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right],\ a+b>0 \quad \text{అయితే}$$

$$= \text{Tan}^{-1}\left[\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right] + \pi,\ a+b<0 \quad \text{అయితే}$$

$$= \frac{\pi}{2},\quad a+b=0 \quad \text{అయితే}$$

$\therefore$ $S = 0$ సూచించు రేఖలు, $h^2 = ab$ అయితే సమాంతరాలు, $a + b = 0$ అయితే లంబాలు, $h^2 > ab$ అయితే ఖండించుకొంటాయి.

10.8.6.1 సిద్ధాంతము

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణం రెండు సమాంతర రేఖలను సూచిస్తే

(i) $h^2 = ab$ (ii) $af^2 = bg^2$

(iii) ఆ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $= 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$

$= 2\sqrt{\frac{f^2 - bc}{b(a+b)}}$ అని చూడండి.

10.8.7 జత రేఖల ఖండన బిందువు

10.8.7.1 సిద్ధాంతము

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణము మూల బిందువు వద్ద ఖండించుకొనే సరళ రేఖల జతను సూచిస్తే $g = f = c = 0$

10.8.7.2 సిద్ధాంతము

$S \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణం ఒక జత ఖండన రేఖలను సూచిస్తే, వాటి ఖండన బిందువు $\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

ఉదాహరణ 10.44 :

$3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + 2 = 0$ సూచించే రేఖా యుగ్మపు ఖండన బిందువు కనుక్కోండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని రెండో ఘాతపు సాధారణ సమీకరణంతో పోలిస్తే,

$a = 3,\ b = 2\ \ c = 2$

$2f = 5 \Rightarrow f = 5/2$

$2g = 5 \Rightarrow g = 5/2$

$2h = 7 \Rightarrow h = 7/2$

$\therefore$ ఆ రేఖల ఖండన బిందువు $\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2} \right)$

$$\frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{5}{2}}{6 - \frac{49}{4}}$$

$$= \frac{35 - 20}{24 - 49} = \frac{15}{-25} = \frac{-3}{5}$$

$$\frac{gh - af}{ab - h^2} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2}}{6 - \frac{49}{4}}$$

$$= \frac{35 - 30}{24 - 49} = \frac{5}{-25} = \frac{-1}{5}$$

$\therefore$ ఆ రేఖల ఖండన బిందువు $= \left(\frac{-3}{5}, \frac{-1}{5} \right)$.

ఉదాహరణ 10.47 :

$x^2 - y^2 + 2x + 2y + k = 0$ సమీకరణం ఒక జత రేఖలను సూచిస్తే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని x, y లలో ద్విఘాత సాధారణ సమీకరణంతో పోలిస్తే

$a = 1$ $\quad g = 1$

$b = -1$ $\quad h = 0$

$c = k$ $\quad f = 1$

దత్త సమీకరణము ఒక జత సరళరేఖలను సూచిస్తే

$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

అంటే $1(-1)(k) + 2(1)(1)(0) - 1(1)^2 - (-1)(1)^2$

$- k(0)^2 = 0$

$- k - 1 + 1 = 0$

$k = 0$

ఉదాహరణ 10.48 :

$2x^2 + kxy - 6y^2 + 3x + y + 1 = 0$ ఒక జత సరళరేఖలను సూచిస్తే, k విలువ కనుక్కోండి. ఆ రేఖల ఖండన బిందువునూ, వాటి మధ్య కోణాన్ని, ఈ k విలువను కనుక్కోండి.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని x, y లలో ద్విఘాత సాధారణ సమీకరణంతో పోల్చగా

$$a = 2, \qquad 2f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2}$$

$$b = -6, \qquad 2g = 3 \Rightarrow g = \frac{3}{2}$$

$$c = 1, \qquad 2h = k \Rightarrow h = \frac{k}{2}$$

ఇచ్చిన సమీకరణము ఒక జత సరళ రేఖలను సూచిస్తే

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

$$-12 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{k}{2}\right) \; 2\left(\frac{1}{4}\right) - 6\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{k^2}{4} = 0$$

$$-48 + 3k - 2 + 54 - k^2 = 0$$

$$-k^2 + 3k + 4 = 0 = k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$(k - 4)(k + 1) = 0$$

$$k = 4 \text{ (or) } -1$$

సందర్భము (1) : $k = -1$ అయితే

ఖండన బిందువు $\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$

$$\frac{hf - bg}{ab - h^2} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - (-6)\frac{3}{2}}{2(-6) - \frac{1}{4}} = \frac{-1 + 36}{-49} = \frac{35}{-49} = \frac{-5}{7}$$

$$\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)}{-12-\frac{1}{4}}=\frac{-3-4}{-49}=\frac{1}{7}$$

ఖండన బిందువు $=\left(\frac{-5}{7},\frac{1}{7}\right)$

రేఖల మధ్యకోణము $=\cos^{-1}\frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$

$$=\cos^{-1}\frac{|2-6|}{\sqrt{(2+6)^2+4}}=\cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$$

సందర్భము (ii): $k=4$ అయితే

$$\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+6\frac{3}{2}}{-12-4}=\frac{1+9}{-16}=\frac{-5}{8}$$

$$\frac{gh-af}{ab-h^2}=\frac{\frac{3}{2}(2)-2.\frac{1}{2}}{-12-4}=\frac{2}{-16}=-\frac{1}{8}$$

ఖండన బిందువు P $=\left(-\frac{5}{8},-\frac{1}{8}\right)$

$$\cos\alpha=\frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

$$=\frac{|2-6|}{\sqrt{(2+6)^2+16}}$$

$$=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

అభ్యాసం 10.9

1. $x^2 - y^2 - x + 3y - 2 = 0$ ఒక జత లంబరేఖలను సూచిస్తుందని చూపండి. ఆ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
2. కింది సమాంతర రేఖల మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోండి.

   (i) $9x^2 - 6xy + y^2 + 18x - 6y + 8 = 0$

   (ii) $x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 3x - 3\sqrt{3}\,y - 4 = 0$
3. $2(x^2 - y^2) + 3xy + 7x + 9y + 5 = 0$ రేఖా యుగ్మపు ఖండన బిందువును కనుక్కోండి.
4. $ax^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + 8 = 0$ ఒక జత లంబరేఖలను సూచిస్తే 'a' విలువ కనుక్కోండి.
5. $ax^2 + 2hxy - ay^2 = 0$ సూచించే జత సరళరేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

10.8.8 x, y లలో ఒక రెండో తరగతి సమీకరణాన్ని ఒక ఏకఘాత సమీకరణముతో సమఘాత పరచడం

సాధారణంగా $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(i)

అనే సమీకరణపు బిందుపథాన్ని ఒక రెండో తరగతి వక్రం అంటాం.

ఈ రెండో తరగతి వక్రము సరళరేఖాయుగ్మం కాని, ఒక వృత్తము కాని లేదా శాంకవము కాని కావచ్చు. ఈ సందర్భములో (1) యొక్క బిందుపథానికి చెందని ఏ సరళరేఖ అయినా (1)ని మహా అయితే రెండు బిందువులలో ఖండిస్తుంది.

ఒక రెండో తరగతి వక్రాన్ని ఒక దత్త సరళరేఖ ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే రేఖాయుగ్మము సమీకరణాన్ని ఈ పరిచ్ఛేదంలో కనుక్కోంటాం.

$lx + my + n = 0,\ (n \neq 0)$ సరళరేఖ వక్రం (1) ని రెండు విభిన్న బిందువులు A, B లలో ఖండిస్తుంది అనుకుందాం.

$\overleftrightarrow{AB}$ సమీకరణాన్ని $\frac{lx + my}{-n} = 1$ ...(2) అని తీసుకోవచ్చు.

సమీకరణం(1) ని సమీకరణం (2) తో క్రింది విధంగా సమఘాత పరుస్తాం.

(1) ని $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx(1) + 2fy(1) + c(1)^2 = 0$ అని రాస్తాం

$$\Rightarrow ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx\left(\frac{lx+my}{-1}\right)^2$$

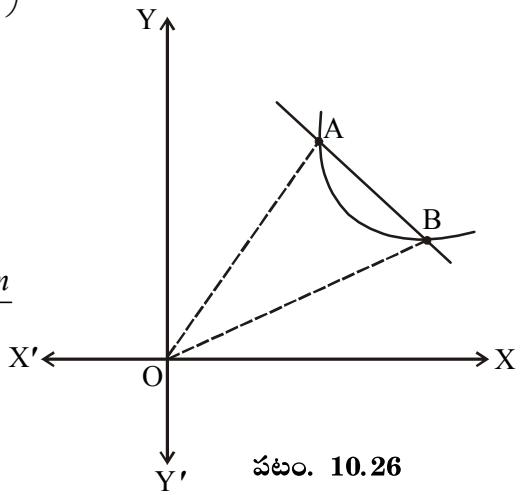
$$+ 2fy\left(\frac{lx+my}{-1}\right) + c\left(\frac{lx+my}{-1}\right)^2 = 0 \quad ...(3)$$

$$\Rightarrow a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$$

ఇక్కడ $a' = a - \frac{2gl}{n} + \frac{cl^2}{n^2}$,

$$h' = h - \frac{gm}{n} - \frac{fl}{n} + \frac{clm}{n}$$

$$b' = b - \frac{2fm}{n} + \frac{cm^2}{n^2}$$



పటం. 10.26

సమీకరణం (3) $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణము అవుతుంది.

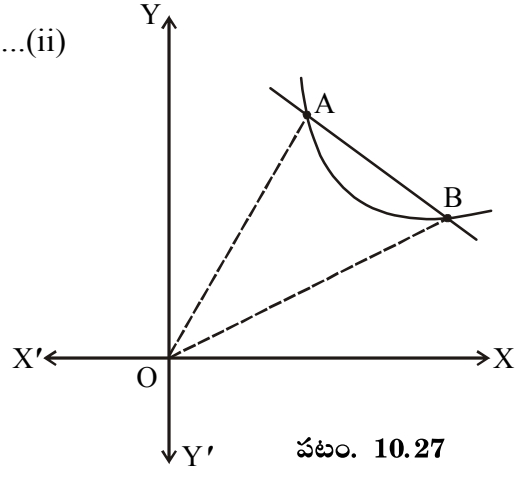
ఉదాహరణ 10.47: $x - y - \sqrt{2} = 0$ అనే సరళరేఖ $x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే సరళరేఖలు పరస్పరము లంబంగా ఉంటాయని చూపండి.

సాధన: దత్తవక్రము $x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$ ...(i)

దత్త సరళరేఖ $x - y - \sqrt{2} = 0$ ...(ii)

దత్త సరళరేఖ వక్రాన్ని A,B బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోందనుకుందాం.

వక్రము (1)ని సరళరేఖ (2)తో సమఘాత పరిస్తే $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణం వస్తుంది.



పటం. 10.27

(2) నుండి $\frac{x-1}{\sqrt{2}}=1$

(1) ని సమఘాత పరిస్తే

$x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$

$x^2 - xy + y^2 + 3x\,(1) + 3y\,(1) - 2(1)^2 = 0$

$$x^2 - xy + y^2 + 3x\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)+3y\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)-2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2=0$$

$$x^2-xy+y^2+\frac{3x^2-3y^2}{\sqrt{2}}-(x^2-2xy+y^2)=0$$

i.e., $3x^2+\sqrt{2}xy-3y^2=0$

ఇది $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణము.

x^2 గుణకము + y^2 గుణకముల మొత్తం "0" కావున సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ లు పరస్పరం లంబాలు అవుతాయి.

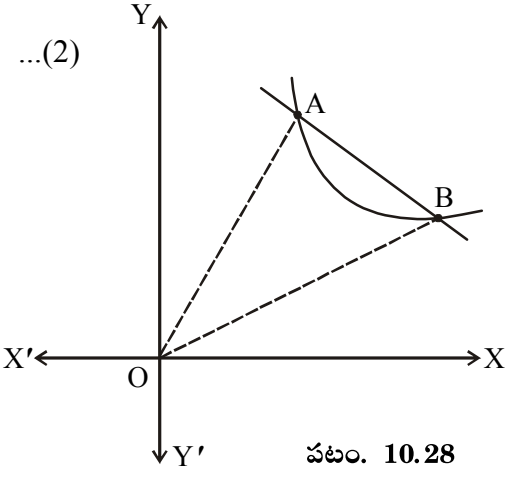
ఉదాహరణ 10.48: $2x + 3y = k$ అనే సరళరేఖ $3x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 3y + 4=0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువు కలిపితే వచ్చే సరళరేఖలు లంబాలు కావడానికి నియమము కనుగొనండి.

సాధన: దత్తవక్రము $3x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$ ...(1)

దత్త సరళరేఖ $2x + 3y = k$ ...(2)

దత్త సరళరేఖ వక్రము (1) ని ఖండించే బిందువులు A, B అనుకుందాం.

వక్రం (1)ని సరళరేఖ (2)తో సమఘాత పరిస్తే $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణం వస్తుంది.



పటం. 10.28

(2) నుండి $\frac{2x+3y}{k}=1$

(1) ని సమఘాత పరిస్తే

$3x^2 - xy + 3y^2 + 2x(1) - 3y\,(1) + 4(1)^2 = 0$

$$3x^2 - xy + 3y^2 + 2x\left(\frac{2x+3y}{k}\right)-3y\left(\frac{2x+3y}{k}\right)+4\left(\frac{2x+3y}{k}\right)^2=0$$

$$3x^2-xy+3y^2+\frac{4x^2-9y^2}{k}+4\left(\frac{4x^2+9y^2+12xy}{k^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(3+\frac{4}{k}+\frac{16}{k^2}\right)x^2+\left(\frac{48}{k^2}-1\right)xy+\left(3-\frac{9}{k}+\frac{36}{k^2}\right)y^2=0$$

ఇది $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ ల సంయుక్త సమీకరణము.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ లు పరస్పరం లంబాలు కావున

x^2 గుణకము + y^2 గుణకం = 0

$$3+\frac{4}{k}+\frac{16}{k^2}+3-\frac{9}{k}+\frac{36}{k^2}=0$$

$3k^2 + 4k + 16 + 3k^2 - 9k + 36 = 0$

$6k^2 - 5k + 52 = 0$

అభ్యాసం 10.10

1. $3x - y + 1 = 0$ సరళరేఖ $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే సరళరేఖ మధ్యకోణాన్ని కనుగొనండి.

2. $x + 2y = k$ అనే సరళరేఖ $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y - 1 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే సరళరేఖలు లంబాలు అయితే k విలువ కనుగొనండి.

3. మూలబిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తము $x^2 + y^2 = a^2$ కు $lx + my = 1$ అనేది ఒక జ్యా. ఈ జ్యా మూలబిందువు వద్ద లంబకోణము చెయ్యడానికి నియమము కనుగొనండి.

4. $3x - y = 2$ అనే సరళరేఖ $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ అనే వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే వచ్చే సరళరేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుగొనండి.

కీలకపదాలు

- Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x = a$ మరియు X- అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $y = b$
- Y-అక్షంపై అంతరఖండం 'C' గా, వాలు m గా గల సరళరేఖ సమీకరణం $Y = mx + C$
- సరళరేఖ $A(x_1, y_1)$ బిందువు గుండా పోతూ, వాలు m గా గల సరళరేఖ సమీకరణము $y = mx + C$
- $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనే రెండు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- X-అక్షం, Y-అక్షాలతో వరసగా శూన్యేతర అంతరఖండాలు a, b గల సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుంచి p దూరంలో ఉండి, మూలబిందువు నుంచి దానికి గీసిన అభిలంబకిరణం ధన x-అక్షంతో అపసవ్యదిశలో కోణం చేస్తే, ఆ సరళరేఖ సమీకరణం $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.
- పరామితి రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\sin \alpha} = r$ ఇక్కడ r అనేది సరళరేఖ మీద ఇచ్చిన బిందువు $A(x_1, y_1)$ బిందువు $P(x, y)$ నుంచి ఏదేని కు గల దూరం. దత్తరేఖ ధన X-అక్షంలో అపసవ్యదిశలో 'α' కోణం చేస్తూండాలి.

- x మరియు y లలో సాధారణ ఏకఘాత సమీకరణం ఎల్లప్పుడు ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది. A మరియు B లు రెండూ సున్న కానప్పుడు.
- $Ax + By + C = 0$ అనే సాధారణ సమీకరణం నుండి ఈ క్రింది వాటిని గణించవచ్చును.

i) సరళరేఖ వాలు $= -\frac{A}{B}$

ii) X–అంతరఖండము $= -\frac{C}{A}$

iii) Y– అంతరఖండము $= -\frac{C}{B}$

iv) మూలబిందువు నుండి సరళరేఖకు గల లంబదూరం $= \frac{|C|}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

v) మూలబిందువు నుంచి అభిలంబము క్షితిజముతో చేయు కోణాలు

$$\cos\alpha = \frac{\mp A|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ;\quad \sin\alpha = \frac{\mp B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$C > 0$ అయితే ఎగువ గుర్తును (ధనాత్మకము) తీసుకుంటుంది.

$C < 0$ అయితే దిగువ గుర్తును (రుణాత్మకము) తీసుకుంటుంది.

$C = 0$ అయితే ఎగువ లేదా దిగువ గుర్తులను తీసుకుంటుంది.

- m_1, m_2 వాలులు గల రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణం అయితే

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

i) $m_1 = m_2$ అయితే సరళరేఖలు సమాంతరాలు

ii) $m_1 m_2 = -1$ అయితే సరళరేఖలు లబ్దాలు

B. రెండు సాధారణ రూపంలోగల సరళరేఖల మధ్యకోణం అయితే

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

i) $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ లేదా $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ అయితే సరళరేఖలు సమాంతరాలు.

ii) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ అయితే సరళరేఖలు లబ్ధాలు.

- దత్త బిందువు (x_1, y_1) నుండి సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు గల దూరం

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

- సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణం $Ax + By + K = 0$
- సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $Bx - Ay + K = 0$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http:// math world . wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. Y- అంతరఖండం -3గా గల
   (a) (-2, 3) మరియు (4, -5) బిందువులను కలిపే సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం
   (b) (0, -5) మరియు (-1, 3) బిందువులను కలిపే రేఖను లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణాలను కనుగొనుము.
2. సరళరేఖ (4, -5) బిందువు గుండా పోతూ
   (a) (3, 7) మరియు (-2, 4) బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణం
   (b) (-1, 2) మరియు (4, 6) బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణాలను కనుగొనుము.

3. బిందువులు $(a, 0)(0, b)$ మరియు $(3a, -2b)$ లు సరేఖీయాలు అని చూపుము. మరియు వీటిని కలిగి ఉండే సరళ రేఖ సమీకరణంను కనుక్కోండి.

4. ఒక త్రిభుజము ABC కి A(1, 4), B(2, −3) మరియు C(−1, −2) శీర్షాలు.
   (a) A ద్వారా పోయే మధ్యగత రేఖ
   (b) A ద్వారా పోయే ఉన్నతి
   (c) భుజం BC కి లంబ సమద్విఖండన రేఖల సమీకరణాలు కనుగొనుము.

5. సరళరేఖ A(2, 1) బిందువు ద్వారా పోతూ ధన X−అక్షంతో అపవస్య దిశలో $\frac{\pi}{6}$ కోణం చేసే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

6. సరళరేఖ (2, 3) బిందువు ద్వారా పోతూ $2x + 3y + 7 = 0$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

7. X− అంతరఖండం మరియు, Y− అంతరఖండాలు వరసగా a మరియు bలు అయితే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

8. సరళరేఖలు $y = (2-\sqrt{3})x+5$ మరియు $y = (2+\sqrt{3})x+5$ మధ్యకోణం కనుగొనుము.

9. $2x + 3y = 4$ మరియు $3x - 2y = 7$ సరళరేఖల మధ్య కోణం కనుగొనుము.

10. బిందువు (3, 4) నుండి సరళరేఖ $12(x + 6) = 5(y - 2)$ కు గీచిన లంబము పొడవును కనుగొనుము.

11. బిందువు (0, 1) నుండి సరళరేఖ $3x + 4y + 5 = 0$ గీసిన లంబము పొడవును కనుగొనుము.

12. $2x + 3y = 4$ మరియు $4x + 6y = 20$ సరళరేఖల మధ్య దూరంను కనుగొనుము.

13. బిందువు (−3, −4) నుండి సరళరేఖ $4x - 3y = 7$ మీదకు గీసిన లంబము పొడవును కనుగొనుము.

14. బిందువు $(a\cos^3\theta, b\sin^3\theta)$ గుండాపోతూ, సరళరేఖకు $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta = a$ లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x\cos\theta - y\,\mathrm{cosec}\,\theta = a\cos 2\theta$ అని రుజువు చేయుము.

15. క్రింది జ్యామితీయ ఫలితాలను రుజువు చేయుము.
   a) ఒక త్రిభుజంలోని ఉన్నతులు అనుషక్తాలు

b) ఒక సమబాహు త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖలు సమానము.

c) భుజం 'a' గా గల సమబాహు త్రిభుజవైశాల్యం $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

d) ΔABC లో G కేంద్రభాసం మరియు O అనేది ఏదేని బిందువు అయితే అపుడు $OA^2 + OB^2 + OC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 30G^2$

e) వృత్త కేంద్రం నుండి గీసిన లంబము జ్యాను సమద్వి ఖండిస్తుంది.

జవాబులు

అభ్యాసం 10.1

1. (a) సరళరేఖ 2. (a) 1 (b) -1 (c) 1
3. 7 4. 20 5.(a) $y = -4$ (b) $x = -3$
6. $x = 5$ 7. $y + 7 = 0$

అభ్యాసం 10.2

1. (a) $y = 2x - 2$ (b) వాలు = Y-అంతరఖండం = 2
2. $\sqrt{3}y = -3x - 1$ 3. వాలు $= \frac{1}{2}$, Y-అంతరఖండం = -2
4. $3x + 7y = 7$ 5. $y = x + 1$; $x + y - 3 = 0$ 6. $3x - 2y = 0$
7. (a) $x + y = -1$ (b) కర్ణం AC యొక్క సమీకరణం $= 2x - y - 4 = 0$

   కర్ణం BD యొక్క సమీకరణం $= 2x - 11y + 66 = 0$
8. $x - 2 = 0$, $x - 3y + 6 = 9$ $5x - 3y - 2 = 0$
9. $2x + 3y = 6$ 10. $3x + y = 6$ 11. $3x + 4y = 11$
12. $x + y = 2\sqrt{2}$
14. $\frac{x-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ మరియు బిందువు నిరూపకాలు $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

అభ్యాసం 10.3

1. A మరియు Bలు రెండు, ఒకదాని తర్వాత ఒకటి శూన్యం కావు.

2. $y = \frac{-2}{5}x - \frac{3}{5}$

3. (a) X-అంతరఖండం $= \frac{-C}{m}$; Y- అంతరఖండం $= C$

   (b) X-అంతరఖండం $= \frac{-8}{3}$; Y- అంతరఖండం $= \frac{8}{7}$

   (c) X-అంతరఖండం = −4 ; Y- అంతరఖండం = 6

4. $2\sqrt{13}$ ప్రమాణాలు

5. $\frac{x}{P\sec\alpha} + \frac{x}{P\,\mathrm{cosec}\,\alpha} = 1$

6. (a) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{4}y - 2 = 0$ (b) $-\frac{3}{x} + \frac{4}{4}y = 0$

7. మొదటి సరళరేఖ మూలబిందువు నుండి దగ్గరగా ఉంది.

8. K = −7, 9. (2, 1) 10. S = (−8, −10) 11. O = (−3, 2)

అభ్యాసం 10.4

1. (a) $m_1 = \frac{-A}{B}$ (b) $Am_1 = B$

2. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$

3. (a) (i) $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ (ii) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

   (b) సమాంతరము (c) లంబంగా

అభ్యాసం 10.5

1. $d = \frac{16}{\sqrt{13}}$ 2. $\left(0, \frac{b}{a}\left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)\right)$ 3. $\left(0, \frac{32}{3}\right)$

4. $\frac{14}{\sqrt{58}}$ 5. $\left(\frac{3}{4}(4\pm5), 0\right)$

6. $\left(\frac{8}{5}\cdot\frac{21}{5}\right)$ 7. $3x - 4y = 18$

8. $\left(\frac{74}{41}, \frac{133}{41}\right)$ 9. $\frac{1}{2\sqrt{34}}$

అభ్యాసం 10.6

1. $3x + y + 2 = 0$
2. $y = 2x + 2$
3. $x - y = 3$
4. $y = x$
5. $3x - 2ay = 6(a - 1)$
7. $2x - 3y + 6 = 0$

అభ్యాసం 10.8

1. (i) $\cos^{-1}\frac{24}{25}$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{232}}\right)$ (iii) α

   (iv) $\frac{\pi}{2}$

3. (i) $\left(\frac{20}{9}, -\frac{44}{9}\right), \frac{56}{3}$ (ii) (0, -4), 36

అభ్యాసం 10.9

1. $x + y - 2 = 0, x - y + 1 = 0$
2. (i) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (ii) $\frac{5}{2}$

3. $\left(-\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$

4. 2

5. $\frac{\pi}{2}$

అభ్యాసం 10.10

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{193}}\right)$

(2) ± 1

(3) $a^2 (l^2 + m^2) = 2$

(4) 90^0

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) $4x + 3y + 9 = 0$ (b) $x - 8y - 24 = 0$
2. (a) $3x - 5y - 37 = 0$ (b) $5x - 8y - 60 = 0$
4. (a) $13x - y - 9 = 0$ (b) $3x - y + 1 = 0$
   (c) $3x - y - 4 = 0$
5. $x - \sqrt{3}y = 2 - \sqrt{3}$
6. $2x + 3y + 13 = 0$
7. $bx + ay = ab$
8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{\pi}{2}$
10. $\frac{98}{13}$ 11. $\frac{9}{5}$
12. $\frac{6}{\sqrt{13}}$ 13. $\frac{7}{5}$

అధ్యాయం

11

వృత్తాలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యభాగమును చదివిన తర్వాత మీరు గ్రహించదగినవి

- ఇచ్చిన వృత్త కేంద్రం, వ్యాసార్ధంతో వృత్త సమీకరణమును ఉత్పాదించుట.
- రెండు చలరాశులు ఉన్న రెండో తరగతి సాధారణ సమీకరణం వృత్తాన్ని సూచించడానికి నియమాన్ని రాబట్టుట
- దత్త వృత్త సమీకరణ సాధారణ రూపం ఇచ్చినపుడు కేంద్రము, వ్యాసార్ధాన్ని కనుగొనుట
- వృత్తం

  (i) సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువుల గుండా పోయినపుడు

  (ii) ఇచ్చిన రెండు బిందువుల గుండా పోతూ, ఒక నిరూపక అక్షాన్ని తాకుతున్నపుడు ఆ వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.
- వ్యాసం రూపంలో గల వృత్త సమీకరణంను ఉత్పాదించుట
- వ్యాసం చివరి బిందువులు బిందువు ఇచ్చినపుడు వృత్తసమీకరణంను కనుగొనుట
- కేంద్రము, వ్యాసార్ధం ఇచ్చినపుడు పరామితీయ రూపంలో వృత్త సమీకరణంను కనుగొనుట

పూర్వాకాంక్షితాలు

- వృత్తానికి సంబంధించిన పదాలు మరియు భావనలు.
- నిరూపకాలు ఇచ్చినపుడు రెండు బిందువుల మధ్య దూరం
- వివిధ రూపాలలో సరళ రేఖ సమీకరణాలు.

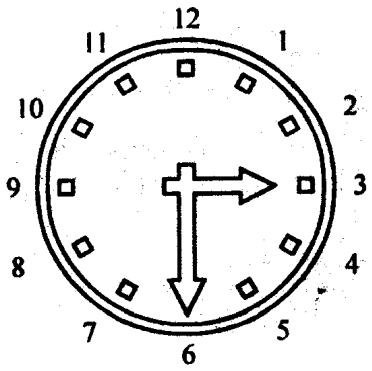
పరిచయం

జ్యామితి మొదటగా పురాతన ఈజిప్టు దేశంలో మొదలై తరువాత గ్రీస్, భారతదేశము మరియు మిగిలిన దేశాలలో అభివృద్ధి చెందింది. ఇది క్రీ.పూ. ఆరో శతాబ్దంలో క్రమబద్ధంగా అభివృద్ధి చెందింది.

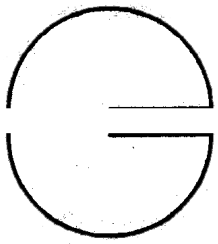
గణిత శాస్త్రవేత్తలు మెకాన్మస్, అర్కిమెడిస్, థేల్స్‌లు వృత్తము మరియు స్పర్శరేఖ మీద కృషిచేశారు. క్రీ.పూ ఐదో శతాబ్దంలో యూక్లిడ్ అప్పటి వరకు కనుక్కొన్న విషయాలను క్రోడీకరించి వాటిని "ది ఎలిమెంట్స్" అనే పేరుతో పుస్తక రూపంలోకి తెచ్చాడు.

చక్రము మరియు గాజుల ఆకారం వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. గుండ్రని గడియారము మరియు కొన్ని నాణేల రూపం కూడా వృత్తాకారంలో ఉంటాయి.

పటములో గడియారము యొక్క ముల్లు చలించే మార్గమును గమనించండి. (పటం. 11.1)



పటం 11.1



పటం 11.2

మరలా, ఒక బిందువు వద్ద ఒక మేకుని స్థిరంగా ఉంచి దాని చుట్టూ తిప్పడానికి వీలుగా నిర్ధారిత పొడవుగల దారం కట్టి దాని రెండే కొనను ఒక పెన్సిల్‌కి కట్టి దారం ఆధారంగా పెన్సిల్‌ను మేకు చుట్టూ తిప్పగా ఏర్పడే వక్రాన్ని గమనించండి. (పటం. 11.2)

పై సందర్భాలలో ఏర్పడిన వక్రాలు ఒకే ఆకారంలో ఉంటాయి. ఈ వక్రమునే వృత్తం అంటాం.

స్థిరంగా ఉన్న మేకు నుండి పెన్సిల్‌తో గుర్తించిన మార్గం వరకు గల దూరాన్ని వ్యాసార్ధం అంటాం.

ఈ అధ్యాయములో వృత్తము, జ్యా సమీకరణాలు కనుగొంటాం. స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల గురించి తెలుసుకుంటాం. మరియు వృత్తమునకు సంబంధించిన ముఖ్యమైన భావనలను చర్చిస్తాం.

11.1 వృత్తం నిర్వచనము

తలంలోని ఒక స్థిర బిందువు నుంచి స్థిర దూరంలో అదే తలంలో చలించే బిందు పథాన్ని ఒక వృత్తం అంటాం. స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రమనీ, స్థిరదూరాన్ని వృత్త వ్యాసార్ధమనీ అంటాం.

11.2 వృత్త సమీకరణం

ఇచ్చిన వృత్తానికి గణిత సమీకరణంను కనుగొనువచ్చా?

ఇచ్చిన వివిధ నియమాలతో వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

11.2.1 వృత్త కేంద్ర నిరూపాకాలు మరియు వ్యాసార్ధము ఇచ్చినపుడు

C కేంద్రంగా, 'a' వ్యాసార్ధంగా ఉన్న వృత్తాన్ని తీసుకొనుము. (h, k) వృత్త కేంద్ర నిరూపకాలు అనుకొందాము. వృత్తం మీద $P(x, y)$ ఏదేని బిందువును తీసుకొనుము. X-అక్షమీదకు CM, PN లంబాలను గీయండి. PN మీదకు CL లంబాన్ని గీయండి.

అపుడు $CL = MN = ON - OM = x - h$

మరియు $PL = PN - LN$

$= PN - CM$

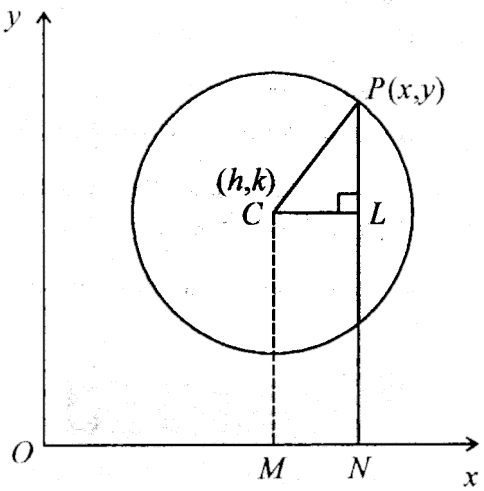
$= Y - K$

CLP లంబకోణ త్రిభుజం నుండి

$C L^2 + PL^2 = CP^2$

$\Rightarrow \quad (x - h)^2 + (Y - K)^2 = a^2 \qquad ...(1)$

ఇదియే కావలసిన వృత్తసమీకరణం. దీనినే వృత్తం ప్రామాణిక రూపం అని పిలుస్తారు.



పటం 11.3

విపర్యయంగా సమీకరణం (1) తృప్తిపరిచే, తలంలోని ఏదేని బిందువు (x, y) అయితే అది (h, k) నుండి 'a' దూరంలో గల వృత్తం మీది బిందువు.

ఈ క్రింది విషయాలు సాధ్యమా

i) మూల బిందువు గుండా పోయే వృత్తం?

ii) కేంద్రం X-అక్షం మీద ఉండి, మూల బిందువు గుండా పోనటువంటి వృత్తం?

iii) X-అక్షం వ్యాసంగా ఉండి, వృత్తం మూల బిందువు గుండా పోతుందా?

iv) మూల బిందువు కేంద్రంగా ఉంటుందా?

v) వృత్తం X-అక్షాన్ని స్పర్శిస్తూ ఉంటుందా?

vi) వృత్తం Y-అక్షాన్ని స్పర్శిస్తూ ఉంటుందా?

vii) వృత్తం రెండు అక్షాలను స్పర్శిస్తూ ఉంటుందా?

పైన సూచించిన వాటికి ఒక దాని తర్వాతా ఒకటికి మనం సమాధానాలు ప్రయత్నించవచ్చు.

(i) ఇది మూలబిందువు (0, 0) గుండా పోతే (1) తృప్తిపడును.

$$h^2 + k^2 = a^2$$

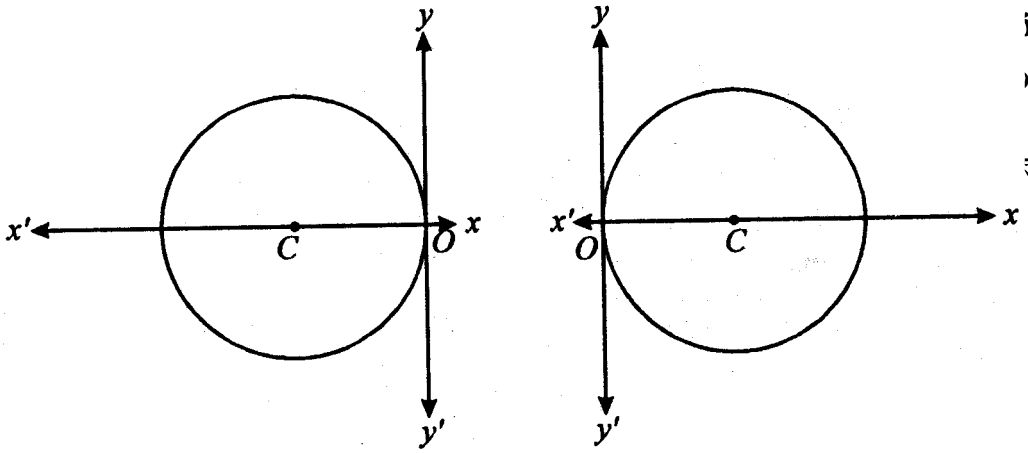
కావున సమీకరణం (1)ని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0 \qquad \ldots (2)$$

(ii) ఈ సందర్భంలో $K = 0$

కావున సమీకరణం (1)ని ఇలా వ్రాయవచ్చు

$$(x - h)^2 + y^2 = a^2 \qquad \ldots (3)$$



పటం 11.4

iii) ఈ సందర్భంలో $K = 0$ మరియు $h = \pm a$ (పటం 11.4 చూడండి)

కావున సమీకరణం (1)ని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$x^2 + y^2 \pm 2ax = 0 \qquad \ldots (4)$$

iv) ఈ సందర్భంలో $h = 0 = K$

కావున సమీకరణం (1)ని ఇలా వ్రాయవచ్చును

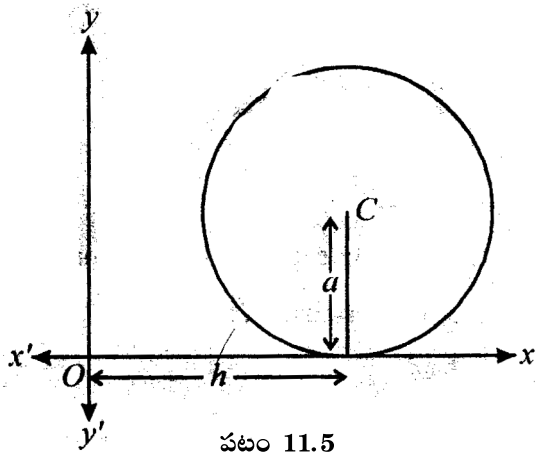
$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \ldots (5)$$

v) ఈ సందర్భంలో $K = 0$ (పటం 16.5 చూడండి)

కావున సమీకరణం (1) ని

ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0 \qquad \ldots (6)$$



పటం 11.5

vi) ఈ సందర్భంలో $h = a$

కావున సమీకరణం (1) ని

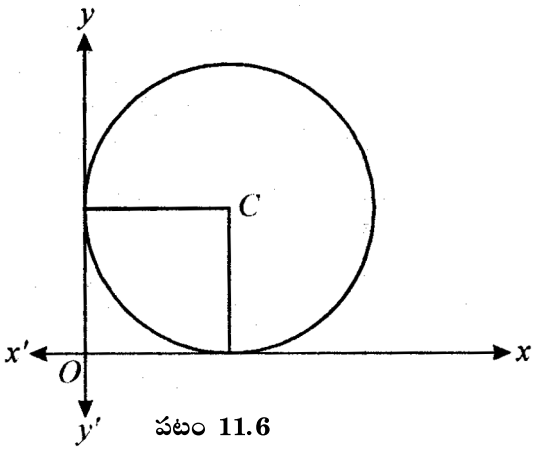
ఇలా వ్రాయవచ్చును.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ky + k^2 = 0 \quad \ldots (7)$$

vii) ఈ సందర్భంలో $h = k = a$ (పటం 16.6 చూడండి)

కావున సమీకరణం (1) ని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0 \quad \ldots (8)$$



పటం 11.6

ఉదాహరణ 11.1:

కేంద్రం (3, −4) గాను, వ్యాసార్ధం 6గా గల వృత్తసమీకరణంను కనుగొనుము

ఈ పదాలను సమీకరణం (1)తో పోల్చగా వచ్చునవి

$$h = 3;\ k = -4,\ a = 6$$

$$\therefore \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 6^2$$

లేదా $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

ఉదాహరణ 11.2:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ వృత్త సమీకరణం నుండి కేంద్రం, వ్యాసార్ధములను కనుగొనుము.

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ ను $(x - h)^2 + (y - k) = a^2$ సమీకరణంతో పోల్చగా

$$-h = 1, -k = -1;\ a^2 = 4$$

$$\therefore \quad h = -1;\ k = 1, a = 2$$

$\therefore$ కావున ఇచ్చిన వృత్త కేంద్రం $(-1, 1)$ మరియు వ్యాసార్ధం 2.

11.3 వృత్తం యొక్క సాధారణ ద్విఘాత సమీకరణం

(h, k) కేంద్రంగాను, r వ్యాసార్ధంగాను ఉన్న వృత్త ప్రామాణిక సమీకరణం

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \ldots. (1)$$

లేదా $\quad x^2 + y^2 - 2gx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad \ldots (2)$

పై సమీకరణం ఈ క్రింది రూపంలో ఉంది.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots (3)$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c$$

$$\Rightarrow (x+g)^2 + (y+f)^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$$

$$\Rightarrow [x-(-g)]^2 + [y-(-f)]^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2 \quad \ldots (4)$$

$$\Rightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$h = -g,\ k = -f,\ r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

ఇచ్చిన సమీకరణము కేంద్రం $(-g, -f)$, వ్యాసార్ధం $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ గా ఉన్న ఒక వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

11.3.1 x మరియు y లలో ఒక సాధారణ ద్విఘాత సమీకరణం వృత్తాన్ని సూచించడానికి అవశ్యక పర్యాప్తనియమం

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్త సమీకరణం అనుకొనుము.

(i) ఇది x, y లలో ద్విఘాత సమీకరణం మరియు x^2 గుణకం, y^2 గుణకం విలువలు సమానము.

(ii) ఇది xy పదము కలిగి లేదు

(iii) X-అక్షంపై కేంద్రము గల వృత్తము సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ రూపంలో ఉంటుంది. ($\because$ కేంద్రం యొక్క y - నిరూపకము '0')

(iv) Y-అక్షంపై కేంద్రము గల వృత్తము సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$ ఉంటుంది. ($\because$ కేంద్రం యొక్క x - నిరూపకము '0')

గమనిక : సమస్యలను సాధించేటప్పుడు x^2 గుణకం మరియు y^2 గుణకంలు 1కి సమానమయ్యేట్లు చూసుకుంటాం.

ఉదాహరణ 11.3 :

$45x^2 + 45y^2 - 60x + 36y + 9 = 0$ సూచించే వృత్తకేంద్రాన్ని, వ్యాసార్ధాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : దత్త సమీకరణాన్ని 45 చేత భాగించగా వచ్చునది

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{19}{45} = 0$$

దీనిని $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా

$$g = -\frac{2}{3}\ ;\ f = \frac{2}{5}\ ,\ c = \frac{19}{45}$$

$\therefore$ అపుడు వృత్తకేంద్రం $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ మరియు వ్యాసార్ధం $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{\sqrt{41}}{15}$

ఉదాహరణ 11.4 :

(1, 0), (0, −6) మరియు (3, 4) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం అనుకొనుము ...(1)

పై సమీకరణము ఇచ్చిన మూడు బిందువుల ద్వారా పోతూ సమీకరణం (1)ని తృప్తిపరుస్తున్న సమీకరణాలు

$$1 + 2g + c = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$36 - 12f + c = 0 \qquad \ldots(3)$$

మరియు $25 + 6g + 8f + c = 0 \quad \ldots(4)$

(2) నుండి (3) ను మరియు (3) నుండి (4)ను తీసివేయగా వచ్చినది

$$2g + 12f = 35$$

మరియు $6g + 20f = 11$

పై సమీకరణాలను సాధించగా

$g = -\frac{71}{4}$ మరియు $f = \frac{47}{8}$ విలువలు వస్తాయి.

g విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా c విలువ వస్తుంది.

$$c = \frac{69}{2}$$

ఇప్పుడు g, f మరియు c విలువలను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా వచ్చు కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$4x^2 + 4y^2 - 142x + 47y + 138 = 0$$

ఉదాహరణ 11.5 :

వృత్తం (1, −2) మరియు (3, −4) బిందువుల గుండా పోతూ, X-అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణానాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : X–అక్షాన్ని స్పృశిస్తూ, ప్రామాణిక రూపంలో $K = a$ ను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చు వృత్త సమీకరణం (ఫలితం '6' చూడండి).

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0 \quad \ldots(1)$$

ఇది $(1, -2)$ గుండా పోయినచో

$$\therefore \quad h^2 - 2h + 4a + 5 = 0 \quad \ldots(2)$$

అదే విధంగా (3, −4) బిందువు గుండా పోయినచో

$$\therefore \quad h^2 - 6h + 8a + 25 = 0 \quad \ldots(3)$$

సమీకరణం (2) మరియు (3) ల నుండి 'a' ను తొలగించగా వచ్చునది.

$$\Rightarrow \quad h^2 + 2h - 15 = 0$$

$$h = 3 \text{ లేదా } h = -5$$

సమీకరణము (3) నుండి 'a' అనురూప విలువలు వరుసగా −2 మరియు −10

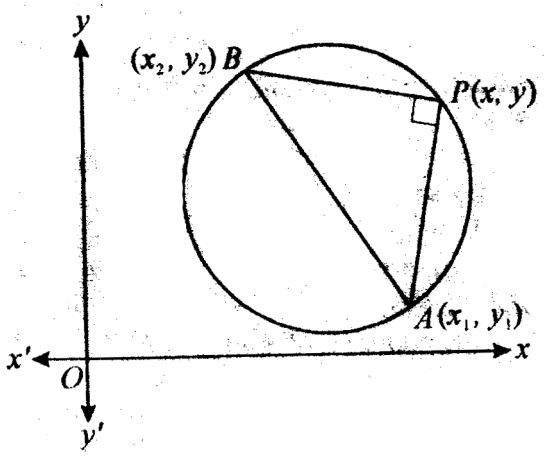
'a' మరియు h విలువలు (1)లో ప్రతిక్షేపించగా వచ్చునది.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 \quad \ldots(4)$$

మరియు $x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$ ... (5)

(4) మరియు (5) లు కావలసిన వృత్త సమీకరణాలను సూచిస్తాయి.

11.4 వ్యాసం చివరి బిందువులలో ఒక బిందువు ఇచ్చినపుడు వృత్త సమీకరణం



పటం 11.7

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ బిందువులు కలిగిన వ్యాసం AB అనుకొనుము. (పటం 11.7 చూడండి)

$P(x, y)$ అనేది వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. అపుడు AP, BP లను కలుపుము. కావున అర్ధవృత్తంలో β కోణం లంబకోణం అవుతుంది.

$\therefore$ $AP \perp BP$

(AP వాలు) $\times$ (BP వాలు) $= -1$

ఇపుడు AP వాలు $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

మరియు BP వాలు $= \dfrac{y - y_2}{x - x_2}$

$\therefore$ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} \times \dfrac{y - y_2}{x - x_2} = -1$

లేదా $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ ...(1)

వృత్తం మీద ఉన్న ప్రతిబిందువుకు సమీకరణం (1) నిజం మరియు తలంలోని వృత్తం పై లేని ఏ ఇతర బిందువుకు నిజం కాదు.

సమీకరణం (1) వ్యాసాగ్రాలుగా ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 11.6 :

మూల బిందువు (0, 0) మరియు (2, −4) బిందువులను కలిపే రేఖ వ్యాసంగా గల వృత్త సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ x_2 = 2\ ;\ y_2 = -4$

సమీకరణం (1) ని ఉపయోగించి పై బిందువులను ప్రతిక్షేపించగా

$$(x - 0)(x - 2) + (y - 0)[y - (-4)] = 0$$

లేదా $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

ఉదాహరణ 11.7 :

$Y = mx$ అనే రేఖ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ యొక్క వృత్త జ్యా సమీకరణం అయితే జ్యా, వ్యాసాలుగా గల వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన : జ్యా, వృత్తాన్ని ఖండించే బిందువులు

$(0,\ 0)$ మరియు $\left(\frac{2a}{1+m^2}\ ,\ \frac{2am}{1+m^2}\right)$ అనుకొనుము.

పై బిందువులు వృత్త వ్యాస చివరి బిందువులు అయితే సమీకరణం (1) నుండి కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$(x-0)\left(x - \frac{2a}{1+m^2}\right) + (y-0)\left(y - \frac{2am}{1+m^2}\right) = 0$$

లేదా $x^2 + y^2 - \frac{2a}{1+m^2}x - \frac{2am}{1+m^2}\ y = 0$

లేదా $(1 + m^2)\,x^2 + (1 + m^2)\,y^2 - 2ax - 2amy = 0$

$\therefore$ ఇదియే కావలసిన వృత్త సమీకరణం.

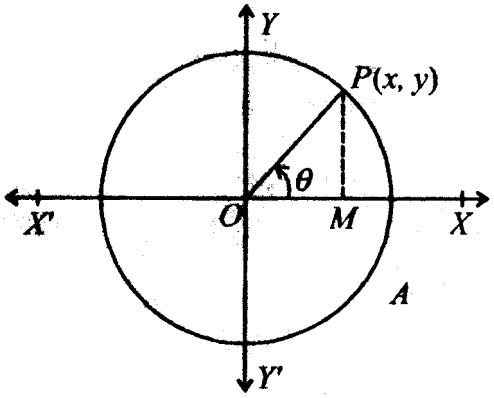
11.5 వ్యాసార్ధము మరియు నిమ్నత ఇచ్చినపుడు వృత్త సమీకరణం (పరామితి రూపం)

$P(x, y)$ అనేది వృత్తంపై ఏదేని బిందువు అనుకొనుము.

ఆ వృత్త కేంద్రము, మూల బిందువని, వ్యాసార్ధము 'r' అనుకొనుము

P నుండి OX మీదికి PM ను గీయండి.

అపుడు $PM \perp OX$



పటం 11.8

$\therefore$ $OM = x$; $MP = y$ OP ని కలపండి

$\angle XOP = \theta$ మరియు $OP = r$ అనుకొనుము

ఇపుడు $x = OM = r\cos\theta$

మరియు $y = MP = r\sin\theta$

కావున $x = r\cos\theta$, మరియు $y = r\sin\theta$ అనే ఈ రెండు సమీకరణాలను వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలంటాము. ఇక్కడ 'θ' అనేది పరామితి.

గమనిక : వృత్తకేంద్రం (h, k) అయితే వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలు $x = h + r\cos\theta$, $y = k + r\sin\theta$ ఇక్కడ θ పరామితి మరియు $\theta \in [0, 2\pi]$.

ఉదాహరణ 11.8:

కింద ఇచ్చిన వృత్తాలలోని ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలను రాయండి.

(i) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ (ii) $(x+2)(x-4) + (y-3)(y+1) = 0$

సాధన : దత్త వృత్త సమీకరణం $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$

ఈ సమీకరణాన్ని ప్రామాణిక వృత్త సమీకరణంతో పోల్చగా వచ్చు కేంద్రం $(1, -2)$ మరియు వ్యాసార్ధం = 3.

$\therefore$ దత్త వృత్త పరామితీయ సమీకరణాలు

$$x = 1 + 3\cos\theta \; ; \; y = -2 + 3\sin\theta$$

(ii) వృత్త సమీకరణాన్ని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$$

దీనిని వృత్త సాధారణ సమీకరణంతో పోల్చగా వృత్త కేంద్రం, వ్యాసార్ధాలను కనుగొన వచ్చును.

$\therefore$ కేంద్రం $(1, 1)$ మరియు వ్యాసార్ధం $\sqrt{13}$

$\therefore$ దత్తవృత్తపు పరామితీయ సమీకరణాలు

$$x = 1 + \sqrt{13}\cos\theta, \; y = 1 + \sqrt{13}\sin\theta$$

ఉదాహరణ 11.9 : వృత్తకేంద్రము X-అక్షంపై ఉంటూ $(-2, 3)$, $(4, 5)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనండి.

సాధన: X-అక్షంపై కేంద్రం గల వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \qquad ...(1)$$

ఇది $(-2, 3)$ గుండా పోతుంది కాబట్టి

$$-4g + c + 13 = 0 \qquad ...(2)$$

ఇది $(4, 5)$ గుండా పోతుంది కాబట్టి

$$8g + c + 41 = 0 \qquad ...(3)$$

(2) మరియు (3) లను సాధిస్తే $g = -\frac{7}{3}, \; c = -\frac{67}{3}$

కాబట్టి వృత్తం సమీకరణము $3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 11.10 : $(2, -3)$, $(-4, 5)$ బిందువుల గుండాపోయే వృత్త కేంద్రము $4x + 3y + 1 = 0$ రేఖపై ఉంటే ఆ వృత్త సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ...(1) \text{ అనుకుందాం.}$$

ఇది $(2, -3)$ గుండా పోతుంది కాంట్టి, $4g - 6f + c + 13 = 0$ ...(2)

ఇది $(-4, 5)$ గుండా పోతుంది. కాబట్టి, $-8g + 10f + c + 41 = 0$ ...(3)

వృత్తకేంద్రము $(-g, -f)$, రేఖ $4x + 3y + 1 = 0$ పై ఉండుటుంది.

కావున $-4g - 3f + 1 = 0$ ...(4)

(2), (3) మరియు (4) లను సాధించగా, $g = 1$, $f = -1$, $c = -23$

కాబట్టి కావలసిన వృత్తము సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

ఉదాహరణ 11.11 : $(1, -6)$ $(5, 2)$ $(7, 0)$ మరియు $(-1, c)$ బిందువులు చక్రీయాలు అయితే "c" విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: A$(1, -6)$, B$(5, 2)$, C$(7, 0)$ మరియు D$(-1, c)$ అనుకొందాం.

A, B, C బిందువుల గుండాపోయే వృత్తం సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొందాం. ...(1)

ఇది A$(1, -6)$, B$(5, 2)$, C$(7, 0)$ ల గుండా పోతుంది. కాబట్టి

$2g - 12f + c + 37 = 0$ ...(2)

$10g + 4f + c + 29 = 0$ ...(3)

$14g + c + 49 = 0$ ...(4)

(2), (3) మరియు (4) లను సాధించగా, $g = -3, f = 2, c = -7$

కనుక A, B, C ల గుండా పోయే వృత్తం సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ అవుతుంది.

A, B, C, D బిందువులు చక్రీయాలు అయితే D$(-1, c)$ బిందువు A, B, C ల గుండా పోయే వృత్తంపై ఉంటుంది.

i.e., $(-1)^2 + c^2 - 6(-1) + 4(1) - 7 = 0$

$c^2 + 4c = 0$

$c = 0, \ c = -4.$

అభ్యాసం 11.1

1. కేంద్రం (–2, 3) మరియు వ్యాసార్ధము 4 గా గల వృత్త సమీకరణము కనుగొనండి.
2. కింద ఇచ్చిన ప్రతి వృత్తపు కేంద్రం, వ్యాసార్ధంలను కనుక్కోండి
   (a) $x^2 + y^2 + 3x - y = 6$
   (b) $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$
3. (0, 2), (2,0) మరియు (0, 0) గుండా పోయే వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.
4. (−1, 2), (−2, 1) బిందువుల గుండా పోతూ Y-అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.
5. (2, 3) మరియు (−2, 6) బిందువులను కలిపే సరళ రేఖ వ్యాసంగా గల వృత్త సమీకరణంను కనుగొనుము.
6. కింద ఇచ్చిన వృత్తాలలోని ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలను రాయండి.
   (a) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
   (b) $4x^2 + 4y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$
   (c) $(x - 1)(x + 1) + (y - 1)(y + 1) = 0$
7. (4, 1), (6, 5) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రము $4x + y - 16 = 0$ రేఖపై ఉంటే ఆ వృత్త సమీకరణము కనుగొనండి..
8. (2, 0), (0, 1), (4, 5) మరియు (0, c) బిందువులు చక్రీయాలు అయితే "c" విలువ కనుగొనండి.

11.6 వృత్తం దృష్ట్యా బిందువు స్థానం - స్పర్శ రేఖ నిర్వచనం

ఈ విభాగంలో వృత్తం దృష్ట్యా ఒక బిందువు స్థానం, ఒక బిందు శక్తిని కనుక్కోంటాం, మరియు స్పర్శరేఖను నిర్వచించి దీని పొడవుకు సంబంధించిన సూత్రాన్ని తెలుసుకొంటాము.

11.6.1 సంకేతాలు :

ప్రస్తుత విభాగంలో, రాబోయే విభాగాల్లో ఉపయోగించే సంకేతాలను పరిచయం చేసుకొందాం.

(i) $x^2+y^2+2gx+2fy+c$ సమాసాన్ని S తో సూచిస్తాం.

అంటే $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c.$

(ii) $xx_i+yy_i+g(x+x_i)+f(y+y_i)+c$ ని S_i తో సూచిస్తాం.

అంటే $S_1 \equiv xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c,$

$S_2 \equiv xx_2+yy_2+g(x+x_2)+f(y+y_2)+c.$

(iii) $x_ix_j+y_iy_j+g(x_i+x_j)+f(y_i+y_j)+c$ సమాసాన్ని S_{ij} తో సూచిస్తాం $(i,j=1,2,3,...)$.

ఉదాహరణకు

$$S_{12} = x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c.$$
$$S_{11} = x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c.$$

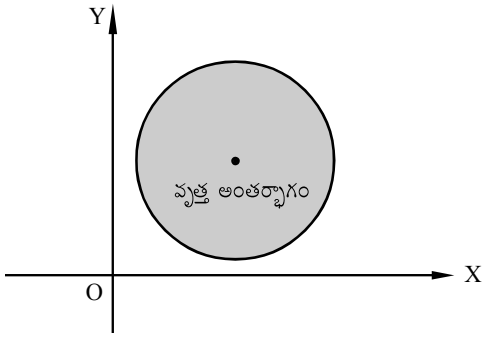
11.6.2 వృత్తం దృష్ట్యా ఒక బిందువు స్థానం

ఒక వృత్తం అది ఉండే తలాన్ని మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అవి :

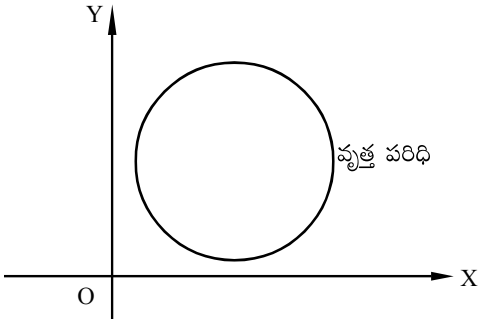
(i) వృత్త అంతర్భాగం (పటం 11.1)

(ii) వృత్త పరిధి (వృత్తపు వక్రం) (పటం 11.2)

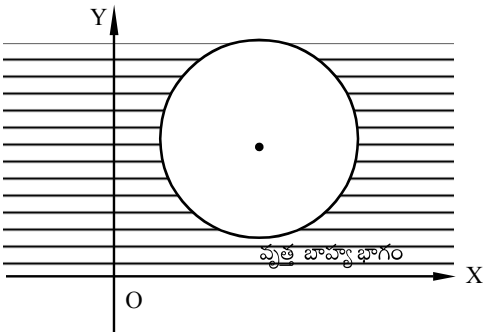
(iii) వృత్త బాహ్యభాగం. (పటం 11.3).



పటం. 11.1



పటం. 11.2



పటం. 11.3

1. సిద్ధాంతం : $S = 0$ ఒక వృత్తం, వృత్తం ఉన్న తలంలో $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా బిందువు అయితే

(i) P వృత్త అంతర్భాగంలోని బిందువు $\Leftrightarrow S_{11} < 0$.

(ii) P వృత్త పరిధిపై ఉంది $\Leftrightarrow S_{11} = 0$.

(iii) P వృత్తానికి బాహ్య భాగంలోని బిందువు $\Leftrightarrow S_{11} > 0$.

ఉపపత్తి : $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ దత్త వృత్త సమీకరణం అనుకొందాం. వృత్త తలంలో ఏదైనా బిందువు $P(x_1, y_1)$, వృత్త కేంద్రం $C(-g, -f)$, వ్యాసార్ధం $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

(i) అంతర్భాగంలో P బిందువు

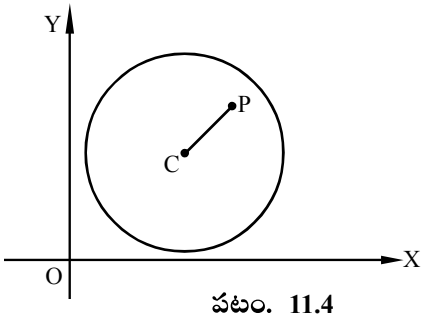
$\Leftrightarrow$ $CP < r$ (పటం 20.4)

$\Leftrightarrow$ $CP^2 < r^2$.

$\Leftrightarrow$ $(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 < g^2 + f^2 - c$

$\Leftrightarrow$ $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$

$\Leftrightarrow$ $S_{11} < 0$.



పటం. 11.4

(ii) వృత్త పరిధిపై P బిందువు

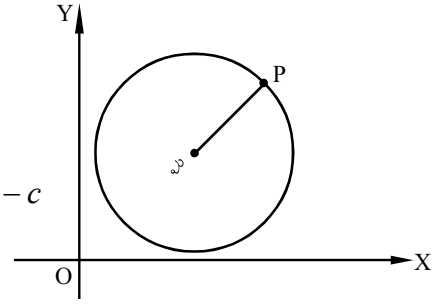
$\Leftrightarrow$ $CP = r$ (పటం 11.5)

$\Leftrightarrow$ $CP^2 = r^2$

$\Leftrightarrow$ $(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 = g^2 + f^2 - c$

$\Leftrightarrow$ $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

$\Leftrightarrow$ $S_{11} = 0.$



పటం. 11.5

(iii) వృత్తానికి P బాహ్య బిందువు (బాహ్య భాగంలోని బిందువు)

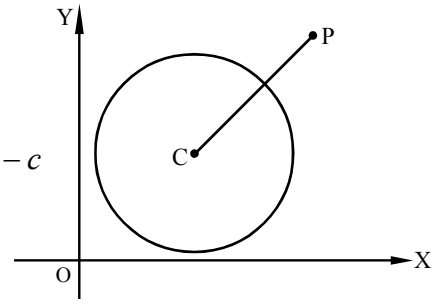
$\Leftrightarrow$ $CP > r$ (పటం 11.6)

$\Leftrightarrow$ $CP^2 > r^2$

$\Leftrightarrow$ $(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 > g^2 + f^2 - c$

$\Leftrightarrow$ $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$

$\Leftrightarrow$ $S_{11} > 0.$



పటం. 11.6

ఉదాహరణ 11.12:

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ దృష్ట్యా $(-2, 3)$ బిందువు స్థితిని తెలుపుము.

సాధన : ఇక్కడ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $g = 2, f = 3, C = -3$

$\therefore$ $S_{11} = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C$

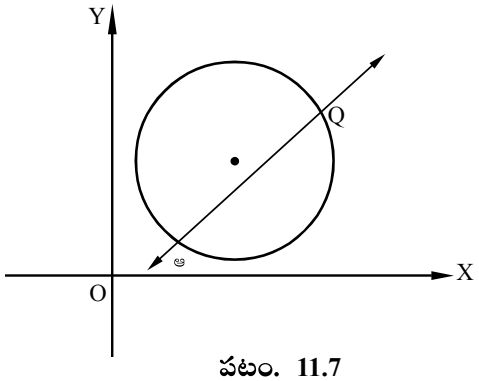
$= (-2)^2 + (3)^2 + 4(-2) + 6(3) - 3$

$= 20.$

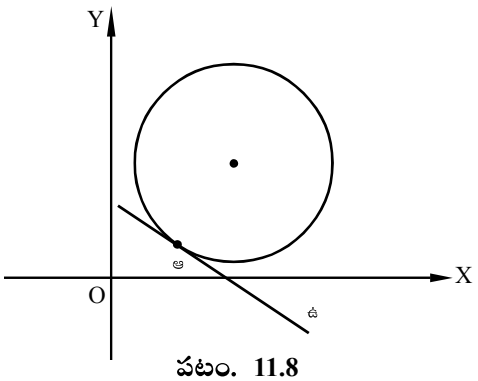
$S_{11} > 0$ కాబట్టి 1. సిద్ధాంతం ప్రకారం దత్తబిందువు వృత్తమునకు బాహ్యభాగంలోని బిందువు.

11.1.3 స్పర్శరేఖ యొక్క నిర్వచనం

ఒక వృత్తంపై P ఏదైనా బిందువు. దీనికి సామీప్యంగా ఉంటూ వృత్తంపై ఉండే బిందువు Q. P, Q లను కలిపితే $\overleftrightarrow{PQ}$ ఛేదన రేఖ అవుతుంది. *(పటం 11.7)*



పటం. 11.7



పటం. 11.8

Q వృత్తం మీదగా, $Q \to P$ అయినప్పుడు ఛేదన రేఖ $\overleftrightarrow{PQ}$ పొందే అవధిని P వద్ద **స్పర్శరేఖ** అంటాం (పటం. 11.8).

సిద్ధాంతము: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తంపై $P(x_1, y_1)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరనము $S_1 = 0$

Proof: దత్తవృత్తము $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

ఇరువైపులా 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+g}{y+f}$$

$\therefore S = 0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ వద్ద వాలు

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_p = -\frac{x_1+g}{y_1+f}$$

$S = 0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$$y - y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx + 2fy_1 + c$$

$$\Rightarrow S_1 = S_{11}$$

$\Rightarrow S_1 = 0$ ($\because P(x_1, y_1)$ బిందువు $S = 0$ వృత్తంపై ఉంటుంది)

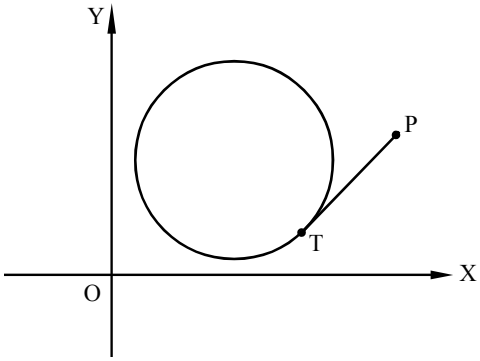
గమనిక: $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తముపై $P(x_1, y_1)$ బిందువు వద్ద స్పరశరేఖా సమీకరణము

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0.$$

11.6.4 నిర్వచనం

$S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P బాహ్య బిందువు అయి, P నుంచి వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ వృత్తాన్ని T వద్ద స్పృశిస్తే $\overline{PT}$ ని వృత్తానికి P నుంచి గీసిన **స్పర్శరేఖ పొడవు** అంటాం (పటం 11.9).

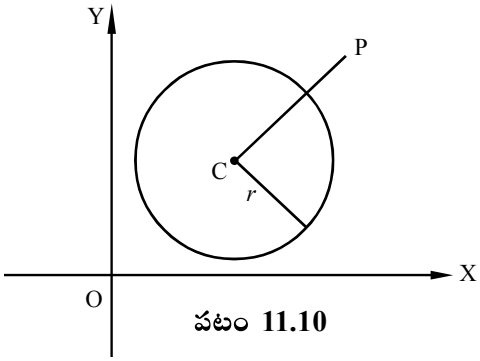
గమనిక: $S=0$ వృత్తానికి $P(x_1,y_1)$ నుండి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}}$.



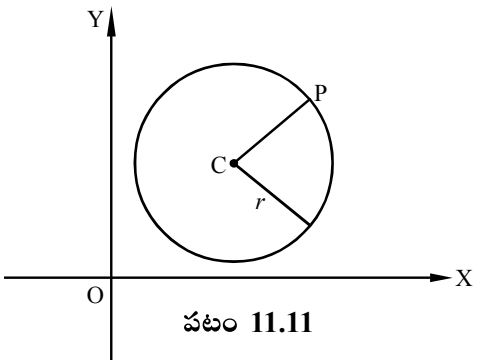
పటం 11.9

11.6.5 నిర్వచనం

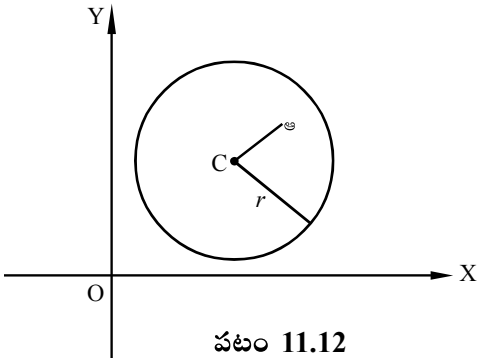
C కేంద్రం, r వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తం $S = 0$ అయి, వృత్తం ఉండే తలంలో $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా బిందువు అయితే $CP^2 - r^2$ ను $S = 0$ దృష్ట్యా P **బిందు శక్తి** అంటాం (పటం 11.10, 11.11, 11.12.



పటం 11.10



పటం 11.11



పటం 11.12

గమనికలు :

1. తలంలోని బిందువు $P(x_1, y_1)$ వృత్తం అంతర్భాగంలో, వృత్తంపైన, వృత్త బాహ్య భాగంలో ఉంది $\Leftrightarrow$ వృత్తం దృష్ట్యా P బిందుశక్తి రుణాత్మకం, శూన్యం, ధనాత్మకం.

2. $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందుశక్తి S_{11}. $(CP^2 - r^2 = S_{11})$

ఉదాహరణ 11.13 : $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$. వృత్తానికి $(2, -3)$ బాహ్య బిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవును కనుక్కోండి. $(2, -3)$ నుంచి దత్త వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{S_{11}}$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + 8(2) - 2(-3) + 1}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

ఉదాహరణ 11.14. $x^2 + y^2 - 4x + 3y + K = 0$ వృత్తానికి (1, 1) బిందువు దృష్ట్యా బిందు శక్తి 3 అయిన K విలువను కనుగొనుము. దత్తాంశం ప్రకారం $S_{11} = 3$

$$\Rightarrow (1)^2 + (1)^2 - 4(1) + 3(1) + K = 3$$

$$\Rightarrow 1 + 1 - 4 + 3 + K = 3$$

$$\Rightarrow 1 + K = 3$$

$$\therefore K = 2.$$

ఉదాహరణ 11.15 : $s = x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ వృత్తానికి P(1, 2) వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము కనుగొనండి.

సాధన: వృత్తం సమీకరణము $s = x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$

ఈ వృత్తానికి P(1, 2) వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము $S_1 = 0$

$$xx_1 + yy_1 - 4(x + x_1) + 2(y + y_1) - 5 = 0$$

$$x(1) + y(2) - 4(x + 1) + 2(y + 2) - 5 = 0$$

$$3x - 4y + 5 = 0$$

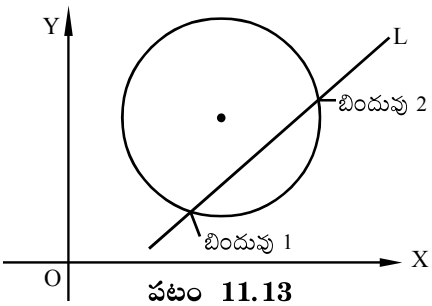
11.7 వృత్తం దృష్ట్యా తలంలో సరళ రేఖ స్థానం

ఇంతకు ముందు విభాగంలో వృత్తం దృష్ట్యా ఒక బిందువు స్థితిని గురించి నేర్చుకొన్నాం. ఈ విభాగంలో వృత్తం దృష్ట్యా ఒక సరళరేఖ స్థానం గురించి నేర్చుకొందాం.

11.7.1 వృత్తం దృష్ట్యా సరళరేఖ స్థానాల సందర్భాలు

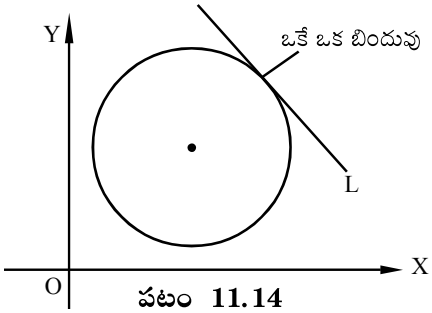
వృత్తం $S=0$, సరళరేఖ $L=0$ అయినప్పుడు కింది మూడు సందర్భాలు వ్యవస్థితాలు :

(i) సరళరేఖ వృత్తాన్ని రెండు విభిన్న బిందువులలో ఖండించడం (పటం 11.13).



పటం 11.13

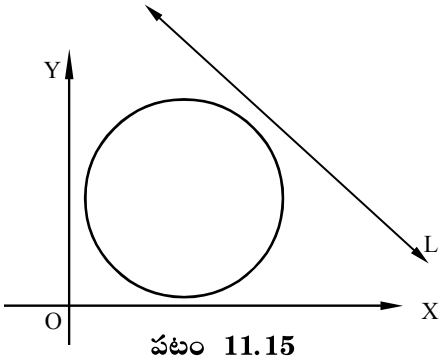
(ii) సరళ రేఖ వృత్తాన్ని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద స్పృశించడం (పటం 11.14).



పటం 11.14

(iii) సరళరేఖ వృత్తాన్ని ఖండించకపోవడం. అంటే $L=0$ రేఖను $S=0$ వృత్తానికి ఉమ్మడి బిందువులు లేకపోవడం (పటం 11.15).

పై సందర్భాలు ఏ నియమాలలో వ్యవస్థితం అవుతాయో ఇప్పుడు తెలుసుకొందాం.



పటం 11.15

11.7.2 నియమాలు : $y = mx + c$ సరళరేఖ

(i) $\frac{c^2}{1+m^2} < r^2$ అయితే $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తాన్ని రెండు విభిన్న బిందువులలో ఖండిస్తుంది. పటం 16.13

(ii) $\frac{c^2}{1+m^2} = r^2$ అయితే $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది. పటం 11.14

(iii) $\frac{c^2}{1+m^2} > r^2$ అయితే $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తంతో ఉమ్మడి బిందువులు ఉండవు. పటం 16.15

(iv) $y = mx + c$ సరళరేఖ $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తే

$c = \pm r\sqrt{1+m^2}$ అపుడు $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖా సమీకరణము

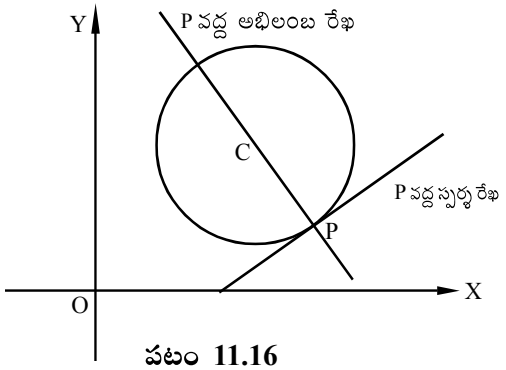
$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$.

(v) $y = mx + c$ సరళరేఖ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తే అపుడు వృత్తానికి స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$$y + f = m(x + g) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

11.7.3 నిర్వచనం

వృత్తం మీద ఉన్న బిందువు P దగ్గర ఏర్పడే స్పర్శ రేఖకు లంబంగా ఉంటూ P గుండా పోయే సరళరేఖను వృత్తానికి P వద్ద **అభిలంబ** రేఖ అంటాం (పటం 11.16).



పటం 11.16

గమనిక :

వృత్తంపై ఉన్న ప్రతి బిందువు వద్ద గీసిన అభిలంబ రేఖ వృత్త కేంద్రం గుండా పోతుందన్న విషయాన్ని మరోసారి గుర్తు చేసుకొందాం.

2. సిద్ధాంతం

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots (1)$$

వృత్తం మీద ఉండే బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$(x - x_1)\ (y_1 + f) - (y - y_1)\ (x_1 + g) = 0.$$

ఉపపత్తి : వృత్తం (1) కేంద్రం C అనుకొందాం. ఇప్పుడు $C = (-g, -f)$, P వద్ద గీసే అభిలంబ రేఖ వృత్త కేంద్రం గుండా పోతుంది (పటం 20.16).

$$\therefore \quad \overline{CP} \text{ వాలు} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$$

కాబట్టి $P(x_1, y_1)$ వద్ద వృత్తం (1)కి అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$(y - y_1) = \frac{(y_1 + f)}{(x_1 + g)}(x - x_1)$$

$$\text{అంటే} \quad (x - x_1)\ (y_1 + f) - (y - y_1)\ (x_1 + g) = 0$$

గమనిక

$x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $xy_1 - yx_1 = 0$.

ఉదాహరణ 11.16 : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ వృత్తానికి $(1, -2)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : దత్త వృత్త సమీకరణాన్ని, దాని ప్రామాణిక రూపంతో పోల్చగా,

$2g = -4$ అంటే $g = -2$

$2f = 6$ అంటే $f = 3$;

$x_1 = 1$, $y_1 = -2$.

2. సిద్ధాంతం ప్రకారం $(1, -2)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$(x - x_1)\ (y_1 + f) - (y - y_1)\ (x_1 + g) = 0$$

$$\therefore \quad (x - 1)\ (-2 + 3) - (y + 2)\ (1 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x - 1)\ (1) - (y + 2)\ (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 1 + y + 2 = 0$$

$\Rightarrow \quad x + y + 1 = 0$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ వృత్తానికి, $(1, -2)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణము $x + y + 1 = 0$.

ఉదాహరణ 11.17 : $x^2 + y^2 = 16$ వృత్తానికి $(-5,6)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తం నకు $P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణము $xy_1 - yx_1 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 = 16$ వృత్తానికి $(-5, 6)$ వద్ద అభిలంబరేఖ

సమీకరణం : $x(6) - y(-5) = 0.$

$\Rightarrow 6x + 5y = 0$

ఉదాహరణ 11.18: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ వృత్తానికి $x + 2y - 8 = 0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు కనుగొనండి.

సాధన : ఇక్కడ $g = -2,\ f = 3,\ r = \sqrt{4 + 9 + 12} = 5$

స్పర్శరేఖ వాలు $m = \dfrac{-1}{2}$

$\therefore$ దత్త వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు అవుతూ $x + 2y - 8 = 0$ కి సమాంతరంగా గల రేఖల సమీకరణాలు

$$y + f = m(x + g) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

$$y + 3 = \frac{-1}{2}(x - 2) + 5\sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

i.e., $\quad x + 2y + \left(4 \pm 5\sqrt{5}\right) = 0.$

ఉదాహరణ 11.19 : $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$ వృత్తము $3x - y + 4 = 0$ రేఖపై ఏర్పరచే జ్యాపొడవును కనుగొనండి.

సాధన : వృత్త కేంద్రము $C = (-4, 2)$

వ్యాసార్ధము $r = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$

d = C(–4, 2) నుండి $3x - y + 4 = 0$

రేఖకు లంబదూరము

$$= \frac{|3(-4) - 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు AB = $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{36 - 10}$

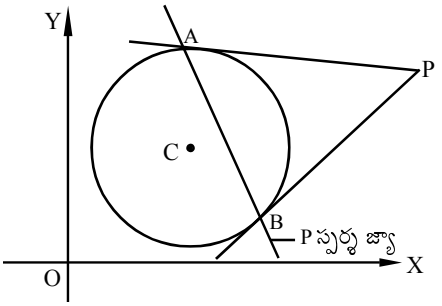
$= 2\sqrt{26}.$

11.8 స్పర్శజ్యా, ధ్రువ రేఖల సమీకరణాలు

ఈ విభాగంలో స్పర్శజ్యా మరియు ధ్రువరేఖలను నిర్వచించి, వాటి సమీకరణాలను తెలుసుకొంటాము.

11.8.1 నిర్వచనం

$S = 0$ వృత్తానికి బాహ్య బిందువు $P(x_1, y_1)$ నుంచి $S = 0$ కి గీసిన స్పర్శ రేఖలు వృత్తాన్ని A, B ల వద్ద స్పృశిస్తే $\overleftrightarrow{AB}$ ని $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P **స్పర్శ జ్యా** అంటాం. (పటం 11.17)



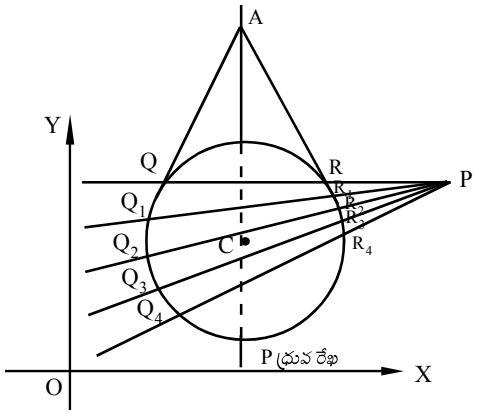
పటం 11.17

గమనిక : $P(x_1, y_1)$ బిందువు వృత్తంపై ఉండే, స్పర్శరేఖనే, స్పర్శజ్యాగా నిర్వచిస్తాము.

3. సిద్ధాంతం : $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ బాహ్య బిందువు అయితే $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$.

11.8.2 నిర్వచనం

$S = 0$ ఒక వృత్తం, ఈ వృత్తం ఉండే తలంలో వృత్త కేంద్రం కాని ఏదైనా బిందువు P. P గుండా గీసిన ఏదైనా రేఖ, $S = 0$ వృత్తాన్ని Q, R లలో ఖండిస్తే $S = 0$ వృత్తానికి Q, R ల వద్ద గీసిన స్పర్శ రేఖల ఖండన బిందువులు ఒక రేఖపై ఉంటాయి. ఈ రేఖను **ధ్రువ రేఖ** అనీ P ని ఈ ధ్రువరేఖకు **ధ్రువం** అనీ అంటాం (పటం. 11.18).



పటం 11.18

4. సిద్ధాంతం : $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ధ్రువ రేఖ $S_1 = 0$.

5. సిద్ధాంతం : $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తము దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ $(n \neq 0)$ యొక్క ధ్రువం

$$\text{is } \left(-\frac{r^2 l}{n}, \frac{-r^2 m}{n} \right)$$

ఉపపత్తి : $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తము దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ ...(1)

యొక్క ధృవం $p(x_1, y_1)$ అనుకుందాం.

$\therefore$ $x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తం దృష్ట్యా $p(x_1, y_1)$ యొక్క ధ్రువరేఖా సమీకరణము

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0 \qquad ...(2)$$

(1), (2) లు ఒకే రేఖను సూచిస్తున్నాయి కావున

$$\frac{x_1}{l} = \frac{y_1}{m} = \frac{-r^2}{n}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-r^2 l}{n}, \quad y_1 = \frac{-r^2 m}{n}$$

$x^2 + y^2 = r^2$ వృత్తము దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ $(n \neq 0)$

యొక్క ధ్రువం $p(x_1, y_1) = \left(\frac{-r^2 l}{n}, \frac{-r^2 m}{n} \right)$

గమనిక: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తము దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ $(n \neq 0)$ యొక్క ధ్రువము

$$\left(-g + \frac{lr^2}{lg + mf - n},\ -f + \frac{mr^2}{lg + mf - n}\right)$$

11.8.3 సంయుగ్మ బిందువులు

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తము దృష్ట్యా P ధ్రువరేఖ Q గుండాపోతే P, Q బిందువులను సంయుగ్మ బిందువులు అంటాం.

P యొక్క ధ్రువరేఖ Q పై ఉంటే Q యొక్క ధ్రువరేఖ P పై ఉంటుంది.

గమనిక: $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ బిందువులు సంయుగ్మ బిందువులు కావడానికి నియమము $S_{12} = 0$.

11.8.4 సంయుగ్మ రేఖలు

$S = 0$ వృత్తము దృష్ట్యా P, Q బిందువులు సంయుగ్మ బిందువులు అయితే P మరియు Q ల ధ్రువరేఖలను $S = 0$ వృత్తము దృష్ట్యా సంయుగ్మరేఖలు అంటాం.

గమనిక: $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తము దృష్ట్యా

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ రేఖలు

సంయుగ్మరేఖలు $\Leftrightarrow r^2(l_1l_2 + m_1m_2)$

$$= (l_1g + m_1f - n_1)\,(l_2g + m_2f - n_2)$$

ఉదాహరణ 11.20: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$ వృత్తానికి A(4, 2) బాహ్యబిందువు స్పర్శజ్యా సమీకరణమును వ్రాయుము.

సాధన : $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P స్పర్శజ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$.

$\therefore$ $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$ వృత్తానికి A(4, 2) బిందువు స్పర్శజ్యా సమీకరణము $S_1 = 0$.

$\Rightarrow$ $x(4) + y(2) + 2(x + 4) - 1(y + 2) - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $4x + 2y + 2x + 8 - y - 2 - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $6x + y - 6 = 0$.

ఉదాహరణ 11.21: $x^2+y^2-2x+6y-6=0$ వృత్తం దృష్ట్యా P(6, –1) బిందువుకు ధ్రువరేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : కావలసిన ధ్రువరేఖ సమీకరణము $S_1=0$

$\Rightarrow x(6)+y(-1)-1(x+6)+3(y-1)-6=0$

$\Rightarrow 6x-y-x-6+3y-3-6=0$

$\Rightarrow 5x+2y-15=0.$

ఉదాహరణ 11.22: $x^2+y^2=24$ వృత్తం దృష్ట్యా $3x+4y-12=0$ యొక్క ధ్రువం కనుగొనండి.

సాధన : $x^2+y^2=24$ వృత్తం దృష్ట్యా $3x+4y-12=0$

యొక్క ధ్రువం $p=\left(\frac{-r^2l}{n}, \frac{-r^2m}{n}\right)$

ఇక్కడ $r^2=24,\ l=3,\ m=4,\ n=-12$

$\therefore$ ధ్రువం $p=\left(\frac{-24\times3}{-12}, \frac{-24\times4}{-12}\right)$

$=(6, 8).$

ఉదాహరణ 11.23: $x^2+y^2-5x+8y+6=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $x-2y+22=0$ యొక్క ధ్రువం కనుక్కోండి.

సాధన : ధ్రువం $=\left(-g+\frac{lr^2}{lg+mf-n}, -f+\frac{mr^2}{lg+mf-n}\right)$

ఇక్కడ $g=-\frac{5}{2},\ f=4,\ r=\sqrt{\frac{25}{4}+16-6}=\sqrt{\frac{65}{4}}$

$l=1,\ m=-2,\ n=22$

ధ్రువం $=\left(\frac{5}{2}+\frac{1\times\frac{65}{4}}{1\times\frac{-5}{2}+(-2)\times4-22}, -4+\frac{(-2)\times\frac{65}{4}}{1\times\frac{-5}{2}+(-2)\times4-22}\right)$

$=(2, -3).$

ఉదాహరణ 11.24: $x^2+y^2=24$ వృత్తము దృష్ట్యా $(4,-2),(3,-6)$ బిందువులు సంయుగ్మాలు అని చూపండి.

సాధన : $S = x^2+y^2-24=0$ అనుకుందాం.

$p(x_1, y_1) = (4,-2)$, $Q(x_2, y_2) = (3,-6)$

$\therefore\ S_{12} = x_1x_2 + y_1y_2 - 24$

$= 4\times 3 + (-2)\times 6 - 24$

$= 12 + 12 - 24$

$= 0$

$\therefore$ దత్త బిందువులు $(4,-2),(3,-6)$ సంయుగ్మ బిందువులు అవుతాయి.

ఉదాహరణ 11.25: $x^2+y^2-2x+2y-1=0$ వృత్తము దృష్ట్యా $(2,3),(k,-1)$ బిందువులు సంయుగ్మ బిందువులు అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : Let $S = x^2+y^2-2x+2y-1=0$

$S=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(2,3),(k,-1)$ లు సంయుగ్మలు అయితే $S_{12}=0$

$x_1x_2 + y_1y_2 - (x_1+x_2) + (y_1+y_2) - 1 = 0$

$2\times k + 3\times -1 - (2+k) + (3-1) - 1 = 0$

$2k - 3 - 2 - k + 2 - 1 = 0$

$\Rightarrow\ k - 4 = 0$

$\Rightarrow\ k = 4.$

ఉదాహరణ 11.26: $x^2+y^2-4x+3y-1=0$ వృత్తము దృష్ట్యా $2x+y+12=0$, $kx-3y-10=0$ రేఖలు సంయుగ్మరేఖలు అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తవృత్తము $x^2+y^2-4x+3y-1=0$

$$g=-2,\ f=\frac{3}{2},\ r=\sqrt{4+\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{29}{4}}$$

దత్త సరళరేఖలు $2x+y+12=0,\ kx-3y-10=0$

ఇక్కడ $l_1=2,\ m_1=1, l_2=k_1, m_2=-3, n_2=-10$

దత్తరేఖలు సంయుగ్మరేఖలు అయితే

$$r^2(l_1l_2 + m_1m_2) = (l_1g + m_1f - n_1)(l_2g + m_2f - n_2)$$

$$\frac{29}{4}(2k-3) = \left(-4+\frac{3}{2}-12\right)\left(-2k-\frac{9}{2}+10\right)$$

$$\frac{29}{4}(2k-3) = \left(\frac{-29}{2}\right)\left(\frac{-4k+11}{2}\right)$$

$2k - 3 = 4k - 11$

$\Rightarrow \; 2k = 8$

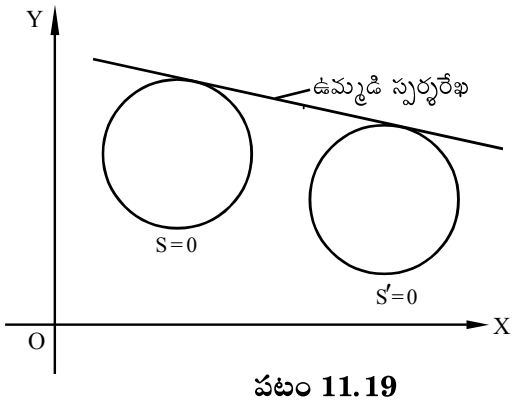
$\Rightarrow k = 4.$

11.9 రెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితి

ఈ విభాగంలో రెండు వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల గురించి తెలుసుకొంటాము. రెండు వృత్తాలకు గీసే ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖల సంఖ్య ఆ వృత్తాల సాపేక్ష స్థితిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. కాబట్టి, ఈవిభాగంలో రెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితులను, ప్రతి సందర్భంలో వాటికి వ్యవస్థితం అయ్యే ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సంఖ్య గురించి తెలుసుకుంటాం.

11.9.1 నిర్వచనం

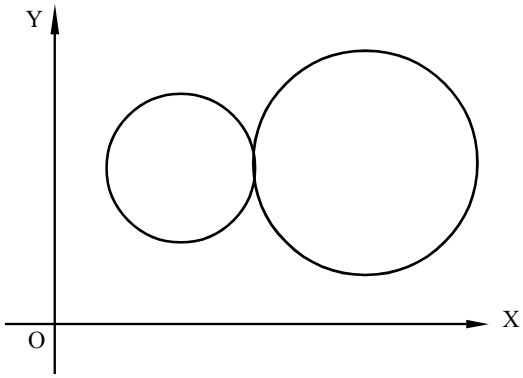
L అనే సరళరేఖ $S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాలు రెండింటికీ స్పర్శ రేఖ అయితే L ను $S = 0, S' = 0$ వృత్తాలకు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అంటాం (పటం 11.19).



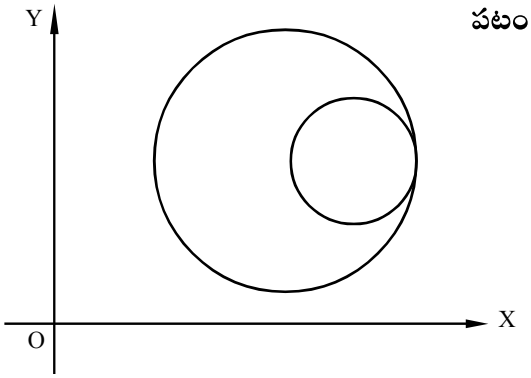
పటం 11.19

11.9.2 నిర్వచనం

రెండు వృత్తాలకు ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉంటే వాటిని స్పృశించే వృత్తాలని అంటారు (పటం 11.20, 11.21).



పటం 11.20



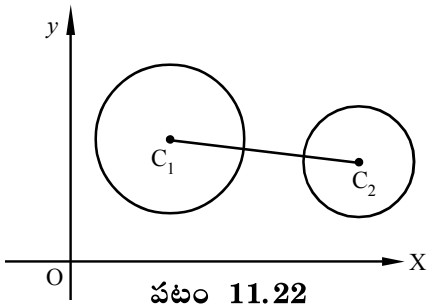
పటం 11.21

11.9.3 రెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితులు

$S=0, S'=0$ అనే రెండు వృత్తాల కేంద్రాలు వరసగా C_1, C_2 లు వ్యాసార్ధాలు r_1, r_2 అనుకోండి. ఇంకా C_1, C_2 లను కలపగా ఏర్పడే రేఖా ఖండం $\overline{C_1C_2}$ అనుకోండి. రెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితుల సందర్భాలు కింద తెలిపినట్లు ఉంటాయి.

(i) $C_1C_2 > r_1 + r_2$

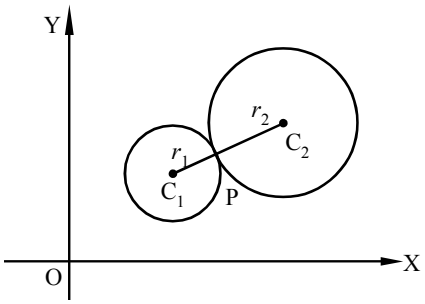
ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు ఖండించుకోవు. ఇంకా ఒక వృత్తం మరో వృత్తానికి బాహ్యంగా ఉంటుంది. (పటం 11.22)



పటం 11.22

(ii) $C_1C_2 = r_1 + r_2$

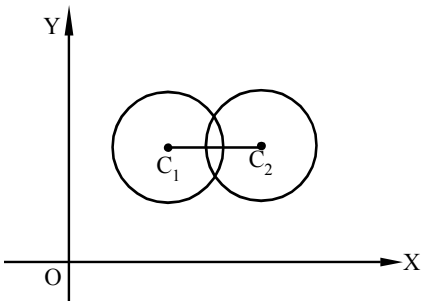
ఈ సందర్భంలో వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకొంటాయి (పటం 16.23).



పటం 11.23

(iii) $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$

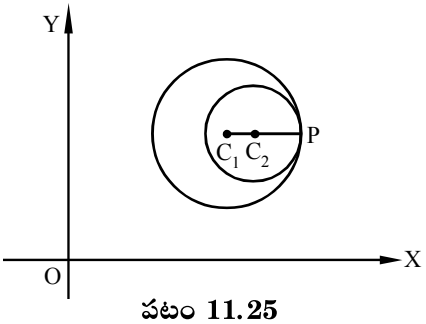
ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు రెండు విభిన్న బిందువులలో ఖండించుకొంటాయి (పటం 16.24).



పటం 11.24

(iv) $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$

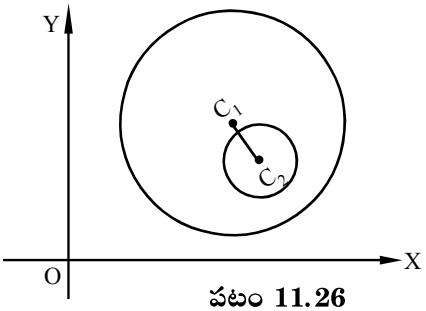
ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించుకొంటాయి (పటం 16.25).



పటం 11.25

(v) $C_1C_2 < |r_1 - r_2|$

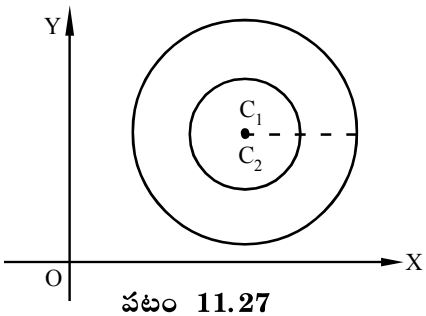
ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు ఖండించుకోవు, స్పృశించుకోవు, ఒక వృత్తం మరో వృత్తంలో ఇమిడి ఉంటుంది (పటం 20.26).



పటం 11.26

గమనిక

$C_1C_2 = 0$ అయితే రెండు వృత్తాల కేంద్రాలు ఏకీభవిస్తాయి, వృత్తాలు ఏక కేంద్రీయ వృత్తాలు (పటం 11.27).



పటం 11.27

ఉదాహరణ 11.27. $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ మరియు $x^2+y^2-2y-15=0$ వృత్తాలకు రెండే రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయని చూపండి.

సాధన : దత్త వృత్త సమీకరణాలను $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ ...(1)

$x^2+y^2-2y-15=0$ ...(2)అనుకొనిన

సమీకరణాలు (1), (2)లు సూచించే వృత్తాల కేంద్రాలు C_1, C_2 లు, వ్యాసార్ధాలు r_1, r_2 లు అనుకొనిన,

అప్పుడు $C_1=(4,3),\ C_2=(0,1), r_1=2,\ r_2=4.$

$\therefore\ \overline{C_1C_2} = \sqrt{(4-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

$|r_1-r_2| = |2-4| = 2,$

$r_1+r_2 = 6$

$|r_1-r_2| = < C_1C_2 < r_1+r_2$

$\left(\because\ \sqrt{4} < \sqrt{20} < \sqrt{36}\right)$

కాబట్టి దత్త వృత్తములు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొంటాయి. కాబట్టి వీటికి రెండే రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 11.28. $x^2+y^2-14x+6y+33=0$ మరియు $x^2+y^2+30x-2y+1=0$ వృత్తాలకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయని చూపుము.

సాధన : వృత్త కేంద్రాలు $C_1=(7,-3),\ C_2=(-15,1), r_1=5,\ r_2=15.$

$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(7+15)^2+(-3-1)^2} = 10\sqrt{5}$

$r_1+r_2 = 20$

$\overline{C_1C_2} > r_1 + r_2$ $\left(\because \overline{C_1C_2} = \sqrt{500}\ r_1 + r_2 = \sqrt{400}\right)$

ఒక వృత్తం మరొక వృత్తానికి బాహ్యంగా వుండును. కావున ఈ సందర్భంలో దత్త వృత్తాలకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయి.

అభ్యాసం 11.2

1. కింద ఇచ్చిన వృత్తం దృష్ట్యా ఇచ్చిన బిందువు స్థితిని తెలపండి.

   (i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0;\ P(1, 3)$

   (ii) $S \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0; P(1, -2)$

   (iii) $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0; P(-2, 5).$

2. కింద ఇచ్చిన ప్రతి వృత్తం దృష్ట్యా బిందువు P శక్తి కనుక్కోండి.

   (i) $S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12; P = (-1, 1)$

   (ii) $S \equiv x^2 + y^2 + 6x + 8y - 96; P = (1, 2)$

   (iii) $S \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5;\ P = (2, 3)$

3. బిందువు $(2, 5)$ నుంచి $x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ కు గల వృత్తానికి గీసిన స్పర్శ రేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే k విలువను కనుక్కోండి.

4. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0,$ వృత్తాన్ని, $5x + 12y - 4 = 0$ రేఖ స్పృశిస్తుందని చూపండి.

   సూచన : దత్తరేఖ, ఇచ్చిన వృత్తాన్ని స్పృశించడానికి నియమం : వృత్త కేంద్రం నుంచి సరళరేఖకు గల లంబదూరం = వ్యాసార్ధం.

5. కింద ఇచ్చిన ప్రతి వృత్తం $S = 0$ కు P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

   (i) $S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12; P = (-1, 1)$

   (ii) $S \equiv x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11; P = (3, 4).$

6. కింద ఇచ్చిన ప్రతి $S = 0$ వృత్తానికి P వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

   (i) $S \equiv x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25; P = (1, 2)$

   (ii) $S \equiv x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6; P = (3, 5)$.

7. $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 2 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(0, 5)$ స్పర్శ జ్యా సమీకరణం కనుక్కోండి.

8. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ దృష్ట్యా $(1, -2)$ యొక్క ధ్రువరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

9. కింద ఇచ్చిన వృత్తాల జతల సాపేక్ష స్థితిని తెలపండి.

   (i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

   (ii) $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 14 = 0$ $\quad$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

10. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ వృత్తము $x + y + 1 = 0$ రేఖపై ఏర్పరచే జ్యా పొడవును కనుగొనుము.

11. $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖ $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 14 = 0$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుందని చూపండి మరియు స్పర్శబిందువును కనుక్కోండి.

12. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ వృత్తము దృష్ట్యా $2x + 3y + 11 = 0, 2x - 2y - 1 = 0$ రేఖలు సంయుగ్మ రేఖలు అని చూపండి.

13. $x^2 + y^2 = 17$ వృత్తం దృష్ట్యా బిందువులు $(4, k)$ మరియు $(2, 3)$ లు సంయుగ్మ బిందువులు అయితే k విలువను కనుక్కోండి.

11.10 వృత్తసరణులు

ఈ అధ్యాయంలో రెండు ఖండిత వృత్తాల మధ్య కోణాన్ని, అవి లంబంగా ఉండటానికి నియమాన్ని గురించి తెలుసుకొంటాం. అంతేకాకుండా, రెండు వృత్తాల మూలాక్షం, మరియు దాని సమీకరణం గురించి నేర్చుకొంటాం. ఇంకనూ, సహాక్ష వృత్త సరణి, దీనికి లంబంగా ఉండే సహాక్ష వృత్త సరణుల గురించి కూడా నేర్చుకొంటాము.

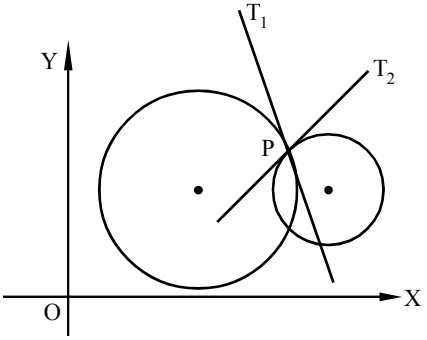
11.10.1 ఖండించుకొనే రెండు వృత్తాల మధ్య కోణం

వృత్తములు అను అధ్యాయంలో రెండు వృత్తాల కేంద్రాల మధ్యదూరం, వాటి వ్యాసార్ధాల తేడా యొక్క మాపపు విలువ కంటే ఎక్కువగానూ, వ్యాసార్ధాల మొత్తం కంటే తక్కువగానూ ఉండే వృత్తాలు ఖండించుకొంటాయని మనం నేర్చుకొన్నాం. ఈ విభాగంలో అటువంటి వృత్తాలకు, ఆ వృత్తాల మధ్య కోణాన్ని నిర్వచిస్తాం.

11.10.1.1 నిర్వచనం

రెండు వృత్తాల ఖండన బిందువు వద్ద ఆ వృత్తాల స్పర్శ రేఖల మధ్య కోణాన్ని ఆ వృత్తాల మధ్య కోణంగా నిర్వచిస్తాం. (పటం 11.28).

$\angle T_1 P T_2$ వృత్తాల మధ్య కోణం అవుతుంది.



పటం 11.28

గమనిక

$S = 0,\ S' = 0$ వృత్తాలు P, Q ల వద్ద ఖండించుకొంటే P, Q ల వద్ద ఆ వృత్తాల మధ్య కోణాలు సమానం.

1. సిద్ధాంతం

(i) C_1, C_2 లు ఖండించుకొనే రెండు వృత్తాల కేంద్రాలు

(ii) $d = C_1C_2$

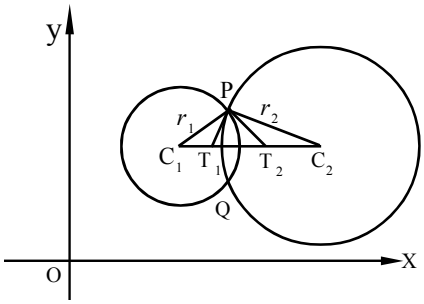
(iii) $r_1\ r_2$ లు ఆ వృత్త వ్యాసార్ధాలు

(iv) వృత్తాల మధ్య కోణం θ

అయితే $\cos\theta = \dfrac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$

మాడ్యూల్ - II
నిరూపక జ్యామితి
నోట్స్

ఉపపత్తి : దత్త వృత్తాల ఖండన బిందువు P అనుకొందాం. ఈ బిందువు వద్ద వృత్తాలకు w< # < ~ ^ ö Y ° (PT_1, PT_2 లు) కేంద్రాలను కలిపే రేఖను T_1, T_2 లలో ఖండిస్తున్నాయనుకొందాం (పటం 17.2).



పటం 11.29

అప్పుడు $\angle T_1PT_2 = \theta$.

ఇప్పుడు
$$\angle C_1PC_2 = \angle C_1PT_2 + \angle T_2PC_2$$
$$= 90^0 + 90^0 - \theta$$
$$= 180^0 - \theta$$

త్రిభుజం ΔC_1PC_2 నుంచి
$$C_1C_2^2 = C_1P^2 + C_2P^2 - 2(C_1P)\,(C_2P)\cos\angle C_1PC_2$$

అంటే
$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2\cos(180^0 - \theta)$$
$$\therefore\ \cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

గమనిక : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ ...(2)

ల మధ్యకోణం 'θ' అయితే
$$\cos\theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2.\sqrt{g^2 + f^2 - c}\,.\,\sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}}.$$

11.10.1.2 నిర్వచనం

ఖండించుకొనే రెండు వృత్తాల మధ్య కోణం లంబకోణం (90^0) అయితే వాటిని **లంబ వృత్తాలు** అంటాం.

11.10.1.3 రెండు వృత్తాలు లంబంగా ఉండటానికి నియమం

ఖండించుకొనే రెండు వృత్తాల సమీకరణాలు
$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots (1)$$
$$x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0 \quad \ldots (2)$$

అనుకొందాం.

ఇవి లంబంగా ఖండించుకొంటాయి $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c+c'-2gg'-2ff'}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\ \sqrt{g'^2+f'^2-c'}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(gg' + ff') = c + c'.$$

$\therefore$ (1), (2) సూచించే వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు కావడానికి నియమం

$$2(gg' + ff') = c + c'.$$

ఉదాహరణ 11.29 : $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ... (1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ ....(2) వృత్తాల మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: ఇక్కడ $g = -1,\ f = 0,\ c = 0,\ g' = -2, f' = 3,\ c' = 4$

(1), (2)లు సూచించే వృత్తాల మధ్యకోణం 'θ' అనుకొందాం.

$$\therefore \cos\theta = \frac{0+4-(2)(-1)(-2)-(2)(0)(3)}{2.\sqrt{(-1)^2+(0)^2-0}\ .\ \sqrt{(-2)^2+(3)^2-4}}$$

$$= \frac{0+4-4-0}{2.\sqrt{1+0-0}.\sqrt{4+9-4}}$$

$$= \frac{0}{2.\sqrt{1}.\sqrt{9}} = 0$$

$\therefore \quad \theta = 90^0$ (లేదా) $\frac{\pi}{2}$.

ఉదాహరణ 11.30 : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ ... (1)

$x^2 + y^2 + 6x - 2y + K = 0$ ...(2)

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకొంటే K విలువ కనుక్కోండి ?

సాధన: ఇక్కడ $g = -1,\ f = 2,\ c = 3,\ g' = 3, f' = -1,\ c' = k.$

దత్త వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకోవడానికి నియమం

$2(gg' + ff') = c + c'.$

$\therefore 2[(-1)(3) + (2)(-1)] = 3 + k.$

$2[-3 - 2] = 3 + k.$

$2(-5) = 3 + k$

$-10 = 3 + k$

$\therefore k = -10 - 3$

$\Rightarrow k = -13.$

ఉదాహరణ 11.31: (1, 1) బిందువు గుండా పోతూ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ వృత్తాలను లంబచ్ఛేదనము చేసే వృత్త సమీకరణము కనుగొనండి.

సాధన: కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) అనుకుందాము.

ఇది (1, 1) బిందువు గుండా పోతుంది, కాబట్టి

$2g + 2f + c + 2 = 0$ ...(2)

కావలసిన వృత్తము $x^2 + y^2 - 8gx - 2y + 16 = 0$ ను లంబంగా ఖండిస్తుంది.

కాబట్టి $-8g - 2f - c - 16 = 0$

$\Rightarrow 8g + 2f + c + 16 = 0$ ...(3)

ఇదే విధంగా వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ ను లంబంగా ఖండిస్తుంది

కాబట్టి $-4g - 4f = c - 1$

$\Rightarrow 4g + 4f + c - 1 = 0$ ...(4)

(2), (3) మరియు (4) లను సాధించగా

$$g = -\frac{7}{3},\ f = \frac{23}{6},\ c = -5.$$

$\therefore$ కాబట్టి కావలసిన వృత్తము సమీకరణము $3(x^2 + y^2) - 14x + 23y - 15 = 0.$

ఉదాహరణ 11.32: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ వృత్తాన్ని లంబచ్ఛేదనము చేస్తూ కేంద్రం (2, 3) గా గల వృత్తం సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: కావలసిన వృత్తం సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1) అనుకుందాం.

కేంద్రము $(-g, -f) = (2, 3)$

$\Rightarrow g = -2,\ f = -3.$

కావలసిన వృత్తం, $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ ను లంబచ్ఛేదనం చేస్తుంది.

కావున $2g(-2) + 2f(1) = c - 7$

$-4g + 2f = c - 7$

$-4(-2) + 2(-3) = c - 7$

$\Rightarrow c = 9.$

కావలసిన వృత్తం సమీకరణము $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

11.2 రెండు వృత్తాల మూలాక్షం

ఈ విభాగంలో రెండు వృత్తాల మూలాక్షాన్ని నిర్వచించి, దాని సమీకరణాన్ని తెలుసుకొంటాం.

17.2.1 నిర్వచనం

రెండు వృత్తాల మూలాక్షాన్ని ఆ వృత్తాల దృష్ట్యా P బిందుశక్తులు సమానంగా ఉంటూ చలించే P యొక్క బిందుపథంగా నిర్వచిస్తాం.

గమనిక : (i) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ ...(2)

లు ఏకకేంద్రం కాని వృత్తాలు అయితే (1), (2) ల మూలాక్షం. ఒక సరళరేఖ, $S - S' = 0$

అంటే (1), (2)ల మూలాక్షం సమీకరణం

$2(g - g')x + 2(f - f')y + (c - c') = 0$

(ii) $S - S' = 0$ ను వాడుతూ మూలాక్షాన్ని కనుక్కోదలిస్తే ముందు దత్త వృత్తాల సమీకరణాలను సాధారణ రూపంలో రాయాలి. (అంటే x^2, y^2 ల గుణకాలు 1 అయ్యేటట్లు)

ఉదాహరణ 11.33: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0,\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$ వృత్తాల మూలాక్షాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్త సమీకరణాలు ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నాయి.

కనక (1), (2) ల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5) - (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5y - x^2 - y^2 + 6x + 4y - 2 = 0$

$\Rightarrow 10x + 2y + 3 = 0.$

ఉదాహరణ 11.34: $2x^2 + 2y^2 + 6x + 2y - 8 = 0,\ 3x^2 + 3y^2 - 9x + 12y + 6 = 0$ వృత్తాల మూలాక్షాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్త సమీకరణాలు ప్రామాణిక రూపంలో లేవు. ముందుగా వీటిని ప్రామాణిక రూపంలో రాస్తే,

$x^2 + y^2 + 3x + y - 4 = 0,\ x^2 + y^2 - 3x + 4y + 2 = 0$

ఇప్పుడు కావలసిన మూలాక్ష సమీకరణం $S - S' = 0$

$\Rightarrow (3 + 3)x + (1 - 4)y + (-4 - 2) = 0 \Rightarrow 6x - 3y - 6 = 0.$

11.11.2 మూలకేంద్రము

కేంద్రాలు సరేఖీయాలు కాని మూడు వృత్తాలలోని ప్రతి రెండు వృత్తాలకు ఏర్పడే మూలాక్షాల అనుషక్త బిందువును మూలకేంద్రం అంటాం.

గమనిక (i) మూడు వృత్తాలతో ఏర్పడిన మూలకేంద్రం నుండి వృత్తాలకు గీచిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.

ఉదాహరణ 11.35 : $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - 3x = 4,\ x^2 + y^2 - 4y = 4.$

వృత్తాల మూలకేంద్రాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలు $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ...(1)

$x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ ...(2)

$$x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0 \qquad ...(3)$$

(1), (2) ల మూలాక్షం సమీకరణము

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad ... (4)$$

(2), (3) ల మూలాక్షం సమీకరణము

$$-3x + 4y = 0 \qquad ...(5)$$

(4), (5) లను సాధించగా $x = 0,\ y = 0$

$\therefore$ మూలకేంద్రం = (0, 0).

11.12 సహాక్ష వృత్త సరణులు

ఈ విభాగంలో సహాక్ష వృత్త సరణిని నిర్వచించి, సహాక్ష వృత్తసరణి యొక్క సమీకరణాన్ని రాబడదాం.

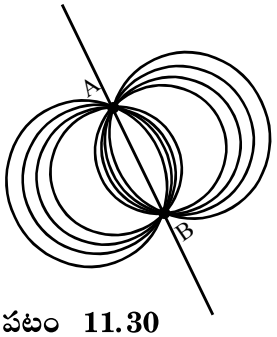
11.12.1 నిర్వచనం

(i) ఏదైనా వృత్త సముదాయాన్ని వృత్త సరణి అంటాం.

(ii) ఒక వృత్త సరణికి చెందిన ప్రతి రెండు వృత్తాల మూలాక్షం ఒకటే అయితే ఈ వృత్త సరణిని సహాక్ష వృత్త సరణి అంటాం.

గమనిక:

(i) రెండు స్థిర బిందువులు A, B గుండా పోయే వృత్తాలను తీసుకొందాం. ఈ వృత్త సరణి సహాక్ష వృత్త సరణిని ఏర్పరుస్తుంది. ఎందుకంటే ఈ సరణిలోని ప్రతి రెండు వృత్తాలకు వీటి ఉమ్మడి జ్యాయే ప్రతి రెండు వృత్తాల మూలాక్షం అవుతుంది (పటం 17.3).



పటం 11.30

(ii) సహాక్ష వృత్త సరణి కేంద్రాలు సరేఖీయాలు అయి వాటి ఉమ్మడి మూలాక్షానికి లంబంగా ఉండే రేఖపై ఉంటాయి.

2. సిద్ధాంతం : $S = 0, S' = 0$ లు రెండు విభిన్న వృత్తాలు అయితే $S + \lambda(S - S') = 0$ ఈ వృత్తాలను కలిగి ఉన్న సహాక్ష వృత్త సరణిని సూచిస్తుంది. ($S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల సమీకరణాలు సాధారణ రూపంలో ఉన్నాయి).

ఉపపత్తి : $L \equiv S - S' = 0$, λ_1, λ_2 లు $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ λ యొక్క రెండు ప్రత్యేక విలువలు అనుకొందాం. ఇప్పుడు

$$S + \lambda_1 L = 0$$

$$S + \lambda_2 L = 0$$

తీసుకొందాం. వాటి మూలాక్షం

$$(S + \lambda_1 L) - (S + \lambda_2 L) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2) L = 0$$

$$\Rightarrow \quad L = 0 \qquad (\because \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

కనక $S = 0$, $S' = 0$ ల మూలాక్షం, $S + \lambda(S - S') = 0$ సూచించే ఏవైనా రెండు వృత్తాల మూలాక్షం ఒకటే. కాబట్టి $S + \lambda(S - S') = 0$, అను సమీకరణము $S = 0, S' = 0$ వృత్తాలను కలిగి ఉన్న సహాక్ష వృత్త సరణిని సూచిస్తుంది.

గమనిక

$S = 0, S' = 0$ లు ండు విభిన్న వృత్తాలు. $\lambda + \mu \neq 0$ అయ్యేటట్లు ఉన్న λ, μ వాస్తవ విలువలకు $\lambda S + \mu S' = 0$ సమీకరణము $S = 0, S' = 0$ లు ఉండే సహాక్ష వృత్త సరణిని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 11.35 : $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 6 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ వృత్తాలు గల సహాక్ష వృత్త సరణికి చెందిన ఒక వృత్తం $(-1, 0)$ గుండాపోతే, ఆ వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలను కలిగి ఉన్న సహాక్ష వృత్త సరణిలోని వృత్తాలు

$$(x^2 + y^2 + 8x - 4y + 6) + \lambda(4x + 2y + 5) = 0 \quad [\because S + \lambda(S - S') = 0]$$

ఇక్కడ λ పరామితి. ఇది $(-1, 0)$ గుండాపోతే

$$[(-1)^2 + (0)^2 + 8(-1) - 4(0) + 6] + \lambda[4(-1) + 2(0) + 5] = 0$$

$(1 + 0 - 8 - 0 + 6) + \lambda(-4 + 0 + 5) = 0$

$-1 + \lambda(1) = 0$

$\lambda = 1$

కాబట్టి కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$(x^2 + y^2 + 8x - 4y + 6) + 1(4x + 2y + 5) = 0$

అంటే $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 11 = 0$

ఉదాహరణ 11.36 : $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ వృత్తాలతో సహాక్షంగా ఉంటూ బిందువు $(-1, -2)$ గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తాలను కలిగి ఉన్న సహాక్షవృత్త సరణిలోని వృత్తాలు

$(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1) + \lambda(-10x + 8y + 1) = 0 \quad [\because S + \lambda(S - S') = 0]$

ఇక్కడ 'λ' పరామితి. ఇది $(-1, -2)$ గుండాపోతే,

$[(-1)^2 + (-2)^2 - 2(-1) + 2(-2) + 1] + \lambda[-10(-1) + 8(-2) + 1] = 0$

$(1 + 4 + 2 - 4 + 1) + \lambda(10 - 16 + 1) = 0$

$4 + \lambda(-5) = 0$

$-5\lambda = -4$

$\lambda = \frac{4}{5}.$

కాబట్టి కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1) + \frac{4}{5}(-10x + 8y + 1) = 0$

$5(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1) + 4(-10x + 8y + 1) = 0$

$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y + 5 - 40x + 32y + 4 = 0$

$\therefore \quad 5x^2 + 5y^2 - 50x + 42y + 9 = 0$

11.13 సహాక్ష వృత్త సరణి యొక్క లంబసరణి

ఈ విభాగంలో 'లంబ వృత్త సరణి' ని నిర్వచించి, ఒక దత్త వృత్త సరణికి లంబంగా ఉండే వృత్త సరణి యొక్క సమీకరణాన్ని తెలుసుకొంటాం.

11.13.1 నిర్వచనం

ఒక సహాక్ష వృత్త సరణిలోని ప్రతి వృత్తం మరో సహాక్ష వృత్త సరణిలోని ప్రతి వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తే ఆ సహాక్ష వృత్త సరణులను లంబవృత్త సరణులు లేదా సంయుగ్మ వృత్త సరణులు అంటాం. ఇక్కడ ఒక సహాక్ష వృత్త సరణి మరో సహాక్ష వృత్త సరణికి లంబ సరణి అంటాం.

3. సిద్ధాంతం : $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ (λ పరామితి, c స్థిరరాశి)

అయితే ఆ సహాక్ష వృత్త సరణి యొక్క లంబ సరణి సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0 \ (\mu \text{ పరామితి})$$

అభ్యాసం 11.3

1. క్రింది సమీకరణాలు సూచించే వృత్తాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

   (i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0, \quad x^2 + y^2 + 3x + 4y + 1 = 0$

   (ii) $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0, x^2 + y^2 + 4x + 6y - 59 = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 + 4x - 14y + 28 = 0, x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

2. క్రింది సమీకరణాలు సూచించే ప్రతి జత వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు అయితే K విలువ కనుక్కోండి.

   (i) $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0, x^2 + y^2 + kx + 6y - 59 = 0$

   (ii) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + k = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 + 4x - 8 = 0, x^2 + y^2 - 16y - k = 0$

3. క్రింది సమీకరణాలు సూచించే వృత్తాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఖండించుకొంటాయని చూపండి.

(i) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 13 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 3x + 4y + 1 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

4. క్రింది వృత్తాల మూలాక్షాల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

(i) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 2 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 6 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 7 = 0$, $4(x^2 + y^2) + 8x + 12y - 9 = 0$

5. కింది వృత్తాలతో సహాక్షంగా ఉండే వృత్త సరణి సమీకరణం కనుక్కోండి.

(i) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 6 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 2 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 4 = 0$

6. $x^2 + y^2 - 7x + 12 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$ వృత్తాలతో సహాక్షంగా ఉంటూ $(-2, 3)$ గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

7. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 16 = 0, x^2 + y^2 + 2x + y - 4 = 0$ వృత్తాలు గల సహాక్ష వృత్త సరణికి చెందిన ఒక వృత్తం $(0, 0)$ గుండాపోతే, ఆవృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

8. క్రింది వృత్తాలకు మూలకేంద్రాన్ని కనుగొనండి.

(i) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 6 = 0$

$x^2 + y^2 - 12x + 2y + 3 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$,

$x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.

9. $(2, 0), (0, 2)$ బిందువుల గుండా పోతూ $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$ వృత్తాన్ని లంబచ్ఛేదనం చేసే వృత్తసమీకరణము కనుగొనండి.

కీలకపదాలు

- **ప్రామాణిక రూపంలో వృత్త సమీకరణం**

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

దీని కేంద్రం (h, k) మరియు వ్యాసార్ధం 'a'.

వృత్తం సాధారణ సమీకరణం $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

దీన్ని కేంద్రం $(-g, -f)$ మరియు వ్యాసార్ధం $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

- **వ్యాసాగ్రాలుగా ఉన్న వృత్త సమీకరణం**

(x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువులు వ్యాసాగ్రాలుగా ఉన్న వృత్త సమీకరణం

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

- **వృత్తం పరామితీయ సమీకరణాలు**

  - $(0, 0)$ మూల బిందువు కేంద్రంగా, 'a' వ్యాసార్ధంగా ఉండే వృత్తపు పరామితీయ సమీకరణాలు

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$$

  - వృత్త కేంద్రం (h, k) గా గల వృత్తపు పరామితీయ సమీకరణాలు

$$x=h+a\cos\theta \text{ మరియు } y=k+a\sin\theta$$

  - $S=0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ అంతర బిందువు, $\Leftrightarrow S_{11}<0$.
  - $S=0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ బాహ్య బిందువు, $\Leftrightarrow S_{11}>0$.
  - $S=0$ వృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ వృత్త పరిధిపై బిందువు, $\Leftrightarrow S_{11}=0$.
  - $S=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ యొక్క బిందుశక్తి S_{11}.
  - $P(x_1, y_1)$ నుంచి $S=0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}}$.
  - $S=0$ వృత్తానికి (x_1, y_1) వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1=0$.
  - $S=0$ వృత్తానికి (x_1, y_1) వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం

$$(x-x_1)(y_1+f)-(y-y_1)(x_1+g)=0$$

- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ (బాహ్యబిందువు) యొక్క స్పర్శజ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$.
- $S = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$.
- $S = 0, S' = 0$ అనే రెండు వృత్తాల కేంద్రాలు వరుసగా C_1, C_2 లు వ్యాసార్ధాలు r_1, r_2 లు అనుకొంటే, ఆరెండు వృత్తాల సాపేక్ష స్థితులు క్రింద తెలిపినట్లు ఉంటాయి.

  (i) $C_1C_2 > r_1 + r_2$: ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు ఖండించుకోవు. ఒక వృత్తం మరొక వృత్తానికి బాహ్యంగా ఉంటుంది.

  (ii) $C_1C_2 = r_1 + r_2$: ఈ సందర్భంలో వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకొంటాయి.

  (iii) $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$: ఈ సందర్భంలో వృత్తాలు రెండు విభిన్న బిందువులలో ఖండించుకొంటాయి.

  (iv) $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$: ఈ సందర్భంలో రెండు వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించుకొంటాయి.

  (v) $C_1C_2 < |r_1 - r_2|$: ఈ సందర్భంలో ఒక వృత్తం మరో వృత్తంలో ఇమిడి ఉంటుంది.

  (vi) $C_1C_2 = 0$: ఈ సందర్భంలో ఒక వృత్తం మరో వృత్తంలో ఇమిడి ఉంటుంది. మరియు ఆ వృత్త కేంద్రాలు ఏకీభవిస్తాయి.

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$ ని S గా,
  $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c'$ ని S' గా సూచిస్తాం.
- రెండు ఖండించుకొనే వృత్తాలు $S = 0$, $S' = 0$. అయి, వాటి కేంద్రాలు C_1, C_2లు, వ్యాసార్ధాలు r_1, r_2 లు, $C_1C_2 = d$, వీటి మధ్యకోణం 'θ' అయితే

$$\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

- $S = 0$, $S' = 0$ వృత్తాల మధ్యకోణం 'θ' అయితే,

$$\cos\theta = \frac{c + c' - 2gg' - 2ff'}{2\sqrt{g^2 + f^2 - c}.\sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}}$$

- $S = 0$, $S' = 0$ లు లంబ వృత్తాలు అగుటకు నియమం

$$2(gg' + ff') = c + c'$$

- రెండు వృత్తాల దృష్ట్యా P బిందువు యొక్క బిందు శక్తులు సమానంగా ఉంటే P బిందుపథాన్ని ఆవృత్తాల మూలాక్షం అంటాం.
- $S = 0,\ S' = 0$ వృత్తాల మూలాక్షం $S - S' = 0$ అవుతుంది.
- ఒక వృత్త సరణిలోని ప్రతి రెండు వృత్తాలకు ఒకే మూలాక్షం ఉంటే ఆ సరణిని సహాక్ష వృత్త సరణి అంటాం.
- $S = 0,\ S' = 0$ లు రెండు విభిన్న వృత్తాలయితే, $\lambda S + \mu S' = 0 (\lambda + \mu \neq 0)$ సమీకరణం $S = 0,\ S' = 0$ లు వృత్తాలుగా ఉండే సహాక్ష వృత్త సరణిని సూచిస్తుంది.
- $x^2 + y^2 + 2\lambda x + c = 0$ (λ పరామితి) సూచించే సహాక్ష వృత్త సరణికి లంబంగా ఉండే సహాక్ష వృత్త సరణి సమీకరణం. $x^2 + y^2 + 2\mu y - c = 0$ (μ పరామితి)

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. వృత్త కేంద్రం (4, −6) మరియు వ్యాసార్ధం '7' గా గల వృత్త సమీకరణలను కనుగొనుము.
2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ వృత్త సమీకరణానికి కేంద్రం, మరియు వ్యాసార్ధంలను కనుగొనుము.
3. (1, 0) (−1, 0) మరియు (0, 1) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణంను కనుగొనుము.
4. కింద ఇచ్చిన వత్తాలలోని ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.
   (a) $x^2 + y^2 = 3$
   (b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$

జవాబులు

అభ్యాసం 11.1

1. (a) $x^2+y^2=9$

   (b) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

2. (a) $\left(-\frac{3}{2};1\right);\ \frac{\sqrt{37}}{2}$ (b) $\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{8}\right);\ \frac{\sqrt{109}}{8}$

3. $x^2+y^2-2x-2y=0$

4. $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

5. $x^2+y^2-9y+14=0$

6. (a) $x=-1+2\cos\theta$ and $y=-1+2\sin\theta$

   (b) $x=-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{7}{8}}\cos\theta\ \ y=-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{7}{8}}\sin\theta$

   (c) $x=\sqrt{2}\ \cos\theta$ and $y=\sqrt{2}\ \sin\theta$

7. $x^2+y^2-6x-8y+15=0$

8. $c=\frac{14}{3}$

అభ్యాసం 11.2

1. (i) $S_{11}<0$ కావున 'P' బిందువు వృత్తమునకు అంతర్భాగంలో ఉంటుంది.

   (ii) $S_{11}<0$ కావున 'P' బిందువు వృత్తమునకు బాహ్య భాగంలో ఉంటుంది.

   (iii) $S_{11}<0$ కావున 'P' బిందువు వృత్తమునకు బాహ్య భాగంలో ఉంటుంది.

2. (i) 0 (ii) –69 (iii) 22

3. K = –2

5. (i) $4x - 3y + 7 = 0$ (ii) $x + y - 7 = 0$

6. (i) $y = 2$ (ii) $2x + y - 11 = 0$

7. $5x - 14y - 16 = 0$

8. $4x + 7y - 30 = 0$

9. (i) ఖండించుకొంటాయి (ii) ఒక వృత్తానికి బాహ్యంగా మరొక వృత్తం ఉంటుంది.

10. $2\sqrt{7}$ 11. $(2, -3)$ 13. K = 3

అభ్యాసం 11.3

1. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$

2. (i) ± 4 (ii) -24 (iii) -8

4. (i) $14x + 4y + 6 = 0$ (ii) $8x + 6y + 5 = 0$ (iii) $8x + 12y - 19 = 0$

5. (i) $(x^2 + y^2 - 6x + 4y - 2) + \lambda(2x + 2y - 3) = 0.$

(ii) $(x^2 + y^2 - 10x + 2y - 8) + \lambda(-4x - 2y - 2) = 0.$

(iii) $(x^2 + y^2 + 2x - 8y + 2) + \lambda(-2x + 2y + 6) = 0.$

6. $2(x^2 + y^2) + 25x + 24 = 0$ 7. $3x^2 + 3y^2 + 4x = 0$

8. (i) $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ (ii) $\left(\frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right)$

9. $7(x^2 + y^2) - 8x - 8y - 12 = 0$

సాధనా అభ్యాసం

1. $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 3 = 0$

2. Centre $(-2, 3)$; Radius $= \sqrt{3}$

3. $x^2 + y^2 = 1.$

4. (a) $x = \sqrt{3}\cos\theta,\ y = \sqrt{3}\sin\theta$ (b) $x = 2 + 5\cos\theta,\ y = -2 + 5\sin\theta$

అధ్యాయం

12

శాంకవ ఛేదములు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యభాగమును చదివిన తర్వాత మీరు గమనించే విషయాలు

- వృత్తం, పరావలయం, దీర్ఘవృత్తంలను శాంకవ ఛేదాలుగా గుర్తిస్తారు.
- పరావలయం, దీర్ఘవృత్తాలను ప్రత్యేక బిందు పథాలుగా గుర్తిస్తారు.
- శాంకవాలలో ఉత్కేంద్రత భావము, నియత రేఖ, నాభులు, శీర్షాలను గుర్తించటము
- పరావలయం, దీర్ఘవృత్త సమీకరణాలను ప్రామాణిక రూపంలో గుర్తించటము
- నాభి, నియత రేఖ ఇచ్చినపుడు పరావలయ సమీకరణాన్ని కనుగొనుట

పూర్వాకాంక్షితాలు

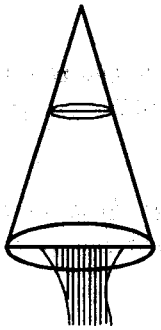
- నిరూపక జ్యామితి యొక్క మౌలిక జ్ఞానం
- సరళ రేఖా సమీకరణ వివిధ రూపాలు
- వృత్త సమీకరణ వివిధ రూపాలు

పరిచయం

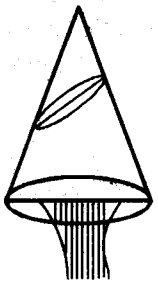
మనము క్యారెట్‌ను కోస్తున్నప్పుడు దాని అంచులు వివిధ రకాల ఆకారాలలో ఉన్నట్లు గమనిస్తాం.

క్యారెట్‌ను మూడు విధాలుగా కోయడం (ఖండించడం) వలన వాటికి 3 రకాల ఆకారాలు ఏర్పడుతాయి. విశ్లేషణాత్మకంగా అవి :

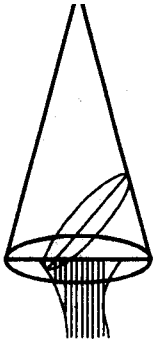
i) పటం 18.1లో చూపిన విధంగా క్యారెట్‌ను భూమికి సమాంతరంగా ఉండేటట్లు ఖండించడం జరిగింది.



పటం 12.1



పటం 12.2



పటం 12.3

ii) పటం 18.2లో చూపిన విధంగా క్యారెట్‌ను ఏటవాలుగా ఖండించడం జరిగింది. ఇది భూమి ద్వారా పోవడం లేదు.

iii) పటం 18.3లో చూపిన విధంగా క్యారెట్‌ను ఏటవాలుగా ఖండించడం జరిగింది. అది భూమి ద్వారా పోతుంది.

వివిధ పద్ధతుల్లో కోసిన ముక్కలు (క్యారెట్ ముక్కలు) వివిధ "ఆకార రూపాలు" కలిగి ఉన్నవి.

సందర్భం 1 నుండి క్యారెట్ ముక్క వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. దీన్ని గురించి ముందు పాఠ్యభాగంనందు చదువుకొని ఉన్నారు.

సందర్భం 2 మరియు సందర్భం 3ల ద్వారా కోసిన ముక్కలు వేర్వేరు జ్యామితీయ వక్రాలను సూచిస్తున్నాయి. మనము వీటి గురించి ఈ పాఠ్యభాగమునందు చదువుకొంటాము.

12.1 శాంకవ ఛేదము

పరిచయములో మనము క్యారెట్ ముక్కల వివిధ రూపాలను గమనించినాము. క్యారెట్ అనేది శంకు ఆకారంలో ఉంటుంది. ఖండించిన వివిధ భాగములను కలుపగా ఏర్పడేది, శాంకవము అవుతుంది.

శాంకవం నిర్వచనం :

ఒక సమతలంపై ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళ రేఖ నుంచి లంబదూరాల నిష్పత్తి "e" స్థిరంగా ఉండేటట్లు చలించే బిందువు బిందు పథాన్ని శాంకవ ఛేదము అంటారు.

- స్థిర బిందువును నాభి అంటాం. సాధారణంగా నాభిని 'S' తో సూచిస్తాం.
- స్థిర సరళరేఖను నియతరేఖ అంటాము.
- నియతరేఖకు లంబంగా ఉంటూ నాభిగుండా పోయే రేఖను అక్షం అంటాం.
- స్థిర నిష్పత్తి 'e' ని ఉత్కేంద్రత అంటాము.

(i) $e < 1$ (ii) $e = 1$ (iii) $e > 1$ అయితే ఏమవుతుంది.

పై సందర్భాలలో శాంకవ ఛేదాలను వరుసగా దీర్ఘ వృత్తం, పరావలయం, అతి పరావలయం అని పిలుస్తారు.

ఈ పాఠ్యభాగంలో దీర్ఘ వృత్తం, పరావలయంలను గూర్చి మాత్రమే చదువుకొంటాము.

12.2 దీర్ఘ వృత్తం

మనము కోసిన క్యారెట్ ముక్కలను గమనించినట్లయితే అవి ఏటవాలుగా ఉండటం, తర్వాత ఆధారంగుండా పోవడము, అడ్డంగా కోసిన ముక్కలు కొన్ని ఆకారాలు కల్గి ఉండటం, అదేవిధంగా ఉడకపెట్టిన గ్రుడ్డును అడ్డంగా కోయడం గమనించినట్లయితే కోసిన ముక్కలు లేదా గ్రుడ్డు దీర్ఘవృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. ఇప్పుడు గణిత పద్ధతిలో దీర్ఘవృత్తాన్ని నిర్వచించవచ్చు.

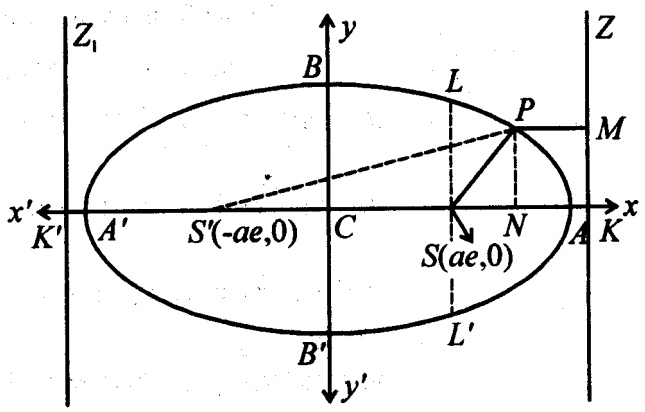
నిర్వచనం :

ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళరేఖ నుంచి గల దూరాల నిష్పత్తి స్థిరము. ఈ స్థిర నిష్పత్తి ఒకటి కంటే తక్కువగా ఉన్న వక్రాన్ని దీర్ఘ వృత్తం అంటాము.

12.2.1 ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం

S నాభి, ZK అనేది నియత రేఖ. P దీర్ఘ వృత్తం మీది బిందువు. S నుండి నియతరేఖ మీదికి SK లంబంను గీయుము. ఉత్కేంద్రత 'e' అనుకొనుము.

SK ను $e : 1$ నిష్పత్తిలో $(e < 1)$ అంతరంగా, బాహ్యంగా విభజించే బిందువులు వరుసగా A మరియు A′ అనుకొనుము.



పటం 12.4

$$SA = e.\,AK \quad \ldots(1)$$

మరియు $SA' = e.A'K \quad \ldots(2)$

దీర్ఘవృత్తం పై బిందువులు A మరియు A′ లు

నాభుల నుండి వాటి దూరాలు నియంత రేఖల నుంచి వాటి దూరాలకి స్థిర నిష్పత్తి $(e < 1)$ లో ఉంటాయి.

AA′ అనేది $2a$ కు సమానము.

AA′ మధ్య బిందువు 'C' ని దీర్ఘ వృత్తానికి కేంద్రం అంటాం.

i.e. $CA = CA' = a$

(1) మరియు (2) లను కలిపితే వచ్చేది

$$SA + SA' = e.AK + e.A'K$$

లేదా $AA' = e(CK - CA + A'C + CK)$

లేదా $2a = e\,2\,CK$

లేదా $CK = \frac{a}{e}$ ...(3)

(2) నుండి (1)ని తీసివేయగా

$SA' - SA = e\,(A'K - AK)$

లేదా $(SC + CA') - (CA - CS) = e.A'A$

లేదా $2\,CS = e.2a$

లేదా $CS = ae$ ...(4)

C ని మూల బిందువుగా తీసుకుంటే,

CAX ను X-అక్షంగాను, C వద్ద CX కి లంబరేఖ CY ని Y-అక్షంగాను తీసుకొందాం.

$\therefore$ S నిమాపకలు $(ae, 0)$ మరియు నియత రేఖ సమీకరణం $x = \frac{a}{e}$

చలించే బిందువు P నిమాపకలు (x, y) అనుకొనుము.

SP ని కలుపుము. $PM \perp ZK$ గీయండి.

నిర్వచనం నుండి $SP = e.PM$

లేదా $SP^2 = e^2 . PM^2$

లేదా $SN^2 + NP^2 = e^2 . (NK)^2$

లేదా $(CN - CS)^2 + NP^2 = e^2 . (CK - CN)^2$

లేదా $(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

లేదా $x^2 (1 - e^2) + y^2 = a^2 (1 - e^2)$

లేదా $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ ($a^2 (1 - e^2)$ తో భాగించగా)

$a^2 (1 - e^2) = b^2$ ప్రతిక్షేపించగా

ప్రామాణిక రూపంలోకి దీర్ఘవృత్త సమీకరణ వస్తుంది.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

దీర్ఘాక్షం: A మరియు A′ అను రెండు శీర్షాలను కలిపే రేఖను దీర్ఘవృత్తపు దీర్ఘాక్షం అంటాము. దీని పొడవు '$2a$'

హ్రస్వాక్షం: ఒక సరళరేఖ కేంద్రం గుండా పోతూ దీర్ఘాక్షానికి లంబంగా ఉన్న, BB' ను హ్రస్వాక్షం అంటాము. దీన్ని పొడవు '2b'.

ప్రధానాక్షాలు: రెండు అక్షాలను (దీర్ఘాక్షం మరియు హ్రస్వాక్షం) కలిపి దీర్ఘవృత్త ప్రధానాక్షాలు అంటారు.

నాభిలంబం: LL′ అనే రేఖా ఖండము పొడవును నాభి లంబం అంటాము.

నియతరేఖ సమీకరణం: $x = \pm \frac{a}{c}$

ఉత్కేంద్రత: $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ నుండి వచ్చే 'e' ని ఉత్కేంద్రత అంటాం.

ఉదాహరణ 12.1

దీర్ఘవృత్త నాభి (1, −1) ఉత్కేంద్రత $e = \frac{1}{2}$ మరియు నియత రేఖ సమీకరణం $x - y = 3$ గా గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : నిర్వచనం ప్రకారం P(h, k) దీర్ఘ వృత్తంపై ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. నాభి నుండి బిందువుకు గల దూరం నియతరేఖ నుండి లంబదూరాల నిష్పత్తి e.

$\therefore \quad SP^2 = e^2 \cdot PM^2$

(P నుండి నియత రేఖ మీదికి లంబ పాదం M)

లేదా $(h-1)^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h-k-3}{\sqrt{1+1}}\right)^2$

లేదా $7(h^2 + k^2) + 2kx - 10h + 10k + 7 = 0$

P బిందుపథ సమీకరణం $7(x^2 + y^2) + 2xy - 10x + 10y + 7 = 0$

$\therefore$ ఇదియే కావలసిన దీర్ఘ వృత్త సమీకరణం.

ఉదాహరణ 12.2 : $3x^2 + 4y^2 = 12$ దీర్ఘ వృత్తానికి ఉత్కేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, అక్షాల పొడవులను కనుగొనుము.

సాధన : దీర్ఘ వృత్త సమీకరణాన్ని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తున్నాం

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

దీనిని దీర్ఘవృత్త ప్రామాణిక సమీకరణంతో పోల్చగా వచ్చునది.

$a^2 = 4$; మరియు $b^2 = 3$ అపుడు

(i) $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$

(ii) నాభుల నిరూపకాలు (1, 0) మరియు (−1, 0) $(\because \quad (\pm ae, 0))$

(iii) దీర్ఘాక్షం పొడవు $= 2a = 2 \times 2 = 4$ మరియు

హ్రస్వాక్షం పొడవు $= 2b = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

అభ్యాసం 12.1

1. కేంద్రం (0, 0) మరియు ఈ క్రింది వాటిని ఇచ్చినపుడు దీర్ఘవృత్తమును కనుక్కోండి.

   (a) ఉత్కేంద్రత $\frac{2}{3}$, నాభి లంబము 5 గా గల

   (b) నాభి మరియు నాభిలంబముల మధ్య దూరం '10'. ఇది హ్రస్వాక్షం పొడవుకు సమానమైనపుడు

   (c) ఉత్కేంద్రత $\frac{1}{3}$ మరియు నాభుల నిరూపకలు (4, 0) మరియు (−4, 0) గా గల దీర్ఘ వృత్త సమీకరణాలను కనుగొనుము.

2. నాభి లంబము పొడవు, హ్రస్వాక్షం పొడవులో సగం ఉండే దీర్ఘ వృత్తం ఉత్కేంద్రతను కనుక్కోండి.

12.3 పరావలయం

క్యారెట్‌ను ముక్కలుగా కోసిన విధం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. అవి వాలుగా లేదా ఏటావాలుగా ఉండి ఒక ఆధారం గుండా పోతున్నపుడు ఏం గమనిస్తాం?

అదే విధంగా ఒక బ్యాట్స్‌మెన్ ఒక బంతిని గాలిలోకి కొట్టినపుడు అది పోవు [ప్రయాణించు] మార్గమును గమనించినట్లయితే ఇక్కడ కోసిన క్యారెట్ ముక్క అంచు, బంతి పోవు మార్గం ఒకే ఆకారాన్ని సూచిస్తున్నాయి. దీనినే మనము పరావలయం అంటాం. గణిత పద్ధతిలో పరావలయాన్ని క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

నిర్వచనం (పరావలయం)

ఒక సమతలంపై ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళ రేఖ నుంచి దూరాలు సమానమయ్యేటట్లు చరించే బిందుపథాన్ని పరావలయం అంటాం.

12.3.1 ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయ సమీకరణం

S ను స్థిర బిందువు అని, ZZ' ను పరావలయం యొక్క నియత రేఖ అని అనుకొనుము.

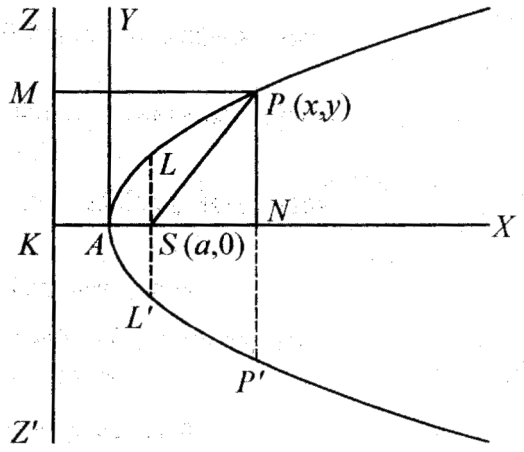
ZZ' మీదకు SK లంబాన్ని గీయము. ఇది పరావలయాన్ని A వద్ద ఖండిస్తుంది.

పరావలయం నిర్వచనం ప్రకారం

$SA = AK$

A ను పరావలయ శీర్షం అంటాం.

A ను మూల బిందువు అనుకొనుము.



పటం 12.5

AX ను X-అక్షంగాను A ద్వారా పోతూ AX కు లంబంగా ఉన్న AYని Y-అక్షంగాను తీసుకొందాం.

$\therefore \quad KS = 2a \quad \therefore \; AS = AK = a$

A మరియు S నిరూపకాలు వరుసగా (0, 0) మరియు $(a, 0)$

$P(x, y)$ అనేది పరావలయంపై ఏదేని బిందువు అనుకొనుము.

$PN \perp AS$ అయ్యేటట్లు గీయండి.

$\therefore \quad AN = x$ మరియు $NP = y$

SP ని కలపండి. $PM \perp ZZ'$ గీయండి.

$\therefore$ పరావలయ నిర్వచనాన్ని అనుకరించి

$SP = PM$

లేదా $SP^2 = PM^2$

లేదా $(x - a)^2 + (y - 0)^2 = (x + a)^2$

$(\because \; PM = NK = NA + AK = x + a)$

లేదా $(x - a)^2 - (x + a)^2 = - y^2$

లేదా $y^2 = 4ax$.

ఇదియే ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయ సమీకరణం.

గమనిక ఈ పరావలయ సమీకరణంలో

(i) శీర్షం (0, 0)

(ii) నాభి (a, 0)

(iii) X-అక్షం సమీకరణం $Y = 0$

iv) నియత రేఖ సమీకరణం $x + a = 0$

v) నాభి లంబము $= 4a$

12.3.2 పరావలయం వివిధ రూపాలు

క్రింది వివరాలకు పరావలయ సమీకరణం

(i) నాభి $(-a, 0)$ మరియు నియత రేఖ సమీకరణం $x - a = 0$

(ii) నాభి $(0, a)$ మరియు నియత రేఖ సమీకరణం $y + a = 0$

(iii) నాభి $(0, -a)$ మరియు నియత రేఖ సమీకరణం $y - a = 0$ ఏమవుతుంది.

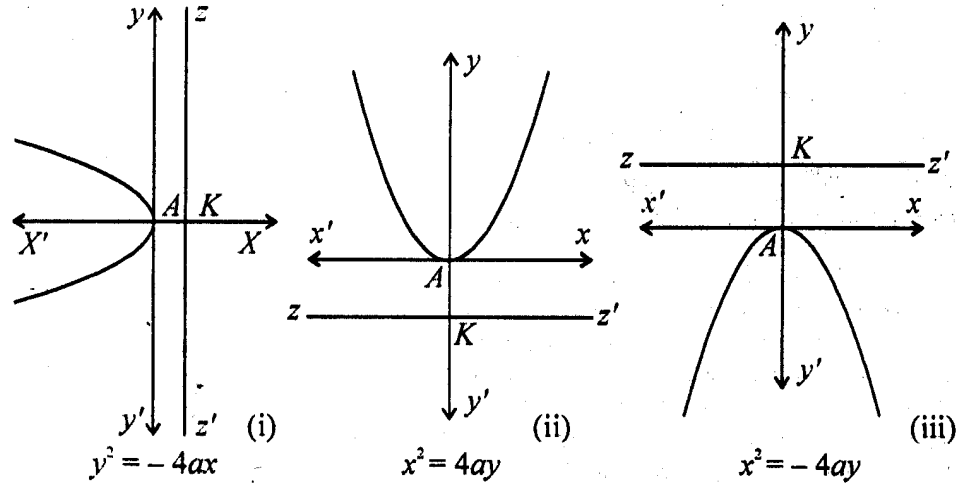
పై నియమాలను అనుసరించి పరావలయ సమీకరణం క్రింది విధంగా ఉంటుందని సులువుగా చూపవచ్చును.

(i) $y^2 = -4ax$

(ii) $x^2 = 4ay$

(iii) $x^2 = -4ay$

పై పరావలయ సమీకరణాల రేఖా చిత్రాలను క్రింద ఇవ్వడమైంది.



పటం 12.6

పై పరావలయ అనురూప ఫలితాలను క్రింది ఇవ్వడమైంది.

Forms	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
శీర్ష నిరూపకాలు	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
నాభుల నిరూపకాలు	$(a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, a)$	$(0, -a)$
నియత రేఖ సమీకరణం	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
నాభి లంబం పొడవు	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$

ఉదాహరణ 12.3

నాభి మూల బిందువుగాను, నియతరేఖ సమీకరణం $2x + y - 1 = 0$ గా గల పరావలయ సమీకరణంను కనుక్కోండి.

సాధన : $S(0, 0)$ నాభి అనుకొనుము.

ZZ' అనేది నియత రేఖ, దీని సమీకరణం $2x + y - 1 = 0$. $P(x, y)$ అనేది పరావలయంపై ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. పటం 18.5 ని చూడండి. PM అనేది నియత రేఖకు లంబదూరం అనుకొనుము.

నిర్వచనం నుంచి $SP = PM$

లేదా $SP^2 = PM^2$

లేదా $$x^2 + y^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

లేదా $5x^2 + 5y^2 = 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x$

లేదా $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2y + 4x - 1 = 0$

ఉదాహరణ 12.4

నాభి (2, 3) గాను, నియత రేఖ సమీకరణం $x - 4y + 3 = 0$ గా గల పరావలయ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన ఇచ్చిన నాభి (2, 3), నియత రేఖా సమీకరణం $x - 4y + 3 = 0$.

$\therefore$ పై ఉదాహరణ నుండి

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \left\{\frac{x - 4y + 3}{\sqrt{1^2 + 4^2}}\right\}^2$$

$\Rightarrow 16x^2 + y^2 + 8xy - 74x - 78y + 212 = 0$

అభ్యాసం 12.2

1. నాభి (a, b) గాను, నియత రేఖాసమీకరణం $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ గా గల పరావలయ సమీకరణంను కనుక్కోండి.
2. సాభి (2, 3) గాను, నియత రేఖ సమీకరణం $3x + 4y = 1$ గా గల పరావలయ సమీకరణంను కనుక్కోండి

12.4 పరావలయంపై బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు

ఈ విభాగంలో పరావలయంపై ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలను రాబడదాం.

12.4.1 సంకేతాలు : ప్రస్తుత, రాబోయే విభాగాల్లో కింది సంకేతాలను వాడుతాము.

(i) $S \equiv y^2 - 4ax$

(ii) $S_1 \equiv yy_1 - 2a(x + x_1)$

(iii) $S_{12} \equiv y_1y_2 - 2a(x_1 + x_2)$

(iv) $S_{11} \equiv y_1^2 - 4ax_1.$

1. సిద్ధాంతం : పరావలయం $S \equiv 0$ పై $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణం $S_1 + S_2 = S_{12}.$

ఉపపత్తి : $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ పరావలయంపై $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ లు రెండు బిందువులు అనుకొందాం. అప్పుడు $S_{11} = 0, S_{22} = 0.$

$$S_1 + S_2 = S_{12}$$

అంటే $\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} + \{yy_2 - 2a(x + x_2)\} = y_1y_2 - 2a(x_1 + x_2)$

ఏక ఘాత సమీకరణం తీసుకొందాం. ఇది ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది. ఇందులో (x_1, y_1) ప్రతిక్షేపిస్తే $S_{11} + S_{12} = S_{12}.$

$$\therefore 0 + S_{12} = S_{12}.$$

$S_1 + S_2 = S_{12}$ సమీకరణాన్ని (x_1, y_1) సంతృప్తిపరుస్తుంది.

ఇట్లే $S_1 + S_2 = S_{12}$ సమీకరణాన్ని (x_2, y_2) సంతృప్తిపరుస్తుంది.

$\therefore$ $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళ రేఖ $S_1 + S_2 = S_{12}.$

$\therefore$ జ్యా PQ సమీకరణం $S_1 + S_2 = S_{12}.$

2. సిద్ధాంతం : $S=0$ పై బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1=0$.

ఉపపత్తి : $S \equiv y^2-4ax=0$ పై $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ లు రెండు బిందువులు అనుకొందాం. అయితే $S_{11}=0, S_{22}=0$.

1 వ సిద్ధాంతం నుంచి జ్యా PQ సమీకరణం

$$S_1+S_2=S_{12} \qquad ...(1)$$

Q, P ని సమీపించినప్పుడు [అంటే (x_2, y_2) బిందువు (x_1, y_1) ని సమీపించినప్పుడు] PQ జ్యా P వద్ద స్పర్శ రేఖ అవుతుంది. కాబట్టి P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం కనుక్కొనేందుకు (1)కి ఇరువైపులా P ని Q సమీపించేటప్పుడు అవధి కనుక్కోవాలి.

P వద్ద స్పర్శ రేఖ సమీకరణం

$$\underset{Q\to P}{Lt}\ (S_1+S_2) = \underset{Q\to P}{Lt}\ S_{12}.$$

అంటే $S_1+S_1=S_{11}[(x_2, y_2)\to(x_1, y_1)$ అయితే $S_2\to S_1, S_{12}\to S_{11}$ కాబట్టి]

అంటే $2S_1=0 \Rightarrow S_1=0.$

$\therefore$ $S \equiv y^2-4ax=0$ పరావలయంపై బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శ రేఖ సమీకరణం

$S_1 \equiv yy_1-2a(x+x_1)=0.$

గమనిక : ఒక బాహ్య బిందువు నుంచి పరావలయం పైకి గీచిన రెండు స్పర్శరేఖల వాలుల మొత్తము = y_1/x_1

3. సిద్ధాంతం : $S=0$ పరావలయంపై బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం

$$\boldsymbol{(y-y_1)=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1).}$$

ఉపపత్తి : సిద్ధాంతం 2 నుంచి పరావలయం $y^2-4ax=0$ పై బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1 \equiv yy_1-2a(x+x_1)=0.$

$\therefore$ P వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $\frac{2a}{y_1}$

$\therefore$ P వద్ద అభిలంబ రేఖ వాలు $-\frac{y_1}{2a}$.

$P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $(y-y_1) = -\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$.

ఉదాహరణ 12.5: $y^2 = 8x$ పరావలయానికి నాభిలంబం చివర 4వ పాదంలో స్పర్శరేఖా సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: 4వ పాదంలో నాభిలంబం కొసలు $(a, -2a) = (2, -4)$

$S_1 = 0$ స్పర్శరేఖ

$yy_1 = 4(x + x_1)$

$-4y = 4(x + 2)$

$\Rightarrow x + y + 2 = 0$. కావలసిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము.

ఉదాహరణ 12.6: $y^2 = 6x$ పరావలయానికి, $(-2, 3)$ బిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖల వాలుల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన: వాలులను m_1, m_2 లు అనుకొనిన

$$m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{3}{2}.$$

12.5 ధ్రువం, ధ్రువరేఖ

స్పర్శ జ్యా, ధ్రువం, ధ్రువరేఖల నిర్వచనాలు 'వృత్తం' అధ్యాయంలో లాగే ఉంటాయి. ఈ విభాగంలో ఒక పరావలయం దృష్ట్యా ఒక బిందువు స్పర్శ జ్యా, ధ్రువ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కొంటాం, మరియు ధృవాన్ని కనుగొనే పద్ధతిని నేర్చుకొందాం.

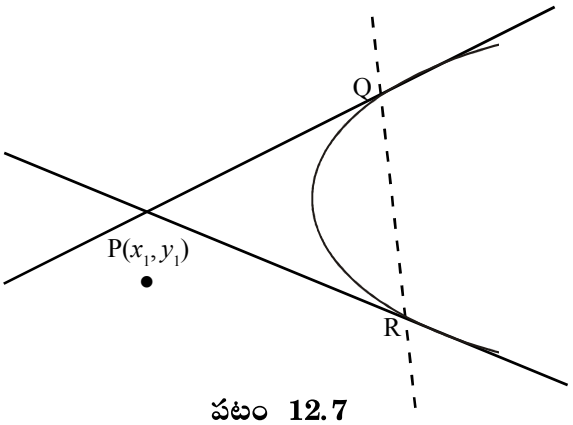
12.5.1 నిర్వచనం (స్పర్శ జ్యా)

ఒక శాంకవానికి, బాహ్య బిందువు నుంచి గీసిన రెండు స్పర్శరేఖలు శాంకవాన్ని స్పృశించే బిందువులను కలిపే రేఖను, శాంకవం దృష్ట్యా ఆ బిందువుకు **స్పర్శ జ్యా** అంటాం.

4. సిద్ధాంతం : $S = 0$ పరావలయం దృష్ట్యా బాహ్య బిందువు (x_1, y_1) కు స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$.

ఉపపత్తి : పరావలయం సమీకరణం $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ పరావలయం తలంపై $P(x_1, y_1)$ బాహ్య బిందువు అనుకొందాం.

$P(x_1, y_1)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు పరావలయాన్ని $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ల వద్ద స్పృశిస్తున్నాయి అనుకొందాం. $Q(x_2, y_2)$ వద్ద స్పర్శరేఖ $yy_2 - 2a(x + x_2) = 0$ (పటం 12.7)



పటం 12.7

బిందువు $P(x_1, y_1)$ గుండా పోతుంది కనక $y_1y_2 - 2a(x_1 + x_2) = 0$ ... (1)

ఇట్లాగే $R(x_3 y_3)$ వద్ద స్పర్శరేఖ $yy_3 - 2a(x + x_3) = 0$ కూడా $P(x_1, y_1)$ గుండా పోతుంది కనక

$$y_1y_3 - 2a(x_1 + x_3) = 0 \quad \ldots (2)$$

(1) , (2) ల నుంచి $S_1 \equiv yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$ సరళరేఖ $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ ల గుండా పోతుంది.

$\therefore$ $S = 0$ దృష్ట్యా P స్పర్శ జ్యా $\overleftrightarrow{QR}$ సమీకరణం $S_1 = 0$.

12.5.2 నిర్వచనం (ధ్రువం, ధ్రువరేఖ)

ఒక బిందువు గుండా పోయే శాంకవ జ్యాల కొనల వద్ద గీసిన స్పర్శ రేఖల ఖండన బిందువులు గల సరళ రేఖను శాంకవం దృష్ట్యా ఆ బిందువు ధ్రువరేఖ అంటాం. ఆ బిందువును ఆ ధ్రువరేఖకు ధ్రువం అంటాం.

5. సిద్ధాంతం : పరావలయం $S = 0$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ధ్రువరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$.

ఉపపత్తి : $S \equiv y^2 - 4ax = 0$ పరావలయం గల తలంలో $P(x_1, y_1)$ ఒక బిందువు అనుకొందాం.

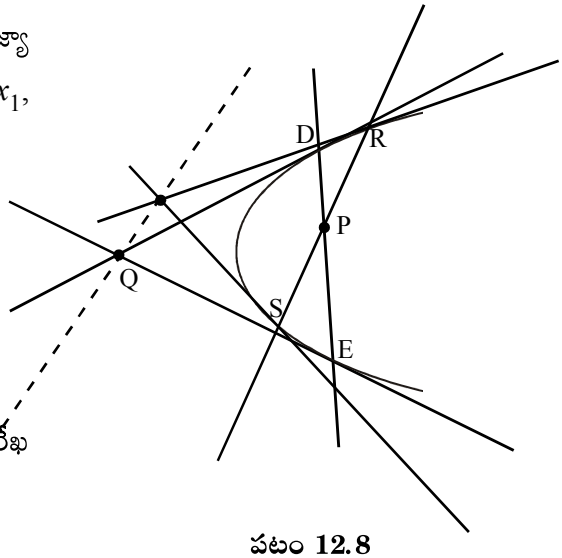
P గుండా పోయే ఏదైనా జ్యా పరావలయాన్ని D, E ల వద్ద ఖండిస్తుందని, పరావలయానికి D, E ల వద్ద స్పర్శరేఖలు $Q(h, k)$ వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయనుకొందాం.

$\therefore$ $S=0$ దృష్ట్యా $Q(h, k)$ స్పర్శ జ్యా $\overleftrightarrow{DE}$, $yk-2a(x+h)=0$ బిందువు $P(x_1, y_1)$ గుండా పోతుంది (పటం 12.8).

$\therefore y_1k - 2a(x_1 + h) = 0.$

కాబట్టి $yy_1 - 2a(x+x_1) = 0$ ధ్రువరేఖ సమీకరణాన్ని $Q(h, k)$ తృప్తి పరుస్తుంది.

$\therefore$ $S = 0$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ధ్రువరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$.



పటం 12.8

గమనిక :

1. పరావలయానికి P బాహ్య బిందువు అయితే $S = 0$ దృష్ట్యా P ధ్రువరేఖ, స్పర్శ జ్యాలు ఏకీభవిస్తాయి.
2. పరావలయంపై బిందువు P అయితే P వద్ద స్పర్శరేఖ, $S = 0$ దృష్ట్యా P ధ్రువరేఖలు ఏకీభవిస్తాయి.
3. పరావలయానికి అంతరంగా P బిందువు ఉంటే $S=0$ దృష్ట్యా P ధ్రువ రేఖ పరావలయాన్ని ఖండించదు, స్పృశించదు.
4. క్షితిజ సమాంతర రేఖ ధ్రువ రేఖ కానేరదు.
5. $y^2 = 4ax$ పరావలయం దృష్ట్యా క్షితిజేతర రేఖ $lx + my + n = 0$ ధ్రువం $\left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$.

ఉపపత్తి : క్షితిజేతర రేఖ $lx + my + n = 0\ (l \neq 0)$ ... (1)

కు పరావలయం $y^2 = 4ax$ ... (2)

దృష్ట్యా ధ్రువం $P(x_1, y_1)$ అనుకొందాం.

$S = 0$ దృష్ట్యా P ధ్రువ రేఖ సమీకరణం $yy_1 = 2a(x + x_1)$

(లేదా) $2ax - yy_1 + 2ax_1 = 0$ ... (3)

(1), (3) ఒకే రేఖను సూచిస్తాయి కనక

$$\frac{l}{2a} = \frac{m}{-y_1} = \frac{n}{2ax_1} \Rightarrow x_1 = \frac{n}{l},\ y_1 = \frac{-2am}{l}$$

$\therefore$ $S = 0$ దృష్ట్యా (1) యొక్క ధ్రువం $(x_1, y_1) = \left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$.

ఉదాహరణ 12.7: $y^2 = 4x$ పరావలయం దృష్ట్యా $2x + 3y - 4 = 0$ సరళరేఖ ధ్రువం కనుక్కోండి.

సాధన : ధ్రువం $= \left(\frac{+n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$

$$= \left(\frac{-4}{2}, \frac{-2(1)(3)}{2}\right)$$

$$= (-2, -3).$$

అభ్యాసం 12.3

1. $y^2 = 12x$ పరావలయం పై A(1, +3) వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.
2. $y^2 = 6x$ పరావలయం పై R(2, 5) వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
3. $y^2 = 4x$ పరావలయానికి నాభిలంబం చివర 4వ పాదంలో స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని రాబట్టుము.
4. $y^2 = 36x$ పరావలయానికి (1, 4) వద్ద నుండి గీసిన స్పర్శరేఖల వాలుల మొత్తమును కనుగొనుము.
5. $y^2 = 8x$ పరావలయం దృష్ట్యా $4x + 2y + 8 = 0$ సరళరేఖ ధ్రువం కనుక్కోండి.

12.6 స్పర్శ రేఖ, అభిలంబ రేఖ సమీకరణాలు

నిర్వచనం : దీర్ఘవృత్తాన్ని ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించే (స్పృశించే) సరళరేఖ, దీర్ఘవృత్తానికి స్పర్శరేఖ అని అంటాం.

i) దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ కి సరళరేఖ $y = mx + c$

స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమము $c^2 = a^2m^2 + b^2$

ii) దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ పై బిందువులు $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ లను కలిపే జ్యా సమీకరణం

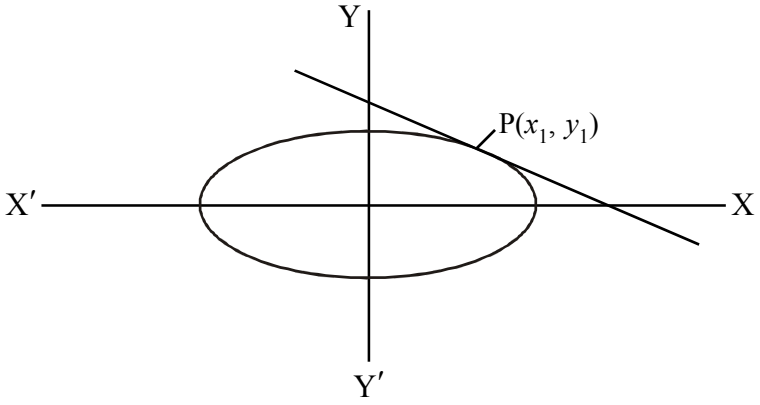
$S_1 + S_2 = S_{12}$

$$S_1 = \frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}-1=0;\ \ S_2 = \frac{x x_2}{a^2}+\frac{y y_2}{b^2}-1=0$$

$$S_{12} = \frac{x_1 x_2}{a^2}+\frac{y_1 y_2}{b^2}-1=0.$$

iii) దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ పై బిందువు $P(x_1, y_1)$

వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $\frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}-1=0$



పటం 12.9

iv) దీర్ఘవృత్తం $S \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ పై బిందువు

$P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$\frac{a^2 x}{x_1}-\frac{b^2 y}{y_1} = a^2-b^2\ \ (x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0)$$

ఉదాహరణ 12.8 : $9x^2 + 4y^2 = 20$ అను దీర్ఘవృత్తానికి $\left(\frac{-4}{3}, 1\right)$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $9x^2 + 4y^2 = 20$ కి

స్పర్శరేఖ సమీకరణ $9x\,x_1 + 4\,y\,y_1 = 20$

$$(x_1, y_1) = (-4/3,\ 1)$$

$$9x\left(\frac{-4}{3}\right) + 4y(1) = 20 \Rightarrow 3x - y + 5 = 0$$

$\left(\frac{-4}{3}, 1\right)$ అను బిందువు వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$

$$\frac{(20/9)x}{(-4/3)} - \frac{5y}{1} = \frac{20}{9} - 5 \Rightarrow 3x + 9y = 5$$

ఉదాహరణ 12.9

$4x^2 + 9\,y^2 = 20$ దీర్ఘవృత్తానికి $x + ky - 5 = 0$ స్పర్శరేఖ అయితే k విలువ ఎంత?

సాధన : ఇచ్చిన దీర్ఘ వృత్తము $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{(20/9)} = 1$

$$a^2 = 5,\ b^2 = \frac{20}{9}$$

$\therefore\ x + ky - 5 = 0$ స్పర్శరేఖ అయితే $5(1)^2 + \frac{20}{9}\,k^2 = (-5)^2$

$\Rightarrow 45 + 20\,k^2 = 225 \Rightarrow 20k^2 = 180 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \mathrm{K} = \pm 3$ [$\therefore a^2\,l^2 + b^2\,m^2 = n^2$]

ఉదాహరణ 12.10 : Find the equation of the ellipse referred to its centre whose minor axis is equal to the distance between the foci and whose latus rectum is 10.

సాధన : Let the required equation of ellipse be

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a > b)$$

$2b = 2ac$ $\qquad\qquad$ $\frac{2b^2}{a}=10$

$b = ac$ $\qquad\qquad$ $b^2 = 5a$

but $\quad b^2 = a^2 (1 - c^2)$

$b^2 = a^2 - (ac)^2$

$b^2 = a^2 - b^2$

$2b^2 = a^2$

$2(5a) = a^2$

$a = 10$

ఉదాహరణ 12.11 : X, Y - అక్షాలు వరుసగా దీర్ఘాక్షం, హ్రస్వాక్షంగా కలిగి నాభిలంబం పొడవు 4, నాభుల మధ్యదూరం $4\sqrt{2}$ గా గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b)$ అనుకొనుము.

నాభిలంబం పొడవు = $\frac{2b^2}{a}=4 \Rightarrow b^2 = 2a$

నాభులు S = $(ac, 0)$, $S^1 = (-ac, 0)$ is

వాటి మధ్య దూరం $\qquad 2ac = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \qquad ac = 2\sqrt{2}$

కాని $b^2 = a^2 (-c^2) \Rightarrow 2a = a^2 - (ac)^2 = a^2 - 8$

$a^2 - 2a - 8 = 0$

$(a - 4) (a + 2) = 0$

$a = 4 \ (a > 0)$

$b^2 = 2a = 2(4) = 8$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

(or) $x^2 + 2y^2 = 16.$

ఉదాహరణ 12.12 : నాభిలంబం పొడవు, ప్రస్వాక్షం పొడవులో సగం ఉండే దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రతను కనుక్కోండి.

సాధన : ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a > b)$$

నాభిలంబం పొడవు $= \frac{1}{2}$ (ప్రస్వాక్షం పొడవు)

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}(ab) \Rightarrow 2b = a$$

$$\therefore \ 4b^2 = a^2 \Rightarrow 4a^2(1-e^2) = a^2$$

$$\therefore \ 1-e^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow e^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

అభ్యాసం 12.4

1. $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$ దీర్ఘవృత్తంపై (2, −1) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
2. $x^2 + 3y^2 = 3$ దీర్ఘవృత్తానికి $4x + y + K = 0$ స్పర్శరేఖ అయితే K విలువ ఎంత?
3. $x^2 + 8y^2 = 33$ దీర్ఘవృత్తంపై (−1, 2) బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

18.7 ధ్రువం, ధ్రువరేఖ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ దీర్ఘవృత్తానికి $P(x_1, y_1)$ బాహ్య బిందువు అయితే

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ దృష్ట్యా P వద్ద స్పర్శజ్యా సమీకరణము

$$\frac{x\,x^2}{a^2} + \frac{y\,y^2}{b^2} - 1 = 0$$

12.7.1 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ దృష్ట్యా మూలబిందువు కాని బిందువు (x_1, y_1) వద్ద ధ్రువరేఖ సమీకరణం $\frac{x\,x^2}{a^2} + \frac{y\,y^2}{b^2} - 1 = 0$.

12.7.2 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ రేఖ ధ్రువం $\left(\frac{-a^2 l}{n}, \frac{-b^2 m}{n}\right)$

12.7.3 $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ దృష్ట్యా $l_1x + m_1y + n_1 = 0,\ l_2x + m_2y + n_2 = 0$ సంయుగ్మ రేఖలు కావడానికి నియమము

$$a^2 l_1 l_2 + b^2 m_1 m_2 = n_1 n_2 .$$

ఉదాహరణ 12.13.

$x^2 + 4y^2 - x - 16y - 10$ ...(1)

దీర్ఘ వృత్తం దృష్ట్యా $x - y + 2 = 0$ రేఖ యొక్క ధ్రువాన్ని కనుక్కోండి.

ధ్రువము $P(x_1\, y_1)$ అనుకోండి.

$P(x_1, y_1)$ వద్ద ధ్రువరేఖ సమీకరణం

$xx_1 + 4yy_1 - (x + x_1) - 8\,(y + y_1) - 10 = 0$

$\Rightarrow\ x(x_1 - 1) + 4y\,(y_1 - 2) - (x_1 + 8y_1 + 10) = 0$ ...(2)

(1), (2) లను పోల్చగా $\frac{x_1-1}{1} = \frac{4(y_1-2)}{-1} = \frac{-(x_1+8y_1+10)}{2} = k$ (అనుకోండి)

$\therefore\ x_1 = k+1, y_1 = \frac{-k}{4}+2, x_1+8y+10 = -2k$ ...(3)

x_1 మరియు y_1 విలువలు (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$k+1+8\left(\frac{-k+8}{4}\right)+10 = -2k$$

$\Rightarrow\ k+1+2(-k+8)+10 = -2k \Rightarrow k = -27$

$\Rightarrow x_1 = -26, y_1 = \frac{35}{4}$ ధ్రువము $P = \left(-26, \frac{35}{4}\right)$

అభ్యాసం 12.5

1. $5x^2+7y^2 = 8$ దీర్ఘవృత్తం దృష్ట్యా సరళరేఖ $5x+7y+8 = 0$ ధ్రువం కనుక్కోండి.
2. $3x^2+4y^2 = 12$ దీర్ఘవృత్తం దృష్ట్యా సరళరేఖ $21x-16y-12 = 0$ ధ్రువం కనుక్కోండి.

12.8 అతిపరావలయం - కొన్ని ముఖ్య ధర్మాలు

అతిపరావలయం నాభి లంబం, ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభి లంబరేఖ మొదలైన భావనలు అన్ని దీర్ఘ వృత్తం అధ్యయంలో లాగే నిర్వచిస్తాం. అతిపరావలయానికి చెందిన కొన్ని ముఖ్యమైన ధర్మాలను ఇక్కడ ఇచ్చాం. వీటి ఉపపత్తులు దీర్ఘవృత్తం అధ్యయంలో లాగే ఉంటాయి. కనక, విద్యార్థి వాటిని సులభంగా చేయవచ్చు.

1. a) అతిపారవలయం గల సమతలంపై $P(x_1, y_1)$ బిందువు $S_{11} > 0$ అయితే అంతరంగాను, $S_{11} < 0$ అయితే బాహ్యంగాను, $S_{11} = 0$ అయితే వక్రం పైనా ఉంటుంది.

1. b) నాభి లంబాగ్రాలు $\left(\pm ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$, నాభి లంబ పొడవు $\frac{2b^2}{a}$

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ అతిపరావలయంపై $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0$

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ అతిపరావలయానికి $Y = mx + c$ స్పర్శరేఖ అవడానికి నియము $c^2 = a^2m^2 - b^2$.

ఉదాహరణ 12.14 : $\frac{9}{2}$ నాభి లంబము, $\frac{5}{4}$ ఉత్కేంద్రత గల అతిపరావలయపు సమీకరణమేది.

సాధన : $\frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2}, e = \frac{5}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{9a}{4} \Rightarrow a^2\left(\frac{25}{16} - 1\right) = \frac{9a}{4}$

$\Rightarrow a = 4, b^2 = 9$ $\therefore$ అతిపరావలయపు సమీకరణం $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

ఉదాహరణ 12.15 : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$ అతిపరావలయానికి నాభులేవి?

సాధన : $a^2 = 36; b^2 = 16$ $\therefore e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{36+16}}{6} = \frac{\sqrt{52}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

నాభులు $(\pm ae, 0) = (\pm 2\sqrt{13}, 0)$.

12.9 ధ్రువం, ధ్రువ రేఖ

1) $S = 0$ అతిపరావలయ తలంలో $P(x_1, y_1)$ ఏదైనా బిందువు అయితే $S = 0$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ధ్రువరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$

2) $S = 0$ దృష్ట్యా $lx + my + n = 0$ ధ్రువం $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{b^2m}{n}\right)$

ఉదాహరణ 12.16 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అతిపరావలయం దృష్ట్యా $l_1x + m_1y + n_1 = 0, l_2x + m_2y + n_2 = 0$ రేఖలు సంయుగ్మాలు కావడానికి నియమము కనుక్కోండి.

సాధన : $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ అతిపరావలయం దృష్ట్యా $l_1x + m_1y + n_1 = 0;\ l_2x + m_2y + n_2 = 0$ రేఖలు సంయుగ్మాలు అనుకొందాం.

$S = 0$ దృష్ట్యా $L = 0$ ధ్రువం $P(x_1, y_1)$ అనుకొందాం.

$$S_1 \equiv \frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} - 1 = 0$$

$S_1 = 0,\ L = 0$ లు ఒకే రేఖను (అంటే $S = 0$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ (ధ్రువరేఖలు) సూచిస్తున్నాయి.

$$\frac{x_1}{\frac{a^2}{l_1}} = \frac{y_1}{-\frac{b^2}{m_1}} = \frac{-1}{n_1} \Rightarrow x_1 \frac{-a^2l_1}{n_1},\ y_1 = \frac{b^2m_1}{n_1}$$

$S = 0$ దృష్ట్యా $L = 0$ ధ్రువం $\left(\frac{-a^2l_1}{n_1}, \frac{b^2m_1}{n_1}\right)$ ఇది $L' = 0$ పై ఉంటుంది.

($\therefore$ $S = 0$ దృష్ట్యా $L = 0, L' = 0$ లు సంయుగ్మారేఖలు)

$$\frac{-a^2l_1l_2}{n_1} + \frac{b^2m_1m_2}{n_1} + n_2 = 0$$

$\therefore$ $a^2 l_1l_2 - b^2 m_1m_2 = n_1n_2$ కావలసిన నియమము.

అభ్యాసం 12.6

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అతిపరావలయానికి అభి లంబరేఖల ధ్రువాల బిందుపథం $\frac{a^6}{a^2} + \frac{b^6}{b^2} = (a^2 + b^2)^2$ అని చూపండి.

మాడ్యూల్ - II
నిరూపక జ్యామితి



కీలకపదాలు

- శాంకవజ విభాగము
- ఒక సమతలంపై చలించే బిందువు దూరాలు ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళరేఖ నుంచి స్థిర నిష్పత్తి లో ఉంటే ఆ బిందుపథాన్ని ఒక శాంకవ ఛేదంగా నిర్వచిస్తాం.

(i) నాభి : స్థిరబిందువును నాభి అంటాము.

(ii) నియత రేఖ : స్థిర సరళ రేఖను నియత రేఖ అంటాము.

(iii) అక్ష రేఖ : నియత రేఖకు లంబంగా ఉంటూ నాభి గుండా పోయే రేఖను అక్షరేఖ అంటాము.

(iv) ఉత్కేంద్రత : స్థిర నిష్పత్తి 'e' ని ఉత్కేంద్రత అంటాము.

(v) నాభిలంబం : నాభి గుండా పోయే, నియత రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే, రెట్టింపు ఊర్ధ్వరేఖా ఖండాన్ని నాభిలంబం అంటాం. (పటం 18.5లో LSL' అనేది నాభి లంబం)

- ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) దీర్ఘాక్షం $= 2a$ (ii) హ్రస్వాక్షం $= 2b$

(iii) నియత రేఖాసమీకరణం $x = \pm \frac{a}{c}$ (iv) నాభులు $(\pm ae, 0)$

(v) ఉత్కేంద్రత $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

- ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయ సమీకరణం $y^2 = 4ax$

(i) శీర్షం $(0, 0)$

(ii) నాభి $(a, 0)$

(iii) పరావలయం అక్షము $y = 0$

(iv) పరావలయ నియత రేఖా సమీకరణం $x + a = 0$

(v) నాభిలంబం $= 4a$

పరావలయ వివిధ రూపాలు

i) $y^2 = -4ax$ (పుటాకారం ఎడమ వైపు)

ii) $x^2 = 4ay$ (పుటాకారం ఎగువ వైపు)

iii) $x^2 = -4ay$ (పుటాకారం దిగువ వైపు)

- క్షితిజ సమాంతర రేఖ పరావలయం $y^2 = 4ax$ కు స్పర్శరేఖ కాదు.
- $S = 0$ పరావలయానికి $P(x_1, y_1)$వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం $S_1 = 0$.
- $S = 0$ పరావలయంపై $P(x_1, y_1)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం $(y - y_1) = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$.
- $S = 0$ పరావలయం దృష్ట్యా బాహ్యబిందువు $P(x_1, y_1)$ స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0$.
- $S = 0$ పరావలయం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ ధ్రువరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$.
- $y^2 = 4ax$ దృష్ట్యా సరళరేఖ $lx + my + n = 0\ (l \neq 0)$ ధ్రువం $\left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$.
- దీర్ఘవృత్తం ప్రామాణిక సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- దీర్ఘవృత్తానికి $y = mn + c$ సరళరేఖ స్పర్శరేఖ కావాడానికి నియమము $c^2 = a^2m^2 + b^2$
- దీర్ఘవృత్తానికి స్పర్శరేఖ సమీకరణం $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0$
- దీర్ఘవృత్తానికి అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2$
- ధ్రువరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$ అనగా $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0$
- దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ కి $p(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $\frac{x \cos\theta}{a} + \frac{y \sin\theta}{b} = 1$

- దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $p(\theta)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$
- నాభి లంబాగ్రాలు $\left(\pm ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$
- నాభి లంబ పొడవు $\frac{2b^2}{a}$
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ అతిపరావలయానికి $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-1=0$.
- $S=0$ దృష్ట్యా $lx+my+n=0$ ధ్రువం $\left(\frac{-a^2l}{n}, \frac{b^2m}{n}\right)$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

- http:// www.wikipedia.org
- http:// mathworld.wolfram.com.

సాధనా అభ్యాసం

1. ఈ క్రింది ప్రతి సందర్భంలో పరావలయ సమీకరణంను కనుక్కోండి
   (a) నాభి (0, 1), నియత రేఖ $x+y=0$ మరియు $e=\frac{1}{2}$ అయినపుడు
   (b) నాభి (−1, 1) నియతరేఖ $x-y+3=0$ మరియు $e=\frac{1}{2}$ అయినపుడు
2. క్రింది దీర్ఘ వృత్తాలకు నాభుల నిరూపకాలు మరియు ఉత్కేంద్రతలను కనుగొనుము.
   (a) $4x^2+9y^2=1$ (b) $25x^2+4y^2=100$
3. నాభి (−8, −2) గాను, నియతరేఖ $y-2x+9=0$ గా గల పరావలయ సమీకరణంను కనుగొనుము.

జవాబులు

అభ్యాసం 12.1

1. (a) $20x^2 + 36y^2 = 405$ (b) $x^2 + 2y^2 = 100$

   (c) $8x^2 + 9y^2 = 1152$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

అభ్యాసం 12.2

1. $(ax - by)^2 - 2a^3 x - 2b^3y + a^4 + a^2 b^2 + b^4 = 0$
2. $16x^2 + 9y^2 - 94 x - 142y - 24 xy + 324 = 0$

అభ్యాసం 12.3

1. $6x - 3y + 6 = 0$
2. $5x + 3y - 25 = 0$
3. $2x + 2y + 2 = 0$
4. 4
5. $(2, -2)$.

అభ్యాసం 12.4

1. $y + 1 = 0,\ x - 2 = 0$
2. $K = \pm 7$
3. $x - 16y + 33 = 0,\ 16x + y + 44 = 0.$

అభ్యాసం 12.5

1. $(-1, -1)$
2. $(7, -4)$

సాధనా అభ్యాసం

1. (a) $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 16y + 8 = 0$

   (b) $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

2. (a) $\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right); \frac{\sqrt{5}}{3}$

   (b) $\left(0, \pm \sqrt{21}\right); \frac{\sqrt{21}}{5}$

3. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$

అధ్యాయం 13

త్రిపరిమాణ జ్యామితి పరిచయము

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యపఠనం వలన మనము నేర్చుకునే విషయాలు

- మూడు సంఖ్యల చేత అంతరాళంలో బిందువు నిర్దేశించుట
- అంతరాళంలో రెండు బిందువుల మధ్యదూరము
- రెండు బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా లేక బాహ్యంగా దత్త నిష్పత్తిలో ఖండించే బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనుట.
- అంతరాళంలో సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు నిర్వచించుట
- ఒక సరళరేఖాఖండాన్ని వేరొక సరళరేఖ మీద విక్షేపించుట
- అంతరాళంలో రెండు సరళరేఖలు లంబంగా లేక సమాంతరంగా ఉండేందుకు నియమాలు

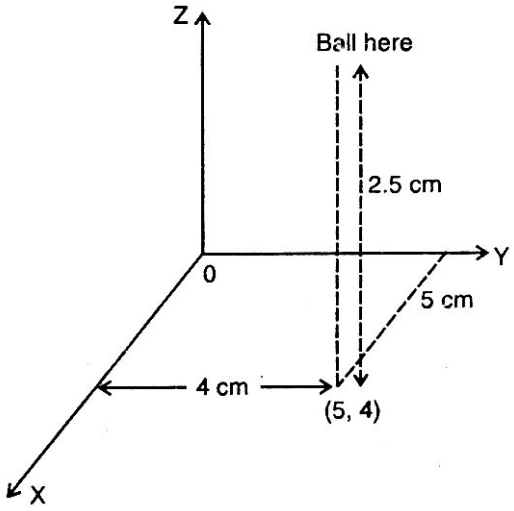
పూర్వాకాంక్షితాలు

- ద్విపరిమాణ నిరూపక జ్యామితి
- ఆల్‌జీబ్రా, జ్యామెట్రీ, త్రికోణమితి, సదిశల ప్రాథమిక అంశాలు

పరిచయం

ఏదైనా తలంలో ఒక బిందువు తీసుకుంటే, ఆ బిందువుకు అనురూపంగా దాని నిరూపకాలు అనబడే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనే వీలుంది. విపర్యయంగా (x, y) అనే క్రమయుగ్మానికి అనుగుణంగా తలము మీద (x, y) నిరూపకాలు గల బిందువు నిర్దేశితమవుతుంది.

మన గదిలో ఒక బంతిని నిలువుగా జారవిడుద్దాము. ఆ బంతి నేలను తాకిన బిందువు యొక్క స్థానము నిర్ధారించుటకు పూర్వము తీసుకున్న అక్షాలైన గది పొడవు వెడల్పులు చాలవు. గది పొడవు, వెడల్పు ఆధారంగా నిర్ధారితము. కాని నేలను తాకిన బంతి ఊర్ధ్వముగా పైకి లేస్తుంది. ఆ సమయంలో బంతి యొక్క స్థానము ఏ సమయంలోనైనా బంతి యొక్క స్థానము కొఱకు, బంతి ఎంత ఎత్తుకు లేచినది అనేది కూడా కావాలి.



పటం 13.1

మనము జారవిడిచిన బంతి నేలను తాకిన బిందువు (5, 4) అనుకుందాము. పైకి లేచిన బంతి 2.5 సెం.మీ ఎత్తులో వున్నప్పుడు దాని స్థానాన్ని (5, 4, 2.5) అనే మూడు సంఖ్యల చేత సూచిస్తాము.

కనుక, అంతరాళంలో ఒక బిందువు నిర్దేశించుటకు మూడు సంఖ్యలు అవసరము.

ఈ పాఠంలో విపులంగా చర్చించు అంశాలు :-

నిరూపక వ్యవస్థ, అంతరాళంలో బిందువు నిరూపకాలు, అంతరాళంలో రెండు బిందువుల మధ్యదూరము, రెండు బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా లేక బాహ్యంగా ఒక దత్త నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు, ఒక బిందువు - సరళరేఖల విక్షేపము.

13.1 నిరూపక వ్యవస్థ అంతరాళంలో బిందువు నిరూపకాలు

వెనక ఉదహరించిన, గదిలో బంతిని జారవిడచిన ఉదాహరణలో, గది యొక్క ఒక మూలను మూలబిందువుగా తీసికొనుట జరిగినది.

గది యొక్క ఆ మూలనే మూల బిందువుగా తీసికోవాలి. అనేనియమమేమీ లేదు. గది యొక్క ఏమూలనైనా మూలబిందువుగా తీసుకోవచ్చు. అనుగుణంగా బిందువు నిరూపకాలు మారతాయి.

మూలబిందువుగా గదిలోని ఏ బిందువునైనా తీసుకోవచ్చు.

అంతరాళంలో యాదృచ్ఛికంగా ఏదైనా బిందువు 'O' ను మూలబిందువుగా తీసుకుని O గుండా పరస్పరము లంబంగా వుండేట్లు మూడు సరళరేఖలు XOX′, YOY′, ZOZ′ గీయుము.

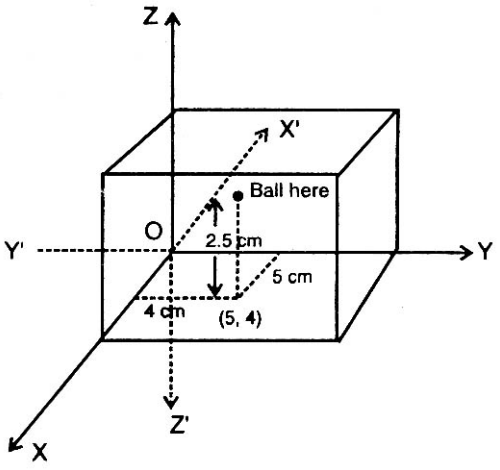
నిరూపక వ్యవస్థకు 'O' మూలబిందువని, XOX′, YOY′, ZOZ′ సరళరేఖలకు వరుసగా X–అక్షము, Y–అక్షము, Z–అక్షము అని పేర్లు.

OX, OY, OZ దిశలు ధనదిశలు, OX′, OY′, OZ′ దిశలు ఋణదిశలు X–అక్షము, Y అక్షముల చేత ఏర్పడే తలము (రెండు సరళరేఖల చేత ఒక తల మేర్పడుతుంది) XY- తలము లేక XOY తలము.

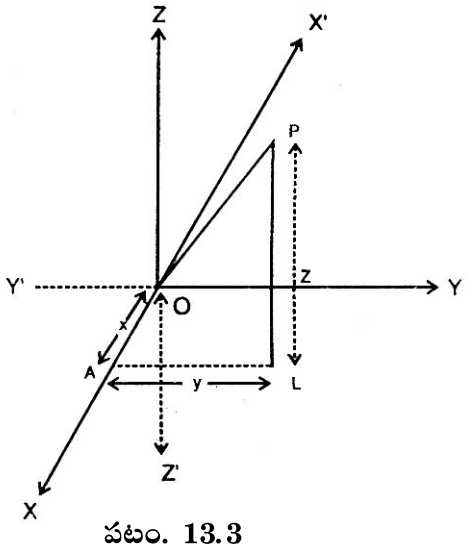
ఇట్లే YOZ తలము ZOX తలము ఏర్పడుతాయి.

XOY, YOZ, ZOX అనే ఈ మూడు తలములకు నిరూపక తలాలని పేర్లు.

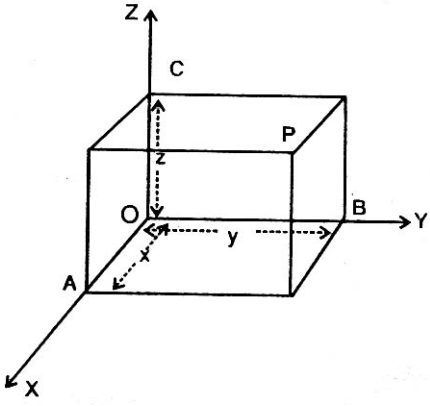
అంతరాళాన్ని ఈ మూడు నిరూపక తలాలు ఎనిమిది భాగాల క్రింద విభజిస్తాయి. ప్రతి భాగానికి ఒక అష్టకము అని పేరు.



పటం. 13.2



పటం. 13.3



పటం. 13.4

అంతరాళంలో P ఏదైనా బిందువు P గుండా XY తలానికి PL లంబాన్ని గీయుము. ఇది XY తలాన్ని L బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

L గుండా OY కి సమాంతరంగా LA సరళరేఖ OX ను A వద్ద ఖండించేటట్లు గీయుము.

ఇపుడు $OA = x, AL = y, LP = z$ అని తీసుకుంటే P బిందువు నిరూపకాలు (x, y, z).

ఇంకా, P గుండా, OA, OB, OC లు అంచులుగా, OP కర్ణంగా, ఉండేటట్లు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పట్టకము నిర్మిస్తే, (OA, OB, OC)లు అంటే (x, y, z) లు P బిందువు నిరూపకాలుగా పిలుస్తాము.

గమనిక : పటం. 47.4 లో క్రింది వాటిని గమనించండి.

(i) P యొక్క x-నిరూపకము = OA = P నుండి YZ తలానికి లంబదూరము

(ii) P యొక్క y-నిరూపకము = OB = P నుండి ZX తలానికి లంబదూరము

(iii) P యొక్క z-నిరూపకము = OC = P నుండి XY తలానికి లంబదూరము

$\therefore$ P బిందువు నుండి YZ, ZX, XY తలాలకు గల లంబదూరాలు వరుసగా P యొక్క x, y, z నిరూపకాలకు సమానము.

$\therefore$ అంతరాళంలోని ప్రతి బిందువు P కి అనుగుణంగా (x, y, z) త్రికము వ్యవస్థితము. ఇవే P కి నిరూపకాలు. విపర్యయంగా, ప్రతి దత్త త్రికము (x, y, z) నకు అనుగుణంగా ఈ త్రికము నిరూపకాలుగా గల బిందువు P అంతరాళంలో వ్యవస్థితము.

రిమార్కులు :

1. ద్విపరిమాణ నిరూపక జ్యామితిలో, నిరూపకక్షాలు తలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజించినట్లు, త్రిపరిమాణ జ్యామితిలో నిరూపక తలాల చేత అంతరాళము ఎనిమిది అష్టకాలుగ విభజింపబడుతుంది. అవి

   OXYZ, OX′YZ, OXY′Z, OXYZ′,

   OXY′Z′, OX′YZ′, OX′Y′Z, OX′Y′Z′.

2. మొదటి అష్టకములో P ఏదైనా బిందువు తీసుకుంటే, ప్రతి అష్టకము లోను P కి అనుగుణముగా ఒక బిందువు వుంటుంది. వాటి నిరూపకాలు, P నిరూపకాలతో సాంఖ్యకంగా సమానము.

   P బిందువు (a, b, c) అయితే మిగిలిన బిందువులు $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$,$(a, b, -c)$

   $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$, $(-a, -b, -c)$

3. XOY తలంలో బిందువు $(a, b, 0)$

   YOZ తలంలో బిందువు $(0, b, c)$

   ZOX తలంలో బిందువు $(a, 0, c)$

4. X, Y, Z అక్షాల మీద బిందువులు వరుసగా

   $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$

5. O ఆధారంగా P బిందువు స్థానసదిశ (x, y, z). దీనిని సదిశ $\overline{OP}$ అని వ్రాస్తాము.

ఉదాహరణ 13.1: ఈ క్రింది బిందువులు ఏ అష్టకంలో వున్నాయి.

(ఎ) (2, 6, 8) (బి) (−1, 2, 3) (సి) (−2, −5, 1)

(డి) (−3, 1, −2) (ఇ) (−6, −1, −2)

సాధన : (ఎ) అన్ని నిరూపకాలు ధనసంఖ్యలు

$\therefore$ (2, 6, 8) బిందువు OXYZ లోనిది

(బి) x – ఋణసంఖ్య. మిగిలినవి ధనసంఖ్యలు

$\therefore$ (−1, 2, 3) బిందువు OX′YZ లోనిది

(సి) x, y ల ఋణ సంఖ్యలు, z ధన సంఖ్య

$\therefore$ (−2, −5, 1) బిందువు OX′Y′Z లోనిది.

(డి) y ధనసంఖ్య, x, z లు ఋణ సంఖ్యలు

$\therefore$ (−3, 1, −2) బిందువు OX′ Y Z′ లోనిది.

(ఇ) అన్నీ ఋణ సంఖ్యలు

$\therefore$ (−6, −1, −2) బిందువు OX′Y′Z′.

అభ్యాసం 13.1

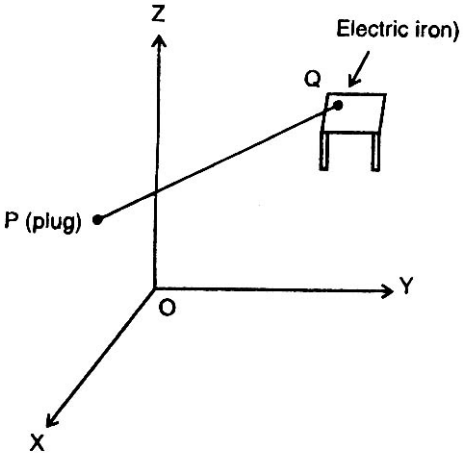
1. క్రింది బిందువులు ఏ అష్టకములో వున్నాయి.

(ఎ) (−4, 2, 5) (బి) (4, 3, −6) (సి) (−2, 1, −3)

(డి) (1, −1, 1) (ఇ) (8, 9, −10)

13.2 రెండు బిందువుల మధ్యదూరము

ఇక్కడ గది గోడ మీద ఒక ఎలక్ట్రిక్ ప్లగ్, ఒకటేబుల్ మీద ఇస్త్రీ పెట్టె ఉన్నాయి. ఈ రెంటిని కలిపే అతి తక్కువ పొడవున్న వైరు కావాలి. రెండు బిందువుల మధ్య దూరము కనుగొనే అగత్యమునకు ఇది ఒక ఉదాహరణ.



పటం. 13.5

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ లు రెండు బిందువులు.

PQ కర్ణంగా PMSNRLKQ దీర్ఘ చతురస్రాకార పట్టకము నిర్మించండి.

PK సరళరేఖ KQ కు లంబము.

PKQ త్రిభుజములో $\angle K = 90^0$.

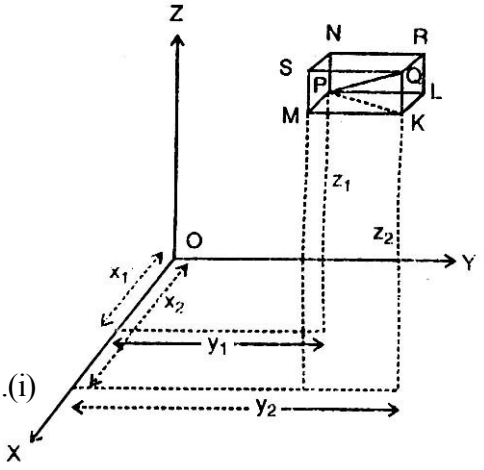
$\therefore PQ^2 = PK^2 + KQ^2$

PKL త్రిభుజములో $\angle L = 90^0$.

$\therefore PK^2 = KL^2 + PL^2$

$= MP^2 + PL^2$ $(\because KL = MP)$

$\therefore PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$ ...(i)



పటం. 13.6

MP, PL, KQ లు వరుసగా నిరూపకక్షాలకు సమాంతరాలు.

P నుండి YOZ తలానికి దూరము = x_1

Q, M ల నుండి YOZ తలానికి దూరము = x_2

$\therefore MP = |x_2 - x_1|$

ఇట్లే $PL = |y_2 - y_1|$; $KQ = |z_2 - z_1|$

(i) నుంచి

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{..... (i) నుంచి}$$

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ఉపసిద్ధాంతము : మూలబిందువు నుండి Pకి గల దూరము :

$Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువు మూలబిందువు (0, 0, 0)తో ఏకీభవిస్తే, $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

అప్పుడు $|OP| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2}$

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$\therefore$ $P(x, y, z)$ నుంచి O కు దూరము

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ఉదాహరణ 13.2: (2, 5, −4), (8, 2, −6) బిందువుల మధ్య దూరమెంత?

సాధన : P(2, 5, –4), Q(8, 2, –6) లు దత్త బిందువులు

$$|PQ| = \sqrt{(8-2)^2 + (2-5)^2 + (-6+4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9 + 4}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

రెండు బిందువుల మధ్యదూరము 7 యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 13.3: (–2, 4, –3), (4, –3, −2), (–3, –2, 4) బిందువులు సమబాహు త్రిభుజ శీర్షాలని చూపుము.

సాధన : A(–2, 4, –3), B(4, –3, −2), C(–3, –2, 4) లు దత్త బిందువులు

$$|AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-3-4)^2 + (-2+3)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 49 + 1} = \sqrt{86}$$

$$|BC| = \sqrt{(-3-4)^2 + (-2+3)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 1 + 36} = \sqrt{86}$$

$$|CA| = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2 + (-3-4)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 36 + 49} = \sqrt{86}$$

$\because$ $|AB| = |BC| = |CA|$, ABC ఒక సమబాహుత్రిభుజము.

ఉదాహరణ 13.4: క్రింది బిందువులు త్రిభుజమును ఏర్పరుస్తాయో లేదో నిర్ధారించండి.

(a) A(–1, 2, 3), B(1, 4, 5); C(5, 4, 0)

(b) (2, –3, 3), (1, 2, 4); (3, –8, 2)

సాధన : $|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3.464$ (షుమారుగా)

$|BC| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2 + (0-5)^2}$

$= \sqrt{41} = 6.4$ (షుమారుగా)

$|AC| = \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{49} = 7$ (షుమారుగా)

$|AB| + |BC| = 3.464 + 6.4 = 9.864 > |AC|$

ie $|AB| + |BC| > |AC|$

ఇంకా $|BC| + |AC| > |AB|$, $|AB| + |AC| > |BC|$

ie ఏ రెండు భుజాల మొత్తమైనా మూడవ భుజము కన్న ఎక్కువ,

∴ దత్త బిందువులతో త్రిభుజమేర్పడుతుంది.

(b) P(2, –3, 3), Q(1, 2, 4); R(3, –8, 2)

$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (2+3)^2 + (4-3)^2}$

$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$|QR| = \sqrt{(3-1)^2 + (-8-2)^2 + (2-4)^2}$

$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

$|PR| = \sqrt{(3-2)^2 + (-8+3)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

ఇక్కడ $|PQ| + |PR| = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = |QR|$

ఇచ్చిన బిందువులు సరేఖీయాలు త్రిభుజము ఏర్పడదు.

ఉదాహరణ 13.5 : A(1, 2, −2), B(2, 3, −4) C(3, 4,−3) బిందువులతో లంబకోణ త్రిభుజమేర్పడుతుందని చూపుము.

సాధన : $AB^2 = (2-1)^2 + (3-2)^2 + (-4+2)^2 = 6$

$BC^2 = (3-2)^2 + (4-3)^2 + (-3+4)^2 = 3$

$AC^2 = (3-1)^2 + (4-2)^2 + (-3+2)^2 = 9$

ఇక్కడ, $AB^2 + BC^2 = 6 + 3 = 9 = AC^2$

$\therefore \Delta ABC$ లంబకోణ త్రిభుజము

$\therefore$ దత్తబిందువులతో లంబకోణ త్రిభుజమేర్పడుతుంది.

ఉదాహరణ 13.6 : A(0, 4, 1), B(2, 3, −1), C(4, 5, 0), D(2, 6, 2) బిందువులు ఒక చతురస్ర శీర్షాలని చూపుము.

సాధన : $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-4)^2 + (-1-1)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2 + (0+1)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (6-5)^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$DA = \sqrt{(0-2)^2 + (4-6)^2 + (1-2)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$\therefore AB = BC = CD = DA$

$AC^2 = (4-0)^2 + (5-4)^2 + (0-1)^2$

$= 18$

$\therefore AB^2 + BC^2 = 9 + 9 = 18 = AC^2$

$\therefore \angle B = 90^0$

$\therefore$ ABCD చతుర్భుజములో, $AB = BC = CD = DA$; $\angle B = 90^0$

$\therefore$ ABCD ఒక చతురస్రము.

అభ్యాసం 13.2

1. ఈ క్రింది బిందువుల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనుము.

   (a) (4, 3, –6); (–2, 1, –3)

   (b) (–3, 1, –2); (–3, –1, 2)

   (c) (0, 0, 0); (–1, 1, 1)

2. (5, –1,7); (a, 5, 1) బిందువుల మధ్య దూరము 9 యూనిట్లు, అయితే a విలువ 2గాని 8గాని అని చూపుము.

3. (a, b, c) (b, c, a) (c, a, b) బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజము సమబాహు త్రిభుజమని చూపుము.

4. (–1, 0, –4); (0, 1, –6), (1, 2, –5) బిందువులతో లంబకోణ త్రిభుజమేర్పడుతుందని చూపుము.

5. (0, 7, 10), (–1, 6, 6), (–4, 9, 6) బిందువులు సమద్విబాహు లంబ కోణ త్రిభుజ శీర్షాలని చూపుము.

6. (3, –1, 2), (5, –2, –3), (–2, 4, 1), (–4, 5, 6) బిందువులతో సమాంతర చతుర్భుజ మేర్పడుతుందని చూపుము.

7. (2, 2, 2), (–4, 8, 2), (–2, 10, 10) (4, 4, 10) బిందువులతో చతురస్రమేర్పడుతుందని చూపుము.

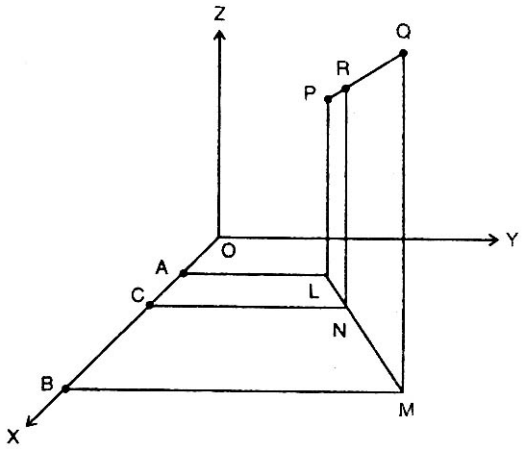
8. ఈ క్రింది బిందువులు సరేఖీయాలని చూపుము.

   (a) (–3, 2, 4), (–1, 5, 9), (1, 8, 14)

   (b) (5, 4, 2), (6, 2, –1), (8, –2, –7)

   (c) (2, 5, –4), (1, 4, –3), (4, 7, –6)

13.3 ఒక రేఖాఖండాన్ని విభజించే బిందువు నిరూపకాలు



పటం. 13.7

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ లు PQ రేఖాఖండపు అంత్య బిందువులు అనుకొనుము.

PQ ని అంతరంగా $R(x, y, z)$ బిందువు $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తోందనుకొనుము.

P, R, Q ల నుండి XY- తలానికి PL, RN, QM లు లంబాలు గీయుము.

LA, NC, MB లు OX కు లంబాలు గీయుము.

ఇపుడు, $AC = OC - OA = x - x_1$

$BC = OB - OC = x_2 - x$

ఇంకా $\frac{AC}{CB} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{l}{m}$

ie $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$

ie $mx - mx_1 = lx_2 - lx$

ie $(l + m)x = lx_2 + mx_1$

$\therefore x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$

ఇట్లే OY, OZ లకు లంబాలు గీస్తే

$$y = \frac{ly_2 + my_1}{l+m}\ ;\ z = \frac{lz_2 + mz_1}{l+m}$$

అని వస్తాయి.

$\therefore$ R బిందువు $\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l+m},\ \frac{ly_2 + my_1}{l+m},\ \frac{lz_2 + mz_1}{l+m}\right)$

$\lambda = \frac{l}{m}$ అని తీసుకుంటే; $\frac{PR}{RQ} = \frac{\lambda}{1}$ అవుతుంది.

అప్పుడు R బిందువు $\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda+1},\ \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda+1},\ \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda+1}\right);\ \lambda+1 \neq 0$

దీనిని బట్టి, ప్రతి λ విలువకు సంబంధించి PQ మీద ఒక బిందువు వుంటుందని, విపర్యయంగా PQ మీద ప్రతి బిందువు R కి సంబంధించి ఒక λ విలువ వుంటుందని తెలుస్తుంది.

λ ధనసంఖ్య అయితే, R బిందువు PQ రేఖాఖండం మీద వుంటుంది. λ ఋణసంఖ్య అయితే R బిందువు PQ రేఖా ఖండం మీద వుండదు.

ఈ రెండవ సందర్భములో R బిందువు PQ రేఖాఖండాన్ని బాహ్యంగా $-\lambda : 1$ నిష్పత్తిలో విభజించిందని అంటాము.

ఉపసిద్ధాంతము 1 :

PQ ని బాహ్యంగా $l : m$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l-m},\ \frac{ly_2 - my_1}{l-m},\ \frac{lz_2 - mz_1}{l-m}\right)$$

ఉపసిద్ధాంతము 2 :

PQ మధ్య బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

ఉదాహరణ 13.7: (2, −4, 3), (−4, 5, −6) బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని 2:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు తెల్పండి.

సాధన : A(2, −4, 3), B(−4, 5, −6) లు దత్త బిందువులు AB ని P(x, y, z) బిందువు అంతరంగా 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$$\therefore x = \frac{2(-4)+1.2}{2+1} = -2;\ y = \frac{2.5+1(-4)}{2+1} = 2$$

$$z = \frac{2(-6)+1.3}{2+1} = -3$$

$\therefore$ P బిందువు (−2, 2, −3).

ఉదాహరణ 13.8 : (−1, −3, 2), (1, −1, 2) బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని బాహ్యంగా 2:3 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువును కనుగొనుము.

సాధన : P(−1, −3, 2), Q(1, −1, 2) లు దత్త బిందువులు. R(x, y, z) బిందువు PQ ని బాహ్యంగా 2:3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

R(x, y, z) బిందువు PQ ని బాహ్యంగా 2:3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$$x = \frac{2.1-3(-1)}{2-3} = -5;\ y = \frac{2(-1)-3(-3)}{2-3} = -7$$

$$z = \frac{2.2-3.2}{2-3} = 2$$

$\therefore$ బిందువు (−5, −7, 2).

ఉదాహరణ 13.9 : (2, −3, 5), (7, 1, 3) బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని XY- తలము విభజించే నిష్పత్తి తెల్పండి.

సాధన : కావలసిన నిష్పత్తి $l : m$ అనుకుంటే,

విభజన బిందువు $\left(\frac{7l+2m}{l+m}, \frac{l-3m}{l+m}, \frac{3l+5m}{l+m}\right)$

ఈ బిందువు XY- తలము మీద వుంది.

కనుక దీని Z- నిరూపకము = 0

$$\text{i.e., } \frac{3l+5m}{l+m} = 0$$

$$\text{i.e., } 3l + 5m = 0$$

$$\text{i.e., } 3l = -5m$$

$$\therefore \frac{l}{m} = \frac{-5}{3}$$

దత్తబిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని XY- తలము బాహ్యంగా 5:3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తోంది.

అభ్యాసం 13.3

1. (2, −5, 3), (−3, 5, −2) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 1:4 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు తెలుపుము.

2. (2, −3, 1). (3, 4, −5) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని అంతరంగాను, బాహ్యంగాను 3:2 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువులు కనుగొనుము.

3. (2, 4, 5), (3, 5, −4) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని YZ−తలము విభజించే నిష్పత్తి కనుగొనుము.

4. (3, 5, −7), (−2, 1, 8) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని YZ−తలము 3:2 నిష్పత్తిలో $\left(0, \frac{13}{5}, 2\right)$ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందని చూపండి.

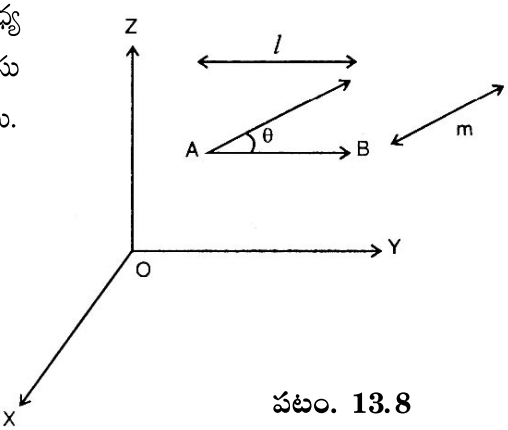
5. (−2, 4, 7), (3, −5, 8) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని నిరూపక తలాలు వరుసగా 2:3, 4:5 (అంతరంగా) 7:8 (బాహ్యంగా) ఖండిస్తాయని చూపుము.

6. $P(x_1, y_1, z_1)$; $Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని బాహ్యంగా 2:1 నిష్పత్తిలో ఖండించే R బిందువు కనుగొనుము. PR కి Q మధ్య బిందువేమో సరిచూడుము.

13.4 రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణము

ఒక తలములోని రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణము అనే అంశము గురించి మీకు తెలుసు ఈ అంశాన్ని కొద్ది మార్పుతో ఇక్కడ చూస్తాము.

అంతరాళంలో రెండు సరళరేఖలు తీసుకుందాము. అవి ఖండించుకునేవైనా, ఖండించుకోనివైనా సరే. అంతరాళంలో ఏదైనా బిందువు A తీసుకొని, A గుండా దత్త సరళరేఖలకు సమాంతరంగా రెండు సరళరేఖలు గీయండి. ఈ సరళరేఖల మధ్య కోణాన్ని దత్త సరళరేఖల మధ్యకోణమని నిర్వచిస్తాము.



పటం. 13.8

పక్కపటములో l, m సరళరేఖల మధ్యకోణము θ.

13.5 సరళరేఖ దిక్ - కొసైనులు

AB అనే సరళరేఖ X, Y, Z-అక్షాల ధనదిశలతో α, β, γ కోణాలు చేస్తే, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ లకు AB సరళరేఖ దిక్-కొసైనులని పేరు. వీటిని l, m, n లతో సూచిస్తాము.

అంటే, $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

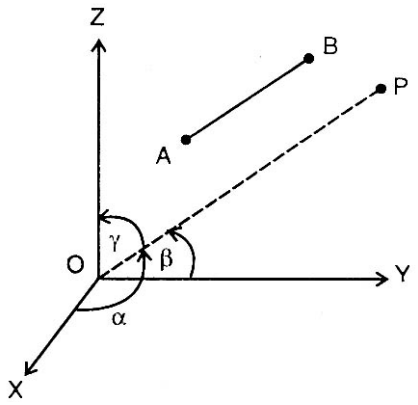
X- అక్షము తనతో 0^0, మిగిలిన Y, Z అక్షాలతో 90^0 చేస్తుంది.

$\therefore$ X - అక్షము దిక్-కొసైనులు, $\cos 0^0$, $\cos 90^0$, $\cos 90^0$

$= 1, 0, 0$

ఇట్లే Y-అక్షము దిక్-కొసైనులు 0, 1, 0

Z-అక్షము దిక్-కొసైనులు 0, 0, 1



పటం. 13.9

13.5.1 దిక్-కొసైనుల మధ్య సంబంధము

OP సరళ రేఖ దిక్-కొసైనులు $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ i.e., l, m, n అనుకొనుము.

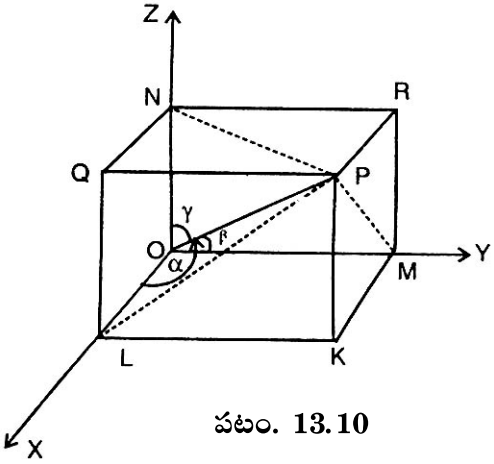
$\angle OLP = \angle OMP = \angle ONP = 90^0$

OLP త్రిభుజము నుంచి

$$l = \cos\alpha = \frac{OL}{OP}$$

ఇట్లే $$m = \cos\beta = \frac{OM}{OP}$$

$$n = \cos\gamma = \frac{ON}{OP}$$



పటం. 13.10

$\therefore$ $l . OP = OL$; $m . OP = OM$; $n . OP = ON$

వర్గము చేసి కలుపగా

$$OP^2(l^2 + m^2 + n^2) = OL^2 + OM^2 + ON^2$$

$$= OP^2$$

$\therefore\ l^2 + m^2 + n^2 = 1$

i.e., $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

ఇదే దిక్ - కొసైనుల మధ్య సంబంధము.

ఉపసిద్ధాంతము : a, b, c అనే మూడు సంఖ్యలు l, m, n లకు అనుపాతములో వుంటే a, b, c లకు దిక్ సంఖ్యలు అనిపేరు.

l, m, n లు దిక్-కొసైనులు గల సరళరేఖకు a, b, c లు దిక్ సంఖ్యలైతే a, b, c ల నుంచి l, m, n లు ఈ క్రింది విధముగా కనుగొంటాము.

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

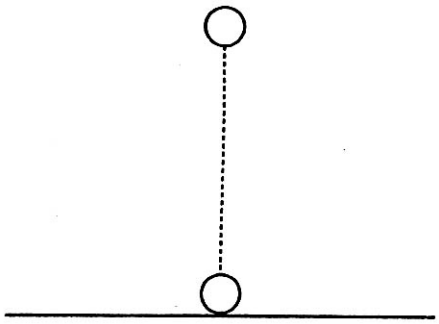
$$\therefore\ l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

అన్నింటికి ఒకే గుర్తు '+' గాని '-' గాని తీసుకుంటాము.

13.6 విక్షేపము

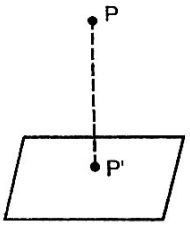
మనము ఒక చెట్టు నీడన నుంచున్నామనుకోండి. సూర్యుడు నడి నెత్తిమీదికి వచ్చినవేళ, అంటే మిట్ట మధ్యాహ్నమప్పుడు, నేల మీద పడిన చెట్టు నీడ దాని విక్షేపము. ఎందుకంటే సూర్యుని నుంచి నిట్టనిలువుగా వచ్చిన కిరణాలు చెట్టు యొక్క ప్రతిబింబాన్ని నీడరూపంలో నేల మీద ఏర్పరుస్తాయి గనుక.

జారవిడిచినప్పుడు, నేలను తాకి పైకి లేచే బంతిని చూడండి. అంతరాళంలో, ఒక బిందువు నుంచి నిలువుగా జారవిడచిన బంతి, నేలను ఏ బిందువు వద్ద తాకి పైకి లేస్తుందో ఆ బిందువు అంతరాళంలోని బిందువు యొక్క విక్షేపము

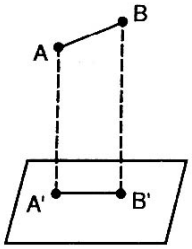


పటం. 13.11

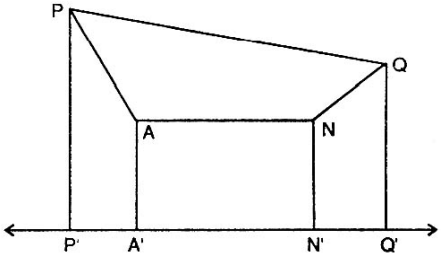
13.6.1 ఒక బిందువు, ఒక రేఖాఖండపు విక్షేపము



పటం. 13.12



పటం. 13.13



పటం. 13.14

ఒక బిందువు నుంచి తలానికి గీసిన లంబపాదానికి తలంమీద ఆ బిందువు యొక్క విక్షేపమని పేరు.

ఒక రేఖాఖండపు చివరి బిందువుల నుంచి తలానికి లంబాలు గీసి, ఆ లంబపాదాలను కలపగా ఏర్పడే రేఖాఖండానికి తలం మీద ఆ రేఖాఖండపు విక్షేపమని పేరు.

ఇట్లే ఒక సరళరేఖ మీద ఒక బిందువు విక్షేపము, ఒక సరళరేఖ విక్షేపము నిర్వచిస్తాము.

గమనిక : పటము 13.14 లో PQ రేఖాఖండాన్ని PA, AN, NQ అనే రేఖల సంయోగముగా భావిస్తాము. PA, AN, NQ లు PQ యొక్క విరిచిన ముక్కలంటారు. ఏదైనా రేఖమీద PQ యొక్క విక్షేపము = ఆ సరళరేఖ మీద PA, AN, NQ ల విక్షేపాల మొత్తానికి సమానము.

13.6.2 ఒక సరళరేఖ మీద రెండు బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండపు విక్షేపము

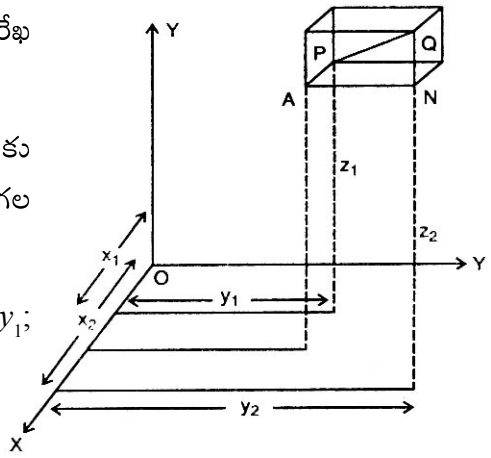
$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ లు దత్త బిందువులు

l, m, n లు దిక్-కొసైనులు గల ఒక సరళరేఖ మీద PQ విక్షేపము కనుక్కోవాలి.

P, Q ల గుండా నిరూపక తలాలకు సమాంతరంగా తలాలు గీసి, PQ కర్ణంగా గల దీర్ఘచతురస్రాకార పట్టకము ఏర్పరచండి.

ఇప్పుడు $PA = x_2 - x_1$; $AN = y_2 - y_1$; $NQ = z_2 - z_1$,

PA, AN, NQ లు వరుసగా X, Y, Zఅక్షాలకు సమాంతరాలు,



పటం. 13.15

l, m, n లు దిక్-కొసైనులు గల సరళరేఖమీద PA, AN, NQ ల విక్షేపాలు వరుసగా $l(x_2 - x_1), m(y_2 - y_1); n(z_2 - z_1)$

ఏ సరళరేఖమీదనైనా PQ విక్షేపము = ఆ సరళరేఖమీద PA, AN, NQ విక్షేపాల మొత్తము.

$\therefore$ కావలసిన విక్షేపము $= l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$.

13.7 రెండు బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువుల నుంచి X-అక్షానికి గీసిన లంబపాదాలు L, M లు అనుకుంటే

$OL = x_1$, $OM = x_2$

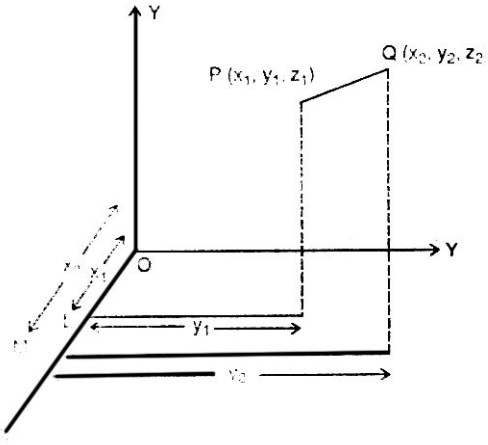
X- అక్షము మీద PQ విక్షేపము

$= LM = OM - OL$

$= x_2 - x_1$

PQ యొక్క దిక్-కొసైనులు l, m, n అనుకుంటే, X-అక్షము మీద PQ విక్షేపము $= l \cdot PQ$

$\therefore \; l \cdot PQ = x_2 - x_1$



పటం. 13.16

ఇట్లే Y, Z అక్షాలమీద PQ ను విక్షేపిస్తే

$m \cdot PQ = y_2 - y_1$

$n \cdot PQ = z_2 - z_1$ వస్తాయి.

$$\therefore \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ$$

$\therefore (x_1, y_1, z_1)$, (x_2, y_2, z_2) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-సంఖ్యలు $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

ఉదాహరణ 13.10 : నిరూపకక్షాలతో సమాన కోణాలు చేసే సరళరేఖ దిక్-కొసైన్‌లు తెల్పండి.

సాధన : ఇక్కడ $\alpha = \beta = \gamma$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore 3\cos^2\alpha = 1$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

కావలసిన దిక్ - కొసైనులు

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ఏదో ఒకే గుర్తు తీసుకోండి.

ఉదాహరణ 13.11 : ఏదైనా సరళరేఖ నిరూపకక్షాలతో 30^0, 45^0, 60^0 చేసే వీలుందేమో సరిచూడండి.

సాధన : అక్షాలతో α, β, γ కోణాలు చేసిందనుకుంటే

$\alpha = 30^0;\ \beta = 45^0;\ \gamma = 60^0$

$$\cos^2 30^0 + \cos^2 45^0 + \cos^2 60^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} > 1$$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ వుండాలి.

$\therefore$ పై కోణాలతో సరళరేఖ వుండదు.

ఉదాహరణ 13.12 : ఒక సరళరేఖ దిక్-సంఖ్యలు 6, 2, 3. దాని దిక్-కొసైనులు కనుక్కోండి.

సాధన : l, m, n లు దిక్-కొసైనులు అనుకుంటే

$$l = \pm\frac{6}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} = \pm\frac{6}{7};\ m = \pm\frac{2}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} = \pm\frac{2}{7};$$

$$n = \pm\frac{3}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} = \pm\frac{3}{7}$$

∴ కావలసిన దిక్-కొసైనులు

$\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ లేక $\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}$

ఉదాహరణ 13.13: (2, 1, −3) బిందువు యొక్క విక్షేపాలను (లంబపాదాలను) (ఎ) నిరూపక తలాల మీద (బి) నిరూపక అక్షాల మీద కనుక్కోండి.

సాధన : (ఎ) YZ, ZX, XY తలాల మీద (2, 1, −3) బిందువు విక్షేపాలు (0, 1, −3), (2, 0, −3), (2, 1, 0)

(బి) X, Y, Z అక్షాల మీద విక్షేపాలు (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, −3)

ఉదాహరణ 13.14: (2, 5, −4), (8, 2, −6) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు తెల్పండి.

సాధన : (2, 5, −4), (8, 2, −6) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు *l, m, n* అనుకొనుము.

దీని దిక్-సంఖ్యలు $8-2, 2-5, -6+4$

$= 6, -3, -2$

$\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2} = \pm 7$

∴ దిక్-కొసైనులు $\frac{6}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7}$ లేక $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$.

ఉదాహరణ 13.15: (3, 3, 5), (5, 4, 3) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండపు విక్షేపము (2, −1, 4), (0, 1, 5) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ మీద కనుగొనుము.

సాధన : (2, −1, 4), (0, 1, 5) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-సంఖ్యలు

$0-2, 1+1, 5-4$

$= -2, 2, 1$

$\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = 3$

∴ దిక్-కొసైనులు $\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

కావలసిన విక్షేపము = $\frac{-2}{3}(5-3)+\frac{2}{3}(4-3)+\frac{1}{3}(3-5) = \frac{-4}{3}$

విక్షేపము ఎప్పుడూ ధనసంఖ్యగా తీసుకోవాలి.

$\therefore$ కావలసిన విక్షేపము $\frac{4}{3}$.

అభ్యాసం 13.4

1. క్రింది దిక్-సంఖ్యలు గల సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు కనుగొనుము.
   (a) 3, −1, 2 (b) 1, 1, 1
2. (a) నిరూపకతలాల మీద (b) నిరూపక అక్షాలమీద (−3, 5, 6) బిందువు విక్షేపాలు తెలుపుము.
3. క్రింది బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు కనుగొనుము.
   (i) (5, −3, 8) (6, −1, 6) (ii) (4, 3, −5) (−2, 1, −8)
4. P(4, –2, 5), Q(2, 1, –3) బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండపు విక్షేపము 6, 2, 3 దిక్-సంఖ్యలు గల సరళరేఖ మీద కనుగొనుము.
5. (2, 1, 3), (1, 0, −4) బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండపు విక్షేపము (2, −1, 4) (0, 1, 5) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ మీద కనుగొనుము.

13.8 దత్త దిక్-కొసైనులు గల రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణము

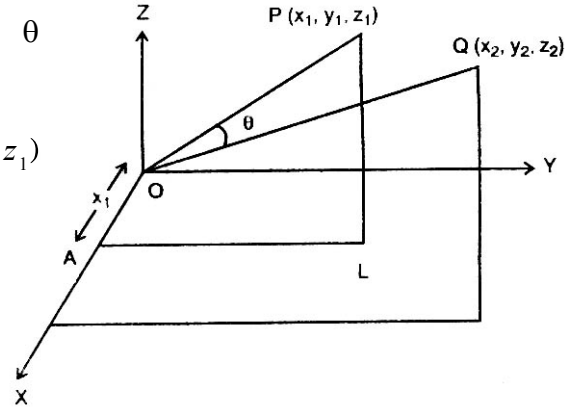
(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) దిక్-కొసైనులు గల రెండు సరళరేఖలకు సమాంతరంగా మూలబిందువు O గుండా గీసిన సరళరేఖలు OP, OQ లు అనుకొనుము.

OP, OQ ల మధ్యకోణము θ అనుకొనుము.

P బిందువు (x_1, y_1, z_1) అనుకొనుము.

XY- తలానికి PL - లంబము, X- అక్షానికి LA లంబము గీయుము.

OQ మీద OP విక్షేపము = OQ మీద OA, AL, LP ల విక్షేపాల మొత్తము



పటం. 13.17

i.e., $OP \cos\theta = l_2(x_1 - 0) + m_2(y_1 - 0) + n_2(z_1 - 0)$

$= l_2x_1 + m_2y_1 + n_2z_1$ ...(i)

కాని, x_1 = X-అక్షము మీద OP విక్షేపము

$= l_1 . OP$

ఇట్లే, $y_1 = m_1 . OP$; $z_1 = n_1 . OP$ ...(ii)

(i) , (ii) నుంచి

$OP \cos\theta = OP (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$

$\therefore \cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$ ...(iii)

ఉపసిద్ధాంతము 1 : సరళరేఖల దిక్-సంఖ్యలు (a_1, b_1, c_1) (a_2, b_2, c_2) అయితే వాటి మధ్యకోణము

$$\cos\theta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

లఘుకోణము, గురుకోణాన్ని బట్టి గుర్తు ఉంటుంది.

ఉపసిద్ధాంతము 2 : OP, OQ లు లంబంగా వుంటే $\theta = 90^0$

$\cos\theta = \cos 90^0 = 0$

$\therefore l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

ఉపసిద్ధాంతము 3 : OP, OQ లు సమాంతరాలైతే

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$\therefore$ OP || OQ, O ఉమ్మడి బిందువు, గనుక OP, OQ లు ఏకీభవిస్తాయి.

$\therefore \sin\theta = 0$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$

$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$

$$= (l_1m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - l_1n_2)^2$$

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow l_1m_2 - l_2m_1 = 0; m_1n_2 - m_2n_1 = 0;\ n_1l_2 - n_1l_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

రిమార్కులు

(a) (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) దిక్-కొసైనులు గల సరళరేఖల

(i) లంబానికి నియమము $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

(ii) సమాంతరానికి నియమము $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

(b) (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) దిక్ - సంఖ్యలు గల సరళరేఖలు లంబంగా వుండేందుకు నియమము

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

ఎందుకంటే $l_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$, $m_1 = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$, $n_1 = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$.

(c) (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) దిక్ - సంఖ్యలు గల సరళరేఖలు సమాంతరంగా వుండేందుకు నియమము

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

ఉదాహరణ 13.16: $(-1, 0, 1)$, $(0, -1, 1)$ దిక్ - సంఖ్యలు గల సరళరేఖల మధ్యకోణమెంత?

సాధన : సరళరేఖల మధ్యకోణము θ అనుకోండి.

$$\cos\theta = \pm\frac{(-1).0 + 0(-1) + 1.1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}.\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \pm\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 60^0$ లేక 120^0.

ఉదాహరణ 13.17: (5, −12, 13), (−3, 4, 5) దిక్ − సంఖ్యలు గల సరళరేఖల మధ్య లఘు కోణమెంత?

సాధన : సరళరేఖల మధ్యకోణము θ అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \pm\frac{5(-3)+(-12).4+(13).5}{\sqrt{5^2+(-12)^2+13^3}.\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}}$$

$$= \pm\frac{-15-48+65}{\sqrt{338}\ \sqrt{50}}$$

$$= \pm\frac{2}{13\sqrt{2}.5\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{65}$$

θ లఘుకోణమైతే, $\cos\theta = \frac{1}{65}$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{65}\right).$$

అభ్యాసం 13.5

1. (1, 1, 2), $(\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1, 4)$ దిక్-సంఖ్యలు గల సరళరేఖల మధ్యకోణమెంత ?
2. A(7, 6, 3), B(4, 10, 1), C(−2, 6, 2), D(1, 2, 4) బిందువులు దీర్ఘచతురస్రశీర్షాలని చూపుము.
3. (4, 5, 0), (2, 6, 2), (2, 3, −1) శీర్షాలు గల త్రిభుజకోణాలు గణించి అది సమద్విబాహు త్రిభుజమని చూపుము.
4. క్రింద ఇచ్చిన దిక్-కొసైనులు గల సరళరేఖలు లంబమో, సమాంతరమో చూడండి.

   (a) $\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}$

   (b) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{0}{5}; \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{0}{5}$.

కీలకపదాలు



- అంతరాళంలో O బిందువు గుండా గీసిన పరస్పర లంబ అక్షాల దృష్ట్యా, $P(x, y, z)$ బిందువు గుండా నిరూపక తలాలకు సమాంతరంగా గీసిన మూడు తలాలు అక్షాలను A, B, C ల వద్ద ఖండిస్తే,

  $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$

  విపర్యంగా, మూడు దత్తసంఖ్యలు x, y, z లకు అనుగుణంగా అంతరాళంలో (x, y, z) నిరూపకాలు గల బిందువు వ్యవస్థితము.

- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువుల మధ్య దూరము

  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

  మూలబిందువుల నుంచి P కి గల దూరము $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని $l : m$ నిష్పత్తిలో

  (a) అంతరంగా విభజించే బిందువు

  $$\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}, \frac{lz_2 + mz_1}{l + m} \right)$$

  (b) బాహ్యంగా విభజించే బిందువు

  $$\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}, \frac{lz_2 - mz_1}{l - m} \right)$$

  PQ మధ్య బిందువు

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

- l, m, n లు సరళరేఖ దిక్-కొసైనులయితే $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

- l, m, n లకు అనుపాతములో వుండే మూడు సంఖ్యలకు దిక్-సంఖ్యలు అనిపేరు.

- $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$, లకు అను పాతంలో వుంటాయి.
- l, m, n లు దిక్-కొసైనులు గల సరళరేఖ మీద, $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండపు విక్షేపము $l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$
- $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ$$

- $l_1, m_1, n_1;\ l_2, m_2, n_2$ లు దిక్-కొసైనులు గల సరళ రేఖల మధ్యకోణము

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

(a) సరళరేఖల లంబానికి నియమము

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

(b) సరళరేఖల సమాంతరానికి నియమము

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2$ లు దిక్-సంఖ్యలు గల సరళరేఖల మధ్యకోణము

$$\cos\theta = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- సరళరేఖలు లంబమైతే

$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

సమాంతరమైతే

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http ://www. mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. (0, 7, 10), (−1, 6, 6), (−4, 9, 6) బిందువులు సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరచునని చూపుము.
2. P(3, 2, −4), Q(5, 4, −6), R(9, 8, −10) బిందువులు సరేఖీయమని చూపి Q బిందువు PR ను ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో తెలుపుము.
3. A(3, 2, 0), B(5, 3, 2), C(−9, 6, −3) లు ఒక త్రిభుజ శీర్షాలు. $\angle BAC$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ AD, BC ని D వద్ద ఖండిస్తోంది. D బిందువు నిరూపకాలు కనుగొనుము. (**సూచన :** D బిందువు BC ని AB : AC నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.)
4. (7, −5, 4), (5, −3, 8) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు తెలుపుము.
5. నిరూపక అక్షాలతో సమాన కోణాలు చేసే సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు ఏవి? అట్టి సరళరేఖలెన్ని?
6. ఏదైనా సరళరేఖ నిరూపక అక్షాలతో 45^0, 60^0, 120^0 చేయుటకు వీలుందేమో చూడండి.
7. (0, 4, 1), (2, 3, −1), (4, 5, 0), (2, 6, 2) బిందువులు ఒక చతురస్ర శీర్షాలని చూపుము.
8. (4, 7, 8), (2, 3, 4), (−1, −2, 1), (1, 2, 5) బిందువులు ఒక సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలని చూపుము.
9. A(6, 3, 2), B(5, 1, 4), C(3, −4, 7), D(0, 2, 5) లు నాలుగు బిందువులు (i) AB కి CD మీద (ii) CD కి AB మీద విక్షేపాలు కనుక్కోండి.
10. సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క మూడు శీర్షాలు A(3, −4, 7), B(5, 3, −2), C(1, 2, −3) అయితే నాలుగవ శీర్షము D కనుగొనుము.

జవాబులు

అభ్యాసం 13.1

1. (a) OX'YZ (b) OXYZ' (c) OX'YZ'
   (d) OXY'Z (e) OXYZ'

అభ్యాసం 13.2

1. (a) 7 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{3}$

అభ్యాసం 13. 3

1. $(1, -3, 2)$
2. $\left(\frac{13}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-13}{5}\right)$; $(5,18,-17)$
3. $-2 : 3$
6. $(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1, 2z_2 - z_1)$

అభ్యాసం 13.4

1. (a) $\pm\frac{3}{\sqrt{14}}, \pm\frac{1}{\sqrt{14}}, \pm\frac{2}{\sqrt{14}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. (a) $(0, 5, 6), (-3, 0, 6), (-3, 5, 0)$
   (b) $(-3, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 6)$
3. (a) $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \mp\frac{2}{3}$ (b) $\pm\frac{6}{7}, \pm\frac{2}{7}, \pm\frac{3}{7}$
4. $\frac{30}{7}$ 5. $\frac{7}{3}$

అభ్యాసం 13. 5

1. $\frac{\pi}{3}$
4. (a) సమాంతరము (b) లంబము

సాధనా అభ్యాసం

1. $1 : 2$
3. $\left(\frac{38}{16}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$
4. $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$ లేక $\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$
5. $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4
6. వీలుంది
9. (i) $\frac{13}{7}$ (ii) $\frac{13}{3}$
10. $(-1, -5, 6)$

అధ్యాయం

14

తలము

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యపఠనము వలన మనము నేర్చుకొనే విషయాలు

- తలాన్ని గుర్తించుట.
- తలము సాధారణ సమీకరణపు నిర్ధారణ
- ఒక దత్త బిందువు గుండాపోయే ఏదైనా తలం సాధారణ సమీకరణము.
- మూడు బిందువుల గుండా తలము సమీకరణము.
- తలానికి అంతరఖండ, అభిలంబ రూపాలలో సమీకరణములు
- రెండు తలాల మధ్య కోణము.
- రెండు తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలం సమీకరణము
- మూడు చలరాశులలో రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము రెండు తలాలలను సూచిస్తుందని నిరూపించుట.

పూర్వాకాంక్షితాలు

- త్రిపరిమాణ జ్యామితి మౌలిక భావనలు
- సరళరేఖకు దిక్-కొసైనులు, దిక్-సంఖ్యలు

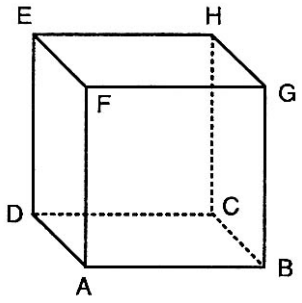
- ఒక సరళరేఖ మీద మరియొక రేఖాఖండపు విక్షేపము.
- అంతరాళంలో రెండు సరళరేఖలు లంబంగాను, సమాంతరంగాను ఉండేందుకు నియమాలు.

పరిచయం

మన ఇంటిలోని ఒక డాబా గదిని పరికించండి. దానికి నాలుగు గోడలు, నేల భాగము, పైకప్పు ఉన్నాయి. నేల, పైకప్పులు రెండూ, బాహ్యంగా విస్తరించిన సమాంతర తలాలు. నాలుగు గోడలలో ఎదురెదురుగా నున్నవి రెండేసి సమాంతర తలాలు. ఇట్లే టేబుల్ పై భాగము గది తలుపులు మున్నగునవి తలానికి ఉదాహరణలు.

తలము మీద రెండు బిందువులు తీసుకొని వాటిని ఒక సరళరేఖచే కలిపి పొడిగిద్దాము. ఇరువైపులా ఎంతదూరము పొడిగించినా ఆసరళ రేఖ మీద అన్ని బిందువులు అంటే ఆ సరళరేఖ మొత్తము ఆ తలము మీద ఉంటుంది. ఇది తలానికి మాత్రమే పరిమితమైన ధర్మము. అందువల్ల దీనిని తలానికి నిర్వచనముగా తీసుకొంటాము.

పటము 48.1లోనిది ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారపు పెట్టె. ఇది ఆరుముఖాలు, ఎనిమిది శీర్షాలు, పన్నెండు అంచెలు కలిగి ఉన్నది.



పటం 14.1

ఎదురెదురుగా నున్న జంట సమాంతర తలాలు

(i) ABCD; FGHE

(ii) AFED; BGHC

(iii) ABGF; DCHE

సమాంతర అంచులు

(i) AB, DC, EH, FG

(ii) AD, BC, GH, FE

(iii) AF, BG, CH, DE

పైన చెప్పబడిన మూఖాలన్నీ తలంలోని భాగాలే. అవి మూడు ఎదురెదురుగానున్న సమాంతర తలాల జంటలు.

ఈ పాఠంలో, మూడు బిందువుల గుండాపోయే తలము సమీకరణము, తలానికి అంతరఖండ, అభిలంబరూపాలు, x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము, రెండు తలాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తల సమీకరణము, అంతరాళంలో త్రిభుజ వైశాల్యము, నేర్చుకొందాము.

14.1 తలానికి సాధారణ సమీకరణము

x, y, z లలో ప్రథమ తరగతి సమీకరణము, అంటే

$$ax + by + cz + d = 0$$

ఎల్లప్పుడూ ఒక తలాన్ని సూచిస్తుంది.

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \ldots (1)$$

(1) చేత సూచించబడిన ఉపరితలం మీద $P(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$ రెండు బిందువులు తీసుకొందాం.

అప్పుడు,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad \ldots . (2)$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \quad \ldots . (3)$$

(3) ని m చేత, (2) ని n చేత గుణించి కలపగా

$$a(mx_2 + nx_1) + b(my_2 + ny_1) + c(mz_2 + nz_1) + d(m + n) = 0$$

దీనిని $(m + n)$ చేత భాగించగా

$$a\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right) + b\left(\frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) + c\left(\frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right) + d = 0 \quad \ldots . (4)$$

(4)ని, బట్టి, PQ రేఖాఖండాన్ని $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు, (1) సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తున్నాయని తెలుస్తుంది.

అంటే PQ రేఖమీద ఉన్న ప్రతి బిందువు (1) చేత సూచించిన ఉపరితలము మీద ఉంటుంది. తద్వారా PQ సరళరేఖ (1) మీద ఉంటుంది.

$\therefore$ (1) చేత సూచించిన ఉపరితలము ఒక తలము.

గుర్తుంచుకోండి : $ax + by + cz + d = 0$

సమీకరణానికి తలము యొక్క సాధారణ సమీకరణమని పేరు.

$\therefore$ తలము సాధారణ సమీకరణము

$$ax + by + cz + d = 0$$

గమనిక: $ax + by + cz + d = 0$

సమీకరణములో a, b, c, d అనే నాలుగు తెలియని స్థిర సంఖ్యలు ఉన్నాయి. దీనిని $d \neq 0$ అయినప్పుడు d చేత భాగించగా

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$$

$\frac{a}{d} = \mathrm{A}; \frac{b}{d} = \mathrm{B}; \frac{c}{d} = \mathrm{C}$ అని రాస్తే

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + 1 = 0$$

చూడటానికి నాలుగు స్థిర సంఖ్యలు ఉన్నట్లు కన్పించినా నిజంగా ఉన్నవి మూడు స్థిర సంఖ్యలే.

మూడు నియమాలు ఉంటే, ఈ మూడు స్థిర సంఖ్యలు తెలుస్తాయి. తద్వారా తలం సమీకరణము తెలుస్తుంది.

కనుక తలం సమీకరణము కనుక్కోవడానికి మూడు నియమాలు ఆవశ్యకాలు. అయితే సౌలభ్యము కొరకు, తలము సమీకరణము ఈ కింది రూపములోకి మార్చి, సమస్యలలో ఉపయోగిస్తాము.

14.2 ఒక బిందువు గుండా ఏదైనా తలం సాధారణ సమీకరణము

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \ldots. (1)$$

తలం సమీకరణమని చూశాం గదా!

ఈ తలం $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు గుండా పోతుంటే

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad \ldots. (2)$$

(2) ను (1) నుంచి తీసివేయగా

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ఈ రూపాన్ని సాధారణముగా ఒక బిందువు గుండా పోయే తలం సమీకరణంగా ఉపయోగిస్తాము.

గుర్తుంచుకోండి : (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలము సమీకరణము.

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad \ldots. (3)$$

ఈ సమీకరణము ప్రాథమికంగా తీసుకొని, దీనికి తరవాత ఇచ్చిన రెండు నియమాలు ఉపయోగించి a, b, c లు కనుగొంటాము.

రిమార్కు : (3) చేత సూచించిన తలాలు ఎన్నో చెప్పగలరా?

a, b, c లు ఏ వాస్తవ విలువలైనా తీసుకోవచ్చు. అందువల్ల ఒక దత్త బిందువు గుండా పోయే తలాలు అనంతసంఖ్యలో ఉంటాయి.

ఉదాహరణ 14.1 : $(1, -3, 2)$ బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన : కావలసిన సమీకరణము

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ఈ సూత్రాన్ని బట్టి సమీకరణము

$$a(x - 1) + b(y + 3) + c(z - 2) = 0$$

$$ax + by + cz + (-a + 3b - 2c) = 0$$

ఉదాహరణ 14.2 : $(3, 0, -2)$ బిందువు గుండా ఏదైనా తలము సమీకరణము రాయండి.

సాధన : కావలసిన సమీకరణము

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

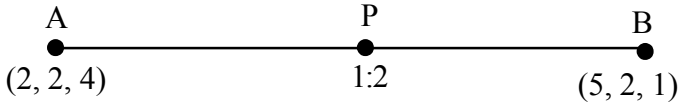
ఈ సూత్రాన్ని బట్టి

$$a(x - 3) + b(y - 0) + c(z + 2) = 0$$

$$ax + by + cz + (-3a + 2c) = 0$$

ఉదాహరణ 14.3 : $(2, 2, 4), (5, 2, 1)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని 1 : 2 నిష్పత్తిలో అంతరంగా ఖండించే బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలము సమీకరణము రాయండి.

సాధన :



పటం 14.2

$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ అనుకుంటే

$$P = \left(\frac{1\times5+2\times2}{1+2}, \frac{1\times2+2\times2}{1+2}, \frac{1\times1+2\times4}{1+2}\right)$$

$$= (3, 2, 3)$$

P గుండా పోయే ఏదైనా తలము సమీకరణము

$$a(x-3) + b(y-2) + c(z-3) = 0$$

$$ax + by + cz + (-3a - 2b - 3c) = 0$$

అభ్యాసం 14.1

1. మూలబిందువు గుండా ఏదైనా తలము సమీకరణము రాయండి.
2. (0, 0, −2) బిందువుగుండా ఏదైనా తలము సమీకరణం రాయండి.
3. (5, −7, 3) బిందువు గుండా ఏదైనా తలము సమీకరణము రాయండి.
4. (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని సమద్విఖండన చేసే ఏదైనా తలము సమీకరణము రాయండి.
5. (1, 2, −3), (4, 2, −3) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 1 : 2 నిష్పత్తిలో ఖండించే బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలము సమీకరణము రాయండి.

14.3 మూడు బిందువుల గుండా పోయే తలము సమీకరణము

తలం సాధారణ సమీకరణములో మూడు స్వతంత్ర స్థిరాంకాలు వున్నాయి. అందువల్ల సరేఖీయముకాని మూడు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక తలము పోతుంది.

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) అనే మూడు

సరేఖీయము కాని బిందువుల గుండాపోయే తలము సమీకరణము కనుక్కోండి.

(x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలము

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \qquad \text{.... (1)}$$

ఈ తలము $(x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ బిందువుల గుండాపోతే

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \qquad \text{.... (2)}$$

$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0 \qquad \text{.... (3)}$$

(1), (2), (3) ల నుంచి a, b, c లను లుప్తం చేసి

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{గా రాయవచ్చు.}$$

ఇదే కావలసిన తలము సమీకరణము.

14.4 అంతరఖండ రూపములో తలము సమీకరణము

ఏదైనా తలము నిరూపక అక్షాలను A, B, C బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే OA, OB, OC లకు తలము నిరూపక అక్షాల మీద చేసిన అంతరఖండాలని పేరు. వీటిని a, b, c లతో సూచిస్తారు.

తలము నిరూపక అక్షాల మీద చేసిన అంతరఖండాలు a, b, c లైతే తలము సమీకరణము తెల్పండి.

$$\text{OA} = a, \qquad \text{OB} = b, \qquad \text{OC} = c$$

$$\therefore \qquad \text{A} = (a, 0, 0), \quad \text{B} = (0, b, 0), \quad \text{C} = (0, 0, c)$$

మూడు బిందువుల గుండా పోయే తల సమీకరణం ఆధారంగా తలము సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

i.e., $(x - a)(bc - 0) - y(-ac - 0) + z(0 + ab) = 0$

i.e., $bcx + acy + abz = abc.$

abc చేత భాగించగా

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ఇదే తలం 'అంతర ఖండ' రూపము.

ఉదాహరణ 14.4 : (0, 2, 3), (2, 0, 3), (2, 3, 0) బిందువుల గుండా పోయే తలము సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన : మూడు బిందువుల గుండా పోయే తలము యొక్క సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కావలసిన తలము సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3 \\ 2-0 & 0-2 & 3-3 \\ 2-0 & 3-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0$$

i.e., $$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

i.e., $x(6 - 0) - (y - 2)(-6 - 0) + (z - 3)(2 + 4) = 0$

i.e., $6x + 6(y - 2) + 6(z - 3) = 0$

i.e., $6x + 6y + 6z - 30 = 0$

i.e., $x + y + z = 5.$

ఉదాహరణ 14.5 : (2, 2, 0), (2,0, 2), (4, 3, 1) బిందువుల గుండా పోయే తలం సమీకరణం $x = y + z$ అని చూపుము.

సాధన : (2, 2, 0) బిందువు గుండా ఏదైనా తలం.

$$a(x - 2) + b(y - 2) + c(z - 0) = 0 \quad \ldots (i)$$

ఇది (2, 0, 2) గుండా పోతుంటే

$$a(2 - 2) + b(0 - 2) + c(2 - 0) = 0$$

$$0.a - 2b + 2c = 0$$

$$0.a - b + c = 0 \quad \text{... (ii)}$$

(4,3, 1) గుండా (1) పోతుంటే

$$a(4-2) + b(3-2) + c(1-0) = 0$$

i.e., $2a + b + c = 0$ ... (iii)

(ii), (iii)లను సాధిస్తే

$$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{a}{-1-1} = \frac{b}{2-0} = \frac{c}{0+2}$$

$$\frac{a}{-1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$$

(i) నుంచి

$$-1(x-2) + 1(y-2) + 1.z = 0$$

i.e., $-x + 2 + y - 2 + z = 0$

i.e., $x = y + z.$

ఉదాహరణ 14.6 : $4x - 5y + 6z - 60 = 0$ తలం సమీకరణాన్ని అంతర ఖండ రూపంలోకి మార్చి, నిరూపకాక్షాల మీద దాని అంతర ఖండాలను తెలుపుము.

తలము $4x - 5y + 6z - 60 = 0$

i.e., $4x - 5y + 6z = 60$

60 చేత భాగించగా

$$\frac{x}{15} - \frac{y}{12} + \frac{z}{10} = 1$$

i.e., $\frac{x}{15} + \frac{y}{(-12)} + \frac{z}{10} = 1$

ఇదే అంతరఖండ రూపము

అక్షాల మీద అంతర ఖండాలు వరసగా 15, −12, 10.

అభ్యాసం 14. 2

1. ఈ కింది బిందువుల గుండా పోయే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.
   (a) (2, 2, –1), (3, 4, 2), (7, 0, 6)
   (b) (2, 3, –3), (1, 1, –2), (–1, 1, 4)
   (c) (2, 2, 2), (3, 1, 1), (6, –4, –6)
2. (3, 3, 1), (−3, 2, −1), (8, 6, 3) బిందువుల గుండా పోవు తలం సమీకరణం $4x + 2y - 13z = 5$ అని చూపుము.
3. నిరూపకాక్షాల మీద వరసగా 2, 3, 4 అంతరఖండాలు చేసే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.
4. $2x + 3y + 4z = 24$ తలము అక్షాల మీద ఏర్పరచే అంతర ఖండాలు తెలుపుము.
5. (−1, 4, −3), (3, 2, −5), (−3, 8, −5), (−3, 2, 1) బిందువులు సతలీయాలని చూపుము.

14.5 అభిలంబ రూపంలో తలం సమీకరణము

మూలబిందువు O నుండి ABC తలానికి ON లంబము

$$ON = p$$

ON యొక్క దిక్ కొసైనులు l, m, n అనుకోండి.

A, B, C తలంపై $P(x, y, z)$ సాధారణ బిందువు. P నుండి XY తలానికి PL లంబము గీయుము. L నుండి OX కు LM లంబము గీయుము.

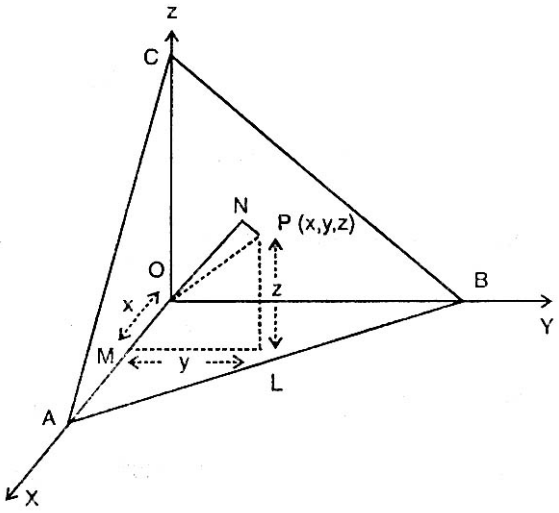
ఇప్పుడు $OM = x$, $ML = y$, $LP = z$

ON మీద OM, ML, LP ల విక్షేపాల మొత్తము, ON మీద OP విక్షేపానికి సమానము.

అంటే, $l(x - 0) + m(y - 0) + n(z - 0) = p$

i.e., $lx + my + nz = p$.

దీనికి తలము యొక్క 'అభిలంబరూప'మని పేరు.



పటం 14.3

నిరూపకక్షాల ధన దిశలతో ON చేసిన కోణాలు α, β, γ అనుకుంటే

$$l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$$

పై సమీకరణము

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \text{ అగును.}$$

ముఖ్య గమనిక : తలం సమీకరణం $lx + my + nz = p$, అనే అభిలంబ రూపంలో నున్నప్పుడు సమీకరణంలోని x, y, z ల గుణకాలు తలం లంబానికి దిక్-కొసైనులను సూచిస్తాయి.

సమీకరణంలోని కుడివైపున ఉన్న సంఖ్య p, మూలబిందువు నుంచి తలానికి గల లంబదూరాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉపసిద్ధాంతము 1 : తలం సాధారణ సమీకరణమైన

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ ను} \qquad \ldots. (1)$$

$lx + my + nz = p$ తో పోల్చి చూసినప్పుడు,

$ax + by + cz = -d$ తలం లంబానికి

దిక్-సంఖ్యలు a, b, c లని

దిక్-కొసైనులు.

$$\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ లని

తెలుస్తుంది.

p ధన సంఖ్యగా తీసుకోవడము ఆనవాయితి. d యొక్క ధన, రుణ గుర్తుని బట్టి దిక్-కొసైనుల గుర్తును నిర్ధారిస్తాము.

(1) ని $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ చేత భాగిస్తే

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot z=\frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

వస్తుంది.

దీనిని బట్టి మూలబిందువు నుంచి, $ax + by + cz + d = 0$ తలానికి లంబదూరము $\frac{|-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ అని తెలుస్తుంది.

ఉపసిద్ధాంతము 2 : తలం సాధారణ సమీకరణం అయిన $ax + by + cz + d = 0$ ని $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ చేత భాగిస్తే

అది అభిలంబరూపంలోకి మారుతుంది. d గుర్తునిబట్టి $\pm$ రూపము నిర్ధారిస్తాము.

ఉదాహరణ 14.7 : ఈ కింది తలాల సమీకరణాలను అభిలంబ రూపంలోకి రాయండి.

(i) $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, (ii) $2x + 6y - 3z + 5 = 0$

రెండు సందర్భాలలోను మూల బిందువు నుంచి తలానికి లంబదూరాన్ని తెల్పండి.

సాధన : (i) తలము $2x - 3y + 4z - 5 = 0$

i.e., $2x - 3y + 4z = 5$

$\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{29}$ చేత భాగిస్తే

$$\frac{2x}{\sqrt{29}}-\frac{3y}{\sqrt{29}}+\frac{4z}{\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$$

ఇదే అభిలంబరూపము.

మూలబిందువు నుంచి లంబదూరము $= \frac{5}{\sqrt{29}}$

(ii) తలం $2x + 6y - 3z + 5 = 0$

i.e., $2x + 6y - 3z = -5$

i.e., $-2x - 6y + 3z = 5$

$\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$ చేత భాగిస్తే

$$-\frac{2x}{7} - \frac{6y}{7} + \frac{3z}{7} = \frac{5}{7}$$

ఇదే అభిలంబ రూపము.

మూలబిందువు నుంచి లంబదూరము $= \frac{5}{7}$.

ఉదాహరణ 14.8 : మూలబిందువు నుంచి ఒక తలానికి లంబపాదము (4, −2, −5) అయితే, తలం సమీకరణము కనుగొనుము.

O నుంచి తలానికి లంబపాదము P అనుకుంటే P బిందువు (4, −2, −5)

P గుండా ఏదైనా తలము సమీకరణం

$$a(x - 4) + b(y + 2) + c(z + 5) = 0$$

OP కి దిక్ సంఖ్యలు

$$4 - 0, -2 - 0, -5 - 0$$

$$= 4, -2, -5$$

తలానికి OP లంబము

$\therefore \quad a = 4, \quad b = -2, c = -5$

$\therefore$ తలం సమీకరణము

$$4(x - 4) - 2(y + 2) - 5(z + 5) = 0$$

i.e., $4x - 16 - 2y - 4 - 5z - 25 = 0$

i.e., $4x - 2y - 5z = 45$

ఇదే కావలసిన తలం సమీకరణము.

అభ్యాసం 14.3

1. ఈ కింది తలాల సమీకరణాలను అభిలంబ రూపంలోకి మార్చుము.

   (i) $4x + 12y - 6z - 28 = 0$ (ii) $3y + 4z + 3 = 0$

2. మూలబిందువు నుంచి ఒక తలానికి లంబపాదము $(1, -3, 1)$ అయితే తలం సమీకరణము కనుగొనుము.

3. మూలబిందువు నుంచి ఒక తలానికి లంబపాదము $(1, -2, 1)$ అయితే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

4. నిరూపక అక్షాలను ఒక తలము A, B, C బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోంది. ABC త్రిభుజ కేంద్రాభాసము (a, b, c) అయితే తలం సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 3$ అని చూపుము.

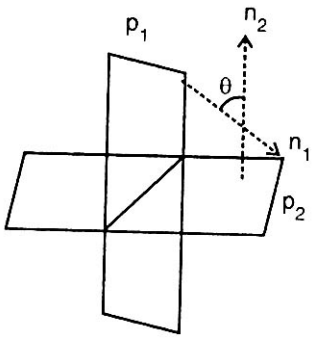
5. నిరూపక అక్షాలను ఒక తలం P, Q, R బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోంది. PQR త్రిభుజ కేంద్రాభాసము $(3, 4, -6)$ అయితే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

14.6 రెండు తలాల మధ్య కోణము

రెండు తలాలకు గీచిన లంబాల మధ్య కోణాన్ని తలాల మధ్య కోణంగా నిర్వచిస్తాం.

$$a_1x + b_1y + cz_1 + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

అనే రెండు తలాలు l అనే సరళరేఖ మీద ఖండించుకుంటున్నాయని, n_1, n_2 లు వాటికి అభిలంబ రేఖలని, వాటి మధ్య కోణము θ అని అనుకొందాము.



పటం 14.4

వాటి అభిలంబ రేఖల దిక్-కొసైనులు

$$\pm\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\ \pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\ \pm\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

మరియు $\pm\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\ \pm\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\ \pm\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$.

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$\cos\theta$ విలువ ధన గుర్తు కలిగి ఉండేట్లు తీసుకుంటాము.

ఉపసిద్ధాంతము 1 : రెండు తలాలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటే, $\theta = 90^o$, $\cos\theta = \cos 90^o = 0$

$$\therefore \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

రెండు తలాలు లంబంగా ఉండే నియమము

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

ఉపసిద్ధాంతము 2 : రెండు తలాలు సమాంతరాలైతే, వాటి అభిలంబరేఖలు సమాంతరాలు.

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\therefore \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

అనే తలాలు సమాంతరముగా ఉండే నియమము.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

దీనిని బట్టి రెండు సమాంతర తలాల సమీకరణాలు ఒక్క స్థిరసంఖ్యలో మాత్రమే తేడా కలిగి ఉంటాయి అని గుర్తించండి.

$\therefore ax + by + cz + d = 0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే ఏదైనా తలం సమీకరణం, $ax + by + cz + k = 0$. ఇచ్చట k ఒక స్థిర సంఖ్య.

ఉదాహరణ 14.9 : $3x + 2y - 6z + 7 = 0$

$$2x + 3y + 2z - 5 = 0$$

తలాల మధ్య కోణమెంత?

సాధన : ఇచ్చట $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = -6$

$$a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = 2$$

రెండు తలాల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \frac{3.2 + 2.3 + (-6).2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 0$$

$\theta = 90^o$

$\therefore$ రెండు తలాలు ఒకదానికొకటి లంబము.

ఉదాహరణ 14.10 : (3, 1, -2) బిందువు గుండా $x - 3y + 4z - 1 = 0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన : $x - 3y + 4z - 1 = 0$ తలానికి సమాంతర తలము

$$x - 3y + 4z + k = 0$$

ఇది (3, 1, -2) గుండా పోతే

$$3 - 3 - 8 + k = 0, \qquad \text{i.e., } k = 8$$

$\therefore$ కావలసిన తలము $x - 3y + 4z + 8 = 0$

ఉదాహరణ 14.11 : (-1, 2, 3), (2, -3, 4) బిందువుల గుండాపోతూ $3x\ y - z + 5 = 0$ తలానికి లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : (-1, 2, 3) గుండా ఏదైనా తలం

$$a(x + 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0 \qquad \text{.... (i)}$$

ఇది (2, -3, 4) గుండాపోతుంది.

$$a(2 + 1) + b(-3 - 2) + c(4 - 3) = 0$$

$$3a - 5b + c = 0 \quad \text{.... (ii)}$$

తలము (i) $3x + y - z + 5 = 0$ తలానికి లంబము

$$\therefore 3a + b - c = 0 \quad \text{.... (iii)}$$

(ii), (iii) ల నుండి అడ్డ గుణకార సూత్రమునుపయోగించి

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{18} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{9}$$

$\therefore$ కావలసిన తలము.

$$2(x + 1) + 3(y - 2) + 9(z - 3) = 0$$

i.e., $2x + 3y + 9z = 31$

ఉదాహరణ 14.12: (2, −1, 5) బిందువు గుండా పోతూ

$$x + 2y - z = 1,\ 3x - 4y + z = 5$$

తలాలకు లంబంగా ఉండే తలము సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : (2, −1, 5) బిందువు గుండా ఏదైనా తలము.

$$a(x - 2) + b(y + 1) + c(z - 5) = 0 \quad \text{.... (i)}$$

ఇది $x + 2y - z = 1,\ 3x - 4y + z = 5$

తలాలకు లంబము.

$$a.1 + b.2 + c(-1) = 0$$

$$a.3 + b(-4) + c.1 = 0$$

i.e., $a + 2b - c = 0 \quad \text{... (ii)}$

$$3a - 4b + c = 0 \quad \text{... (iii)}$$

(ii), (iii) నుంచి

$$\frac{a}{2-4} = \frac{b}{-3-1} = \frac{c}{-4-6}$$

$$\frac{a}{-2} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{-10}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5}$$

(i) లో a, b, c లను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$1(x - 2) + 2(y + 1) + 5(z - 5) = 0$$

i.e., $x + 2y + 5z - 25 = 0$

ఇదే కావలసిన తలం సమీకరణము.

అభ్యాసం 14.4

1. ఈ కింది తలాల మధ్య కోణము కనుగొనుము.
   (i) $2x - y + z = 6;\ x + y + 2z = 3$
   (ii) $3x - 2y + z + 17 = 0;\ 4x + 3y - 6z + 25 = 0$
2. ఈ కింది తలాలు లంబంగా వున్నాయని చూపుము.
   (i) $x + 2y + 2z = 0;\ 2x + y - 2z = 0$
   (ii) $3x + 4y - 5z = 9;\ 2x + 6y + 6z = 7$
3. $(2, 3, -1)$ బిందువు గుండాపోతూ $2x + 3y + 6z + 7 = 0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.
4. $(-1, 1, 1), (1, -1, 1)$ బిందువుల గుండా పోతూ $x + 2y + 2z = 5$ తలానికి లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణము కనుగొనుము.
5. మూలబిందువు గుండా పోతూ $x + 2y + 2z = 0;\ 2x + y - 2z = 0$ తలాలకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

14.7 తలం నుంచి బిందువు యొక్క దూరము

(x_1, y_1, z_1) బిందువు నుంచి

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,\ (p > 0)$$

తలానికి గల దూరము $|x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|$

సందర్భము 1 : మూలబిందువు, $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు

తలానికి ఒకే వైపున వున్నాయనుకొందాము.

P బిందువు గుండా, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ తలానికి సమాంతరముగా ఒక తలాన్ని గీద్దాము. దీని సమీకరణము. ... (i)

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p' \quad \text{... (ii)}$$

ఇచ్చట p' అనేది మూలబిందువు నుంచి తలము (ii) కు లంబ దూరము.

ఈ తలము (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోతుంది. గనుక

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p'$$

P బిందువు నుంచి తలము (i) కు గల లంబదూరము $p - p'$

$$= p - (x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma)$$

సందర్భము 2 : మూలబిందువు, P బిందువు, తలానికి ఇరువైపులా వుంటే p నుండి తలానికి లంబదూరము.

$$p' - p = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$$

$\therefore$ (x_1, y_1, z_1) బిందువు నుంచి $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ తలానికి లంబదూరము.

$$|x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|$$

గమనిక: $ax + by + cz + d = 0$

తలము సమీకరణము అభిలంబరూపంలో

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$\therefore$ (x_1, y_1, z_1) బిందువు నుండి $ax + by + cz + d = 0$ తలానికి లంబదూరము.

$$\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

14.8 రెండు తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలము సమీకరణము

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

అనేవి రెండు దత్తతలాలు.

ఈ రెండు తలాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలము మీద $P(x_1, y_1, z_1)$ ఒక బిందువు తీసుకుంటే, P నుండి ఈ తలాలకు గల లంబదూరాలు సాంఖ్యకంగా సమానము.

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$\therefore$ రెండు తలాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలము మీద ప్రతి బిందువు ఈ కింది సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది.

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad \ldots (i)$$

$\therefore$ (1) సమీకరణము, దత్త తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణము అవుతుంది.

ఉదాహరణ 14.13 : (1, 2, 3) బిందువు నుంచి $3x - 2y + 5z + 17 = 0$ తలానికి గల దూరమెంత?

సాధన : కావలసిన దూరము $= \frac{3.1 - 2.2 + 5.3 + 17}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \frac{31}{\sqrt{38}}$ యూనిట్లు

ఉదాహరణ 14.14: $x - 2y + 3z - 6 = 0$

$2x - 4y + 6z + 17 = 0$ తలాల మధ్య దూరమెంత?

సాధన : దత్తతలాలు $x - 2y + 3z - 6 = 0$ .... (i)

$2x - 4y + 6z + 17 = 0$ .... (ii)

ఇచ్చట $\frac{1}{2} = \frac{(-2)}{(-4)} = \frac{3}{6}$

i.e., $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ (i), (ii) తలాలు సమాంతరాలు

(i) తలం మీద ఏదైనా బిందువు (6, 0, 0)

రెండు తలాల మధ్య దూరము

= (6, 0, 0) నుంచి రెండవ తలానికి లంబ దూరము

$= \frac{2.6 - 4.0 + 6.0 + 17}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{29}{\sqrt{56}} = \frac{29}{2\sqrt{14}}$ యూనిట్లు

ఉదాహరణ 14.15 : $3x - 2y + 6z + 8 = 0$; $2x - y + 2z + 3 = 0$ తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన : కావలసిన తలాల సమీకరణాలు

$$\frac{3x - 2y + 6z + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \pm \frac{2x - y + 2z + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

i.e., $\frac{3x - 2y + 6z + 8}{7} = \pm \frac{2x - y + 2z + 3}{3}$

i.e., $9x - 6y + 18z + 24 = +(14x - 7y + 14z + 21)$

$9x - 6y + 18z + 24 = -(14x - 7y + 14z + 21)$

i.e., $5x - y - 4z = 3$; $23x - 13y + 32z + 45 = 0$

అభ్యాసం 14.5

1. ఈ కింద ఇచ్చిన బిందువు నుంచి తలానికి దూరము కనుక్కోండి.

   (i) బిందువు (2, −3, 1), తలము $5x - 2y + 3z + 11 = 0$.

   (ii) బిందువు (3, 4, −5), తలము $2x - 3y + 3z + 27 = 0$.

2. $3x + y - z - 7 = 0$. $6x + 2y - 2z + 11 = 0$. తలాల మధ్య దూరమెంత?

3. కింది తలాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

(i) $2x + y - 2z = 4$; $2x - 3y + 6z + 2 = 0$.

(ii) $3x - 4y + 12z = 26$; $x + 2y - 2z = 9$.

(iii) $x + 2y + 2z - 9 = 0$; $4x - 3y + 12z + 13 = 0$.

14.9 రెండు తలాలను సూచించే రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము

$$A = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{.... (i)}$$

$$B = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad \text{.... (ii)}$$

లు రెండు తలాల సమీకరణాలు.

ఇప్పుడు $AB = 0$

i.e., $(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ .... (iii)

సమీకరణాన్ని పరిశీలిద్దాము.

(i), (ii) సమీకరణాలను తృప్తిపరచే ప్రతిబిందువు నిరూపకాలు (iii) సమీకరణాన్ని కూడా తృప్తిపరుస్తాయి.

అంటే $A = 0$, $B = 0$ ల మీద ఉండే అన్ని బిందువులు $AB = 0$ చేత సూచించిన ఉపరితలము మీద కూడా వుంటాయి.

$AB = 0$ అనేది x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమీకరణము.

x, y, z లలోని రెండవ తరగతి సమీకరణము, రెండు ఏకఘాత కారణాంకాల లబ్ధముగా విభజింపబడితే, అది రెండు తలాలను సూచిస్తుంది. (ప్రతి కారణాంకము విడివిడిగా సున్నాకి సమానం చేస్తే అది ఒక తలాన్ని సూచిస్తుంది).

గమనిక : x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx = 0 \quad \text{... (A)}$$

దీనికి సంబంధించిన రెండు ముఖ్యమైన ఫలితాలు ఇస్తున్నాము

1. దీనిని రెండు ఏకఘాత కారణాంకాలుగా విభజించేందుకు నియమము.

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

2. దీని చేత సూచించిన రెండు తలాల మధ్య కోణము అయితే

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca}}{a+b+c}$$

ఈ ఫలితాల నిరూపణ ప్రస్తుత పాఠ్యాంశములో చేర్చుటలేదు.

ఉదాహరణ 14.16 : $8x^2 - 3y^2 - 10z^2 + 10xy + 17yz + 2xz = 0$

సమీకరణము మూలబిందువు గుండాపోయే రెండు తలాలను సూచిస్తుందని చూపి వాటి మధ్య కోణాన్ని తెల్పండి.

సాధన : ఇచ్చట $a = 8;\quad b = -3;\quad c = -10;\quad h = 5,\quad f = 17/2;\quad g = 1$

$$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= 8(-3)(-10) + 2.\frac{17}{2}.1.5 - 8\left(\frac{17}{2}\right)^2 + 3.1^2 + 10.5^2$$

$$= 240 + 85 - 578 + 3 + 250$$

$$= 578 - 578 = 0$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణము మూలబిందువు నుంచి పోయే రెండు తలాలను సూచిస్తుంది.

రెండు తలాల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab}}{a+b+c}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{289}{4}+1+25+24-30+80}}{-5}$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{689}{4}} = -\frac{\sqrt{689}}{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{689}}{5}\right)$$

అభ్యాసం 14.6

1. $2x^2 - 6y^2 - 12z^2 + 18yz + 2zx + xy = 0$ సమీకరణము రెండు తలాలను సూచిస్తుందని చూపి వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

2. $6x^2 + 4y^2 - 10z^2 + 3yz + 4zx - 11xy = 0$ సమీకరణము రెండు తలాలను సూచిస్తుందని చూపి వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

అనుబంధము

x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత బహుపదికి కారణాంకాలు కనుక్కొనేందుకు ప్రత్యేక పద్ధతి

$$8x^2 - 3y^2 - 10z^2 + 10xy + 17yz + 2xz \quad \text{.... (i)}$$

బహుపదిని తీసుకొందాము.

(i) లో $z = 0$ రాస్తే, మిగిలేది

$8x^2 - 3y^2 + 10xy$

$= 8x^2 + 10xy - 3y^2$

$= 8x^2 + 12xy - 2xy - 3y^2$

$= 4x(2x + 3y) - y(2x + 3y)$

$= (2x + 3y)(4x - y)$ ... (A)

(i) లో $y = 0$ రాస్తే, మిగిలేది

$8x^2 + 2xz - 10z^2$

$= 8x^2 + 10xz - 8xz - 10z^2$

$= 2x(4x + 5z) - 2z(4x + 5z)$

$= (4x + 5z)(2x - 2z)$ ... (B)

(i) లో $x = 0$ రాస్తే, మిగిలేది

$-3y^2 - 10z^2 + 17yz$

$= 3y^2 - 17yz + 10z^2$ (– గుర్తు వదిలినా నష్టం రాదు)

$= 3y^2 - 15yz - 2yz + 10z^2$

$= 3y(y - 5z) - 2z(y - 5z)$

$= (y - 5z)(3y - 2z)$ ... (C)

(A), (B), (C) లను క్రోడీకరిస్తే, (i) కి కారణాంకాలు

$(2x + 3y - 2z)$; $(4x - y + 5z)$

$\therefore \quad 8x^2 - 3y^2 - 10z^2 + 10xy + 17yz + 2xz$

$\equiv (4x - y + 5z)(2x + 3y - 2z)$

ఈ పద్ధతి అన్ని x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత బహుపదులకు వర్తిస్తుంది.

గమనిక :

(i) (A) లోని $(2x + 3y)$ కారణాంకము, (B) లోని $(2x - 2z)$ కారణాంకము చూడండి. రెంటికి $2x$ ఉమ్మడి పదము. అందువల్ల మొత్తము కారణాంకము $(2x + 3y - 2z)$. ఇట్లే (A) లోని $(4x - y)$, (B) లోని $(4x + 5z)$ ని బట్టి మొత్తము కారణాంకము $(4x - y + 5z)$.

(ii) $8x^2 - 3y^2 - 10z^2 + 10xy + 17yz + 2xz = 0$

సమీకరణము చేత సూచించిన రెండు తలాలు

$4x - y + 5z = 0$; $2x + 3y - 2z = 0$

(iii) పైన చెప్పిన పద్ధతిలో 34.6 పురోగతి పరిశీలనలోని ప్రశ్నలలో తలాల సమీకరణాలకు ప్రయత్నించండి.

14.10 త్రిభుజ వైశాల్యము

A వైశాల్యము గల త్రిభుజ తలానికి గీసిన అభిలంబరేఖ దిక్-కొసైనులు $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\beta$ అనుకోండి.

YOZ తలము మీద వైశాల్యము A విక్షేపము A_1 అనుకుంటే

$$A_1 = A\cos\alpha$$

ఇట్లే ZX తలం మీద A విక్షేపము A_2 అని

XY తలం మీద A విక్షేపము A_3 అని అనుకుంటే

$$A_2 = A\cos\beta$$

$$A_3 = A\cos\gamma$$

$$\therefore A_1^2+A_2^2+A_3^2 = A^2\cos^2\alpha + A^2\cos^2\beta + A^2\cos^2\gamma$$

$$= A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$= A^2$$

ఈ ఫలితాన్ని ఉపయోగించి త్రిభుజవైశాల్యం కనుగొందాము.

ABC త్రిభుజ శీర్షాలు $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ అని, త్రిభుజవైశాల్యం Δ అని, నిరూపక తలాల మీద వరసగా Δ యొక్క విక్షేపాలు $\Delta_{xy}, \Delta_{yz}, \Delta_{zx}$ అని అనుకొందాము.

xy తలం మీద A, B, C ల విక్షేపాలు

$$(x_1, y_1, 0),\ (x_2, y_2, 0),\ (x_3, y_3, 0)$$

$$\Delta_{xy} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(ద్విపరిమాణ నిరూపక జ్యామితిలోని $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యము గుర్తుకు తెచ్చుకోండి)

ఇట్లే $\Delta_{yz} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$; $\Delta_{zx} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\therefore \Delta^2 = \left(\Delta_{xy}\right)^2 + \left(\Delta_{yz}\right)^2 + \left(\Delta_{zx}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right]$$

ఇది అంతరాళంలోని త్రిభుజ వైశాల్య సూత్రము

ఉదాహరణ 14.17 : (1, 5, 2), (1, 2, −3), (3, 2, −1) బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన : $\Delta_{xy} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[1(2-2) - 5(1-3) + 1(2-6)]$

$= 3$

$\Delta_{yz} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[5(-3+1) - 2(2-2) + 1(-2+6)]$

$= -3$

$\Delta_{zx} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[2(1-3) - 1(-3+1) + 1(-9+1)]$

$= -5$

$\therefore \Delta^2 = \Delta^2{}_{xy} + \Delta^2{}_{yz} + \Delta^2{}_{zx}$

$= 9 + 9 + 25 = 43$

$\Delta = \sqrt{43}$ చ.యూనిట్లు

అభ్యాసం 14.7

1. కింది బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యము కనుక్కోండి.

   (i) $(2, -5, 3), (1, -7, 4), (2, -3, 5)$

   (ii) $(3, 0, 1), (4, -1, -1), (3, -2, -2)$

   (iii) $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$

కీలకపదాలు

- ఉపరితలము మీద గల రెండు బిందువులచే ఏర్పడు సరళరేఖ మొత్తము ఆ ఉపరితలము మీద ఉంటే, ఆ ఉపరితలానికి తలమని పేరు.
- తలానికి సాధారణ సమీకరణము $ax + by + cz + d = 0$
- (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలం సమీకరణం

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

- ఒక దత్త బిందువు గుండా అనంతమైన తలాలు పోతాయి.
- మూడు స్వతంత్ర స్థిరసంఖ్యలు గల తలము సమీకరణము

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

- $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ అనే మూడు బిందువుల గుండా పోయే తలము సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- అంతరఖండ రూపములో తలం సమీకరణము $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
- తలం అభిలంబరూపము $lx + my + nz = p$; l, m, n లు తలం లంబానికి దిక్-కొసైనులు. P అనేది మూలబిందువు నుంచి తలానికి లంబదూరము.

- $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ తలాల మధ్య కోణము

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

తలాలు లంబంగా వుండేందుకు నియమము

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

తలాలు సమాంతరముగా ఉండేందుకు నియమము

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- (x_1, y_1, z_1) బిందువు నుంచి $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ తలానికి గల లంబదూరము

$$|x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|$$

- $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణాలు

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- $ax^2 + by^2 + cz^2 + zhxy + 2fyz + 2gzx = 0$ అనే రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణం రెండు తలాలను సూచించేందుకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము.

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

- $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యము మీద వర్గము.

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right]$$

సహాయక వెబ్ సైట్లు

http : //www.wikipedia.org

http ://www. mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. $(-2, 5, 4)$ బిందువు గుండా ఏదైనా తలం సమీకరణము రాయుము.
2. $(2, 1, 4)$, $(2, 6, 4)$ బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా $2 : 3$ నిష్పత్తిలో విభజించే ఏదైనా తలం సమీకరణము రాయుము.
3. $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(-2, 2, -1)$ బిందువుల గుండాపోయే తలం సమీకరణము కనుగొనుము.
4. $(0, -1, -1)$, $(4, 5, 1)$, $(3, 9, 4)$, $(-4, 4, 4)$ బిందువులు సతలీయమని చూపి, ఆ బిందువులు గల తలము సమీకరణం కనుక్కోండి.
5. $(1, -2, -3)$ బిందువు నుండి తలానికి గీసిన లంబపాదము $(3, 2, -1)$ అయితే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.
6. $x + y + 2z = 9$; $2x - y + z = 15$ తలాల మధ్య కోణమెంత?
7. $3x - 5y + 8z - 2 = 0$; $12x - 20y + 32z + 9 = 0$ తలాలు సమాంతరాలని చూపుము.
8. $3x - 2y + kz - 1 = 0$; $x + ky + 5z + 2 = 0$ తలాలు లంబాలైతే k విలువ ఎంత?
9. $(3, 2, -5)$ బిందువు నుండి $2x - 3y - 5z = 7$ తలానికి గల దూరమెంత?
10. $2x - y + 2z + 3 = 0$; $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
11. $6x^2 - 12y^2 + 4z^2 + xy + 13yz - 14xz = 0$

    సమీకరణము మూల బిందువు గుండా పోయే రెండు తలాలను సూచిస్తుందని చూపి, వాటి మధ్య కోణము ఆ తలాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
12. $(1, 2, 1)$, $(3, 4, -2)$, $(4, 2, -1)$ బిందువులు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజవైశాల్యమెంత?

జవాబులు

అభ్యాసం 14.1

1. $ax + by + cz = 0$
2. $ax + by + c(z + 2) = 0$
3. $a(x - 5) + b(y + 7) + c(z - 3) = 0$
4. $a\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + c\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0$
5. $a(x - 2) + b(y - 2) + c(z + 3) = 0$

అభ్యాసం 14.2

1. (a) $5x + 2y - 3z - 17 = 0$; (b) $3x - y + z = 0$

   (c) $x + 2y - z = 4$

3. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$
4. అంతర ఖండాలు 12, 8, 6

అభ్యాసం 14.3

1. (i) $\frac{4x}{14} + \frac{12y}{14} - \frac{6z}{14} = 2$ (ii) $-\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z = \frac{3}{5}$
2. $x - 3y + z - 11 = 0$
3. $x - 2y + z - 6 = 0$
5. $4x + 3y - 2z = 36$

అభ్యాసం 14.4

1. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$
3. $2x + 3y + 6z = 7$
4. $2x + 2y - 3z + 3 = 0$
5. $2x - 2y + z = 0$

అభ్యాసం 14.5

1. (i) $\frac{30}{\sqrt{38}}$ యూనిట్లు (ii) $\frac{6}{\sqrt{22}}$ యూనిట్లు

2, $\frac{25}{2\sqrt{11}}$ యూనిట్లు

3. (i) $10x - y + 2z - 11 = 0$; $4x + 8y - 16z - 17 = 0$
   (ii) $4x + 38y - 62z - 39 = 0$; $22x + 14y + 10z - 195 = 0$
   (iii) $25x + 17y + 62z - 78 = 0$; $x + 35y - 10z - 156 = 0$

అభ్యాసం 14.6

1. $\cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$ 3. $\frac{\pi}{2}$

అభ్యాసం 14.7

1. (i) $\sqrt{11}$ యూనిట్లు (ii) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ చ.యూనిట్లు
   (iii) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ చ.యూనిట్లు

సాధనా అభ్యాసం

1. $a(x + 2) + b(y - 5) + c(z - 4) = 0$ 2. $a(x - 2) + b(y - 3) + c(z - 4) = 0$
3. $2x + 3y - 3z - 5 = 0$ 4. $5x - 7y + 11z + 4 = 0$
5. $x + 2y + z = 6$ 6. $\frac{\pi}{3}$
8. $k = -1$ 9. $\frac{18}{\sqrt{38}}$
10. $5x - y - 4z - 3 = 0$; $23x - 13y + 32z + 45 = 0$
11. $3x - 4y - z = 0$; $2x + 3y - 4z = 0$; $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{26}.\sqrt{29}}\right)$
12. $\frac{1}{2}\sqrt{77}$ చ. యూనిట్లు.

అధ్యాయం

15

సదిశలు

అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠమును చదివిన తర్వాత మీరు గ్రహించే విషయాలు

- దిశ యొక్క ప్రాముఖ్యత
- అదిశ మరియు సదిశల నిర్వచనము
- అదిశ మరియు సదిశల మధ్య భేదాలు
- సదిశలను దిశా రేఖా ఖండాలుగా సూచించడం
- సదిశల పరిమాణము మరియు దిశ కనుగొనడము.
- వివిధ రకాల సదిశల విభజన – శూన్యసదిశలు మరియు యూనిట్ సదిశ (ప్రమాన సదిశ)
- రెండు సదిశల సమానత్వ నిర్వచనము
- ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ నిర్వచనము
- సంకలన మరియు వ్యవకలన సదిశలు
- అదిశతో సదిశ గుణనము
- సదిశల యొక్క వివిద ప్రక్రియల యొక్క విశేషాలు మరియు ఉపయోగాలు
- త్రిపరిమాణ ఆవరణ గురించి తెలుసుకొనుట

- సదిశను రెండు లేదా మూడు లంబాక్షాలతో తీర్మానించుట
- విభజన సూత్రమును కనుగొంట మరియు ఉపయోగించుట
- రెండు సదిశల బిందు లబ్దం మరియు వజ్రలబ్దం

పూర్వాకాంక్షితాలు

- నిరూపక జ్యామితి మరియు తలంకు సంబంధించిన జ్ఞానం
- త్రికోణమితికి సంబంధించిన జ్ఞానం.

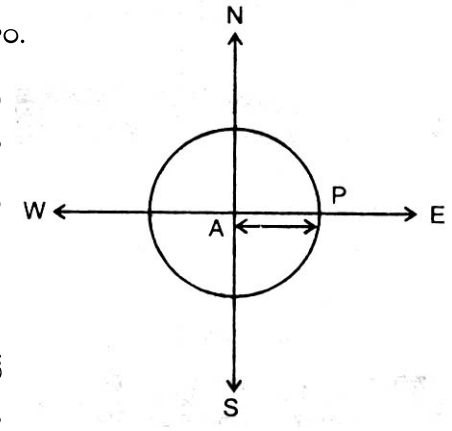
పరిచయం

దైనందిన జీవితములో మనకు గది ఉష్ణోగ్రత ఎంత? పడవ నది ప్రవాహాన్ని ఎలా దాటగలిగి ఒడ్డును చేరగలుగుతుంది? వంటి ఎన్నో ప్రశ్నలు ఎదురవుతాయి. మొదటి ప్రశ్నకు ఒక సరిపడే సమాధానం 29^0C, ఇది ఒక విలువ లేదా ఒక కొలతను తెలిపే ఒక వాస్తవ సంఖ్య. ఇట్లాంటి పరిమాణాలను అదిశలు అంటారు. అయితే రెండో ప్రశ్నకు, పడవ వేగం (పరిమాణం), నది ప్రవాహ వేగంతో పాటు నావికుడు ఎంత కోణంలో పడవ నడిపి (దిశ), నది ఒడ్డుకు చేరగలిగాడు (దీనినే వేగం అంటాం) సమాధానం అవుతుంది. ఇట్లాంటి పరిమాణాలను సదిశలు అంటారు. భౌతికశాస్త్రం, గణితశాస్త్రం, ఇంజనీరింగ్ శాస్త్రలలో మనకు పొడవు, ద్రవ్యరాశి, ఘనపరిమాణం, ఉష్ణోగ్రత, సాంద్రత, వైశాల్యం, పని, నిరోధం వంటి అదిశా పరిమాణాలు.

స్థానభ్రంశము, వేగం, త్వరణం, బలం, బరువు, ద్రవ్యవేగం వంటి సదిశ రాశులు ఇలా రెండు రకాలైన పరిమాణాలు తారసపడతాయి.

దీనికి సంబంధించిన అంశాలను పరిశీలిద్దాం.

మరొక ఉదాహరణగా కదిలే బంతిని తీసుకొందాము. బంతి మార్పు (స్థితి) ఏ సమయంలో ఏ విధంగా ఉంటుందని తెలుసుకోవడం కొరకు మూల్యాంశాలు తెలియాలి.



పటం 15.1

బంతి మొదలు Aఅనే బిందువు వద్ద ఉంది . బంతి 5 సెమీ/సె వేగంతో సరళరేఖలో ప్రయానిస్తుంటే 3 సెకనుల తర్వాత బంతి స్థితి దిశ లేకుండా కనుగొనగలమా? కనుగొనలేము కాని బంతి A నుంచి 15c.m దూరం ప్రయాణించిందని

నిర్ధారించగలము. మరియు A కేంద్రముగా 15c.m వ్యాసార్ధముతో వృత్తం మీది ఏదేని బిందువుకు చేరుతుంది. అయినా బంతి Aనుండి తూర్పు దిక్కుగా 5c.m/sec వేగంతో కదిలితే 3 సెకనుల తర్వాత బంతి A కు తూర్పు దిక్కు 15 c.m దూరంలో యున్న P అనే బిందువుకు చేరుతుంది.

3 సెకనుల తర్వాత బంతి గమనము (స్థానభ్రంశము) తెలియాలి అంటే బంతివేగం (5c.m/sec) మరియు బంతి దిశ (A కు తూర్పుగా) తెలియాలి.

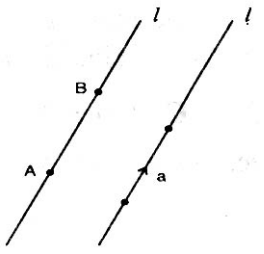
ఈ పాఠంలో పరిమాణం మాత్రమే కలిగిన రాశులను అధిశలు అంటాము. అలాగే దిశ, పరిమాణం కలిగిన రాశులను సదిశలు అంటాము. సదిశలను దిశారేఖాఖండాలుగా మరియు వాటి రాశులను దిక్కులను కనుగొనుటకు సూచిస్తాము. వివిధ రకాల సదిశలు మరియు వాటి వివిధ ప్రక్రియ విశేషాలు తెలుసుకుంటాము. ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ మూల బిందువు యొక్క ప్రతిక్షేపనగా తెలుస్తుంది. సదిశ యొక్క విభేదనా భాగాలు రెండు లేక మూడు కొలతలలో ఒక దానికొకటి లంబంగా ఉన్న ప్రమాణ సదిశలు కనుగొంటాము. మనము (విభాగ సూత్రం) కనుగొని సమస్యలకు అన్వయిస్తాము. మనము రెండు సదిశల యొక్క గుణనాన్ని మరియు అదిశ, సదిశల యొక్క గుణనాన్ని నిర్వచిస్తాము.

15.1 అదిశలు మరియు సదిశలు

కేవలం పరిమాణం గల రాశులను అదిశలు అంటాం. వాటిని వాస్తవ సంఖ్యలతో సూచిస్తాం. అవి కాలము, ఘనపరిమాణం పొడవు, వడి, ఉష్ణోగ్రత మొదలగు వాటిని అదిశలు అంటాం. పరిమాణం, దిశ గల రాశులను సదిశలు అంటాం. అవి వేగం దూరం త్వరణం, బలం, కోణీయ ద్రవ్యవేగం మొదలగు వాటిని సదిశలు అంటాం.

వాస్తవ సంఖ్య క్రమత్రికంగా సదిశలు :

l ని ఒక తలంలో లేదా త్రిపరిమాణ అంతరాళంలో ఏదైనా సరళరేఖ అనుకొందాం. ఈ సరళరేఖకు బాణం గుర్తుల ద్వారా రెండు దిశలను సమకూర్చగలం. ఈ రెండు దిశలలో ఒక దానిని సమన్వయించి నిర్ణయించిన సరళరేఖను దిశారేఖ అంటాం.

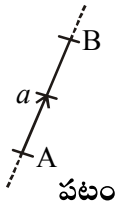


పటం 15.2

15.2 సదిశను దిశా రేఖాఖండంగా సూచించడం

అంతరాళంలో A, B లు రెండు విభిన్న బిందువులైతే, AB చే సూచితమయ్యే క్రమయుగ్మం (A, B) ని, A తొలి బిందువు, B చివరి బిందువుగా గల ఒక దిశా రేఖాఖండం (directed line segment) అంటాం.

$|AB| = a$ గా సూచితమయ్యే AB యొక్క పరిమాణం, AB పొడవు అవుతుంది.



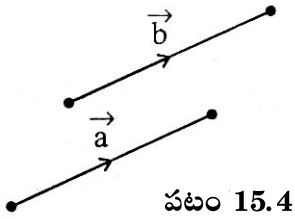
పటం 15.3

ఒక నిర్ణీత పరిమాణం, దిశతో కూడిన రేఖాఖండాన్ని ఒక సదిశ అంటాం.

15.3 సదిశల వర్గీకరణ

15.3.1 శూన్య సదిశ (Null Vector)

సున్న పరిమాణం గల సదిశను శూన్య సదిశ లేదా సూన్నా సదిశ అంటాము. దీనికి నిర్దిష్టమైన దిశలేదు. $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ లు శూన్య సదిశలు. శూన్య సదిశను 'O' తో సూచిస్తాము.



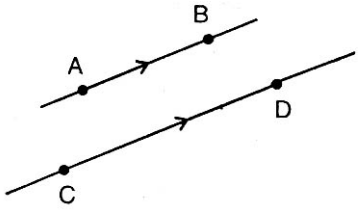
పటం 15.4

15.3.2 సమాన సదిశలు

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనే రెండు సదిశలు ఒకే పరిమాణం, ఒకే దిశ కలిగి ఉంటే వానిని సమాన సదిశలు అంటాం. పటం 46.4 లో చూపినట్లు $\vec{a} = \vec{b}$

15.3.3 ఏకదిశా సదిశలు

దిశ ఒకటే అయిన సదిశలను ఏక దిశా లేదా సరూప సదిశలు అంటాము. పటం 46.5 లో $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{CD}$ లు ఏకదిశా సదిశలు మరియు వాటి పరిమానము సమానము కాదు.

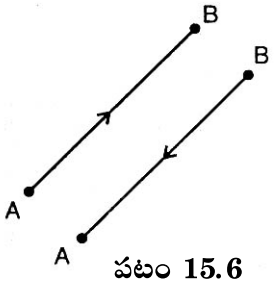


పటం 15.5

15.3.4 ఒక సదిశకు రుణ సదిశ

$\overrightarrow{AB}$ సదిశకు $\overrightarrow{BA}$ సదిశ రుణ సదిశ పై సదిశలు పొడవులో సమానంగా ఉంటూ దిశ వ్యతిరేకంగా ఉంటుంది.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

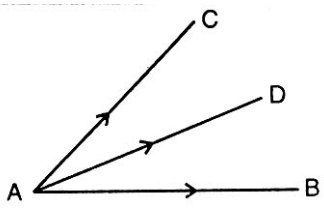


పటం 15.6

15.3.5 సహారంభ సదిశలు

రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ సదిశలకు ఒకే తొలి బిందువు వున్నట్టయితే అలాంటి సదిశలను 'సహారంభ సదిశలు' అంటాం.

ప్రక్క పటంలో, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ లు సహారంభ సదిశలు A తో ఒకే తొలిబిందువు.

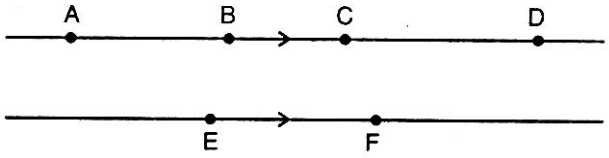


పటం 15.7

15.3.6 సరేఖీయ సదిశలు

ఒకే దిశలో లేదా వ్యతిరేక దిశలో ఉన్న సదిశలను మరియు సమాంతర సదిశలను సరేఖీయ సదిశలు అంటాము.

ప్రక్క పటంలో $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ మరియు $\overrightarrow{EF}$ లు సరేఖీయ సదిశలు. $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{DC}$ లు కూడా సరేఖీయలు.



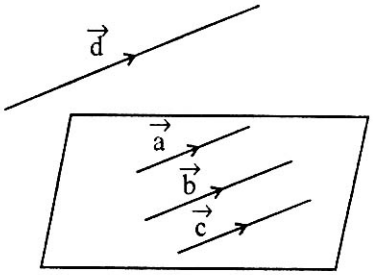
పటం 15.8

15.3.7 సరేఖీయ సదిశలు

పరిమాణంతోను, దిశతోను ప్రమేయం లేకుండా, రెండు లేదా ఎక్కువ సదిశలు ఒక సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే, ఆ సదిశలను సరేఖీయ సదిశలంటాం. అట్లాంటి సదిశలు, ఒకే (అదే) ఆధారాన్ని లేదా సమాంతర ఆధారాన్ని కలిగి ఉంటాయి.

15.3.8 సతలీయ సదిశలు

సదిశల ఆధార రేఖలు ఒకే తలంలో ఉన్నా లేదా ఒకే తలానికి సమాంతరంగా ఉన్నా, ఆ సదిశలను సతలీయ సదిశలు అంటారు. సతలీయాలు కాని సదిశలను అతలీయ సదిశలు అంటారు.



పటం 15.9

ఉదాహరణ 46.1 ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి సదిశలు మరియు ఏవి. అ దిశలు సరియైన కారణం ఇవ్వండి.

(a) ద్రవ్యరాశి (b) బరువు (c) స్థానభ్రంశం

(d) ఉష్ణోగ్రత (e) బలం (f) సాంద్రత

(g) పొడవు (h) వేగం (i) వైశాల్యం

(j) స్థానభ్రంశం

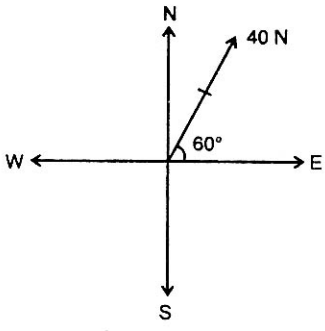
సమస్య పరిష్కారం : (a), (d), మరియు (f) లు అదిశలు వీటికి పరిమాణం మాత్రమే కలదు. (b), (c) మరియు (e) లు సదిశలు వీటికి పరిమాణం మరియు దిశ కూడా కలదు.

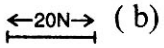
ఉదాహరణ 15.2 జ్యామితీయంగా సూచించుట

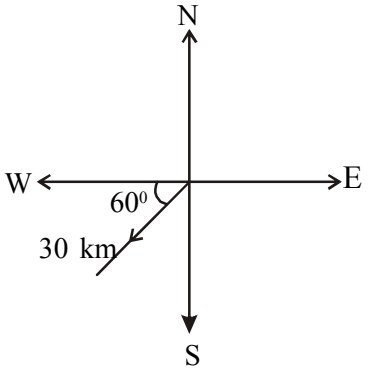
(a) తూర్పు నుంచి ఉత్తర దిశకు 60^0 కోణంతో 40N ల బలం.

(b) పడమర నుండి దక్షిణ దిశకు 60^0 కోణంతో 30 కి.మీ. స్థానభ్రంశం గల సదిశ

సాధన :







పటం 15.10 **పటం 15.11**

అభ్యాసం 15.1

(1) ఈ క్రింది వాటిలో ఏది ఆదిశ రాశి?

(1) స్థాన భ్రంశము (2) వేగము (3) బలం (4) పొడవు

(2) ఈ క్రింది వాటిలో ఏది సదిశ రాశి?

(1) ద్రవ్యరాశి (2) బలం (3) కాలం (4) ఉష్ణోగ్రత

(3) తూర్పు దిశలో 5 c.m స్థాన భ్రంశ సదిశ కలదు. దీనికి ఋణ సదిశ యొక్క పటమును గీయుము.

(4) సజాతీయ సదిశలు మరియు సమానమైన సదిశల మధ్య గల బేదమును గుర్తించుము

(5) ఈ క్రింది వాటిని పటము ద్వారా సూచించండి

(a) ఉత్తరం నుంచి పశ్చిమ దిశకు 60^0 కోణంతో 60 న్యూటన్ ల బలం

(b) తూర్పు నుండి దక్షిణదిశకు 45^0 కోణంతో 70 కి.మీ. స్థానభ్రంశం గల సదిశ.

15.4 సదిశల సంకలనము

మనము ఒక సారి ప్రాథమిక పరిక్రియలను గుర్తుచేసుకుందాము అవి సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము మరియు భాగహారము. సదిశల యొక్క పరిక్రియలు అదిశలకు వేరే విధంగా యుంటాయి.

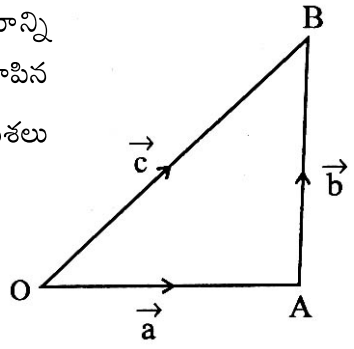
నిజానికి రెండు సదిశల యొక్క ఫలిత భావన ఈ ఉదాహరణలుగా రెండు వేగాలు, రెండు బలాలు మొదలగునని తీసుకొన వచ్చు.

15.4.1 సదిశల సంకలన త్రిభుజ నియమము

రెండు సదిశల సంకలనము త్రిభుజ నియమాన్ని ఉపయోగించి ఈ క్రింది విధంగా సాధించవచ్చు పటంలో చూపిన విధంగా $\overrightarrow{OB}$ అనే ఫలిత సదిశ, $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{AB}$ సదిశలు సంకలనాన్ని తెలియజేస్తుంది.

అంటే $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \vec{c}$



పటం 15.12

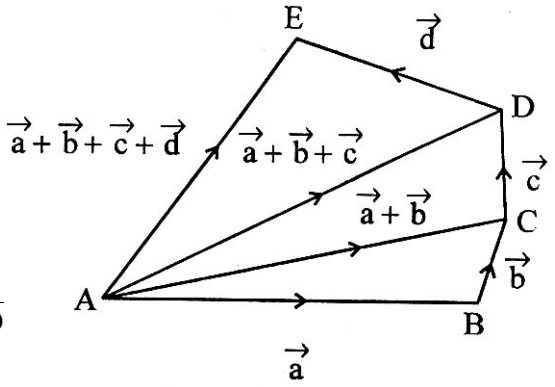
$\vec{a}$ సదిశ యొక్క చివరి బిందువు $\vec{b}$ సదిశ యొక్క మొదటి బిందువు అవుతుంది.

$\vec{a} + \vec{b}$ యొక్క తొలిబిందువు $\vec{a}$ యొక్క తొలిబిందువు మరియు $\vec{b}$ యొక్క తుది బిందువే $\vec{a} + \vec{b}$ యొక్క తుది బిందువు.

15.4.2 రెండు కంటె ఎక్కువ సదిశల సంకలనము

ప్రక్క పటంలో రెండు కంటె ఎక్కువ సదిశల సంకలనమును సూచించకము జరిగింది.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AE}$$



పటం 15.13

సదిశ $\overrightarrow{AE}$ ని ఇచ్చిన సదిశల సంకలనము లేదా సలిత సదిశ అంటాము.

15.4.3 సదిశల సంకలనములో సమాంతర చతుర్భుజన్యాయము

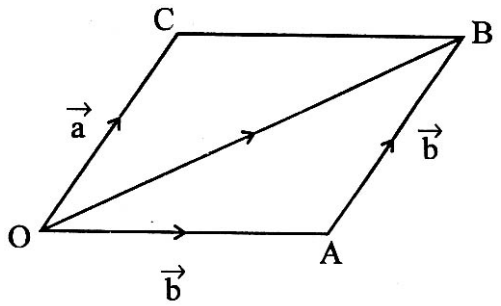
రెండు సదిశల పరిమాణము మరియు దిశలు సమానంగా ఉంటె ఆ రెండు సదిశలు సమాంతరము అని మనకు తెలుసు

ప్రక్క పటంలో OABC సమాంతర చతుర్భుజమును చూడండి.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$$



పటం 15.14

ఇది సదిశల సంకలనములో సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయము.

ఇది సమాంతర చతుర్భుజం రెండు ఆసన్న భుజాలు రెండు సదిశలను సూచిస్తే ఆ రెండు సదిశల మొత్తం ఆసన్న భుజాల ఖండన బిందువు గుండా పోయే కర్ణాన్ని సూచిస్తుంది.

15.4.4 సదిశకు రుణ సదిశ

ఏదైన సదిశ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ కు $\vec{a}$ యొక్క రుణ సదిశను $\overrightarrow{AO}$ తో సూచిస్తాము. $\overrightarrow{AO}$ యొక్క రుణ సదిశను $\overrightarrow{OA}$ అంటాము. అందువలన $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{AO}\right| = \vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AO}$. పై నిర్వచనము నుంచి ఏ సదిశకైన $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$.

15.4.5 రెండు సదిశల మధ్య వ్యవకలనము

ఇచ్చిన రెండు సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల మధ్య వ్యవకలనము $\vec{a} - \vec{b}$ ని $\vec{a}$ మరియు రుణ సదిశ $\vec{b}$ ల మొత్తము

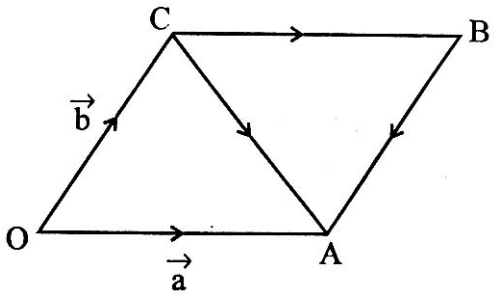
అంటె $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

ప్రక్క పటంలో $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

OABC సమాంతర చతుర్భుజంలో,

$\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{BA} = -\vec{b}$

$\therefore \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$



పటం 15.15

15.4.6 సదిశల సంకలన ధర్మాలు

- ఏవైనా రెండు సదిశలు a, b లకు

  $a + b = b + a$ (వినిమయ న్యాయం)

- ఏవైనా మూడు సదిశలు a, b, c లకు

  $(a + b) + c = a + (b + c)$ (సహచర్య ధర్మం)

- ఏదైనా సదిశ "a" కి $a + \vec{0} = 0 + a = a$

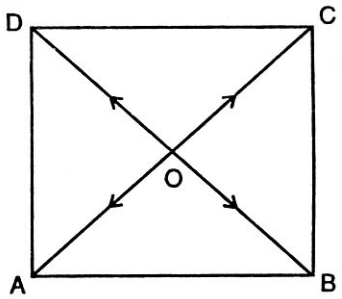
  ఇక్కడ శూన్యసదిశ 0ని, సదిశా సంకలనానికి సంకలన తత్సమం అంటారు.

ఉదాహరణ 15.3 ఎప్పుడు రెండు శూన్యేతర సదిశల మొత్తము శూన్యము అవుతుంది?

సాధన : రెండు శూన్యేతర సదిశల మొత్తము సున్న కావాలంటె వాటి పరిమాణము సమానము అయి దిశ వ్యతిరేకంగా ఉండాలి.

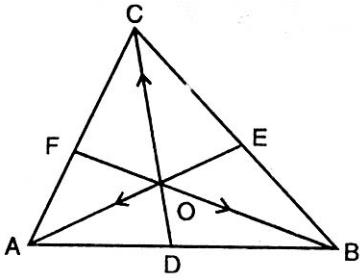
అభ్యాసం 15.2

1. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణముల ఖండన బిందువు O. ఈ క్రింది సదిశల సంకలనము తెలుపండి. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ మరియు $\overrightarrow{OD}$.



పటం 15.16

2. ABC త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖల ఖండన బిందువు O. అయితే $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ మరియు $\overrightarrow{OC}$ సదిశల సంకలనమును తెలుపండి.



పటం 15.17

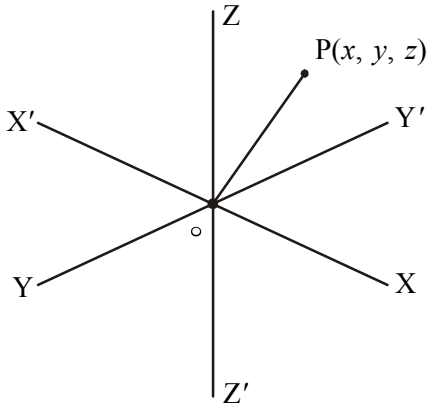
15.5 స్థాన సదిశ

పటంలో చూపినట్లుగా, ఒక త్రిపరిమాణ లంబ నిరూపక వ్యవస్థ OX, OY, OZ ని మూలబిందువు O(0, 0, 0) పరంగా అంతరాళంలో (x, y, z) నిరూపకాలను కలిగిన ఒక బిందువు Pని తీసుకుందాం.

అప్పుడు OP లను వరుసగా తొలి, తుది బిందువులుగా కలిగిన సదిశ OP ని P యొక్క స్థాన సదిశ అంటాం. దీనిని r తో సూచిస్తాం.

OP పరిమాణం

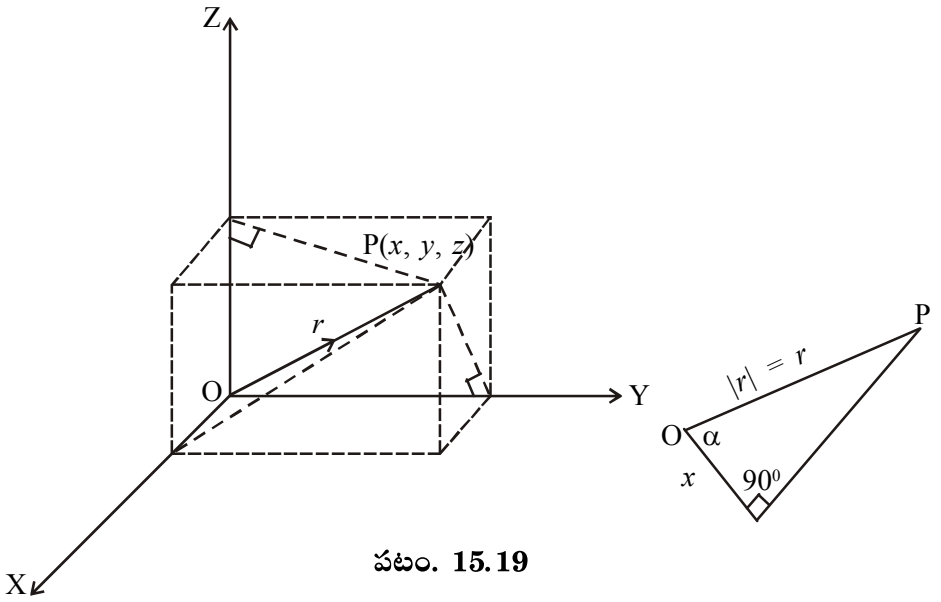
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



పటం 15.18

దిక్‌కొసైన్లు, దిక్ నిష్పత్తులు:

$P(x, y, z)$ బిందువు స్థాన సదిశ $OP = r$ తీసుకొందాం. X, Y, Z అక్షాల ధనాత్మక దిశ (అపసవ్యదిశ) తో సదిశ r చేసే కోణాలను వరసగా α, β, γ అనుకొందాం. అప్పుడు $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ లను సదిశ r యొక్క దిక్ కొసైన్లు అంటాం. ఈ దిక్ కొసైన్లును వరసగా l, m, n లతో సూచించడం ఆచారం.



పటం. 15.19

P నుంచి X, Y, Z అక్షాలకు లంబాలను గీసి, వాటి లంబపాదాలను వరసగా A, B, C లనుకొందాం (పటం 15.19)ని చూడండి.

పటం 15.19 నుంచి లంబకోణ త్రిభుజమని గమనిస్తాం. కాబట్టి $\cos\alpha = \dfrac{x}{|r|=r}$

ఇదేవిధంగా లంబకోణ త్రిభుజాల నుంచి $\cos\beta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{r}$ అని రాయవచ్చు. దీనితో బిందువు యొక్క నిరూపకాలు x, y, z లను (lr, mr, nr) గా కూడా వ్యక్తపరచవచ్చు. దిక్‌కొసైన్లు l, m, n లకు అనుపాతంలో ఉండే lr, mr, nr సంఖ్యలను, సదిశ r యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు అంటాం. వీటిని సాధారణంగా a, b, c లతో వరసగా సూచిస్తాం.

ఇక్కడ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$= l^2r^2 + m^2r^2 + n^2r^2$

$= r^2(l^2 + m^2 + n^2)$ అనొ మనం గమనిస్తాం.

దీనితో $l^2 + m^2 + n^2 = 1$అని, సాధారణంగా $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$ అని తెలుసుకొంటాం.

15.6 అదిశతో సదిశ గుణకారం

శూన్యేతర సదిశ $\vec{a}$ ను అదిశ $x\,(\neq 0)$ తో గుణించగా వచ్చే సదిశ పరిమాణము $|x|\,|\vec{a}|$ కు సమానము. దాని యొక్క దిశ $\vec{a}$ దిశలో ఉండును. $(x > 0$ అయినపుడు). దాని దిశ $\vec{a}$ దిశకు వ్యతిరేక దిశలో ఉండును. $(x < 0$ అయినపుడు).

ఈ ఫలిత సదిశను $x\,\vec{a}$ గా సూచించవచ్చు. $\vec{a}$ సదిశను O తో గుణించగా శూన్యసదిశ $\vec{O}$ వచ్చును. పై నిర్వచనాన్ని బట్టి శూన్య అదిశను శూన్యము కాని అదిశతో గుణించగా మరియు శూన్య అదిశను శూన్యేతర సదిశతో గుణించినను ఫలితముగా శూన్య సదిశ వచ్చును.

అంటే $x\,.\,\vec{O} = \vec{O}$ మరియు $O\,.\,\vec{a} = \vec{O}$.

సదిశా గుణన నియమాలు $\vec{a}$, $\vec{b}$ లు సదిశలు మరియు x, y లు అదిశలు అయితే

(i) $x(y\vec{a}) = (xy)\,\vec{a}$

(ii) $x\,\vec{a} + y\,\vec{a} = (x+y)\,\vec{a}$

(iii) $x\,\vec{a} + x\,\vec{b} = x\,(\vec{a} + \vec{b})$

(iv) $O\,\vec{a} + x\,\vec{O} = \vec{O}$

(v) $(-x)\,\vec{a} = x(-\vec{a}) = -(x\vec{a})$

రెండు సరేఖీయ సదిశలు ఒకే దిశను కలిగి ఉండి వేరు వేరు పరిమాణాలు కలిగి ఉన్నప్పుడు వాటి మధ్య సంబందము ఈ క్రింది విధంగా ఉండును.

$\vec{a} = x\,\vec{b}$ (x అదిశ రాశి)

సిద్ధాంతము 15.1 $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సరేఖీయ సదిశలు కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్తనియమము (necessay amd sifficient) $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{O}$ ఇక్కడ x మరియు y లు అదిశలు

ఆవశ్యక నియమము:

నిరూపణ: - $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సరేఖీయాలు అనుకొందాము.

l అనేది అదిశరాశి అయితే $\vec{a} = l\vec{b}$

అంటే $\vec{a} + (-l)\vec{b} = \vec{O}$

$\therefore$ పై సమీకరణంలో $x = 1$ మరియు $y = -l$ అయితే

$x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{O}$ అవుతుంది.

ఇక్కడ 1 అనేది శూన్యేతర అదిశ రాశి.

పర్యాప్త నియమము :

దత్తాంశము నుండి $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{O}$ మరియు $x \neq 0$ మరియు $y \neq 0$

మనము $y \neq 0$ అనుకొందాము.

$$\therefore\ y = \vec{b} = -\,\mathrm{X}\,\vec{a} \Rightarrow \vec{b} = -\frac{x}{y}\,\vec{a}$$

అంటే $\vec{b}$ మరియు $\vec{a}$ లు సరేఖీయాలు.

ఉప సిద్ధాంతము: $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సరేఖీయాలు కాని సదిశలు అయిన $x = 0$ మరియు $y = 0$ అయినపుడు మాత్రమే $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{O}$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 15.5 $\vec{a}$ అనే శూన్యేతర సదిశను 'x' యొక్క ఏ విలువతో గుణించినపుడు ఈ క్రింది యూనిట్ సదిశలు వస్తాయి.

(i) $\hat{a}$ (ii) $-\hat{a}$

సాధన (i) $x\,\vec{a} = \hat{a}$ అంటే $\mathrm{X}\,|\vec{a}|\,\hat{a} = \hat{a}$

$$\Rightarrow\ x = \frac{1}{|\hat{a}|}$$

(ii) $x\,\vec{a} = -\hat{a}$ అంటే $x\,|\vec{a}|\,\hat{a} = -\hat{a}$

$$\Rightarrow\ x = -\frac{1}{|\hat{a}|}$$

ఉదాహరణ 15.6 $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సరేఖీయాలు. కాని సదిశలు అయితే $\vec{c} = (x-2)\,\vec{a} + \vec{b}$ మరియు $\vec{d} = (2x+1)\,\vec{a} - \vec{b}$ అయ్యేటట్లుగా x విలువను కనుగొనుము.

సాధన ఎప్పుడైతే $\vec{b}$ యొక్క గుణకము O అయినచో సదిశ $\vec{c}$ శూన్యేతరము అవుతుంది.

$\therefore\ \vec{d} = y\vec{c}$ అగునట్లు ఒక y అనే ఒక సంఖ్య వ్యవస్థితము అవుతుంది.

అనగా $(2x+1)\,\vec{a} - \vec{b} = y(x-2)\,\vec{a} + y\vec{b}$

$\therefore\quad (yx - 2y - 2x - 1)\,\vec{a} + (y+1)\,\vec{b} = 0.$

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సరేఖీయాలు కావు కాబట్టి $yx - 2y - 2x - 1 = 0$ మరియు $y + 1) = 0$

పై సమీకరణాల నుండి $y = -1$ మరియు $x = \frac{1}{3}$ అందువల్ల $\vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$ మరియు $\vec{d} = \frac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$ $\vec{c}$ మరియు $\vec{d}$ లు వ్యతిరేక సదిశలు అని మరియు అవి సరేఖీయాలు అని తెలుపుచున్నది.

ఉదాహరణ 15.7 A మరియు B అనే రెండు బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $2\vec{a} + 3\vec{b}$ మరియు $3\vec{a} + \vec{b}$. అయితే $\overrightarrow{AB}$ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన. మూల బిందువు 'O' దృష్ట్యా A, B ల స్థాన సదిశలు $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$

అప్పుడు $\overrightarrow{AB}$ = యొక్క స్థాన సదిశ - A యొక్క స్థాన సదిశ

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (3\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= (3-2)\vec{a} + (1-3)\vec{b} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

ఉదాహరణ 15.8 P, Q, R ల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a} - 2\vec{b}$ $2\vec{a} + 3\vec{b}$ మరియు $-7\vec{b}$ అయితే బిందువులు సరేఖీయాలు అని చూపండి.

సాధన. $\overrightarrow{PQ}$ = ఆ యొక్క స్థాన సదిశ - P యొక్క స్థాన సదిశ

$$= (2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= \vec{a} + 5\vec{b} \qquad \ldots(i)$$

మరియు $\overrightarrow{QR}$ = R యొక్క స్థాన సదిశ - Q యొక్క స్థాన సదిశ

$$= -7\vec{b} - (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= -7\vec{b} - 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$= -2\vec{a} - 10\vec{b}$$

$$= -2[\vec{a} + 5\vec{b}] \qquad \ldots(ii)$$

(i), (ii) ల నుండి

$\overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{QR}$

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{QR}$

$\overrightarrow{PQ}$ మరియు $\overrightarrow{QR}$ లు సరేఖీయాలు

$\therefore$ P, Q, R లు సరేఖీయాలు.

అభ్యాసం 15.3

(1) మూల బిందువు దృష్ట్యా A మరియు B అనే బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అయితే $\overrightarrow{AB}$ సదిశను కనుక్కోండి.

(2) ఈ క్రింది వాటిని వాఖ్యానించండి.
(i) $3\vec{a}$ (ii) $-5\ \vec{b}$

(3) A, B, C, మరియు D బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $4\vec{a}\ 3\vec{b}$ మరియు $\vec{a}+2\vec{b}$ అయితే $\overrightarrow{DB}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ సదిశలను కనుక్కోండి.

(4) ఒక సదిశ $\vec{n}$ అదిశ y ల లబ్దం యొక్క పరిమాణము కనుక్కోండి?

(5) ఒక సదిశ మరియు అదిశ ల లబ్దం సదిశయా లేదా ఆదిశయా తెలియచేయండి.

(6) $\vec{p}$ మరియు $\vec{q}$ రెండు సదిశల సరేఖీయతకు నియమము తెలపండి.

(7) $5\vec{a}+6\vec{b}, 7\vec{a}-8\vec{b}$ మరియు $3\vec{a}+20\vec{b}$ అనే స్థాన సదిశలు సరేఖీయాలు అని చూయించండి.

15.7 సదిశల యొక్క సతలీయత

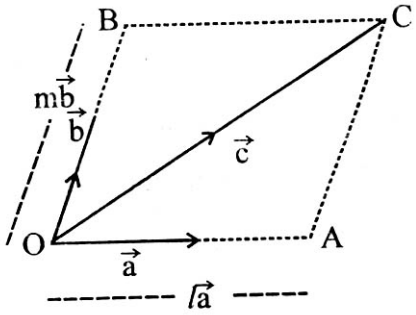
ఇచ్చిన $\vec{a}$ మరియ $\vec{b}$ అను రెండు అసరేఖీయ సదిశలను ఒక సమతలముపై ఉంచగలము. అక్కడ (సమతలంలో) ఆసదిశలు ఖండించుకుంటాయి. $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ అనే ఆ సదిశల ఉమ్మడి బిందువు 'O'. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనే తలంపై $\vec{c}$ అనే మూడవ సదిశ కు కూడ O తొలిబిందువు. c ని $\overrightarrow{OC}$ కి చివరి బిందువుగా తీసుకొంటాము.

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సమాంతర చతుర్భుజానికి ప్రక్క సదిశలుగా $\overrightarrow{OC}$ ని కర్ణముగా తీసుకొని సమాంతర చతుర్భుజాన్ని పూర్తి చేయండి.

$\therefore \quad \vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$

అందువల్ల $\vec{c}$ అనే సదిశ $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనే తలంలో ఉండి $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల రేఖీయ సంయోగాన్ని తెలియజేస్తుంది.

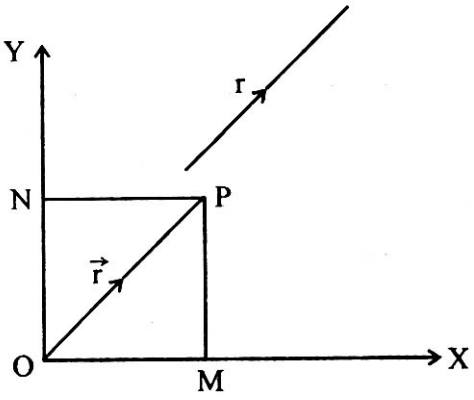
$\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$.



పటం 15.20

15.8 ఒక సదిశను రెండు పరస్పర లంబాక్షాల దిశలలో అంశలుగా విభజించుట

OX, OY లంబ అక్షాల దిశలలో $\hat{i}, \hat{j}$ లు రెండు పరస్పర లంబ యూనిట్ సదిశలు $\hat{i}, \hat{j}$ లు ఉన్నతలంలో $\vec{r}$ ఏదైన సదిశ తీసుకొంటే $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. $\vec{r}$ సదిశ తొలిబిందువు O అని తీసుకొని $OM = x,\ ON = y$ అనుకొంటె x, y అక్షాల దిశలలో $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ లు $\vec{r}$ యొక్క అంశ సదిశలు ఈ సందర్భంలో $\overrightarrow{OM}$ మరియు $\overrightarrow{ON}$ లకు $\vec{r}$ యొక్క అంశ సదిశలు అని పేరు.



పటం 15.21

15.9 ఏదైన సదిశను మూడు పరస్పర లంబ దిశలలో అంశలుగా విభజించుట

ఒక తలంలోని సదిశను రెండు పరస్పర లంబ దిశలలో అంశాల క్రింద విభజించుట అనేది పైన చూశాము. దీని విస్తరనే అంతరాళంలోని సదిశను మూడు పరస్పర లంబ సదిశలలో విభజించుట

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ లు మూడు పరస్పర లంబదిశలలోని యూనిట్ సదిశలు. అంతరాళంలోని ప్రతి సదిశ $\vec{r}$ ను ఏకైక పద్ధతిలో $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ల రేఖీయ సంయోగంగా చూపబడుతుంది. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ కర్ణంగా దీర్ఘచతురస్రాకార పట్టకాన్ని నిర్మిస్తే $\vec{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అవుతుంది. $x\hat{i}, y\hat{j}$ మరియు $z\hat{k}$ లకు మూడు పరస్పర లంబ దిశలలో $\vec{r}$ యొక్క అంశ సదిశలు అని x, y, z లకు అంశాలని పేర్లు.

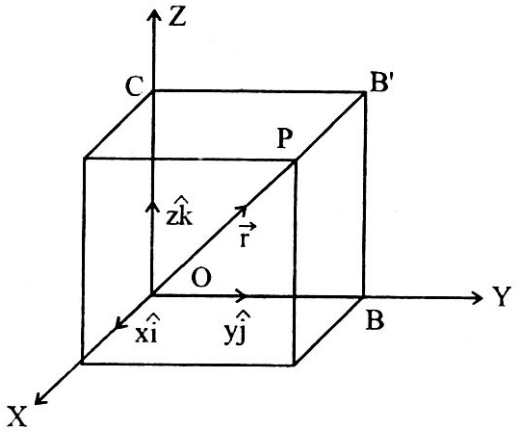
∴ అంతరాళంలోని ప్రతి సదిశ $\vec{r}$ ను $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ల రేఖీయ సంయోగంగా వ్రాయవచ్చు. పటం 15.22 లో

$\overrightarrow{r^2} = x^2 + y^2$

పటం 15.22 లో

$OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$

$\overrightarrow{r^2} = x^2 + y^2 + z^2$



పటం 15.22

$\vec{r}$ సదిశ మాసాన్ని $|\vec{r}|$ అని సూచిస్తాము. అందువల్ల

ద్విపరి మాణములో $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

త్రిపరిమాణంలో $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

గమనిక $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ లు మూడు అతలీయ సదిశలు ఇవి పరస్పరం లంబంగా గాని యూనిట్ సదిశలు గాని కానక్కర లేదు. ఏదైన సదిశ $\vec{d}$ ను $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ల రేఖీయ సంయోగంగా $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ అని వ్రాయవచ్చు.

సదిశల రుజు సంయోగం (Linear Combination of Vectors)

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ లు సదిశలు, $x_1, x_2, \ldots x_n$ అదిశలు అనుకొందాం. అపుడు సదిశ $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + \ldots + x_na_n$ ను $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ సదిశల రుజు సంయోగం అంటాం.

త్రిపరిమాణంలో సదిశకు అంశలు

అతలీయ సదిశలు a, b, c ల క్రమత్రికం (a, b, c) ని తీసుకుందాం. "r" ఏదైనా సదిశ అయితే $r = xa + yb + zc$ అయ్యేటట్లుగా ఒక ఏకైక అదిశా త్రికం (x, y, z) వ్యవస్థితమని నిరూపించాం. ఈ x, y, z అదిశలను, క్రమత్రికం (a, b, c) దృష్ట్యా r యొక్క అంశం అంటాం.

ఉదాహరణ 15.9 10 న్యూటన్‌ల బలం గల ఒక సదిశ తూర్పు నుంచి ఉత్తరంకు 30^0 కోణంతో ఉండగా దాని తూర్పు మరియు ఉత్తర దిశలో సదిశా అంశాలు కనుక్కోండి.

సాధన : $\overrightarrow{OX}$ మరియు $\overrightarrow{OY}$ దిశలలో వరుసగా i మరియు j యూనిట్ సదిశలను తీసుకొందాము. OP ని OX మరియు OY దిశలలో విక్షేపిస్తే

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

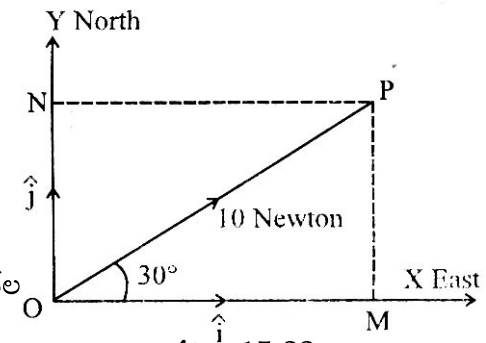
$$= 10\cos 30^0\ \vec{i} + 10\sin 30^0 .\ \vec{j}$$

$$= 10\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ i + 10\ \frac{1}{2}\ j$$

$$= 5\sqrt{3}\ i + 5j$$

$\therefore$ తూర్పు దిశలో అంశ $5\sqrt{3}$ న్యూటన్‌ల

ఉత్తర దిశలో అంశ 5 న్యూటన్‌లు.



పటం 15.23

ఉదాహరణ 15.10: ఈ క్రింది సదిశలు సతలీయాలు అని చూపండి.

$$\vec{a} - 2\vec{b},\ 3\vec{a} + \vec{b} \text{ మరియు } \vec{a} + 4\vec{b}$$

సాధన : సదిశలు సతలీయాలు అగుటకు

$$\vec{a} + 4\vec{b} = x\ (\vec{a} - 2\vec{b}) + y\ (3\vec{a} + \vec{b})$$

అగునట్లు x మరియు y అదిశలు ఉండును.

$$= (x + 3y)\ \vec{a} + (-2x + y)\vec{b}$$

ఇరువైపుల $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల గుణకాలను పోల్చగా

$$x + 3y = 1 \text{ మరియు } -2x + y = 4$$

పై సమీకరణాలను సాధించగా

$$x = \frac{-11}{7} \text{ మరియు } y = \frac{6}{7}$$

$\vec{a} - 2\vec{b}$ మరియు $3\vec{a} + b$ పదాలలో $\vec{a} + 4\vec{b}$ ని సూచించవచ్చు. కావున పై సదిశలు సతలీయాలు.

ఉదాహరణ 15.11: $\vec{r_1} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ మరియు $\vec{r_2} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ఇవ్వగా ఈక్రింది వాటి పరిమాణాలు కనుక్కోండి.

(a) $\vec{r_1}$ (b) $\vec{r_2}$ (c) $\vec{r_1} + \vec{r_2}$ (d) $\vec{r_1} - \vec{r_2}$

సాధన : (a) $|\vec{r_1}| = |\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

(b) $|\vec{r_2}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

(c) $\vec{r_1} + \vec{r_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$$|\vec{r_1} + \vec{r_2}| = |3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2}$$

(d) $\vec{r_1} - \vec{r_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$$|\vec{r_1} - \vec{r_2}| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

ఉదాహరణ 15.12 రెండు సదిశల యొక్క ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ మరియు } \vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

సాధన : ఫలిత సదిశ $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) = (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$$= 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

ఫలిత సదిశ $\vec{R}$ యొక్క పరిమాణము $|\vec{R}|$

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$\therefore$ ఒక ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశ

$$= \frac{R}{|\vec{R}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

ఉదాహరణ 15.13 $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k},\ \vec{s} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ అయితే $\vec{r} - \vec{s}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన : $\vec{r} - \vec{s} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{r} - \vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$

$\therefore\quad |\vec{r} - \vec{s}|$ దిశలో యూనిట్ సదిశ

$= \frac{1}{\sqrt{35}}(-i + 3j - 5k) = \frac{-1}{\sqrt{35}}i + \frac{3}{\sqrt{35}}j - \frac{5}{\sqrt{35}}k$

$\vec{a}\ \vec{b}$

$\vec{a}\ \vec{b}$

ఉదాహరణ 15.14 ఇక్కడ $\vec{a} = i + 3j + k$ మరియు $\vec{b} = 3i - 2j - k$ అయితే $2\vec{a} + 3\vec{b}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(i + 3j + k) + 3(3i - 2j - k)$

$= (2i + 6j + 2k) + (9i - 6j - 3k)$

$= 11\,i - \hat{k}$

$\therefore\quad |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(11)^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$

$\therefore\quad (2\vec{a} + 3\vec{b})$ దిశలో యూనిట్ సదిశ

$= \frac{11}{\sqrt{122}}\,i - \frac{1}{\sqrt{122}}\,k$

ఉదాహరణ 15.15: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ లు మూడు అతలీయ సదిశలు అయితే

$4\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c},\ -2\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ మరియు $-2\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ లు సతలీయ సదిశలు అని చూపండి.

సాధన : మూడు సదిశలు సతలీయమైతే ఏ ఒక సదిశనైన మిలిగిన రెండు సదిశల రేఖీయ సంయోగంగా వ్రాయవచ్చు. కనుక

$$-2\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = x(4\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}) + y\,(-2\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c})$$

ఇక్కడ x మరియు y లు అదిశలు అయితే ఇక్కడ రెండు వైపుల $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ల గుణకాలను పోల్చగా

$4x - 2y = -2, -2x + 4y = -2, -2x - 2y = 4$

పై సమీకరణాలను సాధించగా $x = -1,\ y = -1$

అందువల్ల

$$-2\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = (-1)(4\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}) + (-1)(-2\vec{a} + 4b - 2\vec{c})$$

$\therefore$ పై మూడు సదిశలు సతలీయాలు.

ఉదాహరణ 15.16: $A(2i - j + k)$, $B(i - 3j - 5k)$, $C(3i - 4j - 4k)$ బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజం శీర్షాలని చూపండి.

సాధన:

$AB = (1 - 2)i + (-3 + 1)j + (-5 - 1)k = -i - 2j - 6k$

$BC = (3 - 1)i + (-4 + 3)j + (-4 + 5)k = 2i - j + k$

మరియు $CA = (2 - 3)i + (-1 + 4)j + (1 + 4)k = -i + 3j + 5k$

దీనితో $|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2$ వస్తుంది.

ఉదాహరణ 15.17: సదిశలను స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు $3i - 2j - k,\ 2i + 3j - 4k,$ $-i + j + 2k$ మరియు $4i + 5j + \lambda k$ సతలీయాలు అయితే $\lambda = \frac{-146}{17}$ అని చూపండి.

సాధన:

$OA = 3i - 2j - k$

$OB = 2i + 3j - 4k$

$OC = -i + j + 2k$

$OD = 4i + 5j + \lambda k$

$\Rightarrow$ $AB = -i + 5j - 3k$

$AC = -4i + 3j + 3k$

$AD = i + 7j + (\lambda + 1)k$

A, B, C, D are coplanar $[AB\ AC\ AD] = 0$

$$[AB\ .\ AC\ .\ AD] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1(3\lambda + 3 - 21) - 5(-4\lambda - 4 - 3) - 3(-28 - 3) = 0$$

$$-3\lambda + 18 + 20\lambda + 35 + 93 = 0$$

$$17\lambda = -146$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-146}{17}}$$

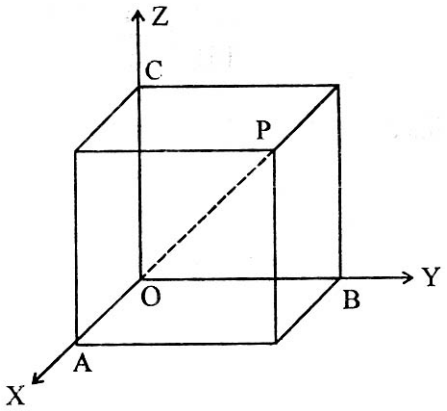
అభ్యాసం 15.4

1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ లు సతలీయాలు అగుటకు నియమము వ్రాయండి.
2. రెండు లంబ సదిశలలో 3, 4 అంశాలు గల $\vec{r}$ సదిశను వ్రాయండి.
3. ప్రక్క పటంలో

   $|OA| = 4, |OB| = 3$ మరియు

   $|OC| = 5$. $\overrightarrow{OP}$ ని $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$

   ల రేఖీయ సంయోగంగా వ్రాయండి.



పటం 15.24

4. $\vec{r_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}, \vec{r_2} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ మరియు $\vec{r_3} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ అయితే $|\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}| = 7$ అని చూపండి
5. సదిశల యొక్క ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి. $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.
6. $\vec{a} = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ అయినపుడు సదిశ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

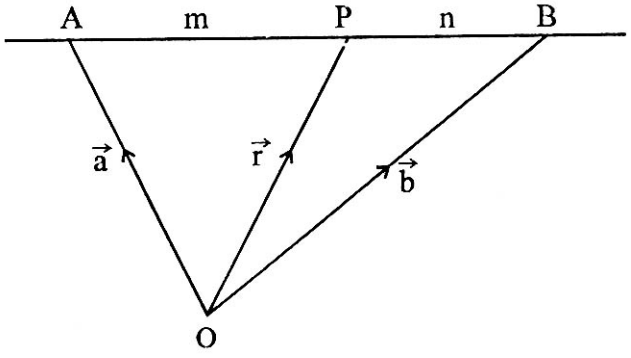
7. ఈ క్రింది సదిశలు సతలీయాలు అని చూపండి.

$3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ మరియు $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ ఇక్కడ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ లు మూడు అతలీయ సదిశలు.

15.10 విభజన సూత్రము

అంతరాళంలో 'O' మూల బిందువు ఆదారంగా P బిందువు స్థాన సదిశ $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ అని వ్రాస్తాము.

క్రింద చూపిన విదంగా రెండు బిందువులను కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని m : n నిష్పత్తిలో అంతరంగా ఖండించే బిందువు స్థాన సదిశను కనుక్కొందాము.



పటం 15.25

O ఆదారంగా A మరియు B బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}, \vec{b}$ అనుకొందాము. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ అయ్యేటట్లుగా AB రేఖాఖండాన్ని P విభజించే నిష్పత్తి m : n

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} \quad (\text{or}) \quad n\,\overrightarrow{AP} = m\,\overrightarrow{PB}$$

$$n\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$$

$$(m+n)\,\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OB} + n\,\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\,\overrightarrow{OA}}{m+n}$$

$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\,\vec{a}}{m+n}$$

ఇక్కడ 'O' దృష్ట్యా P యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}$ అవుతుంది.

ఉపసిద్ధాంతము 1. $\frac{m}{n} = 1 \Rightarrow m = n,$ అప్పుడు AB మధ్య బిందువు P రెండు బిందువుల స్థాన సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అయి ఆ రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు స్థాన సదిశ $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

ఉపసిద్ధాంతము 2. స్థాన సదిశ P ని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$\vec{r} = \frac{\vec{a} + \frac{m}{n}\vec{b}}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{\vec{a} + k\vec{b}}{1 + k}$$

ఇక్కడ $k = \frac{m}{n}, \; k \neq -1$

(ii) రెండు బిందువుల స్థాన సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు ఆ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని ఒక బిందువు విభజించే నిష్పత్తి $k : 1$

ఉపసిద్ధాంతము 3. AB రేఖాఖండాన్ని P బిందువు బాహ్యంగా విభజించే నిష్పత్తి $m : n$

$$\vec{r} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n - m}$$

[సూచన : ఇది విభజించు నిష్పత్తి $-m : n$]

ఉదాహరణ 15.16 రెండు బిందువుల స్థాన సదిశలు $\vec{x}$ మరియు $\vec{y}$ లు. ఆరెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 2 : 3 నిష్పత్తిలో ఒక బిందువు విభజిస్తే ఆ బిందువు స్థాన సదిశ కనుక్కోండి.

సాధన : ఆ బిందువు స్థాన సదిశ $\vec{r}$ అనుకొందాము.

$$\vec{r} = \frac{3\vec{x} + 2\vec{y}}{3 + 2} = \frac{1}{5}(3\vec{x} + 2\vec{y})$$

ఉదాహరణ 15.17 A మరియు B ల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{x} + 2\vec{y}$ మరియు $2\vec{x} - \vec{y}$ అయితే AB రేఖాఖండానికి మధ్య బిందువు స్థాన సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: AB మధ్య బిందువు స్థాన సదిశ

$$= \frac{(\vec{x} + 2\vec{y}) + (2\vec{x} - \vec{y})}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

ఉదాహరణ 15.18 ΔABC యొక్క శీర్షాలు A, B మరియు C ల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}, \vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అయితే ΔABC యొక్క కేంద్రాబాసము యొక్క స్థాన సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన : ΔABC లో భుజము BC యొక్క మధ్యబిందువు D అనుకొందాము.

ΔABC యొక్క కేంద్రాబాసము G అనుకొందాము. అప్పుడు D, AD ని విభజించే నిష్పత్తి 2 :1

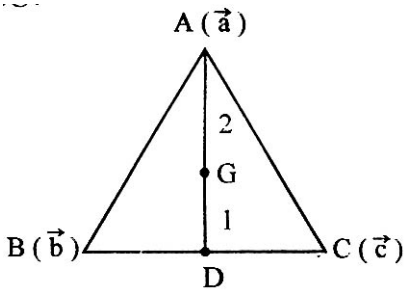
$$AG : GD = 2 : 1$$

ఇప్పుడు D యొక్క స్థాన సదిశ $= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$\therefore$ G యొక్క స్థాన సదిశ

$$= \frac{2\,\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + 1\,.\,\vec{a}}{2+1}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



పటం 15.26

అభ్యాసం 15.5

1. A మరియు B ల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు అయితే AB ని C విభజించే నిష్పత్తి (i) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

   (ii) 2 : –3 అయితే C యొక్క స్థాన సదిశను కనుక్కోండి.

2. $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ లను 3.4 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువును కనుక్కోండి.

3. C మరియు D ల స్థాన సదిశలు $\vec{c}$ మరియు $\vec{d}$ లు అయి CD ని విభజించు త్రిదాకరణ బిందువులు P మరియు Q అయితే త్రిదాకరణ బిందువుల స్థాన సదిశలను కనుక్కోండి.

4. సదిశలనుపయోగించి త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలు అని చూపండి.
5. ఒక త్రిభుజంలో ఏవైన రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరమని చూపి ఆ భుజంలో అది సగము అని చూపండి.

15.11 సదిశల గుణనము

మీరు 46.9 భాగములో చూపిన విధంగా సదిశను అదిశతో గుణించారు. సదిశను అదిశతో గుణించగా వచ్చే లబ్ధము సదిశా పరిమాణము. ఈ భాగములో ఒక సదిశను మరొక సదిశతో గుణించవలెను. ఇక్కడ రెండు సందర్భములు గలవు.

(I) రెండు సదిశలను గుణించగా వచ్చేది అదిశ అయితే ఈ లబ్ధాన్ని 'అదిశా లబ్ధము' అని లేదా 'బిందు లబ్ధము' అని అంటాము. ఈ లబ్ధానికి రెండు సదిశల మధ్య '.' ను ఉపయోగిస్తాము.

(II) రెండు సదిశలను గుణించగా వచ్చేది ఒక సదిశ అయితే దీనిని సదిశాలబ్ధము అని లేదా వజ్ర (క్రాస్) లబ్ధం అని అంటాము. ఇక్కడ రెండు సదిశల మధ్య 'X' ను ఉపయోగిస్తాము.

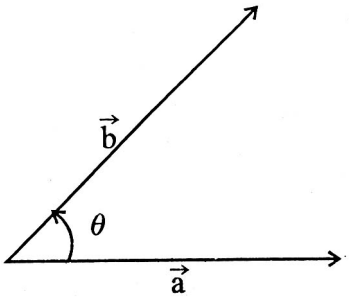
15.12 రెండు సదిశల అదిశ లబ్ధం

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సదిశలు అనుకొందాము.

వీటి మధ్య కోణము θ అయితే అదిశా లబ్ధంను $\vec{a}.\vec{b}$ తో సూచిస్తాము.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}.\vec{b}$ అదిశ కావున $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ మరియు $\cos\theta$ అదిశలు.



పటం 15.27

గమనికలు

1. a మరియు bలు వరుసగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ల పరిమాణాలు. $\vec{a}, \vec{b}$లు సజాతి సదిశలు అయితే
$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta = ab$
2. a, b లు విజాతి సదిశలు అయితే $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\pi = -ab.$

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ల మధ్య కోణము θ అయితే $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}\,||\vec{b}|}$

4. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ మరియు $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c})$

5. $n(\vec{a}.\vec{b}) = (n\vec{a})\,.\,\vec{b} = \vec{a}\,.\,(n\,\vec{b})$ ఇక్కడ n వాస్తవ సంఖ్య

6. $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ మరియు $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$ ఇక్కడ $\hat{i}, \hat{j}$ మరియు $\hat{k}$ లు లంబ యూనిట్ సదిశలు.

సరళరేఖకు, తలానికి సదిశా సమీకరణాలు

(i) $A(\vec{a})$ బిందువు గుండా పోతూ. $\vec{b}$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖా సదిశ సమీకరణం $r = a + yb,\ t \in \mathbf{R}$.

(ii) $A(x_1\, y_1\, z_1)$ బిందువు గుండా పోతూ సదిశ $\vec{b} = li + mj + nk$ కి సమాంతరంగా ఉండే రేఖ కార్టిసియన్ సమీకరణం $\dfrac{x - x_i}{l} = \dfrac{y - y_i}{m} = \dfrac{z - z_i}{n}$

(iii) A(a), B(b) బిందువుల గుండా పోయే రేఖ సదిశా సమీకరణం

$r = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b},\ t \in \mathbf{R}$.

(iv) $A(a)$ బిందువు గుండా పోతూ b, c సదిశలకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశ సమీకరణం $r = a + tb + sc,\ t, s \in \mathbf{R}$.

(v) A(a), B(b) బిందువుల గుండా పోతూ, C సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశ సమీకరణం $r = (1 - t)a + tb + sc \qquad t, s \in \mathbf{R}$.

(vi) సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులు A(a), B(b), C(c) ల గుండా తలం సదిశా సమీకరణం

$$\vec{r} = (1 - t - s)a + tb + sc, \qquad t, s \in \mathbf{R}.$$

ఉదాహరణ 15.19 $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ అయితే $\vec{a}, \vec{b}$ ల మధ్య కోణాన్ని మరియు $\vec{a}.\vec{b}$ ని కనుక్కోండి.

సాధన $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$= 3 \times 4 + 2 \times (-3) + (-6) \times 1$

$[\because\ \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ మరియు $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0]$

$= 12 - 6 - 6$

$= 0$

$\vec{a}, \vec{b}$ ల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

15.13 రెండు సదిశల సదిశాలబ్ధం

మనము ఇంతకు ముందు రెండు సదిశల సదిశాలబ్ధమును చర్చించాము. మనము కుడిచేతి పద్ధతి సదిశాత్రయం, ఎడమ చేతి పద్ధతి సదిశాత్రయంలను ఈ క్రింది చర్చిస్తాము.

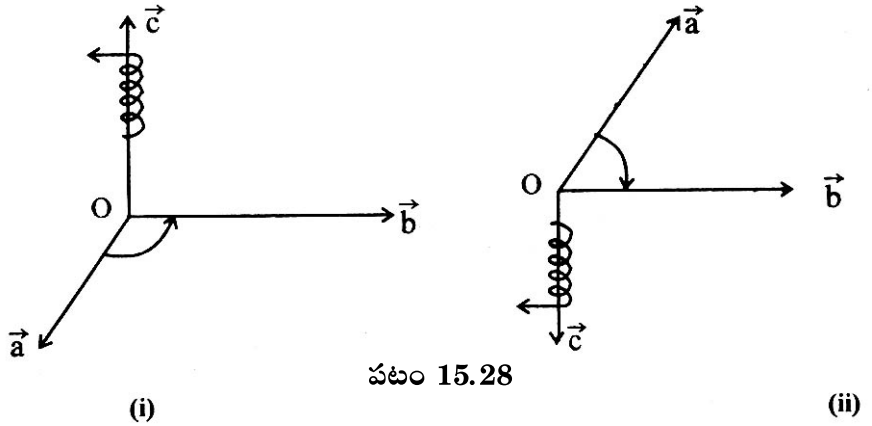
15.13.1 కుడి చేతి స్క్రూ నియమము

ఒక స్క్రూను తీసుకొని అపసవ్యదిశలో త్రిప్పినప్పుడు అది మన వైపునకు పరివర్తనం చెందుతుంది. దీనినే కుడి చేతి స్క్రూనియమము అంటాము.

15.13.2 ఎడమ చేతి స్క్రూ నియమము

ఒక స్క్రూను తీసుకొని సవ్య దిశలో త్రిప్పినప్పుడు అది మనకు వ్యతిరేకంగా పరివర్తనం చెందుతుంది. దీనినే ఎడమ చేతి స్క్రూ నియమము అంటాము.

పై విషయాన్ని సదిశాత్రయంతో పోల్చవచ్చు. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ మూడు సదిశల స్థాన బిందువు O ను తీసుకొందాము.



పటం 15.28

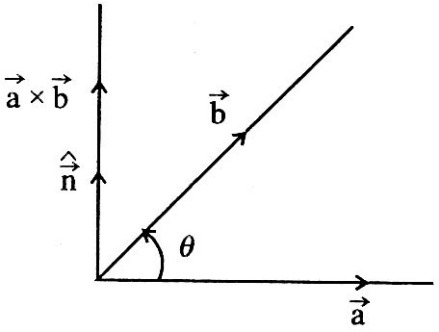
O వద్ద $\vec{a}$ నుండి $\vec{b}$ మీదుగా ఒక కుడి చేతి స్క్రూను 180^0 కంటే తక్కువగా ఉండేటట్లు త్రిప్పితే అది $\vec{c}$ తో పాటు పరివర్తనం చెందుతుంది.

అదే విధంగా O వద్ద $\vec{a}$ నుంచి $\vec{b}$ కి ఎడమ చేతి స్క్రూను 180^0 కంటే తక్కువగా ఉంటేటట్లు తిప్పితే అది $\vec{c}$ తోపాటు పరివర్తనం చెందుతుంది. ఈ పరివర్తనం మొదటి దానికి వ్యతిరేఖ దిశలో ఉంటుంది.

15.13.3 సదిశ లబ్ధం

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు రెండు సదిశలనుకొందాము. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ల మధ్య కోణము θ ఇది $0 < \theta < \pi$ అంతరంలో ఉంటుంది. సదిశాలబ్ధాన్ని $\vec{a} \times \vec{b}$ చే సూచిస్తాము మరియు ఇది సదిశను సూచిస్తుంది.

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin\theta\ \hat{n}$ ఇక్కడ $\hat{n}$ యూనిట్ సదిశ



పటం 15.29

ఇక్కడ $\vec{a}, \vec{b}\ \hat{n}$ కుడి చేతి పద్ధతిలోని సదిశాత్రయంగా రూపొందేటట్లుగాను, $\vec{a}$, $\vec{b}$ రెండింటికి లంబంగా $\hat{n}$ ఒక యూనిట్ సదిశ ఉంటుంది.

గమనికలు

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
3. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$
4. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = i,\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ మరియు

   $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

5. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ అయితే $\vec{a} = 0$ లేదా $\vec{b} = 0$ లేదా $\vec{a} \| \vec{b}$

6. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ల రెండింటిలో ఏ ఒక్కటి $\vec{O}$ అయిన θ నిర్వచింపబడదు. $\vec{O}$ కు దిశ లేదు కావున $\hat{n}$ నిర్వచించబడదు. ఈ సందర్భములో $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

7. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

అభ్యాసం 15. 6

1. రెండు సదిశల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

   (a) $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ మరియు $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

   (b) $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ మరియు $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

15.14 బిందులబ్ధం (అదిశా లబ్ధం) ధర్మాలు

a, b లు శూన్యేతర సదిశలు, వాటి మధ్యకోణం 'θ' అయిన, $|a|\,|b| \cos\theta$ అనే అదిశను a, b ల అదిశాలబ్ధం లేదా బిందు లబ్ధం అంటారు. దీనిని $a \,.\, b$ తో సూచిస్తాం.

గమనిక: (i) $a \,.\, b$ ఒక అదిశ

(ii) $a \,.\, a = |a|\,|a| \cos\theta = |a|^2$. దీనిని a^2 తో సూచిస్తాం.

15.14.1 అదిశా లబ్ధం ధర్మాలు

a, b లు రెండు సదిశలు. అపుడు

i) $a \,.\, b = b \,.\, a$ (వినిమయన్యాయం)

ii) $(la) \,.\, b = a \,.\, (lb) = l(a \,.\, b)$ $l \in \mathrm{R}$

iii) $(la) \,.\, (m.b) = lm\,(a \,.\, b)$ $l, m \in \mathrm{R}$

iv) $(-a) \,.\, (b) = a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b)$

v) $(-a) \,.\, (-b) = a \,.\, b$

గమనిక: (i) i, j, k లలో అదిశా లబ్ధం (బిందు లబ్ధం)

i, j, k లు పరస్పర లంబ యూనిట్ సిదిశలు కాబట్టి

$i \,.\, i = j \,.\, j = k \,.\, k = 1,\ i \,.\, j = 0,\ j \,.\, k = 0,\ k \,.\, i = 0.$

(ii) i, j, k యూనిట్ సదిశా లంబత్రికం

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \Rightarrow a \,.\, b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(iii) a, b శూన్యేతర సదిశల మధ్యకోణం 'θ' అయితే a, b నిర్వచనం ప్రకారం

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right) \text{ అయితే } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

(iv) a, b పరస్పరం లంబదిశలు అయితే $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

15.14.2 త్రికోణమితీయ సిద్ధాంతాలు – సదిశా పద్ధతులు

15.14.2.1 అర్ధవృత్తంలో కోణం లంబకోణం అవుతుంది.

O కేంద్రం గల వృత్త వ్యాసం AB అనుకొనుము.

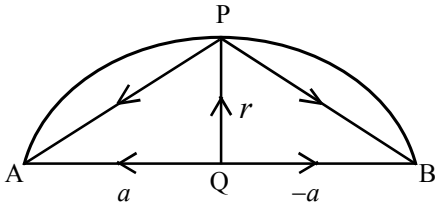
$OA = a$ అనుకొంటే $OB = -a$ అవుతుంది.

$OP = r$ అవుతూ P ఒక బిందువులు

$$PA \,.\, PB = (a - r) \,.\, (-a - r) = -(a^2 - r^2) = 0$$

$(|a| = |r| =$ వ్యాసార్ధం$)$

$\angle PAB = 90^0$



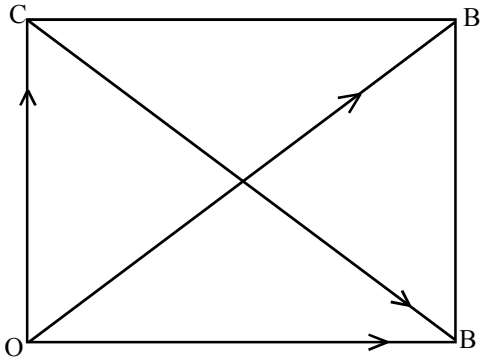
పటం 15.30

గమనిక : త్రిభుజం ABC లో a, b, c లు వరసగా శీర్షాలు A, B, C ల ఎదుటి భుజాల పొడవులైతే

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2abc \cos A$ ii) $a = b \cos C + c \cos B$.

15.14.3 సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయం

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాల మీద వర్గాల మొత్తం దాని భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం.



పటం 15.31

ఉపపత్తి : OABC ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. OB, CA లు కర్ణాలు అనుకొందాం.

$OA = a$, $OC = c$ అనుకొనుము. $OB = a + c$, $CA = a - c$

$$OB^2 + CA^2 = |a + c|^2 + |a - c|^2 = (a^2 + 2ac + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2)$$
$$= 2|a|^2 + 2|c|^2$$
$$= OA^2 + AB^2 + CB^2 + OC^2 \quad (OA = BC, OC = AB).$$

15.15 తలం సదిశా సమీకరణం - అభిలంబరూపం

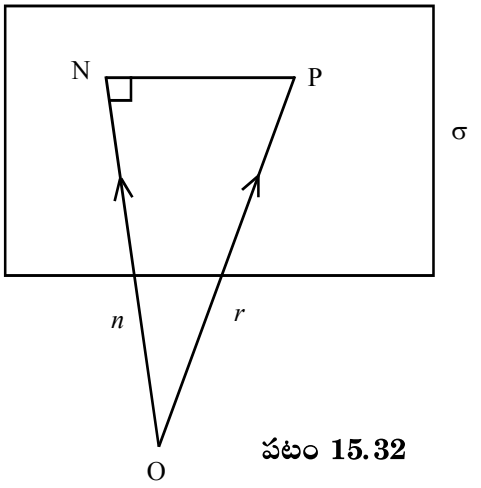
ఒక తలానికి మూలబిందువు నుంచి గీసిన లంబదూరం ON = P అయి, ON దిశలో యూనిట్ సదిశ n అయితే, ఆ తలం సదిశా సమీకరణం $r \cdot n = P$

గమనిక :

(i) σ తలం మూలబిందువు గుండాపోతే $r \cdot n = 0$

(ii) కార్టీసియన్ నిరూపక పద్ధతిలో తలానికి అభిలంబ రూపం $lx + my + nz = P$.

(iii) $A(a)$ బిందువు గుండాపోతూ సదిశకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం $(r \cdot a) \cdot n = 0$.



పటం 15.32

15.16 గోళం సదిశా సమీకరణం, తలాల మధ్య కోణం

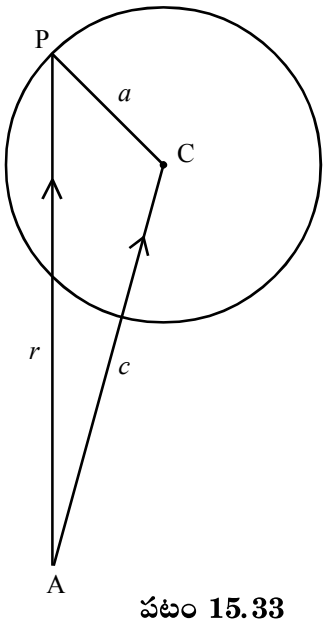
నిర్వచనం : అంతరాళంలో C' ఒక స్థిర బిందువు, $a \geq 0$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య. అంతరాళంలో CP $= a$ అయ్యే P బిందుపథాన్ని C కేంద్రం 'a' వ్యాసార్ధం గల గోళం అంటాం. $a = 0$ అయితే ఆ గోళాన్ని "బిందుగోళం" అంటాం.

i) $C(c)$ బిందువు కేంద్రం, 'a' వ్యాసార్ధంగా గల గోళం సదిశా సమీకరణం $|r - c| = a$ తుల్యంగా
$r^2 - 2(r \,.\, c) + c^2 = a^2$

ii) మూలబిందువు గోళం మీద ఉంటే గోళం సమీకరణం $r^2 - 2r \,.\, c = 0$ అవుతాయి.

iii) మూలబిందువు గోళకేంద్రం అయితే గోళం సమీకరణం $r^2 = a^2$ లేదా $|r| = a$ అవుతుంది.

iv) గోళం సమీకరణం - కార్టీసియన్ రూపం
$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$



పటం 15.33

v) $A(a), B(b)$ బిందువులను వ్యాసం కొనలుగా గల గోళం సమీకరణం $(r - a) \,.\, (r - b) = 0$ తుల్యంగా
$r^2 - r.(a + b) + a \,.\, b = 0$

15.16.1 రెండు తలాల మధ్యకోణం

n_1, n_2 అనే యూనిట్ సదిశలు వరసగా σ_1, σ_2 తలాలకు అభిలంబాలు అయితే n_1, n_2 ల మధ్య కోణాన్ని σ_1, σ_2ల మధ్య కోణంగా పిలుస్తాం. σ_1, σ_2 ల మధ్యకోణం 'θ' అయితే $\cos \theta = n_1 . n_2$.

ఉదాహరణ 15.20 : $|a| = 11$ $|b| = 23$ $|a - b| = 30$ అయితే a, b ల మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి. ఇంకా $|a+b|$ను కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం $|a - b| = 30$ a, b ల మధ్యకోణం θ అనుకొనుము.

$|a - b|^2 = 900$

$a^2 - 2a.b \cos\theta + b^2 = 900$

$|2| - 2 \times 11.23 \cos\theta + 529 = 900$

$650 - 506 \cos\theta = 900$

$506 \cos\theta = 650 - 900 = -250$

$506 \cos\theta = -250$

$\cos\theta = -250$

$$\cos\theta = \frac{-250}{506} = -\frac{125}{253}$$

$$\theta = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{125}{253}\right)$$

$|a + b|^2 = a^2 + 2a \,.\, b \cos\theta + b^2$

$= |2| + 2 \times 11 \times 23 \cos\theta + 529$

$$= 121 + 2 \times 11 \times 23\left(-\frac{125}{253}\right) + 529$$

$|a + b|^2 = 400$

$\Rightarrow |a + b| = 20.$

ఉదాహరణ 15.21 : $a = i + 2j + 3k, b = 3i + j + 2k$ అయితే $a.b$ విలువను కనుగొని a, b మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $a \,.\, b = (i + 2j + 3k)\,(3i + j + 2k) = 3 + 2 + 6 = 11$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2};\ |b| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}$$

$= \sqrt{14}$; $= \sqrt{14}$

$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} = \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{11}{14} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right).$$

ఉదాహరణ 15.22: $\lambda i - 3j + 5k,\ 2\lambda i - \lambda j - k$ సదిశలు పరస్పరం లంబసదిశలైతే λను కనుక్కోండి.

సాధన : $(\lambda i - 3j + 5k) \cdot (2\lambda i - \lambda j - k) = 0$

$\therefore\ 2\lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$

$(2\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0 \quad \therefore\ \lambda = \dfrac{-5}{2}$ లేదా 1.

ఉదాహరణ 15.23: $2i - j + k,\ i - 3j - 5k,\ 3i - 4j - 4k$ స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజం శీర్షాలవుతాయని చూపి, ఆ త్రిభుజం మిగతా కోణాలను కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులను వరసగా A, B, C లు అనుకొనుం.

అపుడు $AB = -i - 2j - 6k,\ BC = 2i - j + k$

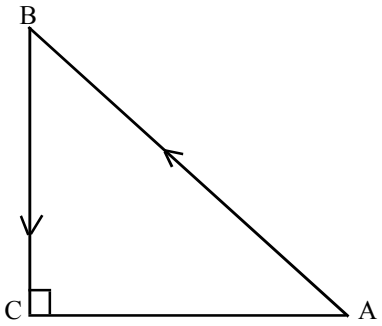
$CA = -i + 3j + 5k$

$\Rightarrow$ $BC.\ CA = -2 - 3 + 5 = 0$

$\Rightarrow$ $\angle C = 90^0$

$$\cos B = \frac{BC.BA}{|BC|\,|BA|} = \sqrt{\frac{6}{41}}$$

$$\cos A = \frac{AB.AC}{|AB|\,|AC|} = \sqrt{\frac{35}{41}}$$



పటం 15.34

ఉదాహరణ 15.24: ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $AB = 3i + 2j + 2k,\ AD = i - 2k$ ఆసన్న భుజాలు అయితే కర్ణాల మధ్యకోణాన్ని కనుక్కోండి.

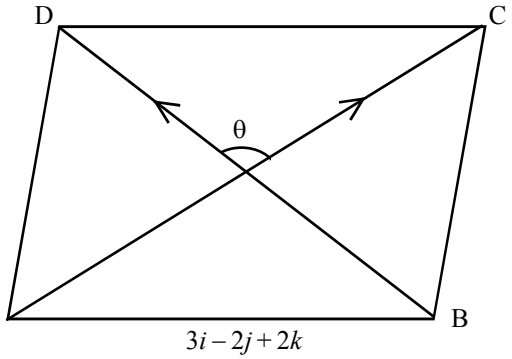
సాధన: $AC = AB + BC$

$= (3i - 2j + 2k) + (i - 2k)$

$AC = 4i - 2j$

$BD = -2i + 2j - 4k$

AC, BD ల మధ్యకోణం 'θ' అనుకొనుము.



$$\cos\theta = \frac{AC.BD}{|AC|\,|BD|} = \frac{-8-4}{\sqrt{20}\sqrt{24}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

పటం 15.35

ఉదాహరణ 15.25: A(1, –3, –1), B(2, 4, 1) వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళం సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $a = i - 3j - K$, $b = 2i + 4j + K$ అనుకొనుము.

A(a), B(b) బిందువులు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళం సమీకరణం

$(r - a) \cdot (r - b) = 0$

$r^2 - r \cdot (a + b) + a \cdot b = 0$

$r^2 - r \cdot (3i + j) - 11 = 0$

కార్టీసియన్ సమీకరణం $(x - 1)(x - 2) + (y + 3)(y - 4) + (z + 1)(z - 1) = 0$

అంటే $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y - 11 = 0$.

అభ్యాసం 15.7

1. $2i + \lambda j - k$, $4i - 2j + 2k$ సదిశలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే λ విలువను కనుక్కోండి.
2. $r \cdot (2i - j + 2k) = 3$, $r \cdot (3i + 6j + k) = 4$ తలాల మధ్యకోణం కనుగొనుము.
3. $a = 3i + 4j - 2k$, $b = -2i - j$ బిందువులు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళం సదిశా సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

15.17 రెండు సదిశల లబ్ధం (వజ్రలబ్ధం) ధర్మాలు

15.17.1 నిర్వచనం : a, b లు రెండూ సదిశలైతే వాటి సదిశా లబ్ధం $a \times b$ కి ఈ విధంగా నిర్వచిస్తాం. a, b లలో ఏ ఒక్కటి శూన్య సదిశ అయినా లేదా a, b లు సరేఖీయ సదిశలైనా, $a \times b$ శూన్యసదిశను సూచిస్తుంది. లేదా a, b ల మధ్యకోణం θ అయి, a, b ల రెండింటికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ, n, (a, b, n) త్రయం కుడిచేతి పద్ధతిలో ఉంటే $a \times b$ ని $(|a||b| \sin\theta)n$ గా నిర్వచిస్తాం.

15.17.2 a, b, c లు సదిశలైతే i) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

ii) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

విభాగాన్యాయాన్ని పాటిస్తాయి.

(i, j, k) లంబత్రయం అనుకుంటే సదిశా లబ్ధం నిర్వచనం ప్రకారం

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

$i \times j = k,\ j \times k = i,\ k \times i = j$ అవుతాయి.

15.18 (i, j, k) పద్ధతిలో సదిశా లబ్ధం

(i) $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ అయితే

$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$

(ii) $$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(iii) $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ అయితే సదిశల మధ్యకోణం 'θ' అయితే

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\Sigma(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2}}{\sqrt{\Sigma a_1^2}\ \sqrt{\Sigma b_1^2}}$$

(iv) a, b లు ఏ రెండు సదిశాలైనా

$|a \times b|^2 = (a \,.\, a)\,(b \,.\, b) - (a \,.\, b)^2 = a^2 b^2 - (a \,.\, b)^2$ అవుతుంది.

(v) a, b లు సరేఖీయాలు కాని సదిశలైతే a, b లు రెండింటికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశలు $\frac{\pm(a \times b)}{|a \times b|}$ అవుతాయి.

15.19 సదిశా వైశాల్యం

(i) OABC యొక్క సదిశావైశాల్యం

(ii) త్రిభుజం ABC శీర్షాలైన A, B, C ల స్థాన సదిశలు వరసగా a, b, c అయితే త్రిభుజం సదిశా వైశాల్యం $\frac{1}{2}(b \times c + c \times a + a \times b)$ అవుతుంది.

15.19.1 సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం

A, B, C, D బిందువులు అపసవ్య దిశలో ఉంటూ సమాంతర చతుర్భుజం శీర్షాలైతే, ABCD సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం (కర్ణాలలో) $\frac{1}{2}(AC \times BD)$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 15.26: $a = 2i - 3j + 5k$, $b = -i + 4j + 2k$ అయితే i) $a \times b$ ను కనుగొనుము. ii) a, b ల రెండింటికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

సాధన : i) $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -26i - 9j + 5k$

ii) a, b ల రెండింటికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ

$$= \pm \frac{a \times b}{|a \times b|} = \pm \frac{1}{\sqrt{782}} (-26i - 9j + 5k)$$

ఉదాహరణ 15.27: $a = i + 2j + 3k$, $b = 3i + 5j - k$ సదిశలు త్రిభుజం రెండు భుజాలను సూచిస్తే ఆ త్రిభుజం వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: a, b లు భుజాలుగా గల త్రిభుజవైశాల్యం

$= a, b$ లు ఆసన్నభుజాలుగా సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యంలో సగం

$$= \frac{1}{2}|a \times b|$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -17i + 10j - k$$

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}|a \times b| = \frac{\sqrt{390}}{2}$.

ఉదాహరణ 15.28 : $a = 2i - j + k$, $b = 3i + 4j - k$ సదిశల మధ్యకోణం θ అయితే, $\sin\theta$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3i + 5j + 11k$

$$|a|=\sqrt{6}, |b| = \sqrt{26}, |a\times b|=\sqrt{155}$$

$$\sin\theta = \frac{|a\times b|}{|a||b|} = \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{155}{156}}$$

అభ్యాసం 15.8

1. $a = 2i - j + k,\ b = i - 3j - 5k$ అయితే $|a \times b|$ ని కనుగొనుము.
2. $i + j + k, 2i + j + 3k$ సదిశలు రెండింటికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.
3. $a - 2j - k, b = -i + k$ అసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.
4. ఒక త్రిభుజం యొక్క భుజాలలో రెండు భుజాలు $3i + 4j, -5i + 7j$ అయితే త్రిభుజానికి వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.
5. a, b లు $|a| = |b| = 5, (a, b) = 45^0$ ను తృప్తి పరచే సదిశలు అనుకుందాం. $a - 2b$, $3a + 2b$ సదిశలు భుజాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

15.20 అదిశాత్రిక లబ్ధం

15.20.1 నిర్వచనం : a, b, c మూడు సదిశలైతే $(a \times b).c$ ని a, b, c ల అదిశాత్రిక లబ్ధం అంటాం. దీనిని $[abc]$ తో సూచిస్తాం. $[a\ b\ c]$ ని బాక్సు $[a\ b\ c]$ అని చదువుతాం.

15.20.2 $a\ b\ c$ లు మూడు అతతీయ సదిశలు $OA = a, OB = b, OC = c$ అనుకొందాం. OA, OB, OC లు సహావసానిక భుజాలుగా గల సమాంతర ఫలకం ఘనపరిమాణాన్ని V అనుకుంటే

i) (a, b, c) లు కుడిచేతి పద్ధతిలో ఉంటే $(a \times b).c = V$

ii) (a, b, c) లు ఎడమచేతి పద్ధతిలో ఉంటే $(a \times b).c = V$

15.20.3 a, b, c లు ఏ మూడు సదిశలైనా

$(a \times b).c = (b \times c).a = (c \times a).b$ అంటే

15.20.4 a, b, c లు మూడు సదిశలైతే $(a \times b).c = a.(b \times c)$ అనగా అదిశాత్మిక లబ్దంలో బిందు ప్రక్రియను, లబ్ద ప్రక్రియను పరస్పరం మార్చవచ్చు.

15.20.5 ఏ రెండు సమాంతరం కాని శూన్యేతర సదిశలు a, b, c లు సతలీయాలు కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $[a\ b\ c] = 0$

15.20.6 విభిన్నమైన నాలుగు బిందువులు A, B, C, D లు సతలీయాలు కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్తనియమం $[AB\ AC\ AD] = 0$

15.20.7 (i, j, k) కుడిచేతి పద్ధతిలో ఉన్న పరస్పరం లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశాత్రయం

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k,\ c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

అయితే $[abc] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

15.20.8 $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ b = b_1 i + b_2 j + b_3 k, c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$ అయితే a, b, c లు సతలీయాలు కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్తనియమం $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

15.20.9 a, b, c లు సహావసానిక భుజాలుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం $\frac{1}{6}\left|[a\,b\,c]\right|$

15.20.10 A, B, C, D శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{6}\left|[DA\ DB\ DC]\right|$

15.21 తలానికి వివిధ రూపాలలో సదిశా సమీకరణాలు, అసౌష్ఠవ రేఖలు, అసౌష్ఠవ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరం

15.21.1 A(a) బిందువు గుండాపోతూ సరేఖీయాలు కాని సదిశలు b, c లకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం $a, [r\ b\ c] = [a\ b\ c]$

15.21.2 A(a), B(b) బిందువుల గుండా పోతూ, c సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం $[r\ b\ c] + [r\ c\ a] = [a\ b\ c]$

15.21.3 సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులు $A(a)$, $B(b)$ $C(c)$ ల గుండా పోయే తలం సమీకరణం

$$[r\ b\ c] + [r\ c\ a] + [r\ a\ b] = [a\ b\ c]$$

15.21.4 సరళరేఖ $r = a + tb$, $t \in R$ ను కలిగి ఉండి $r \,.\, c = q$ తలానికి లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం $[r\ b\ c] = [a\ b\ c]$

15.21.5 నిర్వచనం (అసౌష్ఠవ లేదా అతలీయ రేఖలు)

రెండు దత్త రేఖలను కలిగి ఉన్న తలం అంతరాళంలో లేకపోతే ఆ రేఖలను అసౌష్ఠవ లేదా అతలీయరేఖలు అంటాం. ఈ రేఖకు ఉమ్మడి బిందువు లేకపోయినప్పటికి, ఆ రెండింటికి ఉమ్మడి లంబ రేఖ ఉంటుంది.

15.21.6 అసౌష్ఠవ రేఖలు L_1, L_2 ల సమీకరణాలు వరసగా $r = a + tb, r = c + sd, t, s \in R$ అయితే వాటి మధ్య కనిష్ఠదూరం $\dfrac{|(a-c).(b\times d)|}{|b\times d|}$

15.22 సదిశాత్రిక లబ్ధం - కొన్ని ఫలితాలు

నిర్వచనం : a, b, c లు మూడు సదిశలైతే $(a \times b) \times c$ ని సదిశాత్రిక లబ్ధం లేదా మూడు సదిశల సదిశాలబ్ధం అంటాం.

15.22.1 i) a, b, c లు సదిశలైతే

$$(a \times b) \times c = (a \,.\, c)b - (b \,.\, c)a$$

ii) $a \times (b \times c) = (a \,.\, c)b - (a \,.\, b)c$

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \Leftrightarrow a, c$ లు సరేఖీయ సదిశలు.

15.22.2 b సదిశ, a, c లు రెండింటికి లంబంగా ఉంటే

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ అవుతుంది.

15.23 నాలుగు సదిశల అదిశ, సదిశల లబ్ధాలు

15.23.1 a, b, c, d లు నాలుగు సదిశలైతే

i) $(a \times b) \,.\, (c \times d) = \begin{vmatrix} a.c & a.d \\ b.c & b.d \end{vmatrix}$

ii) $(a \times b)^2 = (a \times b) \,.\, (a \times b) = a^2b^2 - (a \,.b)^2$.

15.23.2 a, b, c, d లు నాలుగు సదిశలైతే

$$(a \times b) \times (c \times d) = [a\ c\ d]b - [b\ c\ d]a$$

15.23.3 a, b, c లు అతలీయ సదిశలై r ఏదైనా సదిశ అయితే

$$r = \frac{[bcr]}{[abc]}a + \frac{[car]}{[abc]}b + \frac{[abr]}{[abc]}c \text{ అవుతుంది.}$$

ఉదాహరణ 15.29. $\boldsymbol{a = 2i - j + k,\ b = i + 2j - 3k, c = 3i + pj + 5k}$ సదిశలు సతలీయాలైతే ఆ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $[a\ b\ c] = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & p & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(10 + 3p) + 1(5 + 9) + (p - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 20 + 6p + 14 + p - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = -4$$

ఉదాహరణ 15.30. $2i - 3j,\ i + j - k,\ 3i - k$ లు సహావసానిక భుజాలుగా గల సమాంతర ఫలకం ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన : $[a\ b\ c] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2(-1-0) + 3(-1+3)$

$= -2 + 6 = 4$

$\therefore$ ఘనపరిమాణం $V = |[a\ b\ c]| = 4$

ఉదాహరణ 15.31. a, b, c లు అతలీయ సదిశలు అయితే $a - 2b + 3c$, $-2a + 3b - 4c$, $a - 3b + 5c$ సదిశలు సతలీయాలని చూపండి.

సాధన : $\alpha = a - 2b + 3c$, $\beta = -2a + 3b - 4c$, $\gamma = a - 3b + 5c$ అనుకొనుము.

$$[\alpha\beta\gamma] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} [abc]$$

కాని $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1(15-12) + 2(-10+4) + 3(6-3)$

$= 3 - 12 + 9$

$= 0.$

$\therefore [\alpha\beta\gamma] = 0$ $\quad\therefore$ α, β, γ లు సతలీయ సదిశలు.

ఉదాహరణ 15.32 : $a = i + j + k$, $b = 2i - j + 3k$, $c = i - j$, $d = 6i + 2j + 3k$ అయితే $b \times c$, $c \times a$, $a \times b$ లలో d ని రాయండి.

సాధన: $[abc] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1(0+3) - 1(0-3) + 1(-2+1) = 5$

$d \,.\, a = (6i + 2j + 3k) \,.\, (i + j + k) = 6 + 2 + 3 = 11$

$d \,.\, b = 19; \qquad d.c = 4$

$d = x(b \times c) + y(c \times a) + z(a \times b)$ అనుకుంటే

$$x = \frac{d.a}{[abc]},\ y = \frac{d.b}{[abc]},\ z = \frac{a.c}{[abc]}$$

$$x = \frac{11}{5};\ y = \frac{19}{5};\ z = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ d = \frac{11}{5}(3i + 3j - k) + \frac{19}{5}(-i - j + 2k) + \frac{4}{5}(4i - j - 3k).$$

ఉదాహరణ 15.33: $r = (6i + 2j + 2k) + t(i - 2j + 2k)$

$r = (-4i - k) + s(3i - 2i - 2k)$ సూచించే అసౌష్ఠవ రేఖల మధ్యకనిష్ఠ దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: మొదటిరేఖ $A(6, 2, 2)$ బిందువు గుండాపోతూ $b = (i - 2j + 2k)$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

రెండో రేఖ $c(-4, 0, -1)$ బిందువుగుండా పోతూ $d = 3i - 2j - 2k$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

$$\text{కనిష్ఠదూరం} = \frac{|[\text{A}c\ b\ d]|}{b \times d}$$

$$[\text{A}c\ b\ d] = \begin{vmatrix} -10 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -108$$

$$b \times d = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 8i + 8j + 4k$$

$|b \times d| = 12$

$$\text{కనిష్ఠదూరం } \frac{|[\text{A}c\ b\ d]|}{|b \times d|} = \frac{108}{12} = 9.$$

అభ్యాసం 15.9

1. $i + j + k,\ \ i - j, i + 2j + k$ సదిశలను సహావసానిక భుజాలుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.
2. $[i - j\ \ j - k\ \ k - i]$ ను గణన చేయండి.
3. $(i - 2j + 3k) \times (2i + j - k)\ .\ (j + k)$ ను సూక్ష్మీకరించండి.
4. a, b, c లు అతలీయ సదిశలు $[2a - b + 3c,\ \ a + b - 2c, a + b - 3c] = \lambda[abc]$ అయితే λను కనుగొనుము.
5. a, b, c లు అతలీయ సదిశలైతే $2a + 3b - c, a - 2b + 3c, 3a + 4b - 2c, a - 6b + 6c$ ల స్థాన సదిశలుగా గల నాలుగు బిందువులు సతలీయాలని చూపండి.
6. A = (1, –2, –1) B = (4, 0, –3), C = (1, 2, –1), D = (2, –4, –5) బిందువులైతే AB, CD రేఖల మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోండి.
7. $a = i - 2j - 3k,\ \ b = 2i + j - k,\ \ c = i + 3j - 2k$ సదిశలకు $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ సరిచూడండి.
8. $a = i - 2j + 3k,\ \ b = 2i + j + k,\ \ c = i + j + 2k$ లో $|(a \times b) \times c|,\ \ |a \times (b \times c)|$ లు కనుక్కోండి.

కీలకపదాలు

- కేవలం పరిమాణం గల భౌతిక రాశులను అదిశలు అంటాం. వాటిని వాస్తవ సంఖ్యలతో సూచిస్తాము.
- పరిమాణం, దిశ గల రాశులను సదిశలు అంటాం
- ఒక సదిశ పరిమాణము లేదా మాపం 'a' మరియు $\overrightarrow{AB}$ కి దిశ A నుండి B వైపు ఉంటుంది. మరియు దీని పరిమాణము $|\overrightarrow{AB}| = a$
- దత్త సదిశ $\vec{a}$ కి పొడవులో సమానంగా ఉంటూ దిశ మాత్రం వ్యతిరేకంగా ఉన్న సదిశను $\vec{a}$ కు రుణ సదిశ అంటాం. దీనిని $-\vec{a}$ తో సూచిస్తాము.

- ఒక యూనిట్ సదిశ పరిమాణము ఒకటి. $\vec{a}$ కు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశ a ను $\hat{a}$ తో సూచిస్తారు. $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- శూన్య సదిశను $\vec{O}$ తో సూచిస్తారు. దీని పరిమాణము O దీనికి దిశలేదు.
- అదిశల సంకలనము మాదిరిగా కాకుండా, సదిశల సంకలనాన్ని త్రిభుజ సంకలన న్యాయము ప్రకారం చేస్తాము. అందుకని రెండు సదిశల సంకలనము యొక్క పరిమాణము, వాటి వేరు వేరు సదిశల పరిమాణా సంకలనమున కంటే తక్కువగా లేదా సమానంగా ఉంటుంది.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సదిశలు ఒకే దిశలో లేదా సమాంతరంగా ఉన్న ఈ సదిశలను సరేఖీయ సదిశలు అంటాము.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సదిశలు సతలీయాలు కావాలంటే అవి సమతలానికి సమాంతరంగా ఉన్న తలంపై కాని లేదా అదే తలంపై కాని ఉండాలి.
- $\vec{a}$ అనేది సదిశ, x అనేది అదిశ అయితే $x\vec{a}$ అనేది సదిశ. దీని పరిమాణము $\vec{a}$ యొక్క మాసానికి $|x|$ రెట్లు ఉంటుంది. మరియు దిశ సమానము లేదా $\vec{a}$ కి వ్యతిరేఖ దిశలో ఉండాలంటే $x > 0$ లేదా $x < 0$ లపై ఆదారపడి ఉంటుంది.
- సరేఖీయం గాని రెండు సదిశలు ఒక సమతలంపై ఉంటే దానిని రేఖీయ సంయోగంగా సూచిస్తాము.
- ఇచ్చిన మూడు అతలీయ సదిశల రేఖీయ సంయోగాన్ని అంతరాళంలో ఒక సదిశగా సూచించవచ్చు.
- రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క స్థాన సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు, ఆ రేఖాఖండాన్ని ఒక బిందువు $m : n$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా / బాహ్యంగా విభజిస్తే ఆ బిందువు స్థాన సదిశ $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}, \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{m-n}$
- రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క స్థాన సదిశలు $\vec{a}, \vec{b}$ లు ఈ రేఖా ఖండాన్నికి మధ్య బిందువు స్థాన సదిశ $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ అవుతుంది.
- $\vec{a}, \vec{b}$ సదిశల అదిశాలబ్దం $= \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$ ఇక్కడ $\vec{a}, \vec{b}$ ల మధ్య కోణము θ

- $\vec{a}, \vec{b}$ సదిశల సదిశా లబ్ధం $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n}$ ఇక్కడ θ, $\vec{a}, \vec{b}$ ల మధ్యకోణము $\hat{n}$ యూనిట్ సదిశ $\vec{a}, \vec{b}$ ల తలానికి లంబంగా ఉంటుంది.
- a, b లు రెండు సదిశలు అయితే $a \,.\, b = b \,.\, a$
- $i \,.\, i = j \,.\, j = k \,.\, k = 1;\ i.j = j.k = k.i = 0$
- $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k;\quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ అయితే $a.b = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$.
- a, b లు లంబసదిశలు అయితే $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$
- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right)$ అయితే $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1 + a_2 + a_3}\sqrt{b_1 + b_2 + b_3}}\right)$
- తలం సదిశా సమీకరణం $(r - a) \,.\, n = 0$
- తలాల మధ్యకోణం $\cos\theta = n_1.n_2$.
- రెండు సదిశల సదిశాల లబ్ధం $a \times b = (|a|\ |b| \sin\theta)n$
- i, j, k లు లంబత్రయం అనుకొంటే $i \times i = j \times j = k \times k = 0\ \ i \times j = k,\ j \times k = i, k \times i = j$ అవుతుంది.
- సదిశల మధ్యకోణం θ అయితే $\sin\theta = \frac{\sqrt{\Sigma(a_2 b_3 - a_2 b_2)^2}}{\sqrt{z a_1^2}\ \sqrt{z b_1^2}}$
- a, b లకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశలు $= \frac{\pm(a \times b)}{|a \times b|}$
- సదిశా వైశాల్యం (కర్ణాలలో) $= \frac{1}{2}(\mathrm{AC} \times \mathrm{BD})$
- $r = a + tb,\ r = c + sd\ \ t, s \in \mathrm{R}$ అయితే వాటి మధ్య కనిష్టదూరం $\frac{|(a-c).(b \times d)|}{|b \times d|}$.
- a, b, c మూడు సదిశాలెతో, సదిశాత్రిక లబ్ధం

  $(a \times b) \times c = (a \,.\, c)\, b - (b \,.\, c)a$

  $a \times (b \times c) = (a \,.\, c)b - (a \,.\, b)c$

- నాలుగు సదిశల అదిశ, సదిశల లబ్ధాలు

  a, b, c, d నాలుగుకు దిశాలై

  i) $(a\times b)\,.\,(c\times d)=\begin{vmatrix} a.c & a.d \\ b.c & b.d \end{vmatrix}$

  ii) $(a\times b)\times(c\times d)=[acd]a-[bcd]c$

సహాయక వెబ్‌సైట్లు

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

సాధనా అభ్యాసం

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ లు మూడు సదిశలు అనుకొందాము. ఇందు ఏ రెండు సదిశ సరేఖీయాలు కావు. ఇక్కడ $\bar{a}+\bar{b}$ సదిశ $\bar{c}$ లు సరేఖీయాలు మరియు $\vec{b}+\vec{c}$ మరియు $\vec{a}$ లు సరేఖీయాలు అయితే $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి.

2. x మరియు y లు రెండు ఒకే సారి శూన్యం కాని వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $x\,\vec{a}+y\vec{b}=\vec{O}$ అయితే $\vec{a},\vec{b}$ లు శూన్యేతర సదిశలు, సరేఖీయాలు అని చూపండి.

3. ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో భుజము CD మధ్య బిందువు M. $\overrightarrow{BD}$ మరియు $\overrightarrow{AM}$ సదిశలను $\overrightarrow{BM}$ మరియు $\overrightarrow{MC}$ లలో కనుక్కోండి.

4. $\vec{a},\vec{b}$ సదిశల మొత్తము యొక్క పొడవు, $\vec{a}-\vec{b}$ సదిశ యొక్క పొడవుకు (I)తక్కువగా, (II) సమానముగా లేదా (III) ఎక్కువగా ఉంటుందా కనుక్కోండి.

5. $\vec{a},\vec{b}$ లు సరేఖీయాలు కాని సదిశలు అనుకొందాము. $(2-x)\,\vec{a}+\vec{b}$ మరియు $y\,\vec{a}+(x-3)\vec{b}$ లు సమానాలు అయితే x మరియు y అనే సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

6. $\vec{a},\vec{b}$ లు సరేఖీయాలుకావు. $3\vec{a}+x\vec{b}$ మరియు $(1-x)\,\vec{a}-\frac{2}{3}\,\vec{b}$ లు సమాంతర సదిశలు అయితే x విలువ కనుక్కోండి.

7. $\vec{a} = -2i + 3j + yk$ అనే సదిశ $\vec{b} = xi - 6j + 2k$ తో సరేఖీయం అయితే x, y ల విలువలు కనుక్కోండి. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

8. $\vec{a} = 3i - 5j + 8k$ మరియు $\vec{b} = -i + j - 4k$ లు సదిశలు అయితే పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

9. $\vec{a} = -6i + 3j - 2k$ అయితే $\vec{a}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి

10. $3i - 2j + k, -2i + 4j + k$ అనే సదిశల ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

11. P అనే కణంపై ఈ క్రింది బలాలు వని చేసినపుడు $\overrightarrow{F1} = 2i + j - 3k, \overrightarrow{F2} = -3i + 2j + 2k$ మరియు $\overrightarrow{F3} = 3i - 2j + k$ (a) బలాల ఫలిత సదిశ (b) ఫలిత సదిశ పరిమాణాన్ని న్యూటన్‌లలో తెలపండి.

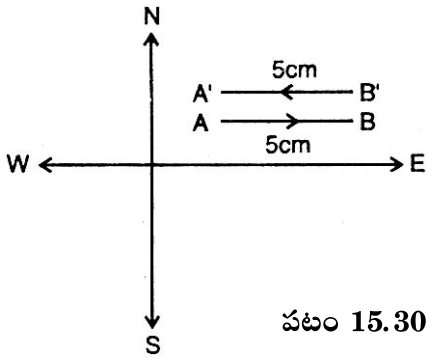
12. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$లు ఏవేని మూడు అతలీయాలు అయితే $(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}), (2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c})$ మరియు $(-3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$ లు సతలీయాలు అని చూపండి.

జవాబులు

అభ్యాసం 15.1

1. (d) 2. (b)

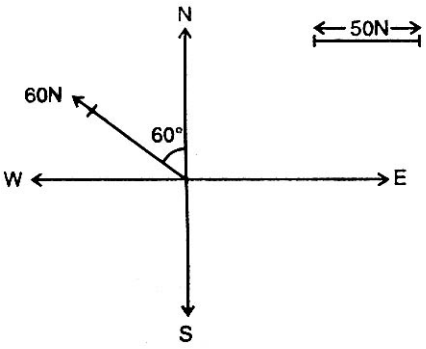
3.



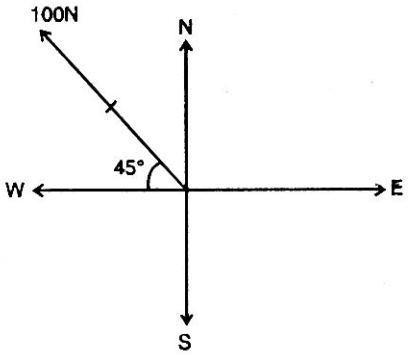
పటం 15.30

4. రెండు సదిశల పరిమాణాలు ఏవైనప్పటికి దిశలు మాత్రము ఒకటే యుంటె అసదిశలు సజాతీయ సదిశలు, రెండు సదిశల పరిమాణము మరియు దిశలు ఒకటే యుంటే వాటిని సమాన సదిశలు అంటాము.

5.



పటం 15.31



పటం 15.32

అభ్యాసం 15.2

1. $\vec{O}$ 2. $\vec{O}$

అభ్యాసం 15.3

1. $\vec{b}-\vec{a}$

2. (i) $\vec{a}$ దిశలో ఇది ఒక సదిశ మరియు దాని పరిమాణము $\vec{a}$ సదిశకు మూడు రెట్లు

   (ii) $\vec{b}$ దిశకు వ్యతిరేఖ దిశలో సదిశ మరియు దాని పరిమాణము $\vec{b}$ సదిశకు 5 రెట్లు

3. $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

4. $|y\vec{n}| = y\,|\vec{n}|$ if $y > 0$

   $= -y\,|\vec{n}|$ if $y < 0$ (5) vector

   $= 0$ if $y = 0$

6. $\vec{p} = x\vec{q}$, x is a non zero scalar.

అభ్యాసం 15.4

1. $\vec{c} = x\,\vec{a} + y\vec{b}$ ఇక్కడ x, y అదిశలు
2. $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$
3. $\overrightarrow{OP} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$
5. $\frac{1}{7}(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k})$
6. $\frac{1}{\sqrt{51}}\hat{i} - \frac{5}{\sqrt{51}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{51}}\hat{k}$

అభ్యాసం 15.5

1. (i) $\frac{1}{5}(2\,\vec{a} + 3\vec{b})$ (ii) $3\,\vec{a} - 2\,\vec{b}$
2. $\frac{1}{7}(4\,\vec{p} + 3\vec{q})$
3. $\frac{1}{3}(2\,\vec{c} + \vec{d})$, $\frac{1}{3}(\vec{c} + 2\,\vec{d})$

అభ్యాసం 15.6

1. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

అభ్యాసం 15.7

1. $\lambda = 3$
2. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{46}}\right)$
3. $r^2 - (i + 3j - 2k) \,.\, r - 10 = 0.$

అభ్యాసం 15.8

1. $\sqrt{210}$
2. $\neq \frac{1}{\sqrt{6}}(2i - j - k)$
3. 3

4. $\frac{41}{2}$

5. $50\sqrt{2}$

అభ్యాసం 15.9

1. $\frac{1}{6}$
2. 0
3. 12
4. $\lambda = -3$
6. $\frac{4}{3}$
8. $5\sqrt{14}, \sqrt{54}$

సాధనా అభ్యాసం

1. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}, = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}$
4. (i) అవును, $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు ఒకే దిశలో యున్న శూన్యేతర సదిశలు లేదా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సరేఖీయాలు కాని సదిశలు

   (i) అవును, $\vec{a}$, $\vec{b}$ లు వ్యతిరేఖ దిశలో యున్న సదిశలు లేదా ఏదో ఒకటి శూన్యసదిశ.

   (ii) అవును, $\vec{a}, \vec{b}$ లు వ్యతిరేఖ దిశలో యున్న సదిశలు
5. $x = 4, y = -2$
6. $x = 2, -1$
7. $x = 4,\ y = -1, |\vec{a}| = \sqrt{14}, |\vec{b}| = 2\sqrt{14}$
8. $|\vec{a} + \vec{b}| = 6, |\vec{a} - \vec{b}| = 14$
9. $-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$
10. $\pm\frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$
11. $2\hat{i} + \hat{j}\ ;\ \sqrt{5}$

ఇంటర్మీడియట్ (TOSS)

మాదిరి ప్రశ్నాపత్రం

గణితశాస్త్రం

నోట్స్

సూచనలు :

(i) అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(ii) ఈ ప్రశ్నాపత్రం విభాగం A, B మరియు C లను కలిగి ఉన్నది.

విభాగం - A

(ప్రతి ప్రశ్నకు 2 మార్కులు) **$10 \times 2 = 20$ M**

1. $3 - 4i$ సంకీర్ణ సంఖ్యకు సంకీర్ణ సంయుగ్మాన్ని కనుక్కోండి.

2. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ సమీకరణానికి 1, 1, α లు మూలాలైన α విలువను కనుక్కోండి.

3. (6, 3) మరియు (4, 10) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ వాలును కనుక్కోండి.

4. దీర్ఘవృత్తము $x^2 + 8y^2 = 33$ నకు $(-1, 2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

5. $2x - y + z = 6$ మరియు $x + y + 2z = 3$ తలాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

6. $y = \sqrt{6 - x}$, $x \in \mathbf{R}$ ప్రమేయానికి ప్రదేశాన్ని కనుక్కోండి.

7. $y = \text{Tan } 3x$ ప్రమేయానికి ఆవర్తనాన్ని కనుక్కోండి.

నోట్స్

8. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{2x}-1}{x}$ విలువను కనుక్కోండి.

9. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 0$ అవకలన సమీకరణానికి పరిమాణం మరియు తరగతిని కనుక్కోండి.

10. ఒక పాయిజాన్ చలరాశి P(X = 1) = P(X = 2)ను తృప్తి పరుస్తుంది P(X = 5) ను కనుక్కోండి.

విభాగం - B

(ప్రతి ప్రశ్నకు 4 మార్కులు) **8×4 = 32 M**

11. గణితానుగమన సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $\frac{1}{4\cdot 1}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ n పదాల వరకు $= \frac{n}{3n+1}$, $n \in N$ అని నిరూపించండి.

12. $(2x + 3)^7$ విస్తరణలో 4వ పదాన్ని కనుక్కోండి.

13. $2x - 3y + k = 0$, $3x - 4y - 13 = 0$ మరియు $8x - 11y - 33 = 0$ సరళరేఖలు అనుషక్తాలు అయితే k విలువను కనుక్కోండి.

14. a, b, c లు అతలీయాలు అయితే $3a - 7b - 4c$, $3a - 2b + c$ మరియు $a + b + 2c$ సదిశలు సతలీయాలు అని చూపండి.

15. $\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]$ ను కనుక్కోండి.

16. $y = \log(\sec x + \tan x)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

17. ఒక వృత్తంలో అంతర్లిఖిత దీర్ఘచతురస్రాలలో చతురస్రానికి గరిష్ఠ వైశాల్యం ఉంటుందని చూపండి.

నోట్స్

18. ఏవేని రెండు ఘటనలు A, B లకు P(A) = 0.8, P(B) = 0.6, P(A $\cap$ B) = 0.5 అయినా (i) P(A $\cup$ B) (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ లను కనుక్కోండి.

విభాగం - C

(ప్రతి ప్రశ్నకు 8 మార్కులు) **6×8 = 48 M**

19. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ అని నిరూపించండి.

20. బిందువులు (1, −6), (5, 2), (7, 0), (−1, C) లు చక్రీయాలయితే C విలువను కనుక్కోండి.

21. $r = (6i + 2j + 2k) + t(i - 2j + 2k)$ మరియు $r = (-4i - k) + s(3i - 2j + 2k)$ అసౌష్ఠవ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరాన్ని కనుక్కోండి.

22. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ అని నిరూపించండి.

23. $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ విలువను కనుక్కోండి.

24. కింది పౌనఃపున్య విభాజనానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

x_i	5	7	9	10	12	15	16
f_i	2	4	5	8	4	2	3


నోట్స్