1 اکائیاں اور پیمائشات

(Units and Measurements)

تمہید(Introduction):

علم سائنس میں، خاص طور پر علم طبیعات میں ہم کوشش کرتے ہیں کہ پیمائشات باقاعدگی سے ممکن ہوسکے۔

علم سائنس کی تاریخ میں، باقاعدہ پیمائشات، نئے ایجادات یا ترقی کو فروغ دیتی ہے۔ واضح طور پر ہر ایک پیمائش کو اکائیوں میں ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر، اگر آپ اپنے کمرہ کے طول کی پیمائش کرتے ہیں، اس کو مخصوص اکائیوں میں ظاہر کرتے ہیں۔ اسی طرح، اگر آپ کسی دو وقوعوں کے درمیان وقفہ کی پیمائش کرنا چاہتے ہیں تب اس کے کوئی اور اکائیاں ہوں گی۔ کسی مادی مقدار کو بین الاقوامی اصول کے تحت مختص اکائیوں میں ظاہر کرتے ہیں۔ بنیادی اکائیوں کا تصور ابعاد کو فروغ دیتا ہے۔ جیسا ہم دیکھتے ہیں۔ طبیعات میں اہم اطلاق ہے۔

مقاصد(Objectives):

اس سبق کو پڑھنے کے بعد، آپ قابل ہوں گے:

- بنیادی و اخذ کردہ اکائیوں کے درمیان فرق کرنے کے۔
- بین الاقوامی اکائی نظام کو سمجھیں گے۔
- مختلف وضع کی اشکال کی پیمائشات کی شناخت کریں گے اور ان کی اہمیت کو سمجھیں گے۔
- مختلف طبعی مقداروں کے ابعاد کو لکھیں گے۔
- مساوات کی درستگی کی جانچ کے لئے ابعادی تجزیہ کا اطلاق کریں گے۔ اور نامعلوم مقداروں کی ابعادی نیچر معلوم کریں گے۔

1.1 پیمائش کی ضرورت(Need for Measurement):

طبیعات علم سائنس کی ایک شاخ ہے، جو نیچر پر مبنی ہے، اور قدرتی مظاہر پر قدرت کے مظاہر کی مکمل جانکاری، مقداروں کی پیمائش کا دخل بھی ضروری ہے۔ مثال کے طور پر ذرہ کی حرکت کا علم، اس کے نقل مکان کی پیمائش، رفتار اور اسراع وغیرہ کی صحیح پیمائش، اس کے لئے وقت کی اور فاصلہ کی پیمائش کرنا ہوتا ہے۔ اسی طرح حجم، دباؤ اور تپش کی پیمائش ضروری ہے۔ گیس کی حالت کے مطالعہ کے لئے۔ معایات کی صورت میں، کمیت، حجم اور تپش کی پیمائش ضروری ہے حرارت کے مطالعہ کے لئے، یہ پیمائش کی ضرورت کو ظاہر کرتا ہے۔

1.2 پیمائش کی اکائی:

کوئی بھی مقدار جس کی پیمائش کی جاسکتی ہو طبعی مقدار کہلاتی ہے۔ طبیعات کے قوانین طبعی مقدار میں ظاہر ہوتے ہیں جیسے فاصلہ، دوڑ، وقت، قوت، حجم، برقی وغیرہ۔ طبعی مقدار جو دوسرے مقدار سے مبرہ ہے، بنیادی مقدار یا Base Quantity کہلاتی ہے۔ ایک طبعی مقدار دوسری مقداروں سے لی جاتی ہیں اخذ کردہ اکائیاں (Derived Quantity) کہلاتی ہے۔ کسی بھی طبعی مقدار کی پیمائش کے لئے اسی کی طرح

معیاری مقدار ضروری ہے اور یہ ''اکائی'' کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر وقت کی پیائش سکنڈ میں' گھنٹوں میں کی جاتی ہے۔ لیکن مختلف لوگوں کے درمیان کارآمد مواصلات کے لئے اس اکائی کو ایک معیاری اکائی سے تقابل ضروری ہے جو سب کے لئے قابل قبول ہو۔ دوسری مثال میں' اگر ہم کہتے ہیں کہ ممبئی اور کلکتہ کے درمیان فاصلہ 2000 کلومیٹر ہے' ہمارے ذہن میں بنیادی اکائی سے اس کا تقابل ہوتا ہے جو کلومیٹر کہلاتا ہے۔ دوسری اکائیاں جو تمہیں واقف ہونا ضروری ہے وہ کمیت کے لئے کلوگرام اور وقت کے لئے سکنڈ ہے۔ یہ ضروری ہے کہ تمام معیاری اکائی سے اتفاق کریں۔ اس طرح جب ہم کہتے ہیں' 100 کلومیٹر' 10 کلومیٹر یا 10 گھنٹے' دوسرے لوگوں کو اس کی تفہیم ہی نہیں ہوتی بلکہ ان کو ایک اندازہ ہوتا ہے کہ اس کے کیا معنی ہیں۔ سائنس میں بین الاقوامی معاہدہ ضروری ہے بنیادی اکائیوں پر' جو بے حد ضروری ہے۔ ورنہ ایک خطے کے سائنسداں مشکل محسوس کریں گے کہ دنیا کے دوسرے خطے میں تحقیقات کے نتائج کس طرح سمجھائیں۔ طبعی مقدار کی پیائش ہندسوں میں اکائی کے ساتھ ظاہر کی جاتی ہے' مثال کے طور پر' طول 10 میٹر' جس میں 10 ہندسہ ہے اور میٹر طول کی پیائش کی اکائی ہے۔ تمام طبعی مقداروں کو ظاہر کرنے کے لئے کم اکائیاں کافی ہوتی ہیں چونکہ ان کے درمیان باہمی تعلق ہوتا ہے۔ اکائیاں جو بنیادی مقدار یا Base مقدار کے لئے ہوتی ہیں۔ بنیادی یا Base اکائیاں کہلاتی ہیں۔ مثال کے طور پر طول' کمیت اور وقت بنیادی اکائیاں ہیں اور ان کی باہمی اکائیاں میٹر' کلومیٹر اور سکنڈ ہیں۔ طبعی مقدار کی اکائیاں جو Base اکائیوں کے جوڑ سے ظاہر ہوتی ہیں وہ اخذ کردہ اکائی (Derived units) کہلاتی ہیں۔ مثال کے طور پر رقبہ' دباؤ اور کثافت کی اکائیاں اخذ کردہ اکائیاں ہیں۔ ان سے باہمی تعلق رکھنے والی اکائیاں' مربع میٹر' پاسکل...... جو بنیادی اکائیوں سے اخذ کی گئی ہیں۔

1.3 اکائیوں کا نظام (System of Units):

بنیادی اکائیوں کی پیائش کے لئے جیسے کمیت اور وقت کے لئے تین معیاری اکائیوں کے نظام ہیں۔ وہ (i) FPS (British)' (ii) CGS' (iii) MKS (Metric) جن کو جدول 1.1 میں بتایا گیا ہے۔

جدول: 1.1 اکائیاں

S.No	نظام	طول	کمیت	وقت
1	FPS	فٹ	پاؤنڈ	سکنڈ
2	CGS	سمر	گرام	سکنڈ
3	MKS	میٹر	کلوگرام	سکنڈ

وقت کی ضرورت کے مطابق یہ محسوس کیا گیا کہ صرف طول' کمیت اور وقت ہی اخذ کردہ اکائیوں کے لے کافی نہیں ہے۔ مابعد چار اور طبعی اکائیوں جیسے تھرموڈینامک تپش (Thermodynamic Temperature)' Illuminating power' Strength and Electric Current اور مادہ کی مقدار کو بنیادی اکائیوں کے طور پر اضافہ کیا گیا۔ اس کے علاوہ Plane Angle اور Solid Angle کو بھی اضافی بنیادی اکائیوں کے طور پر شامل کیا گیا۔

1.4 SI نظام (SI System):

1971 میں 24 ویں جنرل کانفرنس' اوزان اور ان کی پیائشات پر رکھی گئی۔ جس میں حقیقی و جامع اکائی کے نظام کو منظوری دی گئی جو SI کہلاتی ہے۔ جو درحقیقت System of International Units یا International System of Units کہلاتا ہے۔ اس نظام میں سات بنیادی اکائیوں کو اپنایا گیا۔ یہ اکائیاں SI نظام کہلاتا ہے۔ SI نظام ''میٹرک نظام'' (Metric System) سے بھی جانا جاتا ہے۔

ذیل کے جدول میں SI اکائیاں علامتوں کے ساتھ دی گئی ہیں۔

جدول 1.2: Base SI Units

بنیادی مقدار	اکائی	علامت
طول	میٹر	m
کمیت	کلوگرام	kg
وقت	سکنڈ	s
الکٹرک کرنٹ	ایمپیئر	A
تپش	کیلوین	K
روشنی کی مدت Illuminous Intensity	Candela	cd
مادہ کی مقدار	مول	mol
مسطح زاویہ Plane Angle	ریڈین	rad
ٹھوس زاویہ Solid Angle	Steradian	Sr.

جیسا کہ ہم جانتے ہیں SI نظام میٹرک نظام ہے۔اسکو آسانی سے استعمال کر سکتے ہیں چونکہ بنیادی اکائیوں کے چھوٹے اور بڑے اکائیاں دس کے جز ضربی یا ذیلی جز وضربیاں ہوتی ہیں۔ یہ جز وضربیاں یا ذیلی جز وضربیاں' کو مخصوص نام دیے گئے ہیں جو جدول 1.3 میں دیئے گئے ہیں۔

جدول 1.3: 10 کی قوت کے سابقے

دس کی قوت	سابقے	علامت	مثال
10^{-18}	atto	a	اٹومیٹ Attometre=(am)
10^{-15}	femto	f	فیمٹو میٹر Femtometre=(fm)
10^{-12}	pico	p	پیکوفراڈ Picafarad=(pf)
10^{-9}	nano	n	نیانو میٹر (Nanometre(nm)
10^{-6}	micro	m	میکرون (Micron=(mm)
10^{-3}	milli	m	ملی گرام Milligram(mg)
10^{-2}	centi	c	سنٹی میٹر Centimetre(cm)
10^{-1}	deci	d	ڈسی میٹر Decimetre=(dm)
10^{1}	deca	Da	ڈکا گرام Decagram=(dag)
10^{2}	hecto	H	ہیکٹو میٹر Hectometre(Hm)
10^{3}	kilo	K	کلوگرام Kilogram(kg)
10^{6}	mega	M	میگاواٹ Megawatt(mw)
10^{9}	giga	G	گیگا ہرٹز Gigahertz(GHz)
10^{12}	tera	T	ٹیرا ہرٹز Terahertz(THz)
10^{15}	peta	P	پیٹا کلوگرام Petakilogram(pkg)
10^{18}	exa	E	اکزا کلوگرام Exakilogram(Ekg)

جدول 1.4: چند کمیتوں کی ترتیب وار مقداریں

کمیت Mass (kg)	شئے (Object)
10^{-30}	الکٹران
10^{-27}	پروٹان
10^{-25}	امینو ایسڈ
10^{-22}	ہیموگلوبین
10^{-19}	فلو وائرس
10^{-8}	بڑا امیوبا
10^{-6}	بارش کا قطرہ
10^{-2}	چیونٹی
10^{2}	انسان
10^{6}	Saturn 5 Rocket
10^{10}	اہرام مصر (Pyramid)
10^{24}	زمین
10^{30}	سورج
10^{41}	کہکشاں (Galaxy)
10^{55}	کائنات

جدول 1.5: چند طول کے ترتیب وار مقداریں

مقدار (m)	طول
10^{-15}	پروٹان کا نصف قطر
10^{-10}	جوہر کا نصف قطر
10^{-7}	وائرس کا نصف قطر
10^{-4}	بڑے امیوبا کا نصف قطر
10^{-2}	اخروٹ کا نصف قطر
10^{4}	بلند پہاڑ کی بلندی
10^{7}	زمین کا نصف قطر
10^{9}	سورج کا نصف قطر
10^{11}	سورج ۔ زمین کا فاصلہ
10^{13}	شمسی نظام کا نصف قطر
10^{16}	قریب کے تارے تک کا فاصلہ
10^{21}	کہکشاں (Galaxy) کا نصف قطر
10^{26}	ظاہر کائنات کا نصف قطر

جدول 1.6:   وقت کے وقفہ کی ترتیب وار مقداریں

سکنڈ Second (S)	وقفہ (Interval)
10^{-23}	روشنی کا مرکزہ سے گذرنے کا وقت
10^{-15}	نظر آنے والی روشنی کی مدت
10^{-10}	میکروشعاعوں کی مدت
10^{-6}	چاند کی نصف عمر
10^{-4}	صاف سنائی دینے والی آواز کی مدت
10^{0}	انسان کے دل کی دھڑکن کی مدت
10^{3}	آزاد نیوٹران کی نصف عمر
10^{5}	زمین کی گردش کی مدت (دن میں)
10^{7}	زمین کی مداری گردش کی مدت (ایک سال میں)
10^{9}	انسانی زندگی کی حد عمر
10^{12}	پلوٹونیم کی نصف عمر (239)
10^{15}	پہاڑی سلسلہ کی حد عمر
10^{17}	زمین کی حد عمر
10^{18}	کائنات کی عمر

1.4.1 کمیت، طول اور وقت کی پیمائشات (Measurements of Mass, Length and Time)

SI اکائیوں کے نظام کا ایک بار انتخاب کرلیا گیا۔ تب ہم کو معیاری سٹ کا انتخاب کرنا ہوگا تاکہ ان کی پیمائش کی جاسکے۔ ہم یہاں کمیت، طول اور وقت کے معیارات کی تعریف کرتے ہیں۔

Fig. 1.1 : Prototype of Kilogram

کمیت (Mass): کمیت کی SI اکائی کلوگرام ہے۔ معیاری کلوگرام 1887 میں قائم کیا گیا۔ یہ ایک مخصوص سلنڈر کی کمیت ہے۔ جو پلاٹینم اور ریڈیم کے لوٹ سے بنا ہوا ہے۔ جو عام طور پر مستحکم لوٹ ہے۔ معیاری اکائی کو انٹرنیشنل بیورو آف ویٹ اور پیمائش، پیرس میں رکھا ہے جو فرانس میں ہے۔ کلوگرام کے نمونے جو وہی لوٹ سے بنائے گئے ہیں ساری دنیا میں تقسیم کردئے گئے۔ ہندوستان کے لئے نمونہ کلوگرام 57 ہے۔ اس کی نگرانی نیشنل فزیکل لیبارٹری کرتی ہے جو نئی دہلی میں واقع ہے۔

طول (Length): طول کی معیاری اکائی میٹر ہے۔ قدرتی مظہر سے واضح کیا گیا ہے۔ ایک میٹر روشنی کا خلاء میں 1/299792458 سکنڈ میں طئے کرتا فاصلہ ہے۔ میٹر کی تعریف منی ہے روشنی کا خلاء میں $299792458\ ms^{-1}$ فاصلہ طئے کرنا۔

وقت (Time): ایک سکنڈ کی تعریف اس طرح ہے (Cesium-IUPAC)، 133(133cs) ایٹم راس کی عام حالت میں 9192631770 ارتعاشات کرتا ہے۔ سکنڈ کی یہ تعریف ایٹمی گھڑی بنانے میں مدد دیتی ہے۔ Cesuirin گھڑی نیشنل پارک لیبارٹری

(NPL) جو ہندوستان میں واقع ہے محفوظ طور پر رکھی گئی ہے۔ $1 \times 10^{-12} \pm$ جو ایک پیکوسکنڈ کے، جو ایک سکنڈ کے وقت دوران میں واقع ہو۔

آج کل گھڑی 5 حصوں میں جو 10^{15} کے ہیں تیار کی گئی ہے۔ اس کے معنی اگر یہ گھڑی 10^{15} سکنڈ دوڑتی ہے یہ 5 سکنڈ سے کم یا زیادہ حاصل کرتی ہے۔ آپ 10^{15} کو سالوں میں تبدیل کرتے ہوئے حیرت انگیز نتیجہ دیکھتے ہیں کہ گھڑی 6 ملین سال تک چلتی رہے گی اس دوران وہ ایک سکنڈ، حاصل کرے گی یا کھوسکتی ہے۔ یہی نہیں بلکہ تمام تر سائنسداں اس کی درستگی کو مستقل کرنے میں جڑے ہیں۔ ہم ایسی گھری کی امید کرتے ہیں جو......سکنڈ میں، ایک سکنڈ کھوتی ہے ہو یا حاصل کرتی ہو۔ اگر یہ گھڑی کائنات کے پیدا ہوتے وقت شروع ہوتی، تب یہ وقوع Big Bang کہلاتا ہے۔ یہ اب تک صرف دو سکنڈ کھوتی یا حاصل کرتی۔

1.5 درستگی، پیمائشات میں آلہ/اوزار کی درستگی اور نقص

طبعی مقدار کی پیمائش، ہندسی قدر ہوتی ہے، طبعی مقدار کی پیمائش کے لئے کئی اوزار/آلے استعمال ہوتے ہیں۔ پیمائش منحصر ہوتی ہے، اوزار پر، طریقہ کار پر اور شخص کی مہارت پر جو استعمال کررہا ہو۔

کسی بھی آلے یا اوزار سے کی گئی پیمائش میں بے قاعدگی پائی جاتی ہے جس کو (نقص) Error کہتے ہیں۔ پیمائش کا صحیح ہونا اس کے نتیجہ پر منحصر ہوتا ہے۔ اگر پیمائش کی گئی قدر حقیقی قدر کے قریب ہو تب وہ صحیح قدر (Accurate Value) کہلاتی ہے۔ طبعی مقدار کی بار ہا پیمائش کی جاتی ہے اور پیمائش کی گئی قدر درستگی (Precision) کہلاتی ہے۔

صحیح قدر (Accuracy): حقیقی قدر سے قریب ترین قدر جو کسی طبعی مقدار کی پیمائش پر حاصل ہوتی ہے (Accuracy) صحیح قدر کہلاتی ہے۔

درستگی (Precision): ایک طبعی مقدار کی بار ہا پیمائش پر دہرائی گئی قدر Precision کہلاتی ہے۔

نقص (Error): پیمائش میں بغیر غلطیوں کے غیر درستگی نقص کہلاتا ہے۔

1.6 نقص کے اقسام (Types of Errors):

پیمائشات میں نقص کو منظّم نقص اور بے ترتیب نقص میں درجہ بندی کی گئی ہے۔

16.1 منظّم نقص (Systamatic Error):

نقائص جو کسی خاص وجہ سے اصول کی پابندی کرتے ہوں منظّم نقص کہلاتے ہیں۔ مثلاً: آلہ کا نقص، نظریاتی نقص اور ذاتی یا اختلافی نقص وغیرہ۔

آلات کا نقص (Instrumental Error): آلات کا صحیح طور پر ڈیزائن نہ ہونا اور پیمائش میں نقص ہونا، آلات کا نقص کہلاتا ہے۔ اسکی تصحیح بہتر آلات کے استعمال سے ہوسکتی ہے۔ مثلاً: اسکروگیج میں صفر غلطی 0.04+ ملی میٹر ہے۔ اس کی درستگی -0.04mm ہوگی۔ ایک تار کے قطر کی پیمائش، اسکروگیج کی مدد سے کرنے پر 10.04mm ہے۔ درستگی کے بعد قدر 10.04-0.04=10.00 ملی میٹر ہے۔ اس آلہ سے کی جانے والی ہر پیمائش میں 0.04 غلطی ہوگی۔

نظریاتی نقص(Theoritical Error): نقص عموماً ضابطہ کو اخذ کرنے کے دوران واقع ہوتا ہے' نظریاتی نقص کہلاتا ہے۔

مثلاً: سادہ رقاص کے وقت دوران کی پیائش میں θ کی چھوٹی قدر کے لئے۔ اگر زاویہ $\theta \approx \theta$ ہے۔ نقص 0.02% ہوگا۔ اگر Amplitude زیادہ ہوگا تب نقص زیادہ ہوگا۔ رقاص کے طول کو چھوٹا کرتے ہوئے نقص کو کم کیا جا سکتا ہے۔

ذاتی نقص(Personal Error): انسان سے ہونے والا نقص ذاتی نقص کہلاتا ہے۔ جیسا کہ مشاہد۔ مشاہدہ کے دوران نظر کو اوپر یا نیچے کرتے ہوئے مشاہدہ کی قدریں درج کرتا ہے۔ اس صورت میں ہونے والا نقص اختلافی نقص (Parallax Error) کہلاتا ہے۔

1.6.2 بے ترتیب نقص Random Errors

ایسا نقص جو ترتیب میں نہیں ہوتا' اور جو طبعی مقدار اور آلہ کی غلطی سے وقوع پذیر ہوتا ہے' بے ترتیب نقص کہلاتا ہے۔ برقی آلات کی ریڈنگ میں جو وولٹیج کی تبدیلی کی وجہ سے ہوتی ہے' اسکرو گیج کا نقص' Spherometer کا اور سفر کے دوران استعمال ہونے والا میکرواسکوپ وغیرہ کا نقص بے ترتیب نقص کہلاتا ہے۔ بے ترتیب نقص کو سدھارنے کے لئے بار ہا مشاہدہ کرنا ہوگا اور ان مشاہدوں کا اوسط لینا ہوگا۔

1.7 مطلق نقص' متعلقہ نقص اور فیصدی نقص

1.7.1 مطلق نقص(Absolute Error):

کئی پیائشات کے بعد فرض کیجئے کہ حاصل کردہ قدریں $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ ان کا اوسط حسابیہ a_m ان قدروں کی حقیقی قدر کہلاتی ہے۔

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

پیائش کی گئی قدر اور حقیقی قدر کے درمیان فرق پیائش کا مطلق نقص کہلاتا ہے۔ جو مثبت یا منفی ہوسکتا ہے۔ جس کو Δa سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\Delta a_1 = a_m - a_1$$
$$\Delta a_2 = a_m - a_2$$
$$\Delta a_3 = a_m - a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta a_n = a_m - a_n$$

1.7.2 اوسط مطلق نقص(Mean Absolute Error):

مطلق قدروں کی تمام پیائشات کا اوسط حسابیہ' اوسط مطلق نقص کہلاتا ہے۔ اس کو Δa_{mean}' سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\Delta a_{mean} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + |\Delta a_3| + \ldots\ldots + |\Delta a_n|}{n}$$

پیمائش کا آخری نتیجہ کو اس طرح لکھا جاتا ہے $a = a_m \pm \Delta a_{mean}$

متعلقہ نقص: اوسط مطلق نقص اور مقدار کی پیمائش کی اوسط قدر کا تناسب' متعلقہ نقص کہلاتا ہے جس کو Δa_{mean} سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\delta a = \frac{\Delta a_{mean}}{a_m}$$

1.7.3 فیصدی نقص (Percentage Error):

جب متعلقہ نقص کو فیصد میں ظاہر کرتے ہیں (%)' تب اس کو فیصدی نقص کہتے ہیں۔

$$\text{فیصدی نقص} = \frac{\Delta a_{mean}}{a_m} \times 100$$

مثال 1.1:

ایک تجربہ کے دوران سادہ رقاص کے ارتعاشات کے پیمائشات 2.63, 2.56, 2.71, 2.80 سکنڈ حاصل ہوئے تب مطلق نقص' اوسط مطلق نقص' متعلقہ نقص اور فیصدی نقص معلوم کیجئے۔

حل:

$$a_m = \frac{2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80}{5}$$

$$a_m = \frac{13.12}{5} = 2.624\,s$$

مطلق نقص:

$$\Delta a_1 = 2.62 - 2.63 = -0.01\ s$$
$$\Delta a_2 = 2.62 - 2.56 = 0.06\ s$$
$$\Delta a_3 = 2.62 - 2.42 = 0.20\ s$$
$$\Delta a_4 = 2.62 - 2.71 = -0.09\ s$$
$$\Delta a_5 = 2.62 - 2.80 = 0.18\ s$$

اوسط مطلق نقص:

$$: \Delta a_{mean} = \frac{|-0.01| + |0.06| + |0.20| + |-0.09| + |0.18|}{5}$$

$$\Delta a_{mean} = \frac{0.54}{5} = 0.108\,s = 0.11 \text{ (rounded off)}$$

متعلقہ نقص (Relative Error):

$$\delta a = \frac{\Delta a_{mean}}{a_m} = \frac{0.11}{2.62} = 0.04198 = 0.04$$

فیصدی نقص (Percentage Error):

$$= \frac{\Delta a_{mean}}{a_m} \times 100 = 0.04 \times 100 = 4\%$$

1.8 نقص کا مجموعہ (Combination of Errors):

اگر کئی پیمائشات پر مبنی ہم کوئی تجربہ کرتے ہیں۔ ہم کو جاننا چاہئے کہ نقص کو کیسے جوڑا جاتا ہے۔ مثلاً کسی شئے کی کثافت کو معلوم کرنے کے لے کمیت کو حجم سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر کمیت اور حجم میں نقص ہے تو ہم کو معلوم ہونا چاہئے کہ کثافت میں کیا نقص ہے۔

اس طرح کا تخمینہ لگانے کے لئے ہم کو جاننا چاہئے کہ نقائص کس طرح جوڑے جاتے ہیں، خاص کر ریاضی کے عمل کے دوران۔

مجموعہ میں نقص (Error in Sum):

فرض کیجئے کہ دو طبیعی مقداریں جن کی پیمائشات a اور b ہیں ان کا مجموعہ $X = a + b$

مزید فرض کیجئے:

Δa کی پیمائش میں مطلق نقص ہے۔

Δb کی پیمائش میں مطلق نقص ہے۔

Δx کی پیمائش میں مطلق نقص ہے۔

تب

$$x + \Delta x = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b)$$

$$x + \Delta x = a + b \pm \Delta a \pm \Delta b$$

$$\Delta x = \pm (\Delta a + \Delta b)$$

اعظم ترین x کا نقص $\Delta x = \Delta a + \Delta b$

فرق میں نقص (Error in Difference):

فرض کیجئے کہ

$$x = a - b$$

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$$

$$x \pm \Delta x = a \pm \Delta a - b \pm \Delta b$$

$$x \pm \Delta x = (a - b) \pm (\Delta a \pm \Delta b)$$

x میں اعظم ترین نقص ہوگا $\Delta x = \Delta a + \Delta b$

اس طرح اصول یہ ہے کہ، تب دو مقداریں جمع یا تفریق کئے جاتے ہیں، نتیجہ میں مطلق نقص، دراصل مقداروں کا مجموعہ مساوی ہوگا مطلق نقص کے مجموعہ کے۔

حاصل ضرب میں نقص (Error in Product):

فرض کیجئے کہ $x = ab$ تب

$$x \pm \Delta x = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

$$x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = ab\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$1 \pm \frac{\Delta x}{x} = 1 \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}$$

یہاں $\frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}$ چھوٹی مقدار ہے اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

$$\pm \frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{\Delta a}{a} \pm \frac{\Delta b}{b}$$

اس طرح اعظم ترین متعلقہ نقص $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

اسی طرح، ہم عمل تقسیم کے لئے بھی آسانی سے جانچ کر سکتے ہیں۔ اس طرح، اصول یہ ہے کہ جب دو مقداریں آپس میں ضرب کھاتے ہیں یا تقسیم کرتے ہیں، تب متعلقہ نقص، مساوی ہوتا ہے، متعلقہ نقائص کا مجموعہ پیمائش کردہ مقداروں کے۔

1.9 معنی خیز ہندسے (Significant figures):

جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا ہے، ہر پیمائش میں بنیادی طور پر نقص موجود ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے، پیمائش کے نتائج کو درج کرنا ضروری ہوجاتا ہے جو باقاعدگی کی عکاسی کرتا ہے۔ درج کی گئی قدر میں وہ تمام ہندسے ہوتے ہوتے ہیں جو قابل وثوق ہیں۔ پہلا غیر تعین ہندسہ جو ہندسے کی غیر یقینی حالت کو ظاہر کرتا ہے۔ یہ تمام باوثوق ہندسے پہلا غیر یقینی ہندسے کے ساتھ معنی خیز ہندسوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

اگر ہم کہتے ہیں کہ ایک خط جس کا طول 6.82 سمر ہے، 6 اور 8 باوثوق اور یقینی ہیں، جہاں ہندسہ 2، غیر یقینی ہے۔ اس طرح پیمائش کردہ قدر کی تین معنی خیز ہندسے ہوں گے۔

اسی طرح ایک شئے کا طول جس کی پیمائش 647.5 سمر ہے 4 معنی خیز ہندسے رکھتا ہے۔ جہاں 7,5,4 یقینی ہیں اور ہندسہ 5 غیر یقینی ہے۔

1.9.1 معنی خیز ہندسوں کی گنتی کے اصول (Rules for Counting Significant Figures):

(i) تمام ہندسہ جو صفر نہیں ہوتے معنی خیز ہوتے ہیں۔ مثلاً 315.58 پانچ معنی خیز ہندسے رکھتا ہے۔

(ii) وہ تمام صفر جو غیر صفری ہندسوں کے درمیان ہوتے ہیں معنی خیز ہوتے ہیں مثلاً 5300405.003، دس معنی خیز ہندسے رکھتا ہے۔

(iii) وہ صفر جو اعشاریہ کے بعد پائے جاتے ہیں معنی خیز ہوتے ہیں۔ مثلاً 50.00 جس میں 4 معنی خیز ہندسے ہیں جب کہ 7.40 میں تین معنی خیز ہندسے ہیں۔

(iv) عدد میں پائے جانے والے وہ صفر جو اعشاریہ سے پہلے آتے ہیں غیر یقینی کہلاتے ہیں۔ مثلاً 5000، جس میں صرف ایک یقینی ہندسہ ہے۔ اعشاریہ بعد جو صفر ہوتے ہیں، وہ یقینی ہندسے کہلاتے ہیں۔ مثلاً 3.500، 4 معنی خیز ہندسے رکھتا ہے۔

(v) اگر پیمائش ایک سے کم ہوتی ہو، تب تمام صفر جو اعشاریہ کے بائیں جانب ہوتے ہیں غیر معنی خیز کہلاتے ہیں۔ مثلاً: 0.0072 دو معنی خیز ہندسے رکھتا ہے، 0.000072 بھی دو معنی خیز ہندسے رکھتا ہے۔

(vi) دس کی قوت کے ہندسوں کو معنی خیز میں شمار نہیں ہوتا۔ مثلاً...... میں صرف دو معنی خیز ہندسے ہیں۔

(vii) معنی خیز ہندسے اکائی کی تبدیلی کے باوجود تبدیل نہیں ہوتے۔مثلاً: اگر ایک شئے کا طول 348.6 سمر ہے، تب یہ چار معنی خیز ہندسے رکھتا ہے۔اگر طول کو میٹر میں ظاہر کرتے ہیں، تب وہ 3.486 میٹر ہو جاتا ہے تب بھی اس میں 4 معنی خیز ہندسے ہوتے ہیں۔

1.9.2 پیائش کے دوران معنی خیز ہندسوں کی اہمیت

پیائش کا صحیح ہونا، اس میں پائے جانے والے معنی خیز ہندسوں پر منحصر ہوتا ہے۔فرض کیجئے کہ ایک سکہ کا قطر 2 سمر ہے۔اگر کوئی طالب علم میٹر اسکیل سے 0.1 سمر تک اس کی پیائش کرتا ہے جب وہ طالب علم 2.0 سمر درج کرتا ہے۔اس میں 2 معنی خیز ہندسے ہیں۔اگر نصف قطر کو Vernier Callipers سے پیائش کرتے ہیں جو 01. تک پیائش کرتا ہے۔تب وہ نصف قطر 2.00 سمر بتائے گا۔جس میں 3 معنی خیز ہندسے ہیں۔اسی طرح اگر نصف قطر کی پیائش اسکروگیج سے کرتے ہیں۔یہ 001. تک پیائش کرتا ہے۔جب نصف قطر کو 2.000 سمر لکھا جائے گا جس میں 4 معنی خیز ہندسے ہیں۔

1.9.3 غیر یقینی ہندسوں کو اس کے قریب تر ہندسے تک لکھنے کے اصول

(i) اگر 5 سے کم ہندسہ نکال دیں، تب بائیں جانب کی قدر میں تبدیلی نہیں ہوتی مثلاً x=7.82 کا قریب تر ہندسہ 7.8 ہے۔

(ii) 5 سے بڑے ہندسہ کو نکال دیا جارہا ہے۔تب بائیں جانب کا ہندسہ میں ایک بڑھ جاتا ہے۔مثلاً x=6.87 کا قریب تر عدد 6.9 ہے۔

(iii) عدد جو نکال دیا گیا ہے وہ 5 ہے۔جس کے آگے صفر سے بڑا عدد ہے تب عشاریہ کے بعد کے پہلے ہندسہ میں ایک کا اضافہ ہوگا۔مثلاً x=16.351 کا قریب تر عدد 16.4 ہوگا۔

(iv) اگر ہندسہ 5 کو جس کے آگے صفر ہے نکال دیں۔اگر وہ جفت ہو تو اس سے پہلا ہندسے میں اضافہ نہیں ہوگا۔مثلاً x=3.250 کو قریب تر عدد 3.2 لکھا جاتا ہے۔

(v) اگر نکالا گیا ہندسہ 5 ہے، یا 5 کے بعد صفر ہے، تب اس سے قبل کا ہندسہ ایک اضافہ ہوتا ہے، اگر وہ طاق ہے۔مثلاً x=3.750 کا قریب تر ہندسہ 3.8 ہوگا۔

1.9.4 حسابی عمل معنی خیز ہندسوں کے ساتھ، چند اصول

عمل جمع و عمل تفریق: فرض کیجئے کہ ہم کو تین مقداریں جمع کرنا ہے، جیسے 3.68m, 2.7m اور 0.486m ان مقداروں میں پہلی مقدار اعشاریہ کے ایک مقام تک ہے، تب یہ اعداد کا مجموعہ بھی اعشاریہ کے ایک ہندسہ تک ہوگا۔اس لئے ان اعداد کا صحیح مجموعہ 6.848m نہیں بلکہ 6.8m ہوگا۔

اسی طرح 2.65×10^3 سمر، اور 2.63×10^2 سمر کا مجموعہ معلوم کرنا ہو تو، تمام مقداروں کو 10 کی مساوی قوت میں تبدیل کرنا ہوگا۔ تب یہ مقداریں 2.65×10^3 اور 2.63×10^3 ہیں۔پہلا عدد اعشاریہ کے دو مقامات تک ہے۔تب اس کا مجموعہ بھی اعشاریہ کے دو مقامات تک ہوگا۔

اس طرح $2.65 \times 10^3\text{cm} + 26.3 \times 10^3 = 2.91 \times 10^3$ اسی طریقہ کو اپنا کر عمل تفریق کیا جاتا ہے۔مثلاً 2.38cm کو 4.6cm میں سے تفریق کرنے پر 2.2cm حاصل ہوگا نہ کہ 2.22cm۔

عمل ضرب و عمل تقسیم: فرض کیجئے کہ ایک پلیٹ کا طول 3.003 میٹر اور اس کی چوڑائی 2.26m ہے۔حسابی عمل سے پلیٹ کا رقبہ $6.78678\ m^2$ ہوگا۔لیکن یہ سائنٹفک پیائش میں صحیح نہیں ہے۔اس کے نتیجہ میں کل 6 معنی خیز ہندسے ہوں گے۔لیکن چوڑائی میں معنی خیز

ہندسے صرف 3 ہیں۔اس طرح عمل ضرب بھی 3 معنی خیز ہندسوں تک ہوگی۔اس طرح صحیح رقبہ......ہوگا۔

اس طرح یہی عمل، عمل تقسیم پر بھی عائد ہوتا ہے۔مثلاً 248.57 کو 56.9 تقسیم کرنے پر 1.3685413 حاصل ہوتا ہے۔لیکن نتیجہ 3 معنی خیز ہندسوں تک ہونا چاہئے۔دئے گئے اعداد میں معنی خیز ہندسے صرف 3 ہیں۔اس طرح نتیجہ 4.37 ہوگا۔

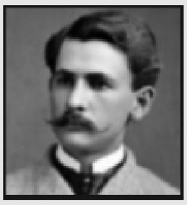
نصابی سوالات (Intext Questions)

1. دی گئی مقداروں میں معنی خیز ہندسے معلوم کیجئے، متعلقہ قوانین کی رو سے۔

(i) 426.69 (ii) 4200304.002 (iii) 4050m (v) 5000

2. ایک شئے کا طول 3.486 میٹر ہے۔اگر اس کو سمر میں ظاہر کریں گے۔تب (348.6 سمر) ہوگا۔ان دونوں صورتوں میں کیا معنی خیز ہندسوں میں تبدیلی ہوگی؟
3. سورج کی کمیت 2×10^{30} کلوگرام ہے۔ایک پروٹان کی کمیت 2×10^{-27} کلوگرام اگر سورج صرف پروٹان سے بنا ہے۔سب سورج میں پائے جانے والے پروٹان کی تعداد معلوم کیجئے۔
4. پہلے روشنی کا طول موج Angstrous میں ظاہر کیا جاتا تھا۔10^{-8} اب طول موج کو Nanometers میں ظاہر کرتے ہیں۔کتنے Angstrom ایک Nanometer ہوگا؟
5. ایک ریڈیو اسٹیشن 1370Hz تعدد پر کام کرتا ہے، اس تعدد کو GHz میں ظاہر کیجئے۔
6. ایک ڈکا میٹر میں کتنے ڈسی میٹر ہوتے ہیں اور کتنے MW، ایک GW میں ہوتے ہیں؟

Albert Abraham Michelson (1852-1931)



جرمن۔امریکن طبیعات داں، مورلے کی مدد سے Interferometer کی ایجاد کی۔یہ زمین کی گردش معلوم کرنا چاہتا تھا، ایتھر کی مدد سے، لیکن ناکامیاب ہوا۔اس طرح، ناکامیاب تجربات، سائنسدانوں کو تحقیق کرنے کی ایک جہت دی۔

Telescope کے Power میں اضافہ کے لئے اس نے اضافہ آئینے استعمال کئے۔اس کے Inferometer اور 100 ہوکس کے Telescope کی مدد سے اس نے چند تاروں کی پیائش کی۔

1.10 طبیعی مقداروں کے ابعاد (Dimensions of Physical Quantities):

اس باب میں زیادہ تر طبیعی مقدار میں پانچ بنیادی ابعاد میں ظاہر کئے گئے ہیں۔کمیت (M)، طول (L)، وقت (T)، الکٹرک کرنٹ (Z) اور تپش (θ)۔میکانکس میں تمام مقداروں کی پیائش کے لئے صرف تین ابعاد درکار ہیں۔وہ یہ ہیں: کمیت، طول اور وقت۔

طبیعی مقداروں کے ابعاد L,M اور T کی قوتوں پر منحصر ہوتی ہیں۔

(i) جسم کے لیئے 3 طول کی پیمائش کی ضرورت ہوتی ہے۔

(ii) کثافت دراصل کمیت ہوتا ہے۔ اسکے 3 ابعاد طول میں ہوں گے۔ (L^3) اس کا ابعادی جسم ضابطہ ML^{-3} ہے۔

(iii) دوڑا اکائی وقت میں طئے کردہ فاصلہ ہے یا طول/وقت ہے۔ اس کا ابعادی ضابطہ (Dimentional Formula) LT^{-1} ہے۔

(iv) اسراع، اکائی وقت میں رفتار میں تبدیلی ہوتی ہے۔ اس کا ابعادی ضابطہ LT^{-2} ہے۔

(v) قوت دراصل کمیت اور اسراع کا حاصل ضرب ہوتی ہے۔ اس کا ابعادی ضابطہ MLT^{-2}

دوسرے طبعی مقداروں کے ابعادی ضابطے بھی ان ہی پر منحصر ہوتے ہیں۔ طبعی مقدار کے ساتھ اگر ہندسہ ہوتا ہے، تب اس کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔ اگر x کے ابعاد L ہے تب 3x کے ابعاد بھی L ہوگا۔

معیار حرکت کے ابعاد لکھیئے جو حاصل ضرب ہے کمیت اور رفتار کا۔ کام، حاصل ضرب ہے قوت اور نقل مکان کا۔

یاد رکھیں کہ ابعاد، اکائیوں کی طرح نہیں ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر دوڑ کی پیمائش $m\ s^{-1}$ میں کی جاتی ہے، یا کلومیٹر فی گھنٹہ لیکن اس کے ابعاد ہمیشہ طول/وقت پر مبنی ہوں گے یعنی LT^{-1}

ابعادی تجزیہ (Dimentional Analysis):

یہ مقدار کے ابعاد کی جانچ کا ایک طریقہ ہے۔ ابعادی تجزیہ کا اہم اصول یہ ہے کہ، مساوات کے دونوں جانب پائی جانے والی مقداروں کے ابعاد مساوی ہوں۔ تب اگر $x=p+1$، p اور q کے ابعاد ایک ہوں جیسا کہ x کے ہیں۔ یہ ہم کو مساوات کی جانچ میں مدد دیتی ہے۔ یا مقداروں کے ابعاد معلوم کرنے کا طریقہ ہے۔

ذیل میں دی گئی مثالیں، ابعادی تجزیہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

مثال 1.2:

آپ جانتے ہیں کہ کسی ذرہ کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}mv^2$ ہے اور اس کی توانائی بالقوہ mgh ہے۔

جہاں v رفتار، h اس کی بلندی اور g اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔ دونوں عبارتیں ایک ہی طبعی مقدار کو ظاہر کرتے ہیں۔ وہ ہے توانائی اس کے ابعاد مساوی ہوں گے۔ اس کو ہم دونوں عبارتوں کے ابعاد لکھ کر ثابت کریں گے۔

حل:

$\frac{1}{2}mv^2$ کے ابعاد mgh کے ابعاد $(LT^{-1})^2$ یا ML^2T^{-2}، دونوں عبارتیں مساوی ہیں اور ان کی طبعی مقدار بھی یکساں ہے۔

آیئے دوسری مثال لیتے ہیں۔ مختلف طبعی مقداروں کی عبارتوں کو لیتے ہوئے۔

مثال1.3:

تجربہ بتاتا ہے کہ حالت سکون سے شروع ہوکر ایک کار x فاصلہ t وقت میں طئے کرتی ہے اور اسکا اسراع a ہے۔
اس پر ابعاد کا تجزیہ کا اطلاق کریں، تا کہ طئے کردہ فاصلہ کی عبارت معلوم کرسکیں۔

حل:

فرض کیجئے کہ x منحصر ہے t پر.....قوت نما کے اور nth قوت نما a تب ہم لکھ سکتے ہیں $x \propto t^m\ a^n$ دونوں جانب کے ابعاد لکھنے پر

$$L^1 \propto T^m \left(LT^{-2}\right)^n$$

$$L^1 \propto T^{m-2n}\, L^n$$

دونوں جانب L اور T کے قوت نماؤں کا تقابل کرنے پر آپ آسانی سے n=1 حاصل کریں گے اور

$$x \propto at^2 \quad \text{یا} \quad x \propto t^2 a^1,$$

ابعادی تجزیہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے ابعاد نہیں ہیں۔اس صورت میں ہم جانتے ہیں کہ رشتہ ہے

$$x = \frac{1}{2} at^2$$

1.2 نصابی سوالات:

1. سادہ رقاص کا تجربہ ہمیں یہ بتا تا ہے کہ رقاص کا وقت دوراں اس کے طول (l) پر اور اسراع بوجہ جاذبہ زمین (g) پر منحصر ہے۔ابعادی تجزیہ استعمال کرتے ہوئے l اور g پر وقت دوران معلوم کرنے کے لئے۔
2. فرض کیجئے کہ ایک ذرہ دائروی مدار پر حرکت کر رہا ہے جسکا نصف قطر r ، رفتار v اور اسراع a ہے۔ابعادی تجزیہ کرتے ہوئے یہ بتائیے کہ $a \propto v^2/r$.
3. آپ کو ایک مساوات دی گئی ہے, mv = Ft۔ جہاں m کمیت، v رفتار، F قوت اور t وقت ہے۔ابعادی تصحیح کے لئے جانچ کیجئے۔

آپ نے کیا سیکھا (What you have learnt)

- معنی خیز ہندسہ کا عدد پیمائش کے صحیح ہونے کو ظاہر کرتا ہے۔
- ہر طبیعی مقدار کی پیائش کی اکائی ہونا ضروری ہے۔سائنسی طریقہ کے لئے SI نظام کو اپنایا گیا ہے۔
- بنیادی اکائیاں جیسے کمیت، طول اور وقت کی SI اکائیاں بالترتیب kg، m اور s ہے۔ بنیادی اکائی کے ساتھ اخذ کردہ اکائیاں ہوتی ہیں۔
- ہر طبیعی مقدار کے ابعاد ہوتے ہیں۔ابعادی تجزیہ جانچ کا ایک اوزار ہے جس سے مساوات کی تصحیح کی جانچ کی جاتی ہے۔

مشق (Terminal Exercise):

.1 بڑے فاصلے کی پیمائش کے لئے استعمال کی جانے والی اکائی نوری سال (Light year) ہے۔ یہ روشنی کا ایک سال میں طئے کردہ فاصلہ ہے۔ لائٹ ایر کو میٹر میں ظاہر کیجئے۔ روشنی کی رفتار $3 \times 10^8 m\ s^{-1}$ لیں۔

.2 ذیل میں دیئے گئے اعداد کو معنی خیز ہندسوں میں ظاہر کریں۔

(a) 5769

(b) 0.042

(c) 0.08420

(d) 6.033

(e) 3.56×10^8

.3 ایک چھڑی جس کا طول 12.132 سمر ہے اور دوسری جس کا طول 12.4 سمر ہے۔

(a) اگر دونوں چھڑیوں کو ایک کے بعد دوسرے کو جوڑ دیں تب کل طول کیا ہوگا؟

(b) اگر دو چھڑیوں کو ایک کے بازو ایک رکھیں تب ان کے درمیان کتنا فرق ہوگا؟

.4 وقت t میں ایک ذرہ ابتدائی رفتار v سے، ہموار اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ $s = ut + \frac{1}{2} at^2$ ابعادی تجزیہ کے استعمال سے عبارت کی جانچ کیجئے۔

.5 نیوٹن کا قانون تجاذب بتاتا ہے کہ دو ذروں کے درمیان قوت جن کی کمیتیں m_1 اور m_2 ہے اور ان کو r فاصلہ پر رکھا گیا ہے دیا گیا ہے $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ جہاں G ایک آفاقی مستقل تجاذب ہے تب G کے ابعاد معلوم کیجئے۔

.6 پیمائش کے دوران ہونے والے نقص کی قسمیں بیان کیجئے۔

.7 بنیادی اور اخذ کردہ اکائیوں میں فرق کو واضح کیجئے۔

.8 پیمائش میں معنی خیز ہندسے کے کیا معنی ہیں؟

سوالات کے جوابات (Answer the Intext Questions)

1.1

.1 (i) 5 (ii) 10 (iii) 4 (iv) 4 (v) 1

.2 نہیں، دونوں صورتوں میں معنی خیز ہندسہ 4 ہے۔

.3 سورج کی کمیت $= 2 \times 10^{30}$ kg اور پروٹان کی کمیت 2×10^{-27} kg;

سورج میں پروٹان کی تعداد $$\frac{2 \times 10^{30}}{2 \times 10^{-27}} = 10^{57}$$

.4 اینگزٹرم $= 10^{-8}$ cm $= 10^{-10}$ m

نینومیٹر (nm) $= 10^{-9}$ m

یعنی 1 nm/1 angstrom $= 10^{-9}$ m/10^{-10}; m = 10. So, 1 nm = 10 Å

.5 1370 kHz = 1370 × 10^3 Hz = (1370 × 10^3) /109 GHz = 1.370 × 10^{-3} GHz

.6 1 ڈسی میٹر (dam)، 1=10m ڈکا میٹر

$\therefore$ 1 dam =100 dm

1 MW= 10^6 W

1 GW = 10^9 W

1 GW = 10^3 MW

1.2

.1 طول کے ابعاد =L، وقت کے ابعاد =T، g کے ابعاد $= LT^{-2}$ ہے۔

فرض کیجئے وقت دوران t، راست متناسب ہے l^{α} اور g^{β} کے۔

دونوں جانب ابعاد لکھنے پر $T = L^{a} (LT^{-2}) = L^{\alpha+\beta}\, T^{-2\beta}$

L اور T کے قوت نماؤں کو مساوی کرنے پر $\alpha + \beta = 0,\ 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = -1/2$ اور $\alpha = ½$

اس طرح $t \propto \sqrt{\frac{1}{g}}$

.2 a کے ابعاد LT^{-2}، v کے ابعاد LT^{-1}، r کے ابعاد r=L ہے۔

فرض کرو کہ a راست متناسب ہے v^{α} اور r^{β} کے۔

تب ابعاد کی رو سے

$$LT^{-2} = (LT^{-1})^{\alpha}\, L^{\beta} = L^{\alpha+\beta}\, T^{-\alpha}$$

L اور T کے قوت نماؤں کو مساوی کرنے پر

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha = 2,\ \Rightarrow\ \beta = -1$$

اس طرح $a \propto v^2/r$

.3 mv کے ابعاد mv = MLT–1، $Ft = MLT^{-2}\, T1 = MLT^{-1}$؛ دونوں جانب کے ابعاد مساوی ہیں۔

اس طرح مساوات ابعادی طور پر مساوی ہیں۔

ٹرمنل مشق کے جوابات

.1 1 ly = 9.4673 × 10^{15} m

.2 (a) 4 (b) 2 (c) 4 (d) 4 (e) 3

.3 (a) 23.5cm (b) 0.3cm

2
خط مستقیم میں حرکت
(Motion in a Straight Line)

تعارف(Introduction):

کائنات میں، ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ بہت سی اشیاء متحرک رہتی ہیں حالانکہ کچھ اشیاء مقیم دکھائی دیتی ہیں، جیسے انسان، حیوانات، گاڑیاں زمین پر حرکت کرتی نظر آتی ہیں۔ مچھلیاں، مینڈک اور دیگر آبی جانور پانی میں حرکت کرتے ہیں۔ پرندے اور ہوائی جہاز ہوا میں حرکت کرتے ہیں۔ زمین جس پر ہم رہتے ہیں وہ بھی سال میں ایک بار سورج کے گرد گردش کرتی ہے اور اپنے محور پر گھومتی ہے۔ یہ بالکل ظاہر ہے کہ ہم ایک ایسی دنیا میں رہتے ہیں جو بہت زیادہ مستقل حرکت میں ہے۔ اس لئے حرکت کا مطالعہ ضروری ہے۔ حرکت وقت کے ساتھ کسی شئے کے مقام میں تبدیلی ہے۔ حرکت ایک خط مستقیم (1D)، ایک مستوی 2D0) یا خلاء (3D) میں ہوسکتی ہے۔ اگر شئے کی حرکت صرف ایک سمت میں ہو تو اسے خط مستقیم میں حرکت کہا جاتا ہے۔ مثال کے لئے سیدھی سرک پر بس کی حرکت، سیدھی پٹریوں پر ٹرین کی حرکت، آزادانہ گرنے والے جسم کی حرکت، لفٹ کی حرکت وغیرہ۔

اس باب میں آپ خط مستقیم میں حرکت کے متعلق سیکھیں گے۔ اس کے بعد آپ مستوی میں حرکت، حرکت کے قوانین اور دیگ راقسام کی حرکات کا مطالعہ کریں گے۔

مقاصد(Objectives):

اس سبق کے مطالعہ کے بعد، آپ کو قابل ہونا چاہئے:

- فاصلہ اور نقل مقام اور چال اور رفتار کے درمیان امتیاز کرنا۔
- لمحاتی رفتار، اضافی رفتار اور اوسط رفتار کی اصطلاحات کی وضاحت کرنا۔
- اسراع اور ساعتی اسراع کی تعریف
- ہموار کے ساتھ ساتھ غیر ہموار کے لئے مقام، وقت اور رفتار وقت کی ترسیم کی تشریح کرنا۔
- مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کی مساوات اخذ کرنا۔
- تجاذبی کشش کے تحت حرکت کی وضاحت کرنا۔
- حرکت کی مساواتوں پر بنیادی اعداد حل کرنا۔

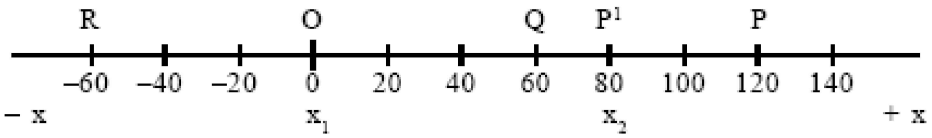
2.1 فاصلہ اور نقل مقام(Distance and Displacement):

جب کوئی شئے وقت کے ساتھ اپنا مقام تبدیل کرتی ہے تو اس شئے کو حرکت میں کہا جاتا ہے۔ ہم کسی شئے کو اس کے مقام کے لحاظ سے خط یا محور پر کسی حوالہ نقطہ سے تلاش کرتے ہیں۔ حوالہ نقطہ کو مبداء کہا جاتا ہے۔ مبداء کے دائیں مقامات کو مثبت اور مبداء کے بائیں مقامات کو منفی لیا جاتا ہے۔

فاصلہ(Distance):

ایک خط مستقیم پر شئے کی حرکت پر غور کریں۔ اب x- محور کو اس طرح منتخب کریں کہ شئے کی حرکت کے راستے اور محور کے مبداء کے ساتھ

منطبق ہوجائے وہ نقطہ سے جہاں شئے نے حرکت کرنا شروع کیا تھا یعنی شئے $x=0$ پر $t=0$ تھا۔



شکل 2.1: خط مستقیم میں حرکت

مان لیجئے کہ مختلف لمحوں پر شئے کے مقام Q,P اور R سے ظاہر ہوتے ہیں۔ پہلا واقعہ غور کرتے ہیں کہ شئے O سے P تک حرکت کرتی ہے۔ لہٰذا شئے سے طئے کردہ راستہ کی دوری $OP = +120$ m.‘ دوسرے واقعہ میں شئے O سے P تک حرکت کرتی ہے اور پھر P سے Q واپس ہوجاتی ہے اس حرکت کے دوران شئے کے ذریعہ طئے کی گئی دوری $OP + PQ = (+120 + 60)$ m $= +180$ m

نقل مقام (Displacement):

تصور کیجئے کہ شئے کے مقامات وقت t_1 پر x_1 ہو اور وقت t_2 پر x_2 ہو (2.1 شکل) تب شئے کو نقل مقام کہا جاتا ہے اور نقل مقام شئے کے ابتدائی اور اختتامی مقابلوں کے فرق کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے نقل مقام کو Δx سے ظاہر کیا گیا۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

اگر $x_2 < x_1$ Δx مثبت ہے اور اگر $x_2 < x_1$ منفی ہے

بنیادی طور پر نقل مقام دو مقامات کے درمیان سب سے چھوٹا فاصلہ ہے اس کی ایک خاص سمت ہے اس طرح نقل مقام ایک سمتی مقدار ہے جو سمت اور عددی قدر دونوں رکھتا ہے مثال کے لئے شئے کا نقل مقام حرکت میں O سے P ہے۔

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+80 \text{ m}) - 0 \text{ m} = +80 \text{ m}$$

نقل مقام کی عددی قدر 80m ہے اور اسے مثبت x- سمت میں بتایا گیا مثبت علامت + سے ظاہر کیا گیا جیسا کہ شئے کا نقل مقام کی سمت کی نشاندہی کرتی ہے۔ ہم نے دیکھا کہ شئے کا O سے P اور P سے Q کی جانب طئے شدہ فاصلہ 180m+ ہے۔ جیسا کہ اس صورت میں نقل مقام صرف 60m ہے مثال 2.1 میں اس کی وضاحت ہے۔

2.1.1 چال اور رفتار (Speed and Velocity):

وقت کے ساتھ فاصلہ کی تبدیلی کی شرح کو چال کہا جاتا ہے۔ یہ ایک سمتی مقدار ہے۔

$$\text{چال} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$$

نقل مقام کی تبدیلی کی شرح کو رفتار کہا جاتا ہے یہ ایک سمتی مقدار ہے۔

$$\text{رفتار} = \frac{\text{نقل مقام}}{\text{وقت}}$$

1D حرکت کے لئے + اور - علامتوں کو ڈال کر سمتی مقدار کی سمت لی جاتی ہے۔ اورنقل مقام کے لئے سمتی ترمیم کا استعمال نہیں کرنا ہے۔ رفتار اور اسراع کے لئے حرکت ایک ابعاد میں ہی ہے۔

اوسط رفتار اور اوسط چال (Average Velocity of Average Speed):

جب کوئی شئے حرکت میں ہوتی ہے اور مختلف رفتاروں کے ساتھ مخصوص فاصلہ طئے کرتی ہے تو اس کی حرکت اس کی اوسط رفتار سے بتائی جاتی ہے۔ کسی شئے کی اوسط رفتار کو فی اکائی وقت کے نقل مقام کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ x_1 اور x_2 شئے کے دو مقامات پر وقت t_1 اور t_2 ترتیب وار ہے تب اوسط رفتار واضح ہو سکتی ہے جیسا کہ

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{\text{نقل مقام}}{\text{وقت}}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

جہاں $x_2 - x_1$ مقام میں تبدیلی کو ظاہر کرتی ہے (Δx) اور $t_2 - t_1$ وقت میں متعلقہ تبدیلی ہے یہاں رفتار (V) کی علامت پر ایک معیاری ترقیم ہے جو اوسط مقدار کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہوتا ہے اوسط رفتار کو Vav کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

کسی شئے کی اوسط چال کل وقفہ وقت سے طئے کیا گیا فاصلہ کو تقسیم کرنے پر حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{اوسط چال} = \frac{\text{کل طئے کیا گیا فاصلہ}}{\text{کل وقفہ وقت}} \qquad 2.2$$

اگر کسی شئے کی حرکت ایک خط مستقیم کے ساتھ ایک ہی سمت میں ہے تو اوسط چال۔ اوسط رفتار کی عددی قدر کے برابر ہے تاہم یہ ہمیشہ ایک صورت نہیں۔ اوسط رفتار اور اوسط چال کے درمیان فرق کو سمجھنے کے لئے ذیل میں دی گئی مثالوں پر غور کریں۔

2.1 مثال (Example):

ایک کار ایک خط مستقیم پر O سے P تک چل رہی ہے اور 3 سکنڈ میں 120m کا فاصلہ طئے کرتی ہے شکل (2.1)' یہ 2 سکنڈ میں 60 میٹر کا سفر کرنے کے بعد نقطہ Q پر واپس آجاتی ہے کار کی اوسط رفتار اور اوسط چال کیا ہے؟ (a) جب یہ O سے P کی جانب جاتی ہے۔ (b) جب O سے P کی طرف اور واپس Q کی جانب جاتی ہے۔

حل (Solution):

(a) جب کار حرکت O سے P

کار کا نقل مقام $= +120\ \text{m}$

کار سے طئے کی گئی راہ کی لمبائی یا فاصلہ $= 120\ \text{m}$

وقفہ وقت $= 3\ \text{s}$

$$\text{Average velocity} = \frac{\text{displacement}}{\text{time}} = \frac{+120}{3} = +40\, ms^{-1}$$

$$\text{Average speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}} = \frac{120}{3} = 40\,ms^{-1}$$

اس طرح اس صورت میں اوسط رفتار کی عددی قدر مساوی ہوتی ہے اوسط چال کے۔

(b) دوسری صورت میں جب کار O سے P حرکت کرتی ہے اور نقطہ Q ک واپس ہوتی ہے۔

کار کا نقل مقام =+120m-60m=60m

کار کی راہ کی لمبائی یا فاصلہ =120m+60m=180m

وقفہ وقت =3s+2s+5s

$$\text{اوسط رفتار} = \frac{\text{نقل مقام}}{\text{وقفہ وقت}} = \frac{+60}{5} = +12\,ms^{-1}$$

$$\text{اوسط چال} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقفہ وقت}} = \frac{180}{5} = 36\,ms^{-1}$$

اس صورت میں اوسط رفتار کی عددی قدر اوسط چال کے مساوی نہیں ہے۔ اسکی وجہ یہ ہے کہ حرکت کی سمت میں تبدیلی شامل ہوتی ہے تا کہ طئے کیا گیا فاصلہ نقل مقام سے زیادہ ہو۔

2.2 مثال (Example):

ایک شخص 300m دائری راستہ پر دوڑتا ہے اور 200s میں شروعاتی نقطہ پر واپس آتا ہے اوسط رفتار اور اوسط چال محسوب کیجئے۔

حل (Solution):

کل راستہ کی لمبائی =300m

راستہ کا احاطہ کرنے میں لگا وقت =200Sec

$$\text{اوسط چال} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}} = \frac{120}{3} = 40\,ms^{-1}$$

جیسا کہ شخص اس شروعات نقطہ پر واپس آتا ہے۔ نقل مقام صفر ہے اس لئے اس لئے اوسط رفتار بھی صفر ہے۔

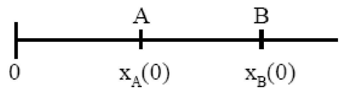
2.1.2 اضافی رفتار (Relative Velocity):

شمال سے $20\ kmh^{-1}$ فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کرنے والی کار پر غور کریں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ کار اپنے ابتدائی مقام سے شمال کی سمت میں 1 گھنٹہ میں 20km کا فاصلہ طئے کرتی ہے اس طرح یہ ظاہر ہوتا ہے کہ حوالہ شدہ رفتار کچھ حوالہ نقطہ سے ہیں۔ درحقیقت کسی جسم کی رفتار ہمیشہ کسی دوسرے جسم کے حوالے سے مخصوص ہوتی ہے۔ چونکہ تمام حرکت میں ہے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر رفتار فطرت میں اضافی ہوتی ہے۔

کسی دوسری شئے کے حوالے سے کسی شئے کی اضافی رفتار وہ شرح ہے جس پر وہ حوالہ کے طور پر شئے رنقطہ کے اضافی مقام کو تبدیل کرتا ہے مثال کے لئے اگر v_A اور v_B دو اشیاء کی رفتار جو ایک خط مستقیم میں ہیں تو A کے حوالے سے B کی اضافی رفتار $v_B - v_A$ ہوگی۔

دوسری شئے کے حوالے سے کسی شئے کے اضافی مقام کی تبدیلی کی شرح کو دوسری شئے کے حوالے سے اس شئے کی اضافی رفتار کہا جاتا ہے۔
اگر حوالہ جسم پر سکون ہے تو جسم کی حرکت آسانی سے واضح کی جا سکتی ہے لیکن اگر حوالہ جسم بھی حرکت کر رہا ہو تو حرکت کو ایک مقیم شاہد کے ذریعہ دو اجسام میں دیکھا جاتا ہے تاہم اضافی حرکت کے تصور کو استعمال کر کے اسے آسان بنایا جا سکتا ہے۔
غور کریں کہ دو اجسام A اور B بالترتیب v_A اور v_B رفتاروں کے ساتھ مثبت x- سمت حرکت کر رہے ہیں۔
اگر A اور B دونوں اجسام کی ابتدائی مقامات وقت t=0 پر $x_A(0)$ اور $x_B(0)$ ہیں تب t سکنڈ بعد A اور B اجسام کے مقامات ہوں گے

$$x_A(t) = x_A(0) + v_At$$
$$x_B(t) = x_B(0) + v_Bt$$



اس لئے B سے A اضافی علیحدگی ہوگی۔

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0) + (v_B - v_A)\ t$$
$$= x_{BA}(0) + v_{BA}t$$

جہاں $v_{BA} = (v_B - v_A)$ کے حوالے سے B کی اضافی رفتار کہلاتی ہے۔
یوں اضافی رفتار کے تصور کو لاگو کر کے دو اجسام کے مسئلے کو ایک ہی جسم کے مسئلے میں کم کیا جا سکتا ہے۔

2.3 مثال(Example):

ایک ٹرین $60\ km\ h^{-1}$ کی چال کے ساتھ شمال سے جنوب کی جانب سیدھے راستے پر (ریلوے لائن) حرکت کر رہی ہے۔ دوسری ٹرین $70\ km\ h^{-1}$ کی چال کے ساتھ جنوب سے شمال کی جانب حرکت کر رہی ہے۔ کیا ہے؟
(a) ٹرین کی نسبت سے B کی رفتار
(b) B کے حوالے سے زمینی رفتار

حل(Solution):

مان لو کہ سمت جنوب سے شمال مثبت، ہم رکھتے ہیں

(a) velocity (v_B) of train B = + 70 km h⁻¹

and, velocity (v_A) of train A = – 60 km h⁻¹

اس طرح ٹرین A کی نسبت سے B کی رفتار

$$= v_B - v_A$$
$$= 70 - (-60) = 130\ km\ h^{-}$$

یہ دیکھا گیا کہ ایک ٹرین کی دوسری ٹرین کے حوالے سے اضافی رفتار ان کے متعلقہ رفتار کے مجموعے کے برابر ہے۔ یہی وجہ ہے کہ جس ٹرین میں آپ سفر کر رہے ہیں اس کے مخالف سمت میں چلنے والی ٹرین بہت تیزی سے سفر کرتی دکھائی دیتی ہے لیکن اگر دوسری ٹرین آپ کی ٹرین کی سمت میں چل رہی تھی تو یہ بہت سست دکھائی دے گی۔
B کے حوالے سے زمینی اضافی رفتار $B = 0 - vB = -70\ km\ h^{-1}$

2.1.3 اسراع (Acceleration):

جب آپ بس یا کار میں سفر کر رہے ہوتے ہیں تو آپ نے محسوس کیا ہوگا کہ بعض اوقات یہ تیزی سے حرکت کرتی ہے اور بعض اوقات سست ہو جاتی ہے یعنی اس کی رفتار وقت کے ساتھ بدلتی رہتی ہے اور بس یا کار کو اسراعی کہا جاتا ہے۔ اسراع کو رفتار کی تبدیلی کے وقت کی شرح کے طور پر بیان کیا جاتا ہے، اسراع ایک سمتی مقدار ہے اور اس کی SI اکائی ms^{-2}۔ ایک ابعاد میں جیسے رفتار، اسراع کے لئے سمتی ترقیم کی ضرورت نہیں ہے کسی شئے کی جانب سے اوسط اسراع دیا گیا ہے۔

$$\text{اوسط اسراع } (\bar{a}) = \frac{\text{ابتدائی رفتار - انتہائی رفتار}}{\text{رفتار میں تبدیلی کے لئے وقفہ وقت}}$$

$$= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

جہاں v_1 اور v_2 وقت پر شئے کی رفتار t_1 اور t_2 ہیں۔

حرکت پذیر شئے کی اسراع مثبت یا منفی ہوسکتی ہے۔ اگر اسراع حرکت یا رفتار کی سمت ہی میں ہے اگر اسراع حرکت کی مخالف سمت میں ہے تب اسراع کو منفی کے طور پر لیا جاتا ہے اور اسے ابطاء یا غیر اسراع کہا جاتا ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثبت اسراع کا مطلب وقت کے ساتھ رفتار بڑھ رہی ہے اسی طرح منفی اسراع کا مطلب وقت کے ساتھ رفتار کم ہو رہی ہے۔

2.4 مثال (Example):

مشرق کی جانب حرکت کرنے والی کار کی رفتار 3.0 سکنڈ میں 0 سے $12\ ms^{-1}$ تک بڑھ جاتی ہے اس کا اوسط اسراع محسوب کرو۔

حل (Solution):

ابتدائی رفتار، $v_1 = 0\ ms^{-1}$

انتہائی رفتار، $v_2 = 12\ ms^{-1}$

وقت، $t = 3\ s$

اسراع، $a = \frac{12 - 0}{3} = 4\ ms^{-2}$

2.1 سوالات از متن (Intext Questions)

1. کیا حرکت پذیر جسم کے لئے غیر صفر اوسط چال لیکن صفر اوسط رفتار کسی بھی دئے گئے دوران وقفہ وقت میں ہونا ممکن ہے؟ اگر ہے تو وضاحت کریں۔

2. کیا حرکت پذیر جسم دوسرے متصلہ جسم کے ساتھ صفر اضافی رفتار رکھ سکتی ہے؟ مثالیں دیں؟

3. ایک شخص ٹرین کے اندر $1.0\ m\ s^{-1}$ کی رفتار کے ساتھ حرکت کی سمت میں ٹہل رہا ہے اگر ٹرین $3.0\ ms^{-1}$, کی رفتار کے ساتھ چل رہی ہے تو محسوب کریں۔ (a) ٹرین کے ڈبے میں مسافروں سے دیکھی گئی رفتار (b) پلاٹ فارم پر بیٹھے شخص کے متعلقہ رفتار

2.2 مقام۔وقت ترسیم (Position - Time Graph)

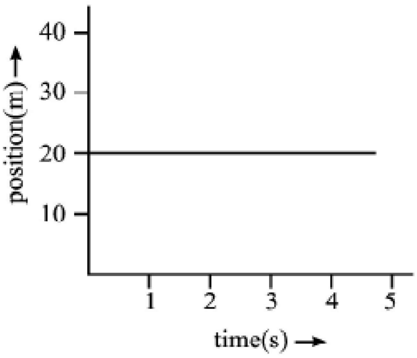


Fig. 2.2 : Position-time graph for a body at rest

کسی شئے کی حرکت کو مقام۔وقت ترسیم سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ایک حرکت پذیر جسم کو مختلف اوقات پر مختلف مقامات پر معلوم کیا جاتا ہے۔مختلف مقامات اور مختلف اوقات کو ترسیم پر کھینچا جا سکتا ہے۔وقت x- محور پر اور شئے کے مقام کو y- محور پر لیا جاتا ہے جو ہمیں ایک منحنی دیتا ہے اس طرح ایک منحنی مقام۔وقت منحنی سے جانا جاتا ہے۔

اگر ہم ایک سکونی جسم کے لئے مقام۔وقت ترسیم کھینچتے ہیں تو ہم محور وقت کے متوازی ایک خط مستقیم حاصل کرتے ہیں فرض کرو کہ ایک جسم جو حالت سکون میں ہے اور مبداء سے 20m کے فاصلہ پر ہے وقت محور کے متوازی ایک خط مستقیم مقام۔وقت ترسیم جیسا کہ شکل 2.2 میں ظاہر کیا گیا۔

2.2.1 ہموار حرکت کے لئے مقام۔وقت ترسیم

ایک شئے جو خط مستقیم میں حرکت کرتی ہے۔غور کریں اور جو مساوی وقفہ وقت میں مساوی فاصلہ طے کرتی ہے مثال کے لئے۔فرض کرو کہ شئے 5 سکنڈ کے لئے ہر ایک سکنڈ میں 10m کا فاصلہ طئے کرتی ہے شئے کے مقامات کو مختلف اوقات پر نیچے ظاہر کیا گیا ہے۔

وقت (t) سکنڈ میں	1	2	3	4	5
مقام (x) میٹر میں	10	20	30	40	50

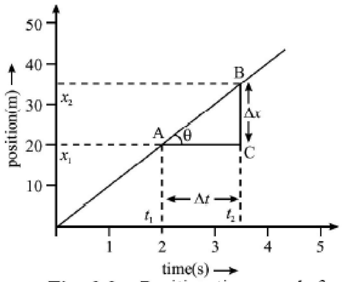


Fig. 2.3 : Position-time graph for uniform motion

2.3 شکل میں شئے کی اوپری حرکت کے لئے مقام۔وقت ترسیم دکھایا گیا x- محور سے خط مستقیم جھکاؤ کی ترسیم ہے۔ایک حرکت جس میں حرکت پذیر شئے کی رفتار مستقل ہوتی ہے اسے ہموار حرکت کہا جاتا ہے اس کا مقام۔وقت ترسیم محور کی طرف مائل ایک خط مستقیم ہے دوسرے لفظوں میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر کوئی حرکت پذیر شئے وقت کے مساوی وقفوں میں مساوی فاصلہ طئے کرتی ہے تو اسے ہموار حرکت کہا جاتا ہے۔

2.2.2 غیر ہموار حرکت کے لئے مقام۔وقت ترسیم

ٹرین کی حرکت پر غور کریں جو اسٹیشن سے نکلتی ہے ایک خاص مدت کے لئے ٹرین کی چال ہموار رفتار سے حرکت کرتی ہے اور پھر اگلے اسٹیشن پر آنے سے پہلے سست ہو جاتی ہے اس صورت میں یہ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ وقت کے مساوی وقفوں میں ٹرین کے ذریعہ طئے کیا گیا فاصلہ مساوی نہیں اس لئے ایسی حرکت کو غیر ہموار حرکت کہا جاتا ہے اگر ایک حرکت پذیر جسم کے ذریعہ طئے کیا گیا فاصلہ مساوی فقفوں میں مساوی نہ ہو وقت کے۔تب ایسی حرکت کو غیر ہموار حرکت کہتے ہیں۔

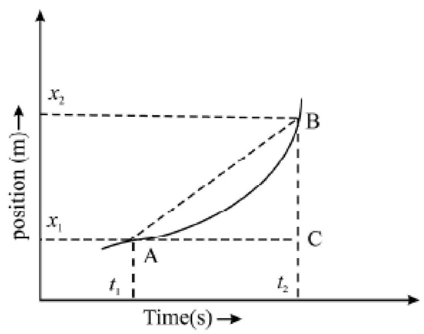


Fig. 2.4 : Position-time graph of accelerated motion as a continuous curve.

اگر یکے بعد دیگر وقفوں میں طئے کرنے والے فاصلوں میں اضافہ ہورہا ہے تو ایسی حرکت کو اسراعی حرکت کہا جاتا ہے اس طرح کی شئے کے لئے مقام ۔ وقت ترسیم شکل 2.4 میں بتائی گئی ۔نوٹ کریں کہ اسراعی حرکت کا مقام ۔ وقت ترسیم ایک مسلسل منحنی ہے اس لئے جسم کی رفتار مسلسل بدلتی رہتی ہے ۔ایسی صورتحال میں وقت کے انتہائی چھوٹے وقفہ یا ساعتی رفتار پر جسم کی اوسط رفتار کی وضاحت کرنا زیادہ مناسب ہے ۔

2.2.3 مقام ۔ وقت ترسیم کی تشریح

یہ دیکھا گیا ہے کہ مختلف حرکت پذیر اشیاء کے مقام ۔ وقت ترسیم مختلف اشکال رکھتے ہیں ۔اگر یہ وقت کے محور کے متوازی خط مستقیم ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ جسم حالت سکون پر ہے ۔تصویر (2.2) وقت کے محور کی طرف مائل خط مستقیم سے پتہ چلتا ہے کہ حرکت ہموار ہے ۔تصویر (2.3) اور ایک مسلسل منحنی کا مطلب مسلسل بدلتی رفتار ۔

(a) رفتار سے مقام ۔ وقت ترسیم (Velocity from Position - Time graph) مقام ۔ وقت ترسیم کے خط مستقیم کی مائل حرکت میں شئے کی اوسط رفتار فراہم کرتا ہے ۔ مائل متعین کرنا' دو وسیع پیمانے پر الگ کئے گئے نقاط (A اور B) ایک خط مستقیم پر غور کریں (شکل 2.3) اب x- محور اور y- محور کے متوازی ایک خط کھینچ کر ایک مثلث بنائیں ۔ شئے اوسط رفتار ہے ۔

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{BC}{AC} \qquad (2.4)$$

لہٰذا شئے کی اوسط رفتار خط مستقیم AB کے ڈھلوان کے مساوی ہے نوٹ کریں کہ خط مستقیم مقا ۔ وقت ترسیم کی مائل $(\Delta x / \Delta t)$ کی قدر زیادہ ہوگی اوسط رفتار زیادہ ہوگی نیز ہم جانتے ہیں کہ مائل زاویہ کے مماس کے مساوی ہے جسے خط مستقیم افقی خط کے ساتھ بناتی ہے یعنی $\theta = \Delta x / \Delta t$

کسی بھی دو متعلقہ Δx اور Δt وقفوں کے ڈھال کے لئے اور وقفہ وقت کے دوران اوسط رفتار تعین کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے ۔

(b) ساعتی رفتار (Instantaneous Velocity): ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک جسم جسکی خط مستقیم میں ہموار حرکت ہوتی ہے ۔ ہر ساعت میں ایک ہی رفتار ہوتی ہے لیکن غیر ہموار حرکت کی صورت میں مقام ۔ وقت ترسیم ایک منحنی خط ہے جیسا کہ شکل (2.5) میں دکھایا گیا نتیجتاً مائل یا اوسط رفتار مختلف ہوتی ہے منتخب کئے گئے وقفہ وقت کے سائز پر منحصر ہے کسی بھی ساعت یا اس کے راستے کے کسی مقام پر ذرہ کی رفتار کو اس کی ساعتی رفتار کہا جاتا ہے ۔ ہم جانتے ہیں کہ وقفہ وقت پر اوسط رفتار سے دیا گیا ہے ۔

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

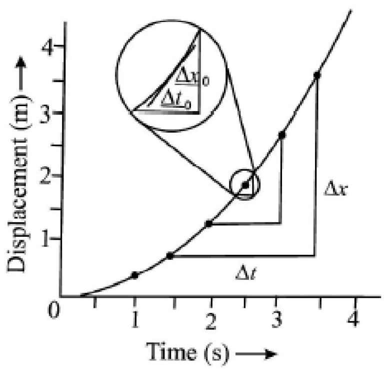


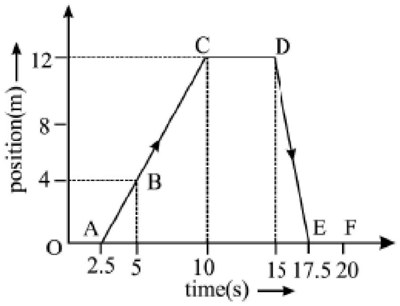
Fig. 2.5 : Displacement-time graph for non-uniform motion

جیسا کہ Δt چھوٹا اور مزید چھوٹا زاویہ ہے اور b رفتار پہنچی ساعتی رفتار تک یعنی $\Delta t \rightarrow 0$ ایک مائل خط مماس $(\Delta x / \Delta t)$

ایک خط مماس کی مائل اس مقام پر منحنی خطوط مستقیم پر ساعتی رفتار فراہم کرتی ہے یاد

رکھیں کہ ہموار حرکت کے لئے اوسط رفتار ساعتی رفتار کے مساوی ہے۔

مثال 2.5(Example):



شکل 2.6: مقام وقت ترسیم

شکل 2.6 میں 20 سکنڈ کے لئے شئے کی حرکت کے لئے مقام۔ وقت ترسیم ظاہر کیا گیا۔ کیا فاصلے اور وقفہ وقت میں یہ کس رفتار کے ساتھ سفر کرتا ہے۔

(i) 0 سکنڈ سے 5 سکنڈ (ii) 5 سکنڈ سے 10 سکنڈ (iii) 5 سکنڈ سے 10 سکنڈ کل سفر کے لئے اوسط چال محسوب کیجئے۔

حل(Solution):

(i) 0 سکنڈ سے 5 سکنڈ دوران' طئے کردہ فاصلہ=4m فاصلہ وقت چال

$$\text{speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}} = \frac{4\,\text{m}}{(5-0)\,\text{s}} = \frac{4\,\text{m}}{5\,\text{s}} = 0.8\,\text{ms}^{-1}$$

(ii) 5 سکنڈ سے 10 سکنڈ دوران' طئے کردہ فاصلہ=12-4=8m چال

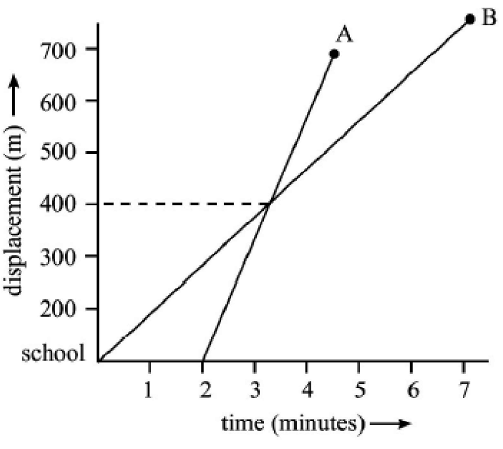
$$\text{speed} = \frac{(12-4)\,\text{m}}{(10-5)\,\text{s}} = \frac{8\,\text{m}}{5\,\text{s}} = 1.6\,ms^{-1}$$

(iii) 10 سکنڈ سے 15 سکنڈ دوران' طئے کردہ فاصلہ=12-12=0m فاصلہ وقت چال

$$\text{speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}} = \frac{0}{5} = 0$$

2.2 سوالات ازمتن (Intext Questions)

1. صفر اسراع کے ساتھ حرکت کے لئے مقام۔ وقت ترسیم کھینچئے۔
2. مندرجہ ذیل تصویر نقل مقام۔ وقت ترسیم کو ظاہر کرتی ہے جو دو طالب علموں A اور B جو اپنے اسکول سے شروع ہو کر ان کے گھروں کو پہنچتے ہیں گراف بغور دیکھیں اور مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیں۔



(i) کیا وہ دونوں اسکول سے ایک ہی وقت پر نکلتے ہیں؟

(ii) کون اسکول سے دور رہتا ہے؟

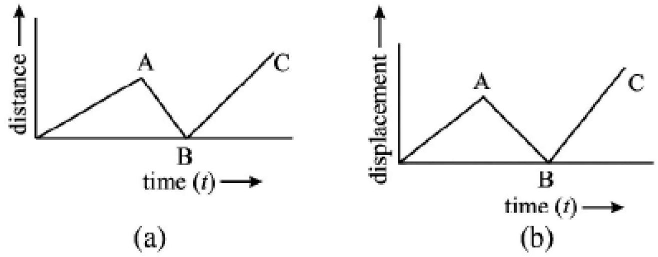
(iii) کیا وہ دونوں ان کے متعلقہ گھروں پر ایک ہی وقت پر پہنچتے ہیں؟

(iv) کون تیز حرکت ہے؟

(v) وہ اسکول سے کتنے فاصلے پر ایک دوسرے کو عبور کرتے ہیں؟

3. کن حالات میں جسم کی اوسط رفتار' ساعتی رفتار کے مساوی ہوتی ہے؟

4. مندرجہ ذیل میں سے کون سا گراف ممکن نہیں ہے؟ اپنے جواب کے لئے وجہ بیان کرو۔

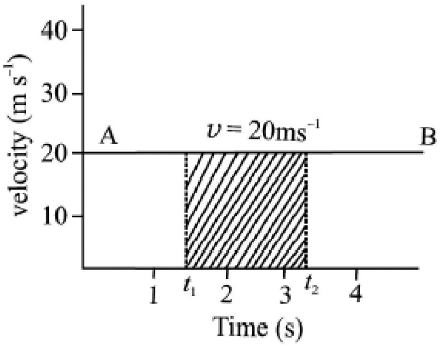


2.3 رفتار۔وقت ترسیم (Velocity - Time Graph)

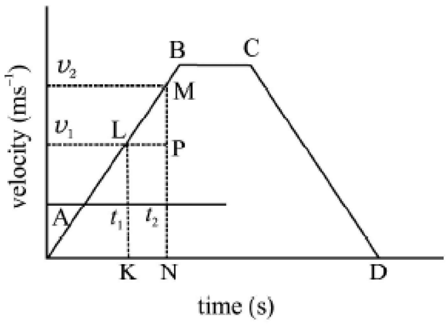
x- محور پر وقت اور y- محور پر رفتار لیتے ہوئے رفتار۔وقت ترسیم کھینچ سکتے ہیں۔

2.3.1 ہموار حرکت کے لئے رفتار۔وقت ترسیم

ہم جانتے ہیں کہ ہموار حرکت میں جسم کی رفتار ہمیشہ مستقل رہتی ہے جو وقت کے ساتھ رفتار میں تبدیلی نہیں ہوتی ہے اس طرح ہمار حرکت کے لئے مقام۔وقت ترسیم' وقت کے محور سے متوازی ایک خط مستقیم ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2.7: ہموار حرکت کے لئے رفتار



شکل 2.8: تین متصل اسراع کے ساتھ حرکت کے لئے رفتار۔وقت ترسیم

2.3.2 غیر ہموار حرکت کے لئے رفتار۔وقت ترسیم

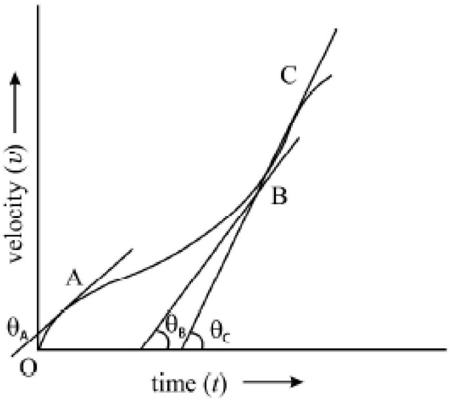
اگر کسی جسم کی رفتار وقت کے ساتھ ہموار طور پر بدل جائے تو اس کی اسراع مستقل رہتی ہے ایسی حرکت کے لئے رفتار۔وقت ترسیم وقت کے محور کی طرف مائل ایک خط مستقیم ہے۔شکل 2.8 میں AB خط مستقیم سے ظاہر کیا گیا۔ترسیم سے واضح کہ مساوی وقفہ وقت میں مقدار رفتار سے بڑھتی ہے جسم کا اوسط اسراع سے دیا گیا۔

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{MP}{LP}$$

خط مستقیم کا میدان

چونکہ خط مستقیم کا میدان مستقل ہے اس لئے جسم کا اوسط اسراع مستقل ہے تاہم یہ بھی ممکن ہے کہ رفتار میں تغیر کی شرح مستقل نہیں ہے۔

اس طرح کی حرکت کو غیر ہموار اسراعی حرکت کہتے ہیں۔ ایسی صورتحال میں رفتار۔وقت ترسیم کا میدان پر ایک ساعت پر مختلف ہوگا جیسا کہ شکل 2.9 دکھایا گیا۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ B,A اور C نقاط پر θ_A, θ_B اور θ_c مختلف ہیں۔



شکل (2.9): رفتار۔وقت ترسیم کے لئے مختلف اسراع کے ساتھ حرکت

2.3.3 رفتار۔وقت ترسیم کی تشریح

حرکت پذیر جسم کا V-T ترسیم کا استعمال کرتے ہوئے ہم مختلف ساعتوں میں اس کے ذریعہ طئے کیا گیا فاصلہ اور جسم کے اسراع کا تعین کر سکتے ہیں۔

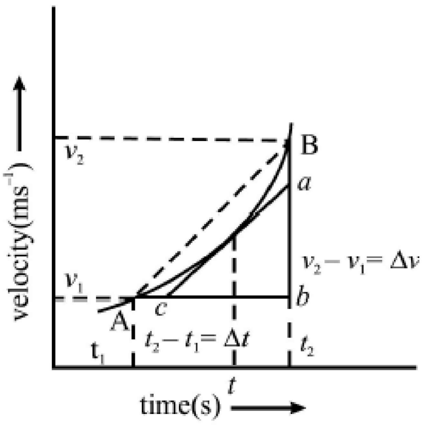
(a) جسم سے طئے شدہ فاصلہ کا تعین: شکل 2.8 میں دکھائے گئے رفتار۔وقت ترسیم پر غور کریں۔ جز AB مستقل اسراع کے ساتھ حرکت دکھاتا ہے۔ جہاں جز CD مستقل غیر اسراع حرکت دکھاتا ہے جز BC ہموار حرکت کو ظاہر کرتا ہے یعنی (صفر اسراع کے ساتھ) ہموار حرکت کے لئے، وقت t_1 سے t_2 تک جسم سے طئے شدہ فاصلہ دیا گیا ہے۔ $s = v\,(t_1 - t_2)$

t_1 اور t_2 کے درمیان منحنی کے اندر کا علاقہ شکل 2.8 کے لئے اس نتیجہ کو عام کرتے ہوئے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ وقت t_1 اور t_2 کے درمیان جسم کے ذریعہ طئے کردہ فاصلہ

S= منحرف کا علاقہ KLMN

$$= (½) \times (KL + MN) \times KN$$

$$= (½) \times (v_1 + v_2) \times (t_2 - t_1)$$



شکل 2.10: غیر ہموار اسراعی حرکت کا رفتار۔وقت ترسیم

(b) جسم کے اسراع کا تعین: ہم جانتے ہیں کہ کسی جسم کا اسراع وقت کے ساتھ اس کی رفتار کی تبدیلی کی شرح ہے، اگر ہم شکل 2.10 میں دئے گئے رفتار۔وقت ترسیم کو دیکھیں تو ہم نوٹ کریں گے کہ اوسط اسراع کو وتر AB کے ڈھلان سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

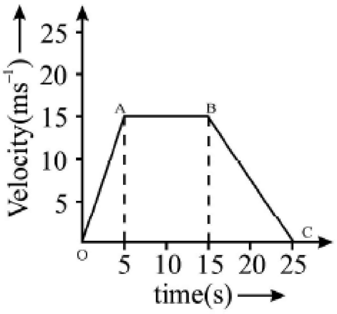
$$\text{اوسط اسراع} \quad (\bar{a}) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

اگر وقفہ وقت Δt کو چھوٹا مزید چھوٹا بنایا جائے تو اوسط اسراع ساعتی اسراع بن جاتا ہے اس طرح ساعتی اسراع

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \quad \text{مماس کے ڈھلان پر} \quad : \mathrm{at}\,(t = t) = \frac{ab}{bc}$$

اس طرح رفتار۔وقت ترسیم کے ایک نقطہ پر مماس کا میدان جو ساعت پر اسراع دیتا ہے۔

2.3 سوالات از متن (Intext Questions)



1. خط مستقیم میں حرکت کرنے والے ذرے کی حرکت کو v-t ترسیم میں دکھایا گیا۔
   (i) رفتار کے لحاظ سے حرکت کی وضاحت کریں۔طئے شدہ فاصلہ اور اسراع۔
   (ii) اوسط رفتار معلوم کریں۔

2.4 حرکت کی مساواتیں (Equations of Motion)

کسی شئے کی حرکت کو واضح کرنے کے لے ہم فاصلہ' رفتار اور اسراع جیسی طبعی مقداروں کا استعمال کرتے ہیں مستقل اسراع کی صورت میں ایک دئے گئے وقت میں حاصل کی گئی رفتار اور فاصلہ کا حساب ایک یا تین سے زائد مساواتوں کا استعمال کرتے ہوئے کیا جاسکتا ہے۔ان مساواتوں کو مستقل اسراع یا حرکی مساواتوں سے جانا جاتا ہے۔اسے استعمال کرنا آسان ہے اور کئی اطلاقات معلوم کرتے ہیں۔

2.4.1 ہموار حرکت کی مساوات (Equation of Uniform motion):

ان مساواتوں کو اخذ کرنے کے لئے' ابتدائی وقت صفر ہوجاتا ہے یعنی $t_1 = 0$ پر غور کریں۔ہم $t_2 = t$ کو گذرا ہوا وقت مان سکتے ہیں شئے کے ابتدائی مقام x_0 اور ابتدائی رفتار u ہوجائے t وقت کے بعد شئے کا انتہائی مقام x اور انتہائی رفتار v ہو جائے t وقت کے دوران اوسط رفتار ہوگی

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t} \qquad (2.5)$$

2.4.2 ہموار اسراعی حرکت کی پہلی مساوات

ایک مخصوص وقت کے بعد شئے کا متعینہ رفتار میں ہموار اسراعی حرکت کی پہلی مساوات مدد کرتی ہے جب اسراع دیا گیا ہے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{اسراع}(a) = \frac{\text{رفتار میں تغیر}}{\text{لیا گیا وقت}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

آسانی کے لئے $t_1 = 0,\ v_1 = u$ اور $t_2 = t,\ v_2 = v.$ تب

$$a = \frac{v - u}{t} \qquad (2.6)$$

$$\Rightarrow \quad v = u + at \qquad (2.7)$$

مثال 2.6 (Example):

ایک کار سکون سے حرکت میں آنے کے لئے......اسراع رکھتی ہے 4 سکنڈ بعد پر کتنی تیزی سے جائے گی؟

حل (Solution):

دیا گیا'

ابتدائی رفتار $u = 0$

اسراع $a = 20\ ms^{-2}$

وقت $t = 4\ s$

پہلی حرکت کی مساوات سے

$$v = u + at$$

دیا گیا ہے $t = 4\ s$ وقت بعد رفتار

$$v = 0 + (20\ ms) \times (4\ s)$$

$$= 80\ ms^{-1}$$

2.4.3 ہمواراسراعی حرکت کی دوسری مساوات

حرکت کی دوسری مساوات کو t وقت بعد شئے کے مقام کو محسوب کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے جب وہ مستقل اسراع a کے ساتھ حرکت کررہا ہو۔

فرض کرو کہ $t = 0,\ x_1 = x_0;\ v_1 = u$ اور $t = t,\ x2 = x;\ v2 = v$

v-t ترسیم کے تحت رقبہ = طئے شدہ فاصلہ

$$= \text{OABC مںحرف کا رقبہ}$$

$$= \frac{1}{2}(CB + OA) \times OC$$

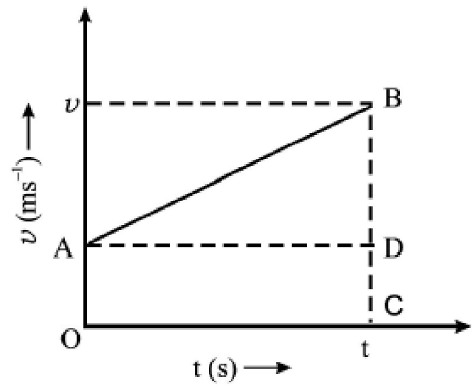
$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + u)t$$

چونکہ $v = u + at,$ ہم لکھ سکتے ہیں

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(u + at + u)t$$

$$= ut + \frac{1}{2}at^2$$

or $$x = x_0 + ut + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.8)$$



شکل 2.11: ہمواراسراعی حرکت کے لئے v-t ترسیم

مثال 2.7 (Example):

ایک کار A سیدھی سڑک پر 60 کلومیٹر فی گھنٹہ ہموار چال سے سفر کررہی ہے۔ ایک کار B' 70 کلومیٹر فی گھنٹہ کی ہموار رفتار سے اس کا پیچھا کررہی ہے جب ان دونوں کے درمیان کا فاصلہ 2.5 km کلومیٹر ہے تو کار B کو 20 کلومیٹر فی گھنٹہ غیر اسراع دی جاتی ہے کس وقت اور فاصلہ پر کار B کار A کو پکڑے گی؟

حل(Solution): فرض کرو کہ کار B کار A کو t وقت بعد x فاصلے پر پکڑتی ہے۔ $x=60t$‘ t وقت میں طئے شدہ فاصلہ

$$x' = x_0 + ut + 1/2\ at^2$$

$$= 0 + 70 \times t + \tfrac{1}{2}(-20) \times t^2$$

$$x' = 70\ t - 10\ t^2$$

لیکن دو کاروں کے درمیان فاصلہ ہے

$$x' - x = 2.5$$

$$\therefore \quad (70\ t - 10\ t^2) - (60\ t) = 2.5$$

$$\text{or} \quad 10\ t^2 - 10\ t + 2.5 = 0$$

یہ دیتا ہے $t = 1/2$ hour

$$\therefore \quad x = 70\ t - 10\ t^2$$

$$= 70 \times \tfrac{1}{2} - 10 \times (\tfrac{1}{2})^2$$

$$= 35 - 2.5 = 32.5\ \text{km.}$$

2.4.4 ہموار اسراعی حرکت کی تیسری مساوات:

تیسری مساوات کو انتہائی رفتار کو محسوب کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے جب حرکت پذیر جسم کی اسراع‘ مقام اور ابتدائی رفتار معلوم ہو۔

مساوات (2.08) سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v + u)\ t.$$

مساوات (2.7) سے بھی ہم طلب کرتے ہیں کہ

$$t = \frac{v - u}{a}$$

اوپری عبارت میں اس کا متبادل‘ ہم حاصل کرتے ہیں

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + u)\left(\frac{v - u}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2a(x - x_0) = v^2 - u^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = u^2 + 2a(x - x_0)$$

اس طرح مستقل اسراع کے لئے تیسری مساوات

$$v = u + at$$

$$x = x_0 + ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{and} \quad v^2 = u^2 + 2a(x - x_0)$$

مثال 2.8(Example):

ایک جسم $4\ ms^{-2}$ کی مستقل اسراع کے ساتھ ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ اگر ابتداء میں جسم t میٹر کے مقام پر تھا اور اسکی رفتار $3\ ms^{-1}$, تھی تو محسوب کرو:

(i) t=2s وقت پر مقام اور رفتار

(ii) جسم کی رفتار $5\ ms^{-1}$ ہے جب جسم کا مقام

حل(Solution):

ہمیں معلوم ہے

$$x_0 = 5\ m,\ u = 3\ ms^{-1},\ a = 4\ ms^{-2}.$$

(i) مساوات(2.8) استعمال کرنے پر

$$x = x_0 + ut + 1/2\ at^2$$

$$= 5 + 3 \times 2 + ½ \times 4\ (2)^2 = 19\ m$$

مساوات(2.7) سے

$$v = u + at$$

$$= 3 + 4 \times 2 = 11\ ms^{-1}$$

رفتار $v = 11\ ms^{-1}$

(ii) مساوات کا استعمال کرنے پر

$$v^2 = u^2 + 2a\ (x - x_0)$$

$$(5)^2 = (3)^2 + 2 \times 4 \times (x - 5)$$

$$x = 7\ m$$

اس طرح جسم کا مقام (x)=7m

2.4 متن پر مبنی سوالات(Intext Questions)

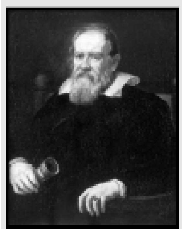
1. ایک جسم ابتدا میں حالت سکون سے 4 سکنڈ میں 40 میٹر کا فاصلہ مستقل اسراع کے ساتھ ایک خط مستقیم میں طئے کرتا ہے۔کل فاصلہ کا نصف طئے کرنے کے لئے درکار وقت اور اسکی انتہائی رفتار محسوب کیجئے۔
2. ایک کار $5\ ms^{-2}$ کے مستقل اسراع کے ساتھ ایک سیدھی سڑک پر حرکت کرتی ہے۔ ابتدا میں 5m پر اس کی رفتار $3\ ms^{-1}$ تھی' t=2s پر اس کے مقام اور رفتار کو محسوب کیجئے۔
3. کس رفتار کے ساتھ ایک جسم کو عموداً اوپر کی جانب پھینکنا چاہیئے تا کہ یہ 25 میٹر کی اونچائی کو پہنچ سکے تو یہ کب تک ہوا میں رہے گا؟
4. ایک گیند ہوا میں اوپر کی جانب پھینکی گئی ہے۔کیا اس کا اسراع زائد ہے' جب کہ اسے پھینکا جارہا ہو یا اس کے بعد اسے پھینکا گیا ہے؟

2.5 زمینی کشش کے تحت حرکت(Motion Under Gravity):

ہم جانتے ہیں کہ تمام اشیاء جب گرتی ہیں تو زمین کی جانب گرتی ہیں۔ یہ زمین کی قوت کشش کی وجہ سے ہے۔تجاذبی قوت عمودی سمت

میں عمل کرتی ہے۔اس لئے حرکت زمینی کشش کے تحت ایک خط مستقیم میں ہے یہ ایک ابعادی حرکت ہے کسی جسم کا زمین کی جانب مستقل اسراع کے ساتھ آزادانہ گرنا۔ بہت عام مثالوں میں سے ایک ہے ہوا کی عدم موجودگی میں یہ معلوم کیا گیا ہے تمام اجسام' ان کے بلا لحاظ جسامت یا وزن کے' ایک ہی اسراع کے ساتھ گرتے ہیں۔اگرچہ اسراع بوجہ جاذبہ زمین بلندی کے ساتھ مختلف ہوتی ہے' زمین کے نصف قطر کے مقابل چھوٹے فاصلہ کے لئے یہ بالکل مستقل گرنے کو لیا جاسکتا ہے ہمارے عملی کام کے استعمال کے لئے ہوا کی مزاحمت کو نظرانداز کیا جاتا ہے۔زمینی کشش کی وجہ سے آزادانہ گرنے والے جسم کے ذریعہ حاصل کیا گیا اسراع کو اسراع بوجہ جاذبہ زمین کہا جاتا ہے۔اسے g سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ زمین کی سطح پر یا قریب اس کی عددی قدر $9.8\ ms^{-2}$ ہے۔

گیلیلیو گیلیلی (1564-1642):



1564ء میں اٹلی کے پیسا (Pisa) نام کے شہر میں پیدا ہوئے۔انہوں نے گرتی ہوئی اشیاء کے قوانین کو بیان کیا۔انہوں نے ایک دوربین ایجاد کی اور فلکیاتی مشاہدات کے لئے اسمعال کیا۔ان کے بڑے کام: دنیا کے دو عظیم نظاموں کے بارے میں مکالمے اور......سائنسوں سے متعلق گفتگو۔انہوں نے اس خیال کی تائید کی کہ زمین سورج کے اطراف گردش کرتی ہے۔

مثال 2.9 (Example):

ایک پتھر 50 میٹر کی بلندی سے گرایا جاتا ہے اور یہ آزادانہ طور پر گرتا ہے محسوب کیجئے۔

(i) سکنڈ میں طئے شدہ فاصلہ۔ (ii) پتھر کی اس وقت کی رفتار جب وہ زمین تک پہنچتا ہے اور (iii) 3 سکنڈ پر رفتار یعنی ابتداء کے 3 سکنڈ بعد رفتار کیا ہوگی؟

حل (Solution):

دیا گیا ہے $u=0$ ابتدائی رفتار اور $h=50m$ بلندی

فرض کیجئے کہ ابتدائی مقام (y_0) صفر ہوجاتا ہے اور ابتدائی نقطہ مبداء ہو اس لئے y- محور (عمودی محور) نیچے منفی ہوگا چونکہ y- سمت میں اسراع نیچے منفی سمت کی جانب ہے لہٰذا $a = -g = -9.8\ ms^{-2}$ کی قدر

(i) مساوات (2.8) سے ہمیں معلوم ہے

$$y = y_0 + ut + \tfrac{1}{2} at^2$$

دئے گئے اعداد و شمار سے ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$y = 0 + 0 - \tfrac{1}{2} gt^2 = -\tfrac{1}{2} \times 9.8 \times (2)^2$$

$$= -19.6\ m$$

منفی علامت ظاہر کرتی ہے کہ فاصلہ ابتدائی نقطہ سے نیچے کی جانب ہے یا نیچے کی سمت میں ہے۔

(ii) $y= -50m$ زمین پر

مساوات (2.9) کے استعمال کرنے پر

$$v^2 = u^2 + 2a\,(y - y0)$$

$$= 0 + 2\,(-9.8)\,(-50 - 0)$$

$$v = 9.9\ ms^{-1}$$

(iii) استعمال کرنے پر $t=3s$ پر $v=u+at$ ہم حاصل کرتے ہیں

$$v = 0 + (-9.8) \times 3$$

$$v = -29.4\ ms^{-1}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ پتھر کی رفتار $t=3s$ پر $29.4\ ms^{-1}$ ہوتی ہے اور نیچے کی سمت میں ہے۔

نوٹ: یہ نوٹ کرنا اہم ہے کہ مجرد حرکیاتی مساواتوں میں۔ ہم رواج علامت استعمال کرتے ہیں جس کے مطابق اوپر کی جانب اور دائیں کی جانب کی مقداروں کو مثبت لیا جاتا ہے اور جو نیچے کی جانب اور بائیں جانب کو منفی لیا جاتا ہے۔

2.6 تفرق اور تکملہ کا تصور (Concept of Differentiation of Integration)

ریاضی کی تمام شاخیں طبیعیات کے قوانین کو سمجھنے کے لئے اور اس کی وضاحت کرنے میں اور مختلف طبعی مقداروں کے درمیان تعلق کو معلوم کرنے کے لئے بہت زیادہ مفید رہی ہیں۔ آپ سلسلے میں الجبراء اور علم مثلثات کے استعمال سے پہلے ہی بخوبی واقف ہیں۔ طبیعیات کے مزید مطالعہ کے دوران آپ کا واسطہ تفرق (یا تفرقی احصاء) اور تکملہ (یا تکملی احصاء) سے آگے بڑھے گا۔ یہ تفرق اور تکملہ کے تصور کی مختصر اور سادہ وضاحت ہے۔ لہٰذا ذیل میں دیا جا رہا ہے ان موضوعات پر مزید مطالعے کے لئے آپ ریاضی کی کتابوں سے رجوع ہو سکتے ہیں۔

ہم اکثر اس موضوع میں درج ذیل اصطلاحات کو آگے دیکھیں گے۔ آیئے ان اصطلاحات کی وضاحت کریں۔

مستقلہ (Constant): یہ ایسی مقدار ہے جس کی قدر ریاضیاتی عملوں کے دوران تبدیل نہیں ہوتی ہے مثلاً صحیح اعداد جیسے 3,2,1...... کسور، π وغیرہ۔

متغیرہ (Variable): یہ ایسی مقدار ہے جو ریاضیاتی عملوں کے دوران مختلف قدروں کو حاصل کر سکتی ہے۔ متغیرہ کو عام طور سے z, y, x وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تفاعل (Function): y کو x کا تفاعل کہا جاتا ہے اگر x کی ہر ایک قدر کے لئے "y" کی قدر متعین ہے ریاضیاتی طور پر اسے مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = f(x)$$

یعنی y، x کا تفاعل ہے۔

تفرقی ضریب (Differential Coefficiant): کسی دوسرے متغیرہ x کی مناسبت میں کسی بھی متغیرہ 'y' کا تفرقی ضریب 'x' کی مناسبت 'y' میں ہونے والی ساعتی شرح تبدیلی ہے۔ فرض کیجئے کہ y، x کا تفاعل ہے یعنی $y=f(x)$، مان لیجئے کہ 'x' میں معمولی سی مقدار 6x کا اضافہ ہوجاتا ہے یا 'x' میں δx کا معمولی اضافہ ہوجاتا ہے۔ فرض کیجئے کہ y میں 'δy' کا اضافہ ہوتا ہے تب $(x+\delta x)$-$y+\delta y$ کا تفاعل ہے۔

$$y + \delta y = f(x + \delta x)$$

یا

$$\delta y = f(x + \delta x) - y$$

یا

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

یا

مقدار $\frac{\delta y}{\delta x}$ کواضافی شرح کہلاتی ہے x اور (x+δx) کے وقفہ وقت کے درمیان کی حد میں x کے حوالے مناسبت سے 'y' کی اوسط تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے۔

x کی مناسبت میں y کی تبدیلی کی ساعتی شرح معلوم کرنے کے لئے ہمیں δy/δx کی حد کو محسوب کرنا ہوگا جب کہ $\frac{\delta y}{\delta x}$

یعنی
$$\underset{\delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

اس طرح x کے متعلق y کی ساعتی شرح تبدیلی $\underset{\delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x}$ سے دی گئی ہے۔

اسے x کے متعلق y کا تفرقی ضریب کہا جاتا ہے اور اسکو $\frac{dy}{dx}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تکملہ (Integration):

تکملہ ایک ریاضیاتی عمل ہے جو تفرق کا عکس ہے اس تصور کو سمجھنے کے لئے ایک مستقل قوت F کو S فاصلہ سے ایک جسم پر عمل کرنے دیں تب قوت سے کیا گیا کام W=FS سے محسوب کیا جاتا ہے۔

لیکن اگر قوت متغیر ہے تو عام الجبراء کیا گیا کام کو معلوم کرنے کا کوئی طریقہ نہیں دیتا ہے۔ مثال کے لئے: جب کسی جسم کو زمین کی سطح سے اوپر ایک طویل فاصلہ پر حرکت دیا جاتا ہے جیسے جیسے جسم اوپر جاتا ہے جسم پر لگنے والی کشش بدلتی رہتی ہے۔ اس طرح کے معاملات میں کئے گئے کام کو محسوب کرنے کے لئے ایک طریقہ استعمال کیا جاتا ہے جسے تکملہ کہا جاتا ہے۔

متغیر قوت سے کیا گیا کام محسوب ہوسکتا ہے جیسے (تفصیلات کے لئے دیکھیں سیکشن 5.2 متغیر قوت کے ذریعہ کیا گیا کام)

$$W = \Sigma F(x)\,\Delta x$$

کی لامحدود چھوٹی قدروں کے لئے

$$W = \sum_{\lim \Delta x \to 0} F(x)\,dx$$

اسے اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$W = \int F(x)\,dx$$

اس عبارت کو x کی مناسبت سے تفاعل f(x) کا تکملہ کہا جاتا ہے جہاں علامت ...... تکملہ کو ظاہر کرتی ہے۔

چند اکثر تفرق اور تکملہ کے استعمال ہونے والے ضابطے

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\text{for n} \neq -1)$	(i) $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
(ii) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x$	(ii) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
(iii) $\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^1}{1} = x$	(iii) $\frac{d}{dx}(x) = 1$
(iv) $\int cx dx = c \int x dx (\text{c is a constant})$	(iv) $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$
(v) $\int (u \pm v \pm w) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int w dx$	(v) $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
(vi) $\int e^x dx = e^x$	(vi) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
(vii) $\int \sin x dx = -\cos x$	(vii) $\frac{d}{dx}\{\sin(x)\} = +\cos x$
(viii) $\int \cos x dx = \sin x$	(viii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
(ix) $\int \sec^2 x dx = \tan x$	(ix) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec x$
(x) $\int \text{cosec}^2 x dx = -\cot x$	(x) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$

جدول پر غور سے دیکھنے پر معلوم ہوتا ہے کہ تکملہ اور تفرق متضاد ریاضیاتی عمل ہیں۔

آپ نے کیا سیکھا(What you have learnt):

- جسم سے طئے کی گئی کل راستہ کے دوران حرکت ''فاصلہ'' کہلاتی ہے۔
- جسم کے ابتدائی اور انتہائی مقامات کے درمیان چھوٹا فاصلہ نقل مقام کہلاتا ہے اور یہ ایک سمت رکھتا ہے۔
- وقفہ وقت سے کسی شئے کا نقل مقام کی نسبت اوسط رفتار سے جانی جاتی ہے۔
- کل طئے شدہ فاصلہ سے تقسیم کیا گیا وقت اوسط چال کہلاتا ہے۔

- کسی شئے کی دوسری شئے کے متعلقہ اضافی مقام کی تبدیلی کی شرح کو دوسری شئے کے متعلقہ سے اس شئے کی اضافی رفتار کہا جاتا ہے۔
- اکائی وقت میں رفتار میں تبدیلی اسراع کہلاتی ہے۔
- وقت کے محور کے متوازی خط مستقیم برحالت سکون جسم کے لئے مقام۔وقت ترسیم۔
- ہموار حرکت کے لئے، مقام۔وقت ترسیم وقت کے محور کی طرف مائل ایک خط مستقیم ہے۔
- ایک جسم مساوی وقفہ وقت میں مساوی فاصلہ طئے کرتا ہے تاہم چھوٹا ہی کیوں نہ ہوٗا سے ہموار حرکت کہا جاتا ہے۔
- وقت کے کسی ایک ساعت پر ذرہ کی رفتار اس کے راستہ کی کسی ایک نقطہ پر اس کی ساعتی رفتار کہلاتی ہے۔
- مقام۔وقت ترسیم کا میدان اوسط رفتار دیتا ہے۔
- مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والے جسم کے لئے رفتار۔وقت ترسیم وقت کے محور کی طرف مائل ہے ایک خط مستقیم ہے۔
- رفتار۔وقت ترسیم کے ماتحت رقبہ، جسم کا نقل مقام دیتا ہے۔
- جسم کے اوسط اسراع کو رفتار۔وقت ترسیم کے ڈھال سے محسوب کیا جاسکتا ہے۔
- تین مساواتوں پر عمل کر کے جسم کی حرکت کو واضح کیا جاسکتا ہے۔

$$v = u + at \quad \text{(i)}$$

$$x = x0 + u\,t + \tfrac{1}{2}\,at2 \quad \text{(ii)}$$

$$v2 = u2 + 2a\,(x - x0) \quad \text{(iii)}$$

اختتامی مشق (Terminal Exercise):

1. ایک کار $65\ km\ h^{-1}$ کی چال سے سیدھی سڑک پر دوڑ رہی ہے جو اسی سمت میں $80\ km\ h^{-1}$ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے۔موٹر سائیکل M سے آگے ہے C کی نسبت سے M کی رفتار کیا ہے؟
2. ایک کار کو 30m کا سفر کرنے میں کتنا وقت لگتا ہے؟ اگر یہ $2.0\ m\ s^{-2}$ کی شرح سے سکون سے حرکت میں آجائے۔
3. ایک موٹر سائیکل سوار دو جگہوں کے درمیان نصف فاصلہ $30\ km\ h^{-1}$ کی چال سے طئے کرتا ہے اور دوسرا نصف قطر $60\ km\ h^{-1}$ کی چال سے طئے کرتا ہے۔موٹر سائیکل کی اوسط چال محسوب کرو؟
4. ایک بطخ جو سردیوں میں براہ راست جنوب کی جانب $20\ km\ h^{-1}$ کی مستقل رفتار کے ساتھ 25km کے فاصلہ تک اڑتی ہے۔بطخ کو یہ فاصلہ طئے کرنے میں کتنا وقت درکار ہوگا؟
5. بنگلور سے نئی دہلی 1200 کلومیٹر ہے اگر ہوائی جہاز سے 2 گھنٹے اور ٹرین سے 20 گھنٹے درکار ہیں تو اوسط چال کا تناسب محسوب کیجئے۔

6. ایک کار 5 سکنڈ میں حالت سکون سے $50\ kmh^{-1}$ رفتار سے خط مستقیم میں چلتی ہے تب اس کی اوسط اسراع کی قیمت کیا ہوگی؟

7. ایک جسم $2.0\ ms^{-1}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ 3 سکنڈ کے لئے $8.0\ ms^{-2}$ پر اسراع ہوتا ہے۔

(i) اسراع کے دوران جسم کتنی دور تک سفر کرتا ہے؟

(ii) اگر جسم ابتدا میں حالت سکون پر ہے تو وہ کتنی دور تک سفر کرتا ہے؟

8. ایک جسم کو $10\ m/s.$ اوپر کی جانب پھینکا جاتا ہے.....کی رفتار کے ساتھ اعظم ترین نقطہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کی قدر کیا ہوگی؟

9. ایک خاتون بازار کی جانب دوڑتی ہے $8\ km\ h^{-1}$ کی چال سے بازار بند معلوم ہوا۔ وہ واپس گھر آئی $10\ km\ h^{-1}$ چال سے اگر بازار اس کے گھر سے 2km دور ہے تو اوسط چال اور اوسط رفتار محسوب کرو۔

10. ایک جسم شروع میں حالت سکون سے 4 سکنڈ میں 4m کا فاصلہ طئے کرتا ہے۔ مستقل اسراعک ے ساتھ ایک خط مستقیم میں کل فاصلہ کا نصف طئے کرنا' درکار وقت اور انتہائی رفتار محسوب کرو۔

متن پر مبنی سوالات کے جوابات (Answers to Intext Questions)

2.1

1. ہاں! جب جسم اپنے ابتدائی مقام کو واپس ہوتا ہے تو اس کی رفتار صفر ہو جاتی ہے لیکن اس کی چال غیر صفر ہوتی ہے۔

2. ہاں! دو کاریں ایک ہی رفتار کے ساتھ ایک ہی سمت میں حرکت کرتی ہیں۔ اضافی رفتار ایک دوسرے کے مقابلہ صفر ہوگی۔

3. (a) $1\ ms^{-1}$ (b) $2\ ms^{-1}$

2.2

1. دیکھئے شکل 2.2

2. (i) نہیں (ii) 13 (iii) نہیں (iv) A (v) 400m

3. ہموار حرکت میں

4. (a) غلط ہے کیوں کہ طئے شدہ فاصلہ وقت کے ساتھ کم نہیں ہوسکتا یا صفر نہیں ہوسکتا۔

2.3

(i) جسم صفر رفتار کے ساتھ شروع ہوتا ہے۔

جسم کی حرکت شروع میں اور 5 ویں سکنڈ میں ہموار اسراعی ہوتی ہے اس کو خط OA سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$a = \frac{15-0}{5-0} = 3\,ms^{-2}$$

جسم کی حرکت 5 ویں اور 10 ویں سکنڈ کے درمیان ایک ہموار حرکت ہے۔

(AB سے ظاہر کیا گیا) $$a = \frac{15-15}{15-5} = \frac{0}{10} = 0\,ms^{-2}.$$

حرکت 15 ویں اور 25 ویں سکنڈ کے درمیان ہموار غیر اسراعی ہوتی ہے۔

(BC سے ظاہر کیا گیا) $$a = \frac{0-15}{25-15} = -1.5\,ms^{-2}$$

(ii) $$\text{Average speed} = \frac{\text{Distance covered}}{\text{time taken}} = \frac{\text{Area of OA BC}}{(25-0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\times 15\times 5\right)+(15\times 10)+\left(\frac{1}{2}\times 15\times 10\right)}{25} = \frac{525}{50} = 10.5\,ms^{-1}.$$

2.4

.1 $x = x_0 + ut + \frac{1}{2}at^2$ استعمال کرنے پر

$$40 = \frac{1}{2}\times a\times 16 \quad\Rightarrow\quad a = 5\,ms^{-2}$$

اگلا استعمال

$$v^2 = u^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v = 20\ ms^{-1},$$

$$20 = 0 + \frac{1}{2}\times 5\times t^2 \quad\Rightarrow\quad t = 2\sqrt{2}\ s.$$

.2 $x = x_0 + ut + \frac{1}{2}at^2,\quad x = 21m$ مساوات استعمال کرنے پر

$v = u + at,\ v = 13\ ms^{-1}.$ اور مساوات استعمال کرنے پر

.3 $v=0$ اعظم بلندی پر

$$u = 7\sqrt{10}\,ms^{-1} = 22.6\,ms^{-1}$$

اعظم ترین اونچائی تک پہنچنے میں جو وقت درکار ہے جسم اس میں دو بار ہوا میں ہوگا۔

.4 گیند کا اسراع پھینکتے وقت زیادہ رہے گا۔

اختتامی مشق کے جوابات

1. $15\ km\ h^{-1}$
2. $5.47\ s$
3. $40\ ms^{-1}$
4. $1.25\ h$
5. $8 : 1$
6. $2.8\ ms^{-2}$ (or $3000\ km\ h^{-2}$)
7. (i) $42\ m$ (ii) $36\ m$
8. 0 اور $9.8\ ms^{-2}$
9. اوسط چال $= 8.89\ km\ h^{-1}$، اوسط رفتار $= 0$
10. $v = 20\ ms^{-1}$, $t = 2\sqrt{2}s$

3
مستوی میں حرکت
(Motion in Plane)

تعارف(Introduction):

پچھلے سبق میں ہم نے خط مستقیم میں حرکت کے متعلق فاصلہ نقل مقام، رفتار اوراسراع کے تصورات کا مطالعہ کیا۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ نقل مقام، رفتار، اسراع کا سمتی پہلو کو مثبت اور منفی علاتوں سے لکھا جاتا ہے چونکہ ایک ابعاد میں صرف دو ہی سمتیں ممکن ہیں لیکن مستوی میں شئے کی حرکت کو بیان کرنے کے لئے یعنی 2D میں، ہمیں کچھ خاص تصورات متعارف کرواتا ہے۔ دوابعاد میں حرکت کی ایک مثال میں افقی سمت سے ایک زاویہ پر پھینکی گئی گیند کی حرکت ہے اس حرکت کو پروجکٹائل (Projectile) حرکت کہتے ہیں۔ ہم پروجکٹائل حرکت اور دائری حرکت پر بھی تفصیل سے بحث کریں گے۔ عام طور پر دائری حرکت سے مراد افقی دائرے میں حرکت ہوتی ہے، ہم اس قسم کی حرکت کی وضاحت کے لئے زاویائی چال، مرکز جو اسراع اور مرکز جو قوت کے تصورات متعارف کرائیں گے۔

مقاصد(Objectives):

- اس سبق کے مطالعے کے بعد، اس قابل ہونا چاہئے:
- سمتی اور غیر سمتی مقداروں کے درمیان امتیاز کرسکیں اوران کی مثالیں دے سکیں۔
- سمتیوں کی جمع اور تفریق اور ایک سمتیہ کو اسکے اجزاء میں حل کرنا۔
- دوسمتیوں کے حاصل ضرب کو محسوب کرنا۔
- پروجکٹائل حرکت اور دائری حرکت کی وضاحت کرنا۔
- پروجکٹائل کی ٹراجیکٹری مساوات اخذ کرنا۔
- اعظم بلندی، اڑان کا وقت اور پروجکٹائل کی وسعت کے لئے عبارت اخذ کرنا۔
- دائری حرکت میں ذرے کی رفتار اور اسراع کی تعریف کرنا۔

3.1 سمتیے اور میزانیے (Vectors and Scalors):

طبیعیات میں طبعی مقداروں کو دو زمروں میں درجہ بندی کی جاتی ہے۔ ایک صورت میں ہمیں صرف ان کی قدر کو مناسب اکائیوں کے ساتھ بیان کرنے کی ضرورت ہے اوران کی مکمل تشریح فراہم کرتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت کو لیجئے۔ اگر ہم کہیں کہ گیند کی کمیت 50g ہے تو ہمیں اس کی کمیت کے بیان کرنے کے لئے مزید تفصیل کی ضرورت نہیں ہے اسی طرح پانی کی کثافت $1000\ kg\ m^{-3}$ ہے یہ کثافت کا مکمل بیان ہے۔ اسی مقداروں کو میزانیہ (غیر سمتیہ) کہا جاتا ہے۔ میزانیہ مقدار صرف قدر رہوتی ہے لیکن سمت نہیں ہوتی۔

دوسری طرف ایسی مقداریں ہیں جن کی مکمل وقت کے لئے قدر اور سمت دونوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایک سادہ مثال رفتار ہے یہ بیان ہے کہ ٹرین کی رفتار $100\ km\ h^{-1}$ ہے مکمل طور پر قابل فہم نہیں ہے۔ جب تک کہ ہم یہ نہ بتائیں کہ ٹرین جس سمت میں چل رہی ہے وہ

سمت کیا ہے؟ قوت ایسی ہی ایک مقدار ہے ہمیں نہ صرف قوت کی قدر بلکہ اس کی سمت کا بھی تعین کرنا جس میں قوت کا اطلاق ہوتا ہے ایک سمتی مقدار قدر اور سمت دونوں رکھتی ہے۔ سمتیہ مقداروں کی بعض مثالیں جن سے میکانیات میں آپ کو سابقہ پیش آئے گا وہ ہیں نقل مقام (3.1)' اسراع معیار حرکت زاویائی معیار حرکت اور قوت گردشہ وغیرہ۔

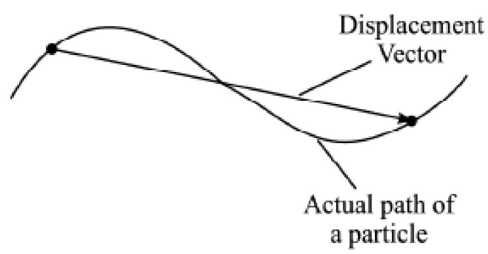
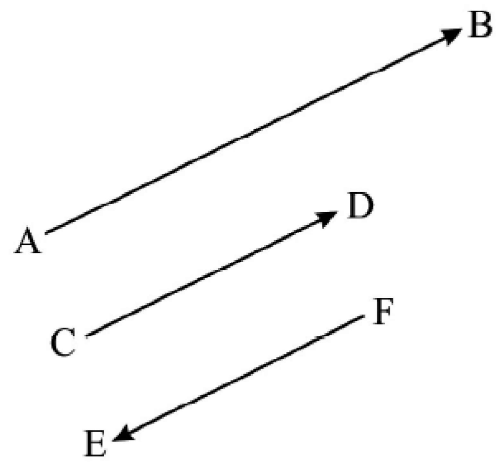


Fig. 3.1 : Displacement Vector

3.12 سمتیوں کا اظہار (Representation of Vectors):

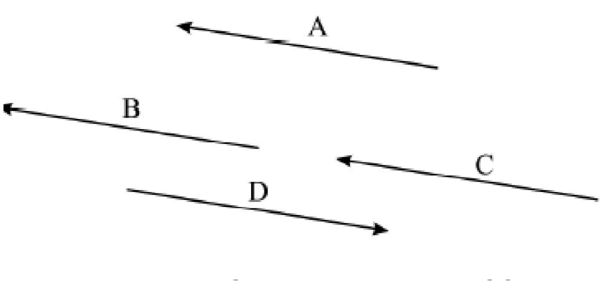
سمتیہ کو ایک خط سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں سمت ظاہر کرنے کے لئے ایک تیر کا نشان لگاتے ہیں۔ شکل 3.2 میں سمتیہ AB کو لیجئے۔ خط کی لمبائی کسی پیمانہ پر اس کی قدر کو ظاہر کرتی ہے اور تیر کا نشان اس کی سمت کی نشاندہی کرتا ہے۔ سمتیہ CD اسی سمت میں سمتیہ ہے لیکن اس کی قدر سمتیہ AB کے مقابلہ میں کم ہیں سمتیہ EF ایک سمتیہ ہے جس کی قدر سمتیہ CD کے مساوی ہے لیکن سمت مختلف ہے کسی سمتیہ میں ابتدائی نقطہ (AB میں نقطہ A) سمتیہ کی دم (Tail) کہلاتی ہے اور انتہائی نقطہ کو (AB میں نقطہ B) جس پر تیر کا نشان ہے اسے سمتیہ کا سر (Head) اور نوک (Tip) کہتے ہیں۔



شکل 3.2: سمتیے کی قدریں اور سمتیے

سمتیہ کو ظاہر کرنے کے لے نشان کے لئے A' سمتیہ کی قدر A سادہ طور پر A یا...... سے ظاہر کی جاتی ہے۔ طباعت کے دوران انگریزی کے جلی حروف سے دیا کہ A کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ دو سمتیوں کو مساوی اس وقت کہیں گے کہ جب ان کی قدریں یکساں ہوں اور وہ ایک ہی سمت کی نشاندہی کرتے ہوں۔ یعنی وہ تمام سمتیے جو ایک دوسرے کے متوازی ہوں ان کی قدریں یکساں ہوں تو انہیں مساوی کہا جائے گا۔ شکل 3.3 میں دکھائے گئے تین سمتیے C, B, A مساوی ہیں ہم کہہ سکتے ہیں کہ A=B=c لیکن A,D کے مساوی نہیں ہے۔

ایک سمتیہ (یہاں D) جس کی قدر وہی ہے جو سمتیہ A کی ہے لیکن یہ مخالف سمت میں ہے لہٰذا A کا منفی سمتیہ یا A- کہا جاتا ہے اس طرح D=-A سمتیہ کو طبعی مقداری شکل میں ظاہر کرنے کے لئے اس میں لازمی طور پر ایک متناسب پیمانہ منتخب کرنا ہوگا۔



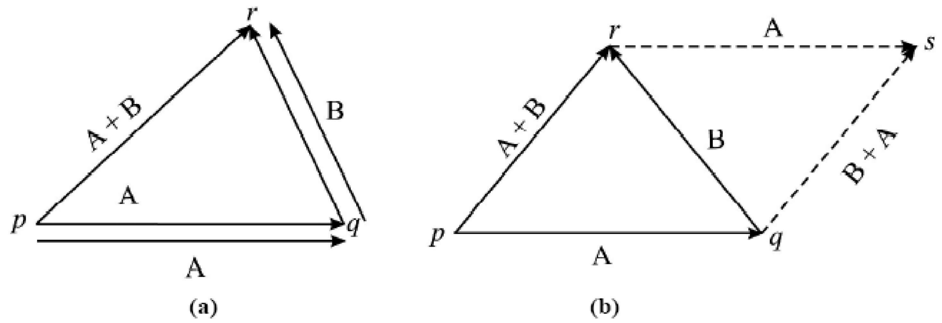
شکل 3.3: تین سمتیے مساوی ہیں لیکن چوتھا سمتیہ D مساوی نہیں ہے۔

مثال کے طور پر دہلی اور آگرہ کے درمیان سمتیے کی منتقلی جو کہ تقریباً 300km ہے' کی نمائندگی 100km=1cm کا پیمانہ منتخب کر کے کی جاسکتی ہے (فرض کیا) اس طرح ہم 30N قوت کی نمائندگی 3cm لمبائی کے سمتیے سے کر سکتے ہیں جب کہ ہم اس کے لئے 10N=1cm پیمانہ منتخب کریں۔

اوپر کی بحث کی بنیاد پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ہم کسی سمتیے کے لئے ایک سمتیہ اس کے متوازی بنائیں تو اس میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔

3.1.3 سمتیوں کی جمع(Addition of Vectors):

آپ کو ذہن نشین کر لینا چاہیئے کہ ایک قسم کے سمتیوں کو ہی جمع کیا جا سکتا ہے مثلاً دو قوتوں یا رفتاروں کو جمع کیا جا سکتا ہے لیکن ایک قوت اور ایک رفتار کو جمع نہیں کیا جا سکتا۔



شکل3.4: Aاور Bسمتیوں کی جمع

فرض کیجئے کہ ہم دو سمتیوں Aاور B کو جمع کرنا چاہتے ہیں پہلے سمتیہ A کو دوبارہ کھینچئے (شکل(a)3.4)اس کے لئے ایک خط کھینچئے (مثلاً pq) جو سمتیہ A کے متوازی ہو۔ خط کی لمبائی(pq) سمتیہ کی قدر کے مساوی ہو۔ اس کے بعد سمتیہ Bاس طرح کھینچئے کہ اس کی دم(Tail) سمتیہ A کے سر (Head) پر منطبق ہو اس کے لئے خط qrسمتیہ A کے سر (Head) سے کھینچئے (یعنی نقطہ q سے) جو سمتیہ B کی سمت کے متوازی ہو دونوں سمتیوں کا حاصل A کی دم سے سمتیہ B کے (Head) تک ہوگا یعنی ماحصل (Resultant) سمتیہ کی نمائندگی قدر اور سمت کے اعتبار سے pr کرے گا۔

اب آپ بہ آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ سمتیوں کی جمع تقلیبی (Commutative) ہوتی ہے یعنی A+B=B+A جیسا کہ شکل (b)3.4 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل (b)3.4 میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ pqr ایک مثلث اور اسکے دو اضلاع pqاور qr بالترتیب سمتیہ Aاور B کی قدر اور سمت کے لحاظ سے نمائندگی کرتے ہیں اور مثلث کا تیسرا ضلع pr حاصل سمتیہ ہے جسکی سمت p سے r کی جانب ہے۔ اس سے ہمیں دو سمتیوں کا حاصل معلوم کرنے کا اصول ملتا ہے۔ اگر ہم کوئی دو سمتیوں کی قدر اور سمت کے اعتبار سے کسی مثلث کے بالترتیب دو اضلاع کر رہے ہوں تو تیسرا ضلع حاصل سمتیہ کو ظاہر کرتا ہے جو مخالف ترتیب میں لیا گیا ہو اسے سمتیوں کا مثلث کا قانون کہتے ہیں۔

دو یا دو سے زائد سمتیوں کے جمع کے نتیجہ کو حاصل سمتیہ کہتے ہیں شکل (b)3.4 میں A, Prاور B کا حاصل سمتیہ ہے۔ اب اگر تین قوتیں کسی مثلث کے تین اضلاع کی سمت میں ایک ہی ترتیب میں کام کر رہی ہوں تو ان تینوں کا حاصل سمتیہ کیا ہوگا؟ اگر آپ سمجھتے ہیں کہ حاصل سمتیہ صفر ہوگا تو آپ درست ہیں۔

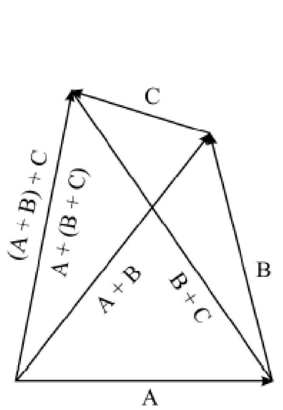


Fig. 3.5 : Addition of three vectors in two different orders

اب ہم دو یا دو سے زائد سمتیوں کے حاصل کا حساب لگانا سیکھتے ہیں۔

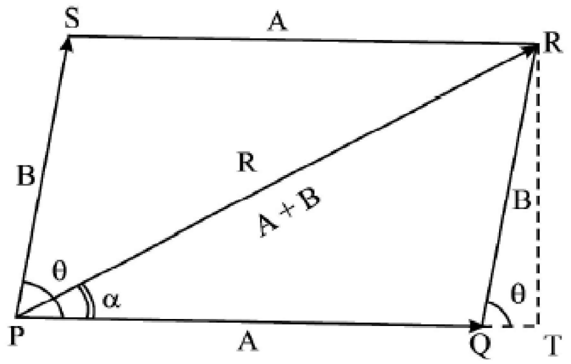
دو یا دو سے زائد سمتیوں B, Aاور C کے حاصل اس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے جیسے دو سمتیوں کا حاصل معلوم کیا جاتا ہے۔ پہلے ہم Aاور B کا حاصل نکالتے ہیں پھر دونوں کے حاصل (A+B) کو تیسرے سمتیے میں جمع کر دیتے ہیں۔

اسی طرح متبادل طور پر آپ Bاور C کو جمع کر کے ان کے حاصل (B+C) میں A کو جمع کر سکتے ہیں۔ دیکھئے شکل (3.5) دونوں طریقوں سے آپ وہی حاصل سمتیہ کا نتیجہ پائیں گے اس طرح معلوم ہوا کہ سمتیوں کی جمع اتصالی (Associative) ہوتی ہے۔ یعنی A+(B+C)=(A+B)+C یعنی اگر آپ دو سے زائد سمتیوں کو جمع کرتے ہیں تو یہ معلوم ہوگا کہ حاصل سمتیہ وہ سمتیہ ہے جو پہلے کی سمتیہ

کی دم (Tail) سے آخری سمتیہ کے سر (Head) تک ہوگا۔کئی مرتبہ سمتیوں کے نقطہ کے اطلاق ایک ہوتا ہے ایسی صورت میں سمتیوں کی جمع کا متوازی الاضلاع کا استعمال کرنا زیادہ آسان ہے اب ہم اس کے متعلق سیکھتے ہیں۔

3.1.4 سمتیوں کی جمع کا متوازی الاضلاع کا کلیہ

فرض کرو کہ A اور B دو سمتیے ہیں اور ان کے درمیان θ ڈگری کا زاویہ ہے جیسا کہ شکل (3.6) میں دکھایا گیا ہے سمتیوں کے حاصل کا حساب لگانے کے لئے متوازی الاضلاع کو مکمل کرتے ہیں یہاں ضلع PQ سمتیہ کی نمائندگی کرتا ہے۔ضلع PS سمتیہ B کی نمائندگی کرتا ہے اور وتر PR حاصل شدہ سمتیہ R کی نمائندگی کرتا ہے کیا آپ پہچان سکتے ہیں کہ وتر PR ، سمتیوں A اور B یعنی (A+B) کا حاصل ہے؟



شکل (3.6): سمتیوں کے جمع کا متوازی الاضلاع کا کلیہ

اسے A اور B کا حاصل کہتے ہیں سمتیہ PQ اور سمتیہ SR سمتیہ A کے مساوی ہے اور سمتیہ PS اور سمتیہ QR سمتیہ B کے مساوی ہیں حاصل سمتیہ R کی قدر معلوم کرنے کے لئے ایک عمودی خط (RT) دکھایا گیا تب قدر کے لحاظ سے

$$
\begin{aligned}
(PR)^2 &= (PT)^2 + (RT)^2 \\
&= (PQ + QT)^2 + (RT)^2 \\
&= (PQ)^2 + (QT)^2 + 2PQ.QT + (RT)^2 \\
&= (PQ)^2 + [(QT)^2 + (RT)^2] + 2PQ.QT \qquad (3.1) \\
&= (PQ)^2 + (QR)^2 + 2PQ.QT \\
&= (PQ)^2 + (QR)^2 + 2PQ.QR\ (QT / QR)
\end{aligned}
$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB.\cos\theta$$

اس لئے R کی قدر ہوگی

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB.\cos\theta} \qquad (3.2)$$

سمتیہ R کی سمت کے لئے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$\tan\alpha = \frac{RT}{PT} = \frac{RT}{PQ+QT} = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \qquad (3.3)$$

اس لئے حاصل سمتیہ کی سمت اس زاویہ کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں جو کہ اساس سمتیہ کے ساتھ بناتا ہے۔

مخصوص صورتیں (Special Cases):

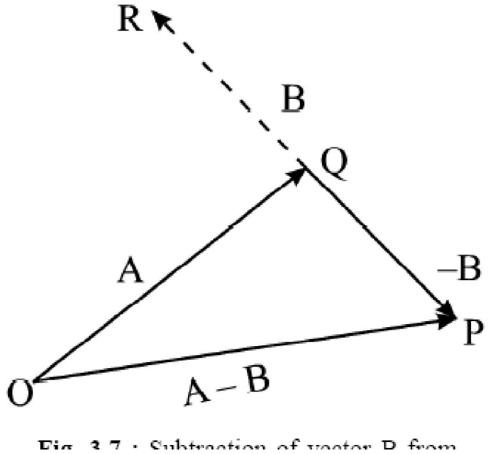
جب دو سمتیے A اور B ایک ہی سمت (متوازی) میں ہوں یعنی......اور......تب حاصل سمتیہ R ان کی قدروں کے مجموعے کے مساوی ہے یعنی R=A+B اور یہ سمتیوں کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

اگر دو سمتیے ایک دوسیر کے عمودوار (Perpendicular) ہیں یعنی......اور......تب حاصل سمتیہ R سمتیوں کے مربع کے مجموعے کے جذر المربع کے مساوی ہے۔

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

جب دو سمتیے مخالف سمت میں ہوتے ہیں یعنی......اور......تب حاصل سمتیہ R ان کی قدروں کے فرق کے مساوی ہے اور A یا B کی سمت کے ساتھ ہوگا۔

$$R = A - B$$

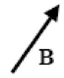


شکل 3.7: سمتیہ A سے B سمتیہ کی تفریق

3.1.5 سمتیوں کی تفریق

ہم ایک سمتیے کی دوسرے میں تفریق کیسے کریں؟ اگر آپ کو یاد ہو کہ دو سمتیوں کا فرق (A-B) دراصل (B-)+A کے مساوی ہوتا ہے تو آپ دو سمتیوں کے جمع کا طریقہ کر سکتے ہیں۔ اس کی شکل (3.7) میں وضاحت کی گئی ہے A کے سر (Head) سے سمتیہ B کھینچئے سمتیہ A کے دم (Tail) کو سمتیہ B کے سر سے جوڑ دیجئے۔ حاصل سمتیہ ہی تفریق (A-B) ہوگا۔

3.1 متن سے سوالات

دیئے گئے سمتیے  اور  میں

1. خاکہ بنا کر دکھایئے کہ مندرجہ ذیل سمتیوں کو کیسے حاصل کریں

(a) B-A (b) A+B (c) A-2B اور (d) (B-2A)

2. دو سمتیے A اور B جن کی قدریں 10 اکائی اور 12 اکائی ہیں مخالف متوازی ہیں سمتیہ A+B اور A-B معلوم کیجئے۔

3. دو سمتیے A اور B جن کی قدریں بالترتیب 30 اکائی =A اور 60 اکائی =B ہیں یہ باہم زاویہ پر جھکے ہوئے ہیں حاصل سمتیہ معلوم کیجئے۔

3.1.6 کسی میزانیے سے سمتیہ کی ضرب

اگر ہم کسی سمتیہ A کو کسی میزانیہ K سے ضرب دیتے ہیں تو ان کا حاصل ایک سمتیہ ہوتا ہے، جس کی قدر سمتیہ A کی مطلق قدر اور K کا حاصل ضرب ہوتی ہے یعنی حاصل سمتیہ کی قدر $k\,|\mathbf{A}|$ ہے اگر K مثبت ہے تو نئے سمتیے کی سمت میں تغیر نہیں ہوتا لیکن اگر K منفی ہوتا ہے تو حاصل سمتیہ کی سمت اصل سمتیہ کی مخالف ہوتی ہے۔ مثال کے لئے سمتیہ 3A سمتیہ A کی قدر کا تین گنا ہے اور یہ اسی سمت میں ہے لیکن سمتیہ 3A کی سمت سمتیہ A کی مخالف سمت میں ہوگی حالانکہ اس کی قدر سمتیہ A کے مقابلہ تین گنا ہے۔

3.1.7 سمتیوں کا میزانی حاصل ضرب (Scalar Product of Vectors)

دو سمتیوں A اور B کے میزانی حاصل ضرب کو AB لکھا جاتا ہے اور یہ $\cos\theta$ کے مساوی ہوتا ہے جہاں θ دونوں سمتیوں کے درمیان کا زاویہ ہے اگر آپ شکل 3.8 پر غور کریں تو θ سمتیہ A پر سمتیہ B کا ظل ہے اس لئے A اور B کا میزانی حاصل ضرب A کی قدر اور اس پر B کے ظل کی لمبائی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

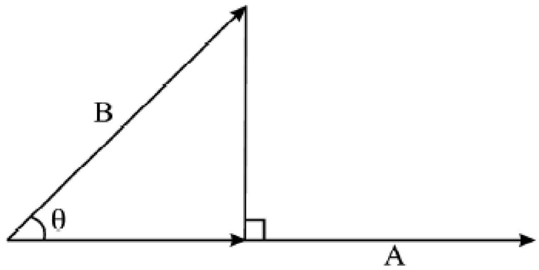


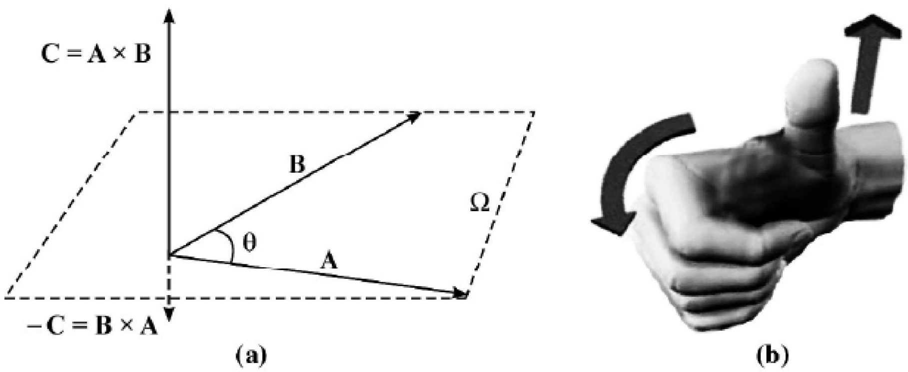
Fig. 3.8 : Projection of B on A

ایک دوسرا نقطہ قابل غور یہ ہے کہ اگر ہم دونوں سمتیوں کے درمیان کے زاویہ کو 360-θ بھی لیں تو اس سے کوئی فرق نہیں آتا کیوں کہ دونوں زاویوں کا Cosine ایک ہی ہوتا ہے چوں کہ دو سمتیوں کے درمیان ڈاٹ (.) کا نشان میزانی حاصل ضرب کی علامت ہے۔

اس لئے اسے حاصل ضرب (ڈاٹ پروڈکٹ) بھی کہا جاتا ہے۔ واضح رہے کہ دو سمتیوں کا میزانی حاصل ضرب ایک میزانی مقدار ہی ہے میزانی حاصل ضرب کی معروف مثال کیا گیا کام ہے جو کسی قوت F کے ذریعہ قوت کی سمت سے ایک زاویہ پر حرکت کرنے والے جسم پر کیا جاتا ہے۔ اگر جسم کا نقل مکان ہے اور θ اور d کے درمیان کا زاویہ ہو تو قوت کے ذریعہ کیا گیا کام θ ہوگا چونکہ حاصل ضرب میزانیہ ہے اس لئے یہ تعلیلی ہے θ اور تقسیمی بھی ہوتا ہے۔ A.(B+C)=A.B+A.C

3.1.8 سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب (Vector Product of Vectors)

فرض کیجئے کہ دو سمتیہ A اور B θ زاویہ پر جھکے ہوئے ہیں۔ ہم ایک مستوی کھینچ سکتے ہیں جو دو سمتیوں پر مشتمل ہے فرض کرو کہ وہ مستوی Ω ہے جو اس ورق کے مستوی کے عمودی ہے شکل (3.9)۔



شکل 3.9: سمتیوں کا حاصل

(b) حاصل ضرب سمتیہ C=AxB کی سمت، دائیں ہاتھ کے اصول سے دکھایا گیا ہے اگر دایاں ہاتھ اس طرح رکھا جائے کہ مڑی ہوئی انگلیاں دونوں کے درمیان چھوٹے زاویے A سے B کی طرف اشارہ کریں تو انگلیوں سے عمودی ماویہ پر تنا ہوا انگوٹھا C کی سمت اشارہ کرتا ہے۔

تو ان سمتیوں کا حاصل ضرب AxB لکھا جائے گا جسے سمتیہ C کہہ سکتے ہیں جس کی قدر sinθ ہے اور جس کی سمت مستوی Ω کے عمودی ہے سمتیہ C کی سمت دائیں ہاتھ کے اصول کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں (شکل (3.9(b)) خیال رکھیں کہ دائیں ہاتھ کی انگلیاں A سے B کی جانب ان کے درمیان چھوٹے زاویہ کے ہمراہ مڑی ہوتی ہیں تب اس صورت میں انگوٹھے کی سمت حاصل سمتیہ C کی سمت کی طرف اشارہ کرتی ہے اس قاعدے پر عمل کر کے آپ بآسانی یہ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ سمتیہ BxA کی سمت سمتیہ AxB کی سمت مخالف ہوتی اس کا مطلب یہ ہے کہ سمتیہ حاصل ضرب تقلیبی پذیر نہیں ہے چونکہ دونوں سمتیوں کے درمیان ایک کراس (ضرب) کا نشان لگا دیا جاتا ہے جو سمتیہ حاصل ضرب کی علامت ہوتا ہے اس لئے سمتیہ حاصل ضرب کو کراس پروڈکٹ (Cross Product) بھی کہا جاتا ہے۔

سمتی حاصل ضرب کی ایک معروف مثال گردش کرتے ہوئے جسم کا زاویائی معیار حرکت ہے۔

3.2 متن پر مبنی سوالات (Intext Questions)

1. فرض کیجئے کہ سمتیہ A اور B کے متوازی ہے ان کا سمتی زاویہ کیا ہوگا؟ اگر سمتیہ A'B کے مخالف متوازی ہو تو دونوں کا سمتی حاصل ضرب کیا ہوگا؟
2. فرض کیجئے کہ ہمارے پاس سمتیہ A اور سمتیہ $C = \frac{1}{2}B$ ہیں تو سمتیہ AxB اور AxC کی سمتوں میں کیا تعلق ہوگا؟
3. فرض کیجئے کہ سمتیہ A اور سمتیہ B کو اس مستوی میں گردش کرائی جاتی ہے جس میں وہ واقع ہیں تو سمتیہ C=AxB کی سمت کیا ہو جائے گی؟
4. فرض کیجئے کہ آپ دو سمتیوں A اور B کو ان کے مستوی میں باقی رکھتے ہوئے اپنی مرضی کے مطابق گھمانے کے لئے آزاد ہے کیا آپ سمتیہ C=AxB بتا سکتے ہیں جن کی سمتیں ایک دوسرے کے مخالف ہوں؟
5. اگر سمتیہ A محور X پر ہو اور سمتیہ B محور Y پر ہو تو C=AxB کی سمت کیا ہوگی؟ اگر A محور پر Y آجائے اور B محور X پر آجائے تو C میں کیا تبدیلی واقع ہوگی؟
6. A اور B باہم عمودی سمتوں میں سمتیہ ہیں تو (a) A.B (b) AxB کا حساب لگائیے۔

3.1.9 سمتیوں کا جز تجزیہ (Resolution of Vectors)

سمتیوں کا جز تجزیہ ان کی جمع کا برعکس ہے یہاں ہم کسی دئے گئے سمتیہ کے عناصر یا اجزاء کا حساب کسی مختص محوروں کے سیٹ کی سمت میں لگاتے ہیں سمتیہ A فرض کرتے ہیں جیسا کہ شکل (3.10) میں دکھایا گیا ہے ہم محور X اور محور Y کی سمتوں میں اس کے اجزاء معلوم کرنا چاہتے ہیں فرض کیجئے کہ یہ اجزاء بالترتیب X- محور اور Y- محور پر A_X اور A_Y ہیں۔ سادہ علم مثلثات سے واضح ہے کہ

$$A_X = A\cos\theta \qquad (3.4)$$

اور

$$A_y = A\sin\theta \qquad (3.5)$$

جہاں θ زاویہ ہے جو محور X کے ساتھ بناتا ہے اور سمتیہ A کے اجزاء محور X اور محور Y پر کیا ہوں (3.10) شکل اگر محور X اور A کے درمیان کا زاویہ ϕ ہو تو

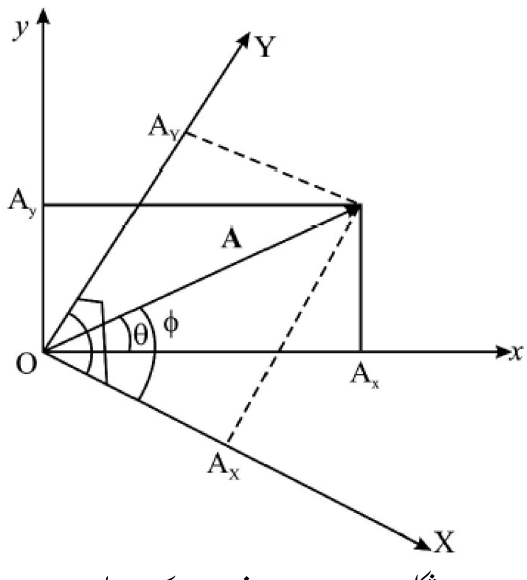
$$A_X = A\cos\phi$$

$$A_X = A\cos\phi$$

اب یہ ضرور واضح ہو گیا کہ ایک سمتیہ کے اجزاء متعین مقدار میں نہیں ہوتے بلکہ وہ محوروں کے اس کے مخصوص سیٹ پر منحصر ہوتے ہیں جن پر اجزاء درکار ہیں آپ یہ بھی نوٹ کریں کہ سمتیہ A کی قدر اور سمت کو اس کے اجزاء کی شکل میں اسطرح بیان کیا جاتا ہے

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} \qquad (3.6)$$

$$\text{and} \quad \tan\theta = A_y/A_x,\ \tan\phi = A_Y/A_X \qquad (3.7)$$



شکل 3.10: سمتیہ A مختصات کے دو سیٹوں (x,y) اور (X,Y) پر جز تجزیہ

3.1.10 اکائی سمتیہ (Unit Vector):

اس مرحلے میں ہم اکائی سمتیہ کے تصور کو متعارف کراتے ہیں جیسا کہ نام سے ظاہر ہے کسی اکائی سمتیہ کی قدر ایک ہوتی ہے اس کی مخصوص سمت ہوتی ہے اس کی کوئی اکائی اور ابعاد نہیں ہوتے ہیں۔ اس کی ایک مثال یہ ہے کہ ہم سمتیہ A کو $A\hat{n}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں پر n لگا کیپ (یعنی $\hat{n}$) اکائی سمتیہ کی علامت ہے اور اس سمتیہ کی سمت A کی سمت میں ہوتی ہے۔ قابل غور ہے کہ اکائی سمتیہ کو شامل کرنے کا مقصد سمتیہ کی سمت کا تعین ہے جب کہ سمتیہ کی قدر کا تعین A سے ہوتا ہے مختص محوروں کی سمت کے اکائی سمتیہ خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ محور x پر اکائی سمتیہ کی علامت $\hat{i}$ محور پر $\hat{j}$ اور Z- محور پر $\hat{k}$ ہے اس ترمیم کا استعمال کر کے ہم سمتیہ A کو جس کے اجزاء بالترتیب X- محور پر A_X اور Y- محور پر A_Y ہیں اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (3.8)$$

اسی طرح سمتیہ B کو بھی اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$B = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \qquad (3.9)$$

دونوں سمتیوں کے مجموعے کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{\mathbf{i}}\bullet\hat{\mathbf{i}} = 1,\ \hat{\mathbf{j}}\bullet\hat{\mathbf{j}} = 1,\ \hat{\mathbf{k}}\bullet\hat{\mathbf{k}} = 1,\ \hat{\mathbf{i}}\bullet\hat{\mathbf{j}} = 0,\ \hat{\mathbf{i}}\bullet\hat{\mathbf{k}} = 0,\ \text{and}\ \hat{\mathbf{j}}\bullet\hat{\mathbf{k}} = 0$$

میزانی حاصل ضرب کے قاعدے سے آپ دکھا سکتے ہیں کہ

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}).(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$

$$= A_xB_x(\hat{\mathbf{i}}\bullet\hat{\mathbf{i}}) + A_xB_y(\hat{\mathbf{i}}\bullet\hat{\mathbf{j}}) + A_yB_x(\hat{\mathbf{j}}\bullet\hat{\mathbf{i}}) + A_yB_y(\hat{\mathbf{j}}\bullet\hat{\mathbf{j}})$$

اب دونوں سمتیوں A اور B کا حاصل ضرب اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$= A_xB_x + A_yB_y$$

یہاں ہم نے مساوات (3.11) کے نتائج کو استعمال کیا ہے۔

دو سمتیوں کے حاصل ضرب کو اکائی سمتیہ کے لحاظ سے بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اس کے لئے ہمیں پہلے اکائی سمتیہ کے حاصل ضرب کی ضرورت ہے اس کے لئے یاد رکھیں کہ اکائی سمتیہ کے درمیان زاویہ ایک زاویہ قائمہ ہو۔ مثال کے لئے $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ پر غور کریں کہ ان کے درمیان زاویہ سائن (Sine) ایک ہے۔ حاصل ضرب سمتیہ کی قدر بھی 1 ہے جو کہ x محور ہے دائیں ہاتھ کے اصول کے مطابق ہم یہ بھی معلوم کرتے ہے ں کہ یہ مثبت Z محور ہونا چاہئے اور مثبت Z سمت میں اکائی سمتیہ کیا ہے اکائی سمتیہ ...... ہے اس لئے

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \qquad (3.13)$$

اسی طرح کے دائیں ہاتھ کا استعمال کر کے آپ یہ بھی دکھا سکتے ہیں

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.14)$$

اور

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \qquad (3.15)$$

3.1 مثال(Example):

سمتیوں کے ڈاٹ پروڈکٹ اور کراس پروڈکٹ (حاصل ضرب) کا حساب لگائیں: $\mathbf{C} = 4\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}$

حل(Solution):

Cاور D کا ڈاٹ پروڈکٹ

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = (4\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}) \cdot (6\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 24\,(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) - 16\,(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}) + 30\,(\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}}) - 20\,(\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}})$$

3.11 مساوات استعمال کرنے پر C اور D کا کراس پروڈکٹ

$$= 24 - 20$$

$$= 4$$

مساوات 3.13 اور 3.15 استعمال کرنے پر ہم لکھ سکتے ہیں

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = (4\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}) \times (6\,\hat{\mathbf{i}} - 4\,\hat{\mathbf{j}})$$

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = -16\,\hat{\mathbf{k}} - 30\,\hat{\mathbf{k}} = -46\,\hat{\mathbf{k}}$$

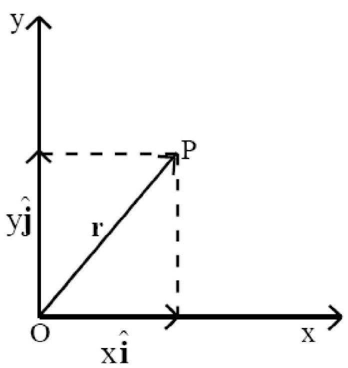
اس لئے C اور D کا حاصل ضرب وہ سمتیہ ہوگا جس کی قدر 46 اور اس کی سمت منفی Z- محور کی سمت میں ہوگی چونکہ C اور D مستوی میں واقع ہے اس لئے حاصل ضرب اس مستوی کی عمودی سمت میں ہونا چاہئے۔

3.2 مقام سمتیہ اور نقل مقام

کسی مستوی میں واقع ذرے P کا x-y حوالہ جاتی فریم کے مبداء کے مطابق مقام کو سمتیہ r شکل (3.11) درج ذیل مساوات سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

یہاں x,y اور X اور Y- محوروں کے مطابق r کے اجزاء ہیں انہیں ہم شئے کے محدد بھی کہہ سکتے ہیں۔



شکل 3.11: مقام سمتیہ r

مان لیجئے کہ ایک ذرہ منحنی پر حرکت کرتا ہے کسی وقت t پر اس کا مقام p ہے اور وقت t پر P' ہے تب اس کے محدد (x, y) اور (x', y') ہوتے ہیں جیسا کہ شکل 3.12 میں دکھایا گیا تب ذریعہ کا نقل مقام شکل (3.21): نقل مقام اور اوسط رفتار v

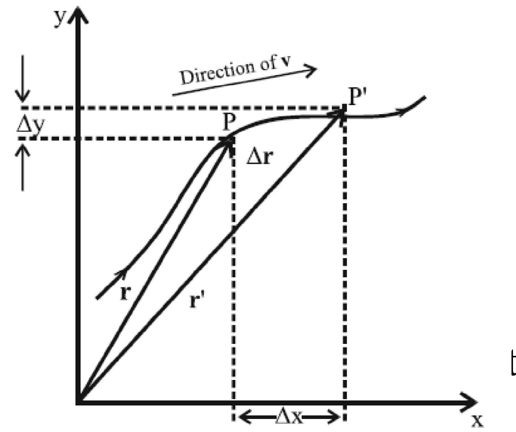


Fig. 3.12 : Displacement Δr and averag
velocity **v**

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}^1 - \mathbf{r}$ and is directed from P to P'.

$$\Delta\mathbf{r} = (x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}) - (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$$

$$= \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}} \text{ where}$$

$$\Delta x = x' - x, \quad \Delta y = y' - y.$$

3.2.1 رفتاراوراسراع(ty of Acceleration)

شئے کے نقل مقام اوراس کے مطابق وقفہ وقت کی نسبت کو ہم اوسط رفتار (Average Velocity) کہتے ہیں لہٰذا

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

جہاں $= v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$ رفتار V کے تیرانی اجزاء ہیں اور ہر جسم کی چال کو ظاہر کرتے ہیں اوسط رفتار کی سمت وہی جو نقل مقام Δr کی ہے جیسا کہ شکل (3.12) میں دکھایا گیا۔

اس طرح شئے کے اسراع سے دیا گیا

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}})}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}$$

جہاں $= a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$ بالترتیب x اور y محور سمتوں پر جسم کے اسراع ہیں۔

3.2.2 پروجکٹائل حرکت(Projectile Motion):

پروجکٹائل کی تعریف ایک ایسے جسم کے لحاظ سے کی جاتی ہے جو زمین کی سطح کے قریب افق کے ساتھ 90^0 کے علاوہ کسی زاویہ پر ہوا میں پھینکا جاتا ہے۔

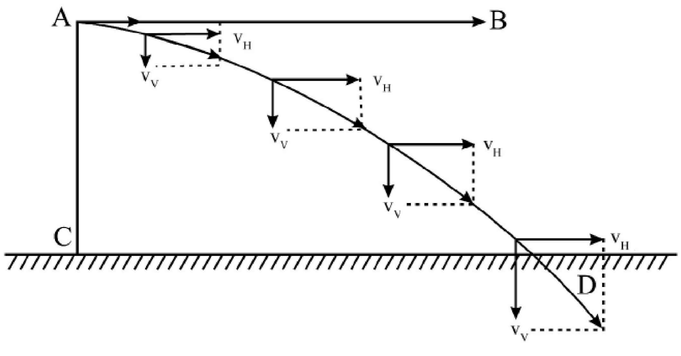


Fig. 3.13 : Curved path of projectile

پروجکٹائل حرکت کی وضاحت میں پہلی پیشرفت گیلیلیو نے کی تھی، اس نے بتایا کہ پروجکٹائل کی افقی اور عمودی حرکتیں غیر منحصر ہیں، مندرجہ ذیل سرگرمی کے ذریعہ سمجھا جاسکتا ہے۔

کرکٹ کی دو گیندیں لیجئے ان میں سے ایک کو عمارت کی چھت سے افقی سمت میں اور دوسری گیند کو اس اونچائی سے نیچے گرادیجئے۔ اس سے مشاہدہ کیا گیا کہ دونوں گیندیں ہر ایک وقت میں ٹکراتی ہیں۔

اس سے معلوم ہوا کہ پروجکٹائل کے نیچے کے اطراف اسراع وہی ہے جو آزادانہ گرتے ہوئے جسم کا ہوتا ہے۔ اس کے علاوہ وقت اور فاصلہ کی پیائش سے ظاہر ہوتا ہے کہ افقی رفتار میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اور یہ عمودی حرکت پر بغیر کسی انحصار کے جاری رہتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں پروجکٹائل حرکت کے دو اہم خصوصیات ہیں:

(i) افقی رفتار کا مستقلہ جز۔

(ii) عمودی طور پر نیچے کی جانب اسراعی متعلقہ جز

ان دونوں حرکات کے جوڑ کے نتیجے میں پروجکٹائل کا راستہ مکانی ہوتا ہے۔

3.2.3 ٹراجیکٹری یا پروجکٹائل کا راستہ

پروجکٹائل کے راستہ کو ٹراجیکٹری کہا جاتا ہے۔ اب ہم ایک پروجکٹائل کے راستہ کی مساوات اخذ کریں گے۔ فرض کرو کہ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیا گیا۔ فرضکریں کہ جسم کی رفتار کو x کے ساتھ اس طرح بتایا گیا کہ یہ x- محور کے ساتھ θ زاویہ بناتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا x اور y محور کی سمتوں پر رفتار...... کے اجزاء ہیں......

$$u_x = u \cos\theta \qquad (3.16\ [a])$$

$$u_y = u \sin\theta \qquad (3.16\ [b])$$

ہم جانتے ہیں کہ پروجکٹائل حرکت کو دو غیر منحصر بیک وقت واقع ہونے والے خط مستقیم کی حرکات کا نتیجہ سمجھا جاسکتا ہے وہ ہیں:

(i) صفر اسراع کے ساتھ افقی حرکت اور (ii) مسلسل نیچے کے اسراع کے ساتھ عمودی حرکت۔

جیسے ہم افقی خط کریں چونکہ افقی حرکت میں صفر اسراع ہوتا ہے اس لئے رفتار 4x افقی جز تمام حرکت میں مستقل رہتا ہے۔ ابتدائی مقام سے وقت 't' کے بعد پروجکٹائل کی افقی نقل مقام کی جانب سے دی گئی ہے

$$x = u_x\ t = (u \cos\theta)\ t \qquad (3.17)$$

$$a_x = 0$$

اب عمودی حرکت پر غور کریں

عمودی سمت میں، پروجکٹائل کے اسراع a آزادانہ گرنے والے جسم کے اسراع کے مساوی ہوتی ہے جو مستقل اور ہمیشہ نیچے کی جانب عمل کرتی ہے۔ $a_y=-g$ اور

کسی بھی 't' وقت پر رفتار کا جز مساوات کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$v_y = u_y - gt$$

3.16 مساوات استعمال کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں:

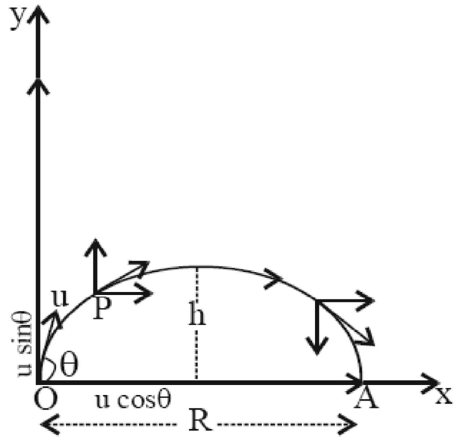
$$v_y = u \sin\theta - gt \qquad (3.18)$$

t وقت بعد پروجکٹائل کے عمودی نقل مقام کے لئے دی گئی مساوات سے

$$y = u_y\, t + \frac{1}{2} a_y\, t^2$$

3.16(b) مساوات استعمال کرنے پر، ہم حاصل کرتے ہیں

$$y = (u \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (\because \quad a_y = g) \qquad (3.19)$$



شکل(3.14): پروجکٹائل کا راستہ

مساوات 3.17 سے t کی قدر مساوات 3.19 میں درج کرنے پر

$$y = (u\sin\theta)\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}\right)$$

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} \qquad (3.20)$$

جیسا کہ θ مستقل ہے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات (3.20) حالت کی ہے $y = ax + bx^2$ جو مکاف کی مساوات ہے اگر ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہیں تو پروجکٹائل کا راستہ مکافی ہوتا ہے۔

اب ہم اس بات کا تعین کریں گے کہ کوئی پروجکٹائل کتنی اونچائی اور کتنی دور تک جاتا ہے اور کتنی دیر تک ہوا میں رہتا ہے۔

3.2.4 پروجکٹائل کی اعظم ترین بلندی (Maximum Height of Projectile):

جیسا کہ پروجکٹائل ہوا کے ذریعہ سفر کرتا ہے، اس کی کچھ زیادہ سے زیادہ اعظم ترین بلندی تک پہنچتا ہے اور پھر نیچے آنا شروع ہوتا ہے۔ پروجکٹائل کی بلندی جس پر اس کی رفتار کا عمودی جز صفر ہو جاتا ہے، اس پروجکٹائل کی زیادہ سے زیادہ اعظم ترین بلندی کہا جاتا ہے۔ اس وقت پروجکٹائل اوپر کی طرف پہنچنے کے لئے اڑ جاتا ہے۔ اس طرح جب پروجکٹائل زیادہ سے زیادہ بلندی پر ہوتا ہے، ہم رکھتے ہیں

$a = -g$ اور $v_y = 0,\ u_y = u\sin\theta$

مساوات (3.18) سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$0 = u\sin\theta - gt$$

$$t = \frac{u\sin\theta}{g} \qquad (3.21)$$

مندرجہ بالا مساوات سے اعظم ترین بلندی تک پہنچنے کے لئے پروجکٹائل کا درکار وقت کو ظاہر کرتی ہے۔

مساوات استعمال کرنے پر

$v^2 - u^2 = 2$ ہم حاصل کرتے ہیں

$$0 - (u\sin\theta)^2 = -2gh_{max}$$

$$h_{max} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g} \qquad (3.22)$$

3.2.5 اڑان کا وقت (Time of Flight):

ایک پروجکٹائل کے اڑان کا وقت اس کے پھینکے گئے نقطہ سے زمین پر ٹکرانے کے درمیان وقفہ وقت ہے۔ یہ مساوات (3.19) میں $Y=0$ اور $t=T$ کو تبدیل کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

یعنی $0 = (u\sin\theta)\,T - \frac{1}{2}gT^2$

$$\frac{1}{2}gT^2 = u\sin\theta\, T$$

$$T = \frac{2u\sin\theta}{g} \qquad (3.23)$$

مساواتوں (3.21) اور (3.23) کو تقابل کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$T = 2t$$

یعنی مساوات (3.21) کے ذریعہ دیا گیا وقت 't' پروجکٹائل کا نصف اڑان کا وقت ہے۔

3.2.6 سعت (Range):

آیئے پروجیکٹائل کے ذریعہ طئے شدہ افقی فاصلہ کا حساب لگائیں۔ اڑان کے دوران پروجیکٹائل کے ذریعہ طئے شدہ افقی فاصلہ کو پروجکٹائل کی حد کہا جاتا ہے۔ اسے 'R' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

R = افقی رفتار × اڑان کا وقت

$$= u_x \times T$$

مساواتوں (3.17) اور (3.23) استعمال کرنے پر ہم پاتے ہیں

$$R = \frac{u\cos\theta\,(2u\sin\theta)}{g}$$

$$= \frac{2u^2\cos\theta\sin\theta}{g}$$

But $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

اس طرح سعت ; $R = \dfrac{u^2\sin 2\theta}{g}$ (3.24)

مندرجہ بالا مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ پروجکٹائل کی سعت ابتداء کی رفتار 'u' اور اس کی جانب دی گئی سمت θ پر منحصر ہے۔ ظل رفتار u کی دی گئی قدر کے لئے سعت K اعظم ہے جب $\sin 2\theta = 1$ یا $2\theta = 90^o$ یعنی $\theta = 45^o$

اس طرح R کے لئے دی گئی چال 'u' پر زیادہ θ مساوی ہونا چاہئے 45^o کے۔

3.2 مثال (Example):

ایک گیند کو $u = 10\ ms^{-1}$ رفتار سے افق سے 30^o کے زاویے پر پھینکا جاتا ہے۔ معلوم کرو:

(i) گیند سے اعظم ترین بلندی کو پہنچا۔ (ii) ظل کے نقطہ سے اس نقطہ تک افقی فاصلہ جہاں وہ زمین سے ٹکراتا ہے۔ (iii) وہ وقت جس دوران گیند حرکت میں ہوگی (ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کریں اور $g = 10\ ms^{-2}$ لیں)

حل (Solution):

دیا گیا

$u = 10\ ms^{-1}$, $\theta = 30^o$ اور $g = 10\ ms^{-2}$

(i) $$h_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{(10)^2 \sin^2 30}{2\times10} = \frac{10}{2} \times \frac{3}{4} = 3.75\,\text{m}$$

(ii) $$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$= \frac{(10)^2 \sin(2 \times 30)}{10}$$

$$= 10 \times \sin 60 \quad = 10 \times \frac{1}{2} = 5\,\text{m}$$

(iii) $$T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2 \times 10 \times \sin 30}{10}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1.7\,\text{s}$$

3.3 متن سے سوالات (Intext Questions):

.1 مندرجہ ذیل صورتوں میں پروجکٹائل حرکت کی مثالوں کی نشاندہی کریں۔

(a) تیرانداز ایک نشانہ پر تیر چلاتا ہے۔

(b) پھٹنے والے آتش فشاں سے چٹانیں نکلتی ہیں۔

(c) ایک ٹرک پہاڑی سڑک پر رواں دواں ہے۔

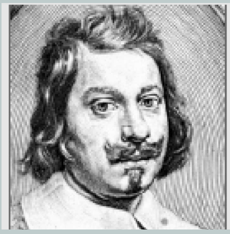
(d) بمبار طیارے سے ایک بم چھوڑا جاتا ہے (اشارہ: یاد رکھیں کہ بن چھوڑنے کے بعد طیارے کی افقی حرکت کو شریک کرتا ہے۔

(e) دریا میں کشتی چلتی ہے۔

.2 ایک کھلاڑی نے 8.90m کی چھلانگ لگا کر لمبی چھلانگ کا ریکارڈ قائم کیا۔ فرض کریں کہ اس کی ابتدائی چال $9.5\ \text{ms}^{-1}$ ہوا کی مزاحمت کی عدم موجودگی میں ممکنہ اعظم ترین سعت کی حد کے کتنے قریب ہے؟ $g = 9.78\ \text{ms}^{-2}$ لے لیجئے۔

.3 ایک جسم عمودی طور پر اوپر کی جانب بڑھتا ہے۔ خط حرکت کے کسی بھی نقطہ پر رفتار صفر ہیں۔

اب تک ہم نے مستوی میں اشیاء کی حرکت کا مطالعہ کیا جسے پروجکٹائل حرکت کے زمرے میں رکھا جا سکتا ہے۔ پروجکٹائل حرکت میں اسراع قدر اور سمت دونوں میں مستقل ہے۔ ایک اور قسم کی دو ابعادی حرکت ہے جس میں اسراع قدر میں مستقل لیکن سمت میں نہیں۔ ہموار دائری حرکت ایسی ہی ایک حرکت ہے اور آگے کے حصہ میں بحث کریں گے۔



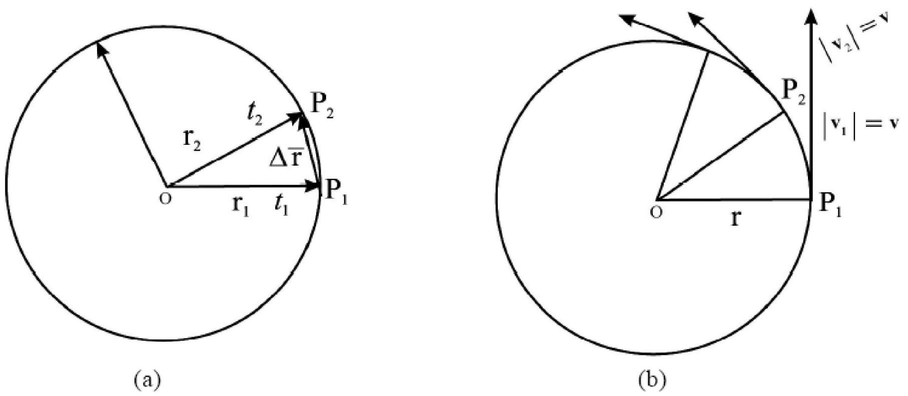
ایوینگی لیسٹا ٹوریسیلی (1608-1647):

یہ اطالوی ریاضی داں گیلیلیو کے شاگرد تھے۔ انہوں نے پارے کا بیرومیٹر ایجاد کیا اور پروجکٹائل حرکت کی نظریاتی چھان بین کی۔ دوربین میں سدھار کیا اور ایک قدیم خردبین ایجاد کی۔ اس بات کو غلط ثابت کیا کہ فطرت کو ویکیوم ناپسند ہے اور ٹوریسیلی نظریہ پیش کیا۔

3.3 دائری حرکت (Circular Motion):

شکل 3.15 نیچے دکھایا گیا یہ ہموار دائری حرکت کرتے ہوئے ذرہ کا مقام سمتیوں r_1 اور r_2 کو دکھاتی ہے جو وقت کے دو مختلف ساعتوں t_1 اور t_2 پر ہیں نقطہ ہموار اشارہ کرتا ہے کہ چال مستقل ہے۔ ہم پہلے کہہ چکے ہیں کہ ذرے کی چال مستقل ہے لیکن اس کی رفتار معلوم کرتے ہیں۔ رفتار کو معلوم کرنے کے لئے اوسط رفتار کی تعریف یاد کیجئے اور اسے نقاط P_1 اور P_2 پر نافذ کیجئے۔

$$\mathbf{v}_{avg} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{3.25}$$



شکل (3.15): (a) ہموار دائری حرکت میں ذرہ کا مقام (b) ہموار ی دائری حرکت

مستقل چال پر چلنے والے پہیے کی حرکت گھڑی کی سوٗ موڑ کاٹتی ہوئی گاڑی وغیرہ حرکت کی مثالیں ہیں۔ دائری حرکت کی سب سے سادہ قسم ہموار دائری حرکت ہے جس کی سب سے زیادہ عام مثال چلتے پنکھے کی بلیڈ پر ایک نقطہ اور مستقل چال سے چلتی چکی ہے۔

ہموار دائری حرکت کی مثال زمین کے گرد دائری مدار میں حرکت کرتا ہوا مصنوعی سیارہ ہے۔ آیئے ہموار دائری حرکت کے بارے میں مطالعہ کریں۔

3.3.1 ہموار دائری حرکت (Uniform Circular Motion):

سمتیہ Δr شکل 3.15 میں دکھایا گیا اب فرض کرو کہ وقفہ Δt کو آپ چھوٹے سے چھوٹا کرتے جاتے ہیں یہاں تک کہ وہ صفر کے قریب آجائے Δr کتنا ہوتا ہے؟ خاص طور سے Δr کی سمت کیا ہوگی؟ یہ P_1 صفر کے قریب ہونے پر دائرے کی نقطہ Δt پر مماس کے قریب پہنچ جاتا ہے۔ ریاضی میں ہم ساعتی رفتار کی تعریف نقطہ P_1 پر اس طرح کرتے ہیں۔

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

اس طرح ہموار دائری حرکت میں سمتیہ رفتار مستقل طور پر تبدیل ہوتا رہتا ہے کیونکہ رفتار کی سمت مستقل نہیں رہتی ذرہ دائرے کے اطراف گھومنے کے دوران مستقل بدلتی رہتی ہے جیسا کہ شکل 31.5(b) میں دکھایا اس طرح رفتار کے بدلنے سے اور ہموار دائری حرکت اسراعی حرکت ہوتی ہے۔ ہموار دائری حرکت میں ایک ذرہ کا اسراع مرکز جو اسراع کہلاتا ہے' اسے ہمیں کچھ تفصیل کرنا چاہئے۔

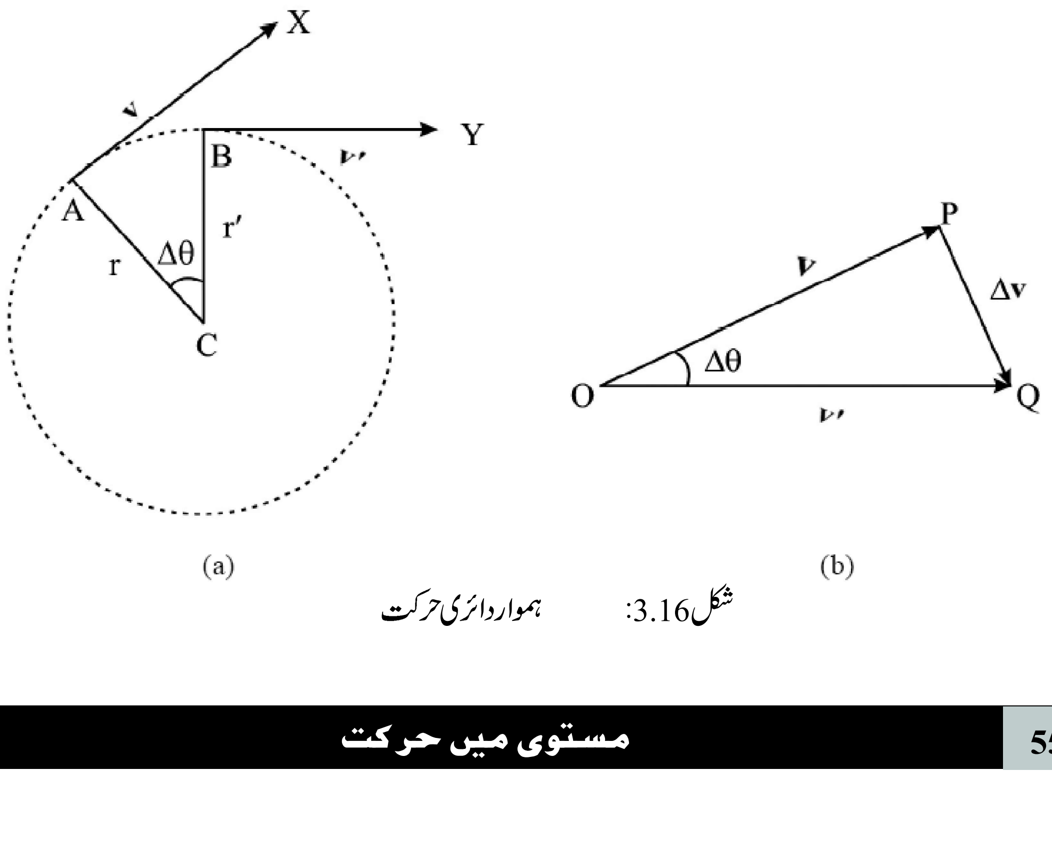
3.3.2 مرکز جو اسراع (Centripectal Acceleration):

کمیت m ایک ذرے پر غور کیجے جو ایک دائرے میں ہموار چال V سے حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ کسی ساعت اس کا مقام A ہے اور اس کی حرکت AX کی سمت میں ہے ایک قلیل وقت A کے بعد ذرہ Δt پر پہنچتا ہے اور اس کی رفتار کی نمائندگی B پر بنے مماس سے ہوتی ہے جو By کی جانب ہے۔

فرض کرو کہ A اور B پر واقع ذرہ کے بالترتیب r اور `r مقام سمتیہ اور V اور `v رفتار ہے جیسا کہ شکل 3.16(a) میں دکھایا گیا۔ سمتیوں کے مثلث قانون کا استعمال کر کے رفتار میں تبدیلی Δv حاصل کی جا سکتی ہے چوں کہ ذرے کا راستہ دائری ہے اور رفتار اس نقطہ پر مماس کی سمت میں ہے V' عمود ہے r پر اور Δv عمودی ہے Δr کے۔ جیسا کہ Δv پر اوسط اسراع a ہم کہہ سکتے ہیں کہ اور b اسراع Δr پر عمودوار ہے۔

آیئے مقام سمتیوں r اور Δθ کے درمیان زاویہ بنائیں۔ تب رفتار سمتیوں V اور `V کے درمیان Δθ زاویہ ہوگا۔ کیونکہ سمتیہ ہمیشہ مقام سمتیہ کے لے عمودوار ہوتے ہیں Δθ رفتار میں تبدیلی کا تعین کرنا' دائرے سے باہر ایک نقطہ O پر غور کریں۔

ایک خط op متوازی اور Ax (یا V) کے مساوی اور ایک خط OQ متوازی اور BY (یا `V) کے مساوی کھینچے جیسا کہ V اور قدریں مساوی ہیں۔ ہم رکھتے ہیں OP=OQ' PQ کو ملایئے ہمیں ایک مثلث OPQ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ شکل 3.16 میں دکھایا گیا۔



شکل 3.16: ہموار دائری حرکت

اب OPQ میں اضلاع OP اور OQ رفتار سمتیوں V اور 'V کا اظہار بالترتیب A اور B پر کرتا ہے اس لئے ان کے فرق کے اظہار کو مقدار اور سمت کے اعتبار سے ضلع PQ ہے۔ دوسرے الفاظ میں ذرے کی رفتار میں A سے B تک Δt وقفہ میں آنے والی تبدیلی PQ کے مساوی ہے اور PQ کی سمت میں ہے۔

رفتار میں تبدیلی کی شرح=اسراع

$$\mathbf{a} = \frac{PQ}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

چونکہ Δt بہت خفیف ہے AB بھی بہت خفیف ہے اور تقریباً خط مستقیم ہے تب Δ ACB اور Δ POQ مساوی الثاقین مثلث ہے جن کے شامل زاویے مساوی ہیں اس لئے یہ مثلث مشابہ ہیں اس لئے

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{OP}{CA}$$

$$\frac{\Delta v}{r \cdot \Delta\theta} = \frac{v}{r}$$

چونکہ رفتار سمتیوں کی مقداریں مساوی ہیں۔ فرض کیا v اور v`=v

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

لیکن $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ کا اسراع ہے اس طرح مرکز جو اسراع چونکہ

مرکز جو قوت کی قدر ہے $a = \frac{v^2}{r}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{ma} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 \qquad (v = r\omega)$$

کیونکہ...... بہت خفیف ہے...... بھی بہت خفیف ہوگا اور قائم الزاویہ LOPQ=LOPQ مرکز جو قوت کی سمت مرکز جو اسراع کی سمت میں ہے یعنی یہ نصف قطر کے ساتھ مرکز کی طرف ہے۔ تعریف سے یہ دیکھا جاتا ہے کہ کسی جسم پر کچھ کم از کم مرکز جو قوت لگانی پڑتی ہے تا کہ اسے دائری راستہ میں حرکت دی جا سکے۔ قوت کی عدم موجودگی میں جسم خط مستقیم راستہ پر حرکت کرے گا۔

مرکز جو قوت کے چند اطلاقات (Some applications of Centripetal Force)

(i) مرکز گریز مشین (Centrifuges):

یہ گردش کرانے والے آلے ہیں جن کا استعمال مختلف کثافتوں والے مادوں کو ایک دوسرے سے جدا کرنے کے لئے کیا جاتا ہے۔ جب مادوں کے آمیزے کو جن کی کثافتیں مختلف ہوں ایک برتن میں رکھ کر تیز رفتاری سے گردش کرائی جاتی ہے تو وزنی مادے کی مرکز جو قوت زیادہ ہوتی ہے اس لئے وہ برتن میں سب سے بیرونی مقام پر پہنچ جائے گا جس کو جدا کیا جا سکتا ہے۔ ان مشینوں کو یورانیم کی افزودگی

میں استعمال کیا جاتا ہے۔

(ii) گاڑی کے پہیوں پر کیچڑ لپٹ جاتی ہے اور جب اس کی رفتار کافی تیز ہو جاتی ہے تو کیچڑ مماس کی سمت میں اڑ جاتی ہے۔

(iii) سیاروں کی حرکت (Planetery Motion): زمین اور سورج کے گرد گردش کرنے والے دیگر سیارے سورج اور ان کے درمیان مادی کشش کی قوت سے ضروری مرکز جو قوت حاصل کرتے ہیں۔

(iv) جب ڈوری کے سرے پر موجود گیند کو محور کے گرد گھمایا جاتا ہے تو ڈوری پر موجود تناؤ کے ذریعہ درکار مرکز جو قوت فراہم کی جاتی ہے۔

3.3 مثال (Example):

ایک پتھر کی کمیت 2.0kg کو 2m طویل ڈوری کے آخری سرے پر باندھا گیا اس کو $20\ ms^{-1}$ کی رفتار سے افقی دائرے میں گھمایا گیا ہے مرکز جو قوت محسوب کرو۔

حل (Solution):

دیا گیا ہے m=2kg پتھر کی کمیت

$$\text{mass of stone, m} = 2\ \text{kg}$$

$$\text{length of string} = \text{radius of circle, r} = 2\ \text{m}$$

$$\text{velocity, v} = 20\ \text{ms}^{-1}$$

$$\text{centripetal force, F} = \frac{mv^2}{r}$$

$$= \frac{2 \times 20 \times 20}{2}$$

$$= 400\ \text{N}$$

3.4 مثال (Example):

خلا باز خلا میں پرواز کے دوران بہت زیادہ اسراع محسوس کرتے ہیں۔ ایسی صورت حال کے لئے تربیتی مراکز میں انہیں بند کیپسول میں رکھا جاتا ہے جو کہ 15m نصف قطر کے گھومنے والے بازو سے جڑا رہتا ہے۔ کیپسول کو ایک دائری راستہ پر گھمایا جاتا ہے جس طرح ہم ایک دھاگے سے پتھر باندھ کر اسے افقی دائرے میں گھماتے ہیں۔ اگر یہ بازو 24 چکر فی منٹ کی شرح سے گھومتا ہے تو کیپسول کے مرکز جو اسراع کا حساب لگائیے۔

حل (Solution): دائری راستہ کا محیط $2\pi \times (\text{radius}) = 2\pi \times 15\ \text{m}$ چوں کہ کیپسول 60 سکنڈ میں 24 چکر لگاتا ہے تو ایک چکر لگانے میں درکار وقت $\frac{60}{24}s$ ہے۔

اس لئے $v = \frac{2\pi r}{T}$ کیپسول کی چال

$$= \frac{2\pi \times 15 \times 24}{60} = 38\,\text{ms}^{-1}$$

غور کریں کہ یہ اسراع زمینی کشش اسراع کے مقابلہ دس گنا زیادہ ہے۔

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(38\,ms^{-1})^2}{15\,m} = 96\,ms^{-2}$$

3.4 متن سے سوالات (Intext Questions):

.1 ہموار دائری حرکت میں (a) کیا چال مستقل ہے؟ (b) کیا رفتار مستقل ہے؟ (c) کیا اسراع کی مقدار مستقل ہے۔ (d) کیا اسراع مستقل ہے؟ کیا رفتار مستقل ہے؟ کیا اسراع کی مقدار مستقل ہے؟ کیا اسراع مستقل ہے؟ وضاحت کیجئے۔

.2 ایک کھلاڑی ایک دائری راستہ پر $9.0\ ms^{-1}$ کی رفتار سے دوڑ رہا ہے اس کا مرکز جو قوت اسراع $3\ ms^{-2}$ ہے دوڑ کے راستہ کا نصف قطر کیا ہے؟

آپ نے کیا سیکھا؟ (What you have learnt):

- طبیعیات میں، ہم دو قسم کی مقداروں، سمتیے اور میزانیہ دیکھتے ہیں میزانیہ صرف قدر رکھتا ہے سمتیہ قدر اور سمت دونوں رکھتا ہے۔
- سمتیے متوازی الاضلاع کے اصول کے مطابق جوڑے جاتے ہیں۔
- دو سمتیوں کا حاصل ضرب میزانیہ ہوتا ہے۔
- دو سمتیوں کی سمتیہ کا حاصل ضرب دو سمتیوں پر مشتمل مستوی کے لئے عمودوار سمتیہ ہے۔
- سمتیوں کا محدود محدد کے ایک مخصوص سیٹ سے اجزاء میں حل کیا جاسکتا ہے۔
- پروجکٹائل حرکت، وہ حرکت جو ایک خالص سمت میں مستقل رفتار کی حامل ہوتی ہے اور رفتار کے عمودی سمت میں ایک مستقل اسراع ہوتا ہے۔

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = u_x = u\cos\theta \qquad v_y = u\sin\theta - gt$$

$$x = x_0 + (u\cos\theta)\,t \qquad y = y_0 + (u\sin\theta) - \frac{1}{2}gt^2$$

- پروجکٹائل کا ٹراجیکٹری مکافی ہے۔
- پروجکٹائل سے اعظم ترین بلندی $h = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g}$
- اڑان کا وقت $T = \dfrac{2u\sin\theta}{g}$
- پروجکٹائل کی سعت $R = \dfrac{u^2\sin 2\theta}{g}$
- دائری حرکت اس وقت ہموار ہوتی ہے جب ذرے کی چال مستقل ہوتی ہے اگر کوئی ذرہ r نصف قطر کے دائرے میں v مستقل چال

سے ہموار دائری حرکت کرتا ہے تو اسکے مرکز جو اسراع کی مساوات اس طرح ہوں گی۔

$$a = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

جہاں r اکائی سمتیہ ہے جو دائرے کے مرکز کو ذرے سے ملانے والا خط کی سمت میں ہے۔ایک ذرے کی چال اور اس کی زاویائی چال میں تعلق ہے $v = r\,\omega$

ذرے پر عمل کرنے والی مرکز جو قوت اس طرح ہوگی

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} = m r \omega^2$$

اختتامی مشق (Terminal Exercise):

1. اکائی سمتیہ اور مقام سمتیہ کی تعریف کرو۔
2. سمتیوں کے متوازی الاضلاع کے قانون کو بیان کیجئے اور وضاحت کریں اور حاصلہ سمتیہ کے سمت اور قدر کے لئے عبارت اخذ کرو۔
3. قوتوں کے مثلثی کلیہ کو بیان کرو۔
4. دو سمتیوں کے ویکٹر پروڈکٹ (حاصل سمتیہ) اور اسکیلر پروڈکٹ (میزانی سمتیہ) کی تعریف کرو۔
5. ایک قوت $6\hat{i} + 12\hat{j} + 8\hat{k}$ مہیا کرتی ہے ایک نقل مقام $2\hat{i} + 8\hat{j} + 2\hat{k}$ کیا گیا کام معلوم کرو۔
6. دو سمتیے $3\hat{i} - 5\hat{j}$ اور $5\hat{i} - 3\hat{j}$ دئے گئے ہیں ان کے سمتیے اور میزانیہ محسوب کرو۔
7. پروجکٹائل کیا ہے؟ بتائیے کہ پروجکٹائل کا راستہ مکافی ہوتا ہے۔
8. اڑان کے وقت کے لئے عبارت اور پروجکٹائل کی اعظم ترین بلندی حاصل کرو۔
9. پروجکٹائل کی ٹراجیکٹری کے لئے مساوات اخذ کرو۔
10. ایک رسی ٹوٹے بغیر 100N قوت برداشت کرسکتی ہے۔ایسی ایک میٹر لمبی رسی کے ایک سرے پر 1kg کی کمیت باندھی جاتی ہے اور اسے افقی مستوی میں گردش کرایا جاتا ہے۔اس چال کو محسوب کیجئے جس سے کمیت کو رسی ٹوٹے بغیر گھمایا جاسکتا ہے۔
11. ایک موٹر سائیکل سوار 500m نصف قطر والے موڑ سے $10\ ms^{-1}$ کی چال سے گذرتا ہے تو موڑ پر مڑتے وقت اسکا مرکز جو اسراع کیا ہوگا؟
12. ایک گولی $300\ ms^{-1}$ کی ابتدائی رفتار سے افقی سمت میں 300 کے زاویہ پر داغی جاتی ہے۔ بندوق سے کتنے فاصلہ پر گولی سے ٹکرائے گی؟
13. ایک گولا 30° زاویہ ارتفاع پر $500\ ms^{-1}$ کی رفتار سے فائز کیا جاتا ہے اس کی رفتار کے افقی اور عمودی اجزاء کا حساب لگائیے۔ وہ کتنی بلندی تک جائے گا اور کتنا فاصلہ (Range) طئے کرے گی اس کا بھی حساب لگائیے۔
14. ایک ہوائی جہاز زمین سے 2000m اونچائی سے کھانے کے پیکٹ گراتا ہے جب کہ اس وقت وہ $200\ kmh^{-1}$ کی رفتار سے افقی پرواز کررہا ہے۔ پیکٹ کو زمین پر گرنے میں کتنا وقت لگے گا؟ چھوڑنے والے نقطہ سے کتنے افقی فاصلہ پر وہ پیکٹ گرے گا؟

15. ایک کار کسی موڑ پر جس کا نصف قطر 200m ہے $60\ kmh^{-1}$ کی چال سے چکر لگا رہی ہے۔ m=90kg کمیت کے سوار پر لگنے والی مرکز جو قوت کیا ہوگی؟

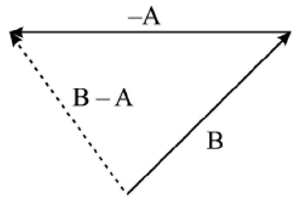
16. ہموار دائری حرکت کی تعریف کیجئے۔ چند مثالیں دیجئے۔

17. مرکز جو اسراع کے لئے عبارت اخذ کیجئے۔

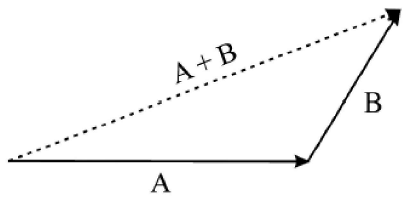
متن سے سوالات کے جوابات (Answers to Intext Questions)

3.1

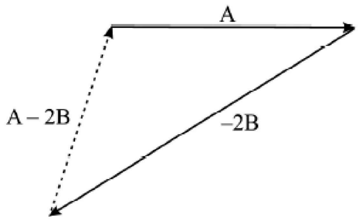
1. (a)



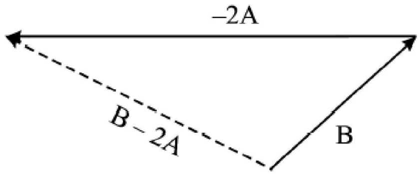
(b)



(c)



(d)

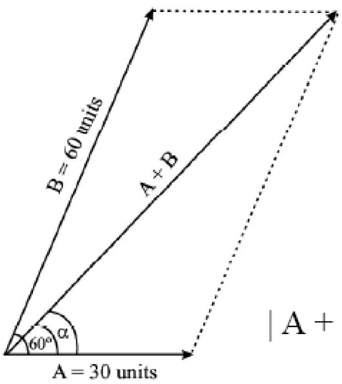


2.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 10 + (-12) = 2 \text{ units}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 10 - (-12) = 22 \text{ units}$$

3.



| A + B | =

3.2

1. اگر A اور B متوازی ہیں' ان دونوں کے درمیان زاویہ صفر ہے تو ان کے حاصل ضرب $A \times B = AB \sin\theta = 0$

اگر وہ غیر متوازی تب ان کے درمیان زاویہ 180° ہوتا ہے اس لئے $A \times B = AB \sin\theta = 0$ کیوں کہ $\sin 180° = 0$

2. اگر سمتیہ B کی قدر نصف ہے لیکن وہ اسی مستوی میں رہتا ہے تب سمتی ضرب C=AxB کی سمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اس کی قدر تبدیل ہوسکتی ہے۔
3. چونکہ سمتیہ A اور B ان پر مشتمل مستوی میں بغیر کسی تبدیلی کے گھومتے ہیں C=AxB کی سمت تبدیل نہیں ہوگی۔
4. فرض کرو کہ ابتدا میں A اور B کا درمیانی زاویہ 0 اور 180° ہے تب C=AxB مستوی کے عموددار سمت میں ہوگا غیر معین قیمت کے ذریعہ گردش۔ اگر زاویہ 180° < ہوجاتا ہے تب C' نیچے گرے گا لیکن ہر مستوی پر عموددار ہے۔
5. اگر A' x- محور پر اور B' y- محور پر ہیں تب یہ دونوں xy مستوی میں ہے سمتیہ حاصل ضرب C=AxB' Z- محور پر ہوگا۔ اگر A' Y- محور پر اور B' X- محور پر تب 'C' منفی Z- محور پر ہے۔
6. (a) A.B = | A | | B | cos θ = 0 when θ = 90°

(b) A × B = | A | | B | sin θ = | A | | B |, as sin θ = 1 when θ = 90°

3.3

1. (d), (b), (a)
2. زیادہ سے زیادہ سعت 9.23m فرق ہے:
3. اعظم ترین بلندی پر' اسکے ٹراجیکٹری پر رفتار صفر ہے۔

3.4

1. (a) ہاں (b) نہیں (c) ہاں (d) نہیں

رفتار اور اسراع مستقل نہیں ہے کیوں کہ ان کی سمتیں مستقل تبدیل ہورہی ہیں۔

اختتامی مشق کے جوابات (Answers to Terminal Exercise)

5. 123
6. میزانیہ ضرب 30' حاصل ضرب: منفی Z- محور پر'
10. 10 ms^{-1}
11. 2 ms^{-2}
12. 900 × 1.732 m
13. $u_x = 250 \times 1.732\ ms^{-1}$ vy = 250 ms–1 Max.height : 500 m Range : 3125 m
14. t = 20 s, 999.9 m
15. 125 N

4
نیوٹن کے حرکت کے کلیات
(Newton's Laws of Motion)

تعارف(Introduction):

گذشتہ سبق میں آپ نے کسی شے کے فاصلہ، نقل مکان، چال، رفتار اور اسراع کے شرائط بیان کرنا سیکھا۔ لیکن ایک اہم سوال یہ ہے کہ 'ایک بال کو حرکت میں کون لاتا ہے؟ عام جواب یہ ہے کہ بلے سے گیند کو مارتے ہیں۔ دوسرا سوال، ہوا میں چلتی ہوئی گیند کے رکنے کا کیا سبب بنتا ہے جب کہ آپ اسے پکڑتے ہیں اس صورت میں آپ کہیں گے کہ اسے مضبوطی سے پکڑو۔ اپنے روزمرہ کے تجربات سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ، ہمیں کسی شئے کو اسکی حرکت یا سکون کی حالت میں تبدیلی کے لئے دھکیلنا یا کھینچنا پڑتا ہے، اسی طرح ایک فٹ بال کو کک مارنے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ وہ منزل مقصود تک پہنچ سکے۔ کرکٹ کی گیند کو چوکے یا چھکے کے لئے باؤنڈری کے باہر بھیجنے کے لئے اس بلے باز کو زور سے مارنا پڑتا ہے ان تمام حالات میں عضلاتی سرگرمی شامل ہے اور اس کا اثر کافی حد تک نظر آتا ہے۔

تاہم بہت سے حالات ایسے ہیں جہاں کسی عمل کے پیچھے کی وجہ نظر نہیں آتی مثال کے لئے (1) بارش کے قطروں کے گرنے کی وجہ۔ (2) زمین کے سورج کے گرد گھومنے کی وجہ۔

اس سبق میں آپ حرکت کے بنیادی کلیات سیکھیں گے اور دریافت کریں گے کہ قوتیں حرکت کا سبب ہیں۔ نیوٹن نے دکھایا کہ قوت اور حرکت کا گہرا تعلق ہے۔ یہ کلیات بنیادی ہیں اور ہمیں سکون اور حرکت سے جڑے روزمرہ کے مظاہر کو سمجھنے کے قابل بناتے ہیں۔

مقاصد(Objectives):

اس سبق کا مطالعہ کرنے کے بعد، آپ کو قابل ہونا چاہئے:

- شئے کی حرکت میں قوت کی اہمیت کی وضاحت کرنا۔
- نیوٹن کے حرکت کے کلیات بیان کرنا اور مثالوں سے ان کی وضاحت کرنا۔
- جمود کی اہمیت کی وضاحت کرنا۔
- ہماری روزمرہ زندگی کی سرگرمیوں میں رگڑ کی اہمیت کی وضاحت کرنا۔
- رگڑ کے ضریب کی تعریف کرنا اور اس مقام میں ہوں کہ ایک قسم کے رگڑ کے ضریب کو دوسری قسم سے سے تفرق کرنا۔
- رگڑ کو کم کرنے کے مختلف طریقے تجویز کرنا۔
- ایک دی گئی صورت حال کا تجزیہ کرنا اور ایک آزاد جسم خاکہ کا استعمال کر کے نیوٹن کے حرکت کے کلیات کا اطلاق کرنا۔

4.1 قوت اور جمود کا تصور(Concept of Force of Inertia):

ہم سب جانتے ہیں کہ ساکن اشیا جہاں کہیں بھی رکھی جاتی ہیں وہیں رہتی ہیں۔ یہ اشیاء خود ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل نہیں ہوسکتیں جب تک کہ ان کی سکونی حالت کو تبدیل کرنے پر مجبور نہ کیا جائے۔ اسی طرح مستقل رفتار کے ساتھ حرکت کرنے والی شئے اپنی حرکت کی حالت کو

تبدیل کرنے پر مجبور کرنا پڑتا ہے۔

کسی شئے کی وہ خاصیت جس ک ی وجہ سے وہ اپنی حالت سکون یا خط مستقیم میں حرکت کی حالت میں کسی تبدیلی کی مزاحمت کرتی ہے اسے جمود کہتے ہیں۔ جمود کا انحصار شئے کی کمیت پر ہے اور کسی جسم کی کمیت ہی اس کے جمود کی پیائش ہوتی ہے۔

ایک طرح سے جمود ایک حیرت انگیز خاصیت ہے۔ اگر یہ خاصیتنہ ہوتی تو آپ کی کتابیں اور کاپیاں چھوٹے بہن بھائی کی کتابوں اور کاپیوں کے ساتھ خلط ملط ہو جاتیں۔ آپ کی الماری آپ کے دوست کے گھر پہنچ جاتی اور زندگی میں اتھل پتھل ہو جاتی۔ بہر حال آپ کو یاد ہوگا کہ کسی شئے کی حالت سکون یا ہموار حرکت کی حالتیں مطلق نہیں ہیں۔ آپ نے گذشتہ سبق میں پڑھا ہے کہ ایک مشاہدے کے لحاظ سے حالت سکون میں رہتے ہوئے کوئی شئے ایک دوسرے مشاہد کی نسبت حرکت کی حالت میں محسوس ہوسکتی ہے۔ مشاہدات سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی شئے کی رفتار میں تبدیلی صرف اسی صورت میں لائی جاسکتی ہے جب کہ اس پر کل قوت کارفرما ہو۔

آپ قوت کی اصطلاح سے اچھی طرح واقف ہیں روزمرہ کی زندگی میں ہم اسے بہت سی صورتوں میں استعمال کرتے ہیں جب ہم کھینچتے ہیں، دھکا دیتے ہیں، کک مارتے ہیں یا ہٹ وغیرہ کرتے ہیں تو دراصل قوت کا استعمال کرتے ہیں۔ حالانکہ قوت دکھائی نہیں دیتی۔ اس کے اثر کو دیکھا جاسکتا ہے۔ یہ ہمیں معلوم ہے کہ قوتیں مختلف قسم کے اثرات پیدا کرتی ہیں۔

(a) قوتیں کسی شئے کی شکل اور جسامت کو تبدیل کرسکتی ہیں غبارہ اپنے اوپر لگنے والی قوت کی قدر کے مطابق اپنی شکل تبدیل کر لیتا ہے۔

(b) قوتیں کسی شئے کی حرکت کو بھی متاثر کرتی ہیں۔ قوت کسی سکون کی حالت والی شئے کو حرکت میں لاسکتی ہیں اور کسی حرکت کرتی ہوئی چیز کو حالت سکون میں لاسکتی ہیں۔ قوتکسی حرکت کی سمت اور چارل کو بھی تبدیل کرسکتی ہیں۔

(c) قوتیں کسی جسم کو اس کے محور پر گردش دے سکتی ہیں۔ اسی سلسلہ میں آپ سبق نمبر سات (7) میں پڑھیں گے۔

4.1.1 قوت اور حرکت (Force & Motion):

قوت ایک سمتیہ ہے اسی وجہ سے جب کئی قوتیں ایک ساتھ کسی جسم پر کارفرما ہوں تو سمتیہ حاصل جمع کے ذریعہ معادل قوت کا حساب کیا جاسکتا ہے جیسا کہ آپ پچھلے سبق میں پڑھ چکے ہیں۔

کسی جسم کی حرکت کی خصوصیات کا اظہار نقل اور رفتار وغیرہ کی شکل میں ہوتا ہے ہمارے سامنے ایسی کئی صورتیں آتی ہیں جن میں کسی شئے کی رفتار یا تو مسلسل بڑھتی ہے یا کم ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار مسلسل بڑھتی ہے۔ یہاں تک کہ وہ زمین سے ٹکرا جائے۔ اسی طرح افقی سطح پر لڑھکتی ہوئی گیند کی رفتار مسلسل کم ہوتی جاتی ہے اور آخر کار صفر ہو جاتی ہے۔ تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی جسم کی حالت کو تبدیل کرنے کے لئے کل غیر صفر قوت کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایک جسم پر عمل کرنے والی کئی حاصلہ قوتوں کا نتیجہ کل قوت کہلاتا ہے۔ جسم کے لئے:

(i) رفتار کی قدر اور کل قوت کی سمت کے لحاظ سے تبدیل ہوتی ہے۔ (ii) سکون میں، قوت اور اس کی سمت کے لحاظ سے حرکت کی حالت میں آجاتا ہے۔

تجربہ سے ہمیں معلوم ہے کہ کسی جسم کی حالت کو تبدیل کرنے کے لئے ایک غیر صفر قوت درکار ہوتی ہے حرکت کی حالت والے جسم کی رفتار میں تبدیلی اس پر لگ رہی قوت کی سمت پر منحصر ہوتی ہے۔ اگر حرکت کرتے ہوئے جسم پر ایک کل قوت عمل کرتی ہے تو اس کی رفتار کی قدر کم ہو جائے گی۔ لیکن اگر جسم پر لگ رہی کل قوت رفتار کی سمت کے عمودی ہو تو جسم کی رفتار کی قدر تبدیل نہیں ہوتی (دیکھئے حصہ 4.3) اس طرح کی قوت صرف جسم کی رفتار کی سمت تبدیل کرتی ہے۔ اس طرح ہم یہ خلاصہ کرسکتے ہیں کہ ایک جسم کی رفتار اس وقت تک تبدیل ہوتی ہے جب تک اس پر کل قوت لگ رہی ہوتی ہے۔

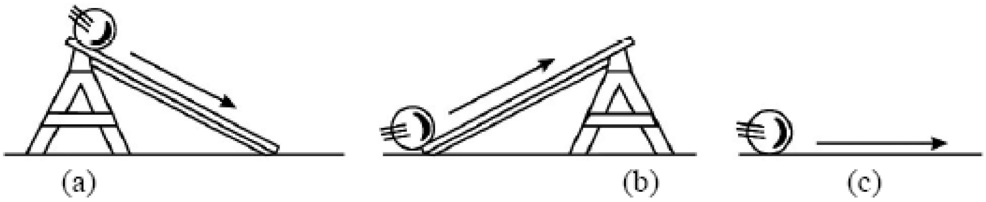
4.1.2 حرکت کا پہلا کلیہ (First Law of Motion):

جب ہم سنگ مرمر کو چکنے فرش پر لڑھکاتے ہیں تو تھوڑی دیر میں وہ رک جاتا ہے۔ واضح ہے کہ اس کی رفتار کم ہوتی جاتی ہے اور آخر کار صفر ہو جاتی ہے۔ بہر حال اگر ہم چاہتے ہیں کہ وہ مسلسل اسی رفتار سے چلتا ہے تو اس پر ایک قوت مستقل لگاتے رہنا ہوگا۔

ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ کسی ٹرالی کو مستقل رفتار سے چلانے کے لئے اسے مسلسل کھینچنا یا دھکیلنا ہوتا ہے۔ کیا یہاں ذکر کردہ صورتوں میں سنگ مرمر یا ٹرالی پر کوئی کل قوت کارفرما ہے؟

حرکت اور جمود (Motion & Inertia)

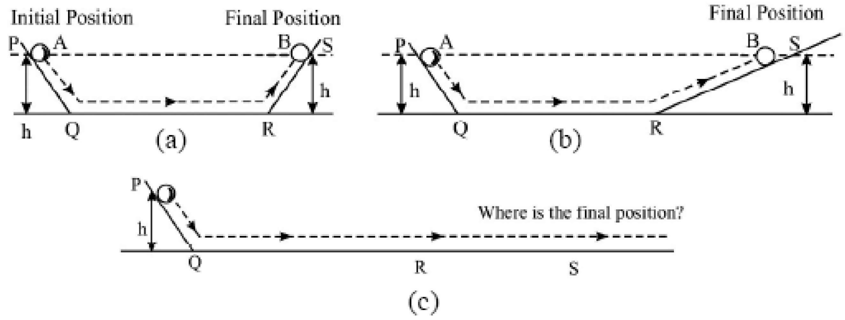
گیلیلیو نے یہ ثابت کرنے کے لئے تجربات کیے کہ بیرونی قوت کی عدم موجدگی میں ایک جسم حالت سکون یا خط مستقیم میں ہموار حرکت جاری رکھے گا۔ انہوں نے مشاہدہ کیا کہ جب ایک جسم مائل مستوی پر نیچے کی جانب چلتا ہے تو اس میں اسراع پیدا ہوتا ہے (شکل 4.1(a)) اور مائل مستوی پر اوپر کی جانب حرکت کرنے پر اس میں ابطا پیدا ہوتا ہے (شکل 4.1(b)) انہوں نے یہ دلیل دی کہ اگر مستوی نہ تو نیچے کی طرف مائل ہو اور نہ اوپر کی طرف (یعنی اگر وہ افقی مسطح مستوی ہو) تو جسم کی رفتار میں نہ تو اسراع ہوگا اور نہ ہی ابطا ہوگا۔ یعنی افقی مسطح مستوی پر ایک جسم یکساں چال یا رفتار کے ساتھ حرکت کرے گا (اگر کوئی بیرونی قوت نہ ہو) (شکل 4.1(c))



شکل 4.1: مائل اور افقی مستویوں پر جسم کی حرکت

ایک دوسرے فکری تجربہ میں انہوں نے دو مائل مستویوں کو لیا اور انہیں ایک دوسرے کے مقابل رکھا جیسا کہ شکل 4.2 میں دکھایا گیا ہے تینوں معاملوں میں مستوی PQ کا میلان یکساں ہے جب کہ مستوی RS کا میلان شکل 4.2(c)، (b) اور (a) میں کے مقابلے زیادہ ہے مستوی PQRS بہت چکنا ہے اور گیند سنگ مرمر کی ہے جب گیند مستوی PQ پر نیچے کی جانب لڑھکائی جاتی ہے تو وہ مقابل مستوی RS میں تقریباً اتنی ہی اونچائی تک جاتی ہے جب مستوی RS کا میلان کم کیا جاتا ہے تو گیند زیادہ لمبے فاصلے تک حرکت کرتی ہے اور پھر مائل مستوی پر اتنی ہی اونچائی تک جاتی ہے (شکل 4.2(b)) جب مستوی RS افقی ہو جاتا ہے تو گیند اتنی ہی بلندی تک پہنچنے کے لئے جتنی بلندی سے وہ مستوی PQ سے لڑھکائی گئی تھی مستوی RS پر مستقل حرکت کرتی رہے گی۔ اگر مستوی اور گیند کے درمیان رگڑ نہ ہو۔

سر



شکل 4.2: باہم مقابل مائل مستویوں پر گیند کی حرکت

اسحاق نیوٹن (Sir Issac Newton) (1642-1727)

نیوٹن 1642ء میں برطانیہ کے وولس تھورپ میں پیدا ہوئے۔ انہوں نے کیمبرج کے ٹرینٹی کالج میں تعلیم حاصل کی اور مشہور ترین سائنسداں بن گئے۔

کیا زمین کی جانب گرتے ہوئے سیب کے مشاہدے نے بنیادی مادی کشش کے قانون کے انکشاف میں ان کی مدد کی۔ انہوں نے حرکت کے قوانین اور مادی کششکا قانون پیش کیا۔ نیوٹن بے انتہا ذہین تھے۔ انہوں نے سائنس کی تمام شاخوں بشمول ریاضی اپنا تعاون پیش کیا۔ ان کے سائنسی کلیات کلاسیکی فطرت کے ہیں اور انہوں نے اپنی کتاب پرنسپیا (Principia) کو لاطینی زبان میں لکھا اور نوریات پر کتاب انگریزی میں لکھی۔

آپ بجاطور پر پوچھ سکتے ہیں کہ ٹرالی کی یکساں حرکت کو جاری رکھنے کے لئے اس پر مستقل قوت لگانا کیوں ضروری ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ بیل گاڑی پر لگ رہی رگڑ کی قوت کو متوازن کرنے کے لئے ایک قوت بیل گاڑی پر لگانی ہوتی ہے یعنی ٹرالی پر کام کر رہی رگڑ کی قوت پر قابو اس پر مسلسل دھکیلنے اور کھینچنے کی قوت لگا کر پایا جا سکتا ہے۔

اسحاق نیوٹن نے گیلیلیو کے نتائج کو عمومی شکل دی اور انہیں حرکت کے پہلے کلیہ کی شکل میں پیش کیا جس کے مطابق: ایک جسم حالت سکون یا خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں باقی رہے گا جب تک کہ اس پر کلیہ کل بیرونی قوت نہ لگایا جائے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ کسی جسم کی سکون یا حرکت کی حالت کا انحصار اسکے مشاہد کے لحاظ سے اس کے اضافی مقام پر ہوتا ہے۔ چلتی کار میں بیٹھا ایک شخص اسی کار میں بیٹھے دوسرے شخص کے لحاظ سے حالت سکون میں رہتا لیکن وہی شخص سڑک پر کھڑے دوسرے شخص کے لحاظ سے حرکت میں ہوتا ہے۔ اسی لیے رفتار/اسراع اور قوت میں تبدیلی کی پیائش کا اندراج ایک منتخب حوالہ فریم کی نسبت میں کرنا ضروری ہے۔ ایک حوالہ ترسیم جس کے لحاظ سے انتقالی حرکت کرتے ہوئے ایک جسم کی رفتار مستقلہ ہوتی ہے' اگر اس پر کل بیرونی قوت نہ لگ رہی ہو اسے جمودی حوالہ فریم کہا جاتا ہے۔ یہ تسمیہ جسموں کی جمودی خاصیتوں سے اخذ کیا گیا ہے جس کی وجہ سے وہ اپنی حالت (ہموار) کو برقرار رکھنا چاہتے ہیں۔ زمین سے جڑے ہوئے ایک حوالہ فریم کو (تمام عملی مقاصد کے لئے) غیر جمودی فریم تسلیم کیا جاتا ہے۔

اب آپ ذرا وقفہ لیں اور اگلے صفحہ پر دئے گئے سوالات کے جوابات دیں۔

4.1 متن پر مبنی سوالات (Intext Questions):

1. کیا یہ کہنا درست ہوگا کہ ایک جسم اپنے اوپر لگ رہی کل بیرونی قوت کی سمت میں ہمیشہ حرکت کرتا ہے؟
2. کسی جسم کا جمود پیائش کے لئے کون سی طبعی مقدار استعمال ہوتی ہے؟

3. کیا کوئی قوت کسی شئے کی رفتار کی سمت اس کی قدر کو مستقل رکھتے ہوئے تبدیل کر سکتی ہے؟

4. کسی جسم پر لگ رہی قوت اس کے اندر کون سی مختلف تبدیلیاں لا سکتی ہے؟ بیان کیجئے۔

5. کیا سکون یا حرکت مطلق یا اضافی ہے؟

6. ایک حوالہ فریم کیا ہے؟

4.2 معیار حرکت کا تصور(Concept of Momentum):

☆ آپ نے ضرور مشاہدہ کیا ہوگا کہ تیز رفتار کرکٹ کی گیند کو روکنا ایک فیلڈر کے لئے مشکل ہو جاتا ہے حالاں کہ اسکی کمیت بہت کم ہوتی ہے۔ اسی طرح ایک کم رفتار سے چلتے ہوئے ٹرک کو روکنا مشکل ہوتا ہے کیوں کہ اسکی کمیت زیادہ ہوتی ہے۔ ان مثالوں سے پتہ چلتا ہے کہ ایک جسم کی کمیت اور اس کی رفتار دونوں ایک جسم کی حرکت پر قوت کے اثر کے مطالعے کے لئے اہم ہیں۔

☆ یہاں ہم متعارف کراتے ہیں کہ ایک نئ طبعی معیار حرکت ($\overline{p}$)

☆ کسی جسم کی کمیت m اور اس کی رفتار v کے حاصل ضرب کو خطی معیار حرکت کہتے ہیں۔ ریاضیاتی شکل میں ہم لکھتے ہیں۔

$$\overline{p} = m\overline{v}$$

اس کی SI اکائیوں میں معیار حرکت...... میں ناپا جاتا ہے۔ معیار حرکت ایک سمتیہ ہے۔ معیار حرکت کی سمتیہ کی سمت وہی ہوتی ہے جو رفتار سمتیہ کی ہوتی ہے۔ اس لیے کسی شئے کا معیار حرکت اس کی قدر یا سمت یا دونوں میں تبدیلی کی وجہ سے تبدیل ہوسکتا ہے۔ مندرجہ ذیل مثالیں اس نقطے کی وضاحت کرتی ہیں:

4.1 مثال(Example):

امن جس کا وزن 60kg ہے' 1.0 m/s کی رفتار سے منوج کی طرف چل رہا ہے۔ منوج کا وزن 40kg ہے اور اس کی رفتار امن کی جانب 1.5 m/s ہے۔ ان کے معیار حرکت کا حساب لگایے۔

حل(Solution):

امن کے لئے معیار حرکت P

P= کمیت x رفتار

منوج کے لئے

معیار حرکت= کمیت x رفتار

طبعیات میں مخالف سمت کو منفی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ غور فرمائیے کہ امن اور منوج کے معیار حرکت کی قدر یکساں ہے لیکن سمتیں باہم مخالف ہیں۔

4.2 مثال(Example):

ایک 2kg کی شئے کو آزادانہ t=os پر گرنے کے لئے چھوڑ دیا جاتا ہے اسکے معیار حرکت کا حساب لگائیے۔

حل(Solution):

(a) چوں کہ t=0 پر شئے کی رفتار صفر ہے اس لئے ابتدائی معیار حرکت بھی صفر ہوگا۔

(b) t = 1s, پر شئے کی رفتار ہوگی (V=vo+at) جس کی سمت نیچے کی جانب ہوگی اس لئے شئے کا معیار حرکت

where $v_0 = 0 \;\; ; \;\; a = g = 9.8\ m/s^2$

$$\therefore \quad v = 0 + 9.8 \times 1 = 9.8\, m/s$$

So, momentum at t = 1s is p = mv

$$p_1 = 2\,kg \times 9.8\, m/s = 19.6\ kg\, ms^{-1}$$

(c) t = 2s پر شئے کی رفتار 19.6 ms–1 نیچے کی جانب ہوگی اس لئے شئے کا معیار حرکت ہوگا

$= (2\ kg)\ (19.6\ ms^{-1})$

$= 39.2\ kg\ ms^{-1}$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ نیچے گرتے ہوئے جسم کا معیار حرکت قدر کے اعتبار سے مسلسل بڑھتا ہے اور اسکی سمت یکساں رہتی ہے۔
اب غور کیجئے کہ آزادانہ گرتے ہوئے جسم کے تحرک کی قدر کس وجہ سے تبدیل ہوتی ہے؟

4.3 مثال(Solution):

ایک 0.2kg وزن کی ربر کی گیند ایک جامد دیوار سے $10\ ms^{-1}$ کی چال سے ٹکراتی ہے اور اسی چال سے واپس چلی آتی ہے۔ گیند کے معیار حرکت میں تبدیلی کا حساب لگائیے۔

حل(Solution):

گیند کے ٹکرانے سے پہلے اور ٹکرانے کے بعد اس کا معیار حرکت قدر کے اعتبار سے یکساں رہتا ہے لیکن دونوں حالتوں میں سمت باہم مخالف ہوتی ہے۔ دونوں صورتوں میں گیند کے معیار حرکت کی قدر $(0.2\ kg) \times (10\ ms^{-1})$ یعنی $2\ kg\ ms^{-1}$ ہے۔
اگر ہم ابتدائی معیار حرکت سمتیہ کو x محور پر فرض کرلیں تو اختتامی معیار حرکت منفی x محور ہوگا۔ اس لئے $pi = 2\ kgms^{-1}$, pf = $-2\ kg\ ms^{-1}$ اس لئے معیار حرکت میں تبدیلی: pi = 2 kgms–1, pf = –2 kg ms–1
یہاں منفی علامت ظاہر کرتی ہے کہ معیار حرکت میں تبدیلی...... ہے اور اس کی سمت منفی x محور ہیں گیند کے معیار حرکت میں تبدیلی کس وجہ سے ہوئی؟
حقیقی تجربہ یہ ہے کہ ربر کی گیند جب استواء دیوار سے ٹکرا کر واپس ہوتی ہے تو اس کی چال کم ہوجاتی ہے اس صورتمیں بھی گیند کے معیار حرکت کی قدر میں تبدیلی واقع ہوگی۔

4.3 حرکت کادوسرا کلیہ (Second Law of Motion):

اب آپ جانتے ہیں کہ مستقل رفتار سے چلتے ہوئے جسم کا معیار حرکت بھی مستقل ہوگا۔ نیوٹن کا حرکت کا پہلا کلیہ کہلاتا ہے کہ ایسے جسم پر کوئی بیرونی کل قوت کام نہیں کرتی۔ مثال 4.2 میں ہم نے دیکھا کہ زمینی کشش کے تحت آزادانہ گرتے ہوئے جسم کا معیار حرکت وقت کے ساتھ بڑھتا ہے چوں کہ ایسا جسم زمینی کشش کی قوت کے تحت گرتا ہے اس لئے ایسا محسوس ہوتا ہے کہ شئے کے معیار حرکت میں تبدیلی اس پر کام کرنے والی کل قوت اور کام کرنے کے دوران لگنے والے وقت میں ایک رشتہ ہے۔

نیوٹن کا حرکت کا دوسرا کلیہ ان تین طبعی مقداروں کے درمیان مقداری رشتہ فراہم کرتا ہے۔ یہ بیان کرتا ہے کہ کسی جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی کی شرح جسم پر لگ رہی قوت کے راست متناسب ہوتی ہے۔ جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی اس پر لگ رہی بیرونی قوت کی سمت میں واقع ہوتی ہے۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی $\Delta \bar{p}$ وقت میں Δt ہو اور اس کی وجہ کل بیرونی قوت $\bar{F}$ ہو تو

$$\bar{F} \propto \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} \left(\text{if } \Delta t \to 0, \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{d\bar{p}}{dt} \right) \quad (4.1)$$

$$\bar{F} = k\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t}$$ where k is a constant of proportionality.

جہاں k متناسبیت کا مستقلہ ہے معیار حرکت کو کمیت اور رفتار کے حاصل ضرب کی طرح بیان کرنے پر ہم اس نتیجہ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ کیونکہ

$$\bar{F} = km\left(\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}\right)$$

$$\bar{F} = km\bar{a} \left(\because \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{a} \right) \quad (4.2)$$

مستقلہ k کی قدر m اور $\bar{a}$ کی اکائیوں پر منحصر ہے۔ اگر یہ اکائیاں اس طرح منتخب کی جائیں کہ (اکائی) m=1 اور (اکائی) a = 1 تو F کی قدر بھی اکائی ہوگی۔ تو ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\bar{F} = m\bar{a}. \quad (4.3)$$

یعنی 1=kx1x1 اس نتیجے کو k=1 مساوات (4.2) میں استعمال کرنے پر

S.I اکائیوں میں m=1kg‘

......تو بیرونی قوت کی قدر: ...... (اکائی قوت) 1=

قوت کی اس اکائی کو......ایک نیوٹن کہتے ہیں۔ نوٹ کیجئے یہ نیوٹن کا حرکت کا دوسرا کلیہ ہمیں قوت کی پیائش کی اکائی فراہم کرتا ہے۔ قوت کی S.I اکائی نیوٹن کی تعریف اب اس طرح کر سکتے ہیں کہ یہ وہ قوت ہے جو 1kg کمیت میں......کا اسراع پیدا کرے گی۔

4.4 مثال(Example):

ایک گیند جس کا وزن 0.4kg ہے $20\ ms^{-1}$ کی رفتار سے لڑھکنا شروع ہوتی ہے اور 10 s کے بعد ٹھہر جاتی ہے گیند کو روکنے والی قوت کا حساب لگائیے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس قوت کی قدر مستقلہ ہے۔

حل(Solution):

دیا گیا ہے کہ m=0.4kg، ابتدائی رفتار $u = 20\ ms^{-1}$، انتہائی رفتار v=0 اور t=0 اس لئے $v = 0\ ms^{-1}$ یہاں منفی علامت ظاہر کرتی ہے گیند پر قوت اس کی حرکت کے مخالف سمت ہے۔

$$= m\left|\overline{a}\right| = \frac{m\left(\mathrm{v}-u\right)}{t} = \frac{0.4\,kg\left(-20\,ms^{-1}\right)}{10}$$

$$= -0.8\,kg\,ms^{-2} = -0.8\,N$$

4.5 مثال(Example):

ایک جسم جس کا وزن 10kg اور ابتدائی چال 10 m/s ہے اس پر 50N کی مستقل قوت لگائی جاتی ہے جسم کو حالت سکون میں آنے میں کتنا وقت درکار ہوگا؟ اگر قوت جسم کی حرکت کے مخالف سمت میں عمل کرتی ہے۔

حل(Solution):

دیا گیا ہے کہ $m = 10\ kg,\ F = -50\ N,\ u = 10\ ms^{-1}$ اور v=0 حساب لگانا ہے۔

ہم لکھ سکتے ہیں t

$$F = ma = m\left(\frac{v-u}{t}\right)$$

$$-50N = 10kg\left(\frac{0-10ms^{-1}}{t}\right)$$

$$t = \frac{-100\,kg\,ms^{-1}}{-50\,N} = 2s$$

یہ نوٹ کرنا اہم ہے کہ نیوٹن کا حرکت کا دوسرا کلیہ ان اجسام پر ہی لاگو ہوسکتا ہے جن کی کمیت مستقل ہو۔ کیا یہ کلیہ ایسے اجسام پر نافذ ہوسکے گا جن کی کمیت وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی رہتی ہے جیسا کہ راکٹ میں ہوتا ہے؟

4.2 متن پر مبنی سوالات(Intext Questions):

1. دو مختلف کمیت والی اشیاء کا معیار حرکت یکساں ہے ان سے کون تیز حرکت کر رہا ہے؟

2. ایک لڑکا ایک گیند V_0 رفتار سے پھینکتا ہے اگر گیند پھینکنے والے کے پاس اسی رفتار سے واپس آتی ہے تو کیا ان میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟
(a) گیند معیار حرکت میں
(b) گیند معیار حرکت کی قدر میں
3. جب ایک گیند بلندی سے گرتی ہے تو اس کا معیار حرکت بڑھتا ہے؟ اس کے معیار حرکت میں اضافہ کی کیا وجہ ہے؟
4. کس معاملے میں شئے کے معیار حرکت میں مقابلتاً زیادہ تبدیلی واقع ہوگی؟
(a) ایک 150N کی قوت 0.1 s تک کے لئے 2kg کی شئے پر کام کرتی ہے جو ابتداً میں سکون کی حالت میں ہے۔
(b) ایک 150N کی قوت 0.2s تک کے لئے 2kg شئے پر کام کررہی جو ابتداً میں حالت سکون میں ہے۔
5. ایک شئے مستقل چال سے ایک دائری راستے پر حرکت کررہی ہے۔ کیا شئے کا معیار حرکت مستقل ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ بتایئے۔

4.4 قوتوں کے جوڑے (Forces in Pairs)

یہ زمین کی مادی کشش ہے جو کسی شئے کو زمین کی طرف اسراع فراہم کرتی ہے۔ کیا وہ شئے بھی زمین کو اپنی طرف کھینچتی ہے؟ اسی طرح جب ہم الماری کو دھکا دیتے ہیں تو کیا الماری بھی ہمیں دھکا دیتی ہے؟ اگر ایسا ہے تو ہم اسی قوت کی سمت میں حرکت کیوں نہیں کرتے؟ یہ صورتیں ہمیں پوچھنے پر مجبور کرتی ہیں کہ کیا ایک واحد قوت جیسے کہ دھکا یا کھنچاؤ کا وجود ہے؟ یہ بات مشاہدے میں آئی ہے کہ ایک دوسرے دو اجسام کے عمل ہمیشہ باہمی ہوتے ہیں یہاں عمل اور ردعمل سے ہماری مراد باہم عمل کی قوتوں سے ہے۔ اس لئے جب بھی دو اجسام باہم عمل کرتے ہیں تو دونوں ایک دوسرے پر قوت لگاتے ہیں۔ ان میں سے ایک عمل کہلاتا ہے اور دوسرا ردعمل کہلاتا ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ قوتیں ہمیشہ جوڑوں میں پائی جاتی ہیں۔

حرکت کا تیسرا کلیہ (Third Law of Motion):

دو اجسام کے درمیان باہم عمل کے مطالعہ کی بنیاد پر نیوٹن نے حرکت کا تیسرا کلیہ پیش کیا۔ ہر عمل کے لئے مساوی اور مخالف ردعمل ہوتا ہے۔

یہاں عمل اور ردعمل سے ہماری مراد قوت ہے۔

اس طرح جب میز پر رکھی کتاب میز پر کچھ قوت ڈالتی ہے تو آخر الذکر یعنی میز بھی اتنی ہی مقدار کی ایک قوت کتاب پر اوپر کی جانب لگاتی ہے جیسا کہ شکل 4.3 میں دکھایا گیا ہے۔ کیا یہاں دکھائی گئی قوتیں $\overline{F}_1$ اور $\overline{F}_2$ ایک دوسرے کی تنسیخ کردیتی ہیں؟ یہی نوٹ کرنا اہم ہے کہ $\overline{F}_1$ اور $\overline{F}_2$ مختلف اجسام پر لگ رہی ہیں اور اسلئے یہ ایک دوسرے کی تنسیخ نہیں کرتیں۔

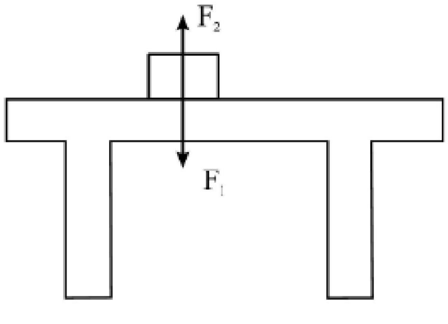


Fig 4.3 : A book placed on a table exerts a force F_1 (equal to its weigh mg) on the table, while the table exerts a force F_2 on the book.

میز پر رکھی ہوئی کتاب میز پر قوت......(اپنے وزن کے مساوی) لگاتی ہے جب کہ ایک صورت میں عمل اور ردعمل قوتوں کے ایک جوڑے کی شکل میں ظاہر ہوتے ہیں ان میں سے کسی ایک کا بھی دوسرے کے بغیر وجود نہیں ہے۔

اگر ہم لفظی معنی پر غور کریں تو ردعمل ہمیشہ عمل کے بعد ہوتا ہے لیکن نیوٹن کے تیسرے قانون میں شامل عمل اور ردعمل دونوں ہمہ وقت موجود ہوتے ہیں۔ اسی وجہ سے نیوٹن کے تیسرے کلیہ کو اس طرح بیان کرنا بہتر ہے کہ جب دو اشیاء باہم عمل کرتی ہیں تو ایک شئے کے ذریعہ دوسرے پر لگائی گئی' قوت قدر میں دوسری شئے کے ذریعہ پہلی شئے پر لگائی گئی قوت کے مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہے۔

ویکٹر کے مطابق اگر...... جو شئے 1' شئے 2 کی وجہ سے محسوس کرتی ہے اور...... وہ وقت جو شئے 2' شئے 1 کی وجہ سے محسوس کرتی ہے تو نیوٹن کے تیسرے کلیہ حرکت کے مطابق لکھ سکتے ہیں کہ:

$$\text{Vectorially } \overline{F}_{AB} = -\overline{F}_{BA} \qquad (4.4)$$

4.4.1 جھٹکا (Impulse):

From Newton's seond law

$$\overline{F} = m\left(\frac{\overline{v}-\overline{u}}{t}\right) = \frac{m\overline{v}-m\overline{u}}{t}$$

$$\overline{F} = \frac{\overline{p}_f - \overline{p}_i}{\Delta t}$$

$$\overline{F}.\Delta t = \overline{\Delta}p = \text{impulse.} \qquad (4.5)$$

قلیل وقفہ کے لئے لگائی گئی قوت کے اثر کو جھٹکا کہتے ہیں۔ ''جھٹکا'' کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ جھٹکا قوت ($\overline{F}$) اور اس وقفہ (Δt) کا حاصل ضرب ہوتا ہے جس وقفہ تک وہ قوت لگائی جاتی ہے یعنی کہ...... جھٹکا

اگر ایک جسم پر قوت (F) لگ رہی ہو اور اس کی ابتدائی اور انتہائی رفتاریں بالترتیب u اور v ہوں تو ہم لکھ سکتے ہیں۔

یعنی جھٹکا، خطی معیار حرکت میں تبدیلی کے مساوی ہوتا ہے۔ جھٹکا ایک سمتی مقدار ہے اور س کی S.I اکائی $kg\ ms^{-1}$ یا (Ns) ہیں۔

4.3 متن پر مبنی سوالات (Intext Questions):

1. جب ایک اونچی چھلانگ لگانے والا کھلاڑی زمین چھوڑتا ہے تو جو قوت اسے اوپر پھینکتی ہے وہ کہاں سے آتی ہے؟
2. مندرجہ ذیل صورتوں میں عمل اور ردعمل کی قوتوں کی پہچان کیجئے۔
   (a) ایک شخص فٹ بال کو کک مارتا ہے۔ (b) زمین چاند کو کھینچتی ہے۔ (c) گیند دیوار سے ٹکراتی ہے۔
3. ایک شخص الماری کو آگے ڈھکیلنے کے لئے بھاری قوت لگاتا ہے لیکن وہ پیچھے کی طرف نہیں گرتا کیوں کہ الماری اس پر مقابلتاً کم قوت لگاتی ہے۔ کیا یہ دلیل صحیح ہے وضاحت کیجئے۔

4.5 معیار حرکت کی بقا (Conservation of Momentum):

تجربہ سے یہ بات ثابت ہو چکی ہے کہ جب دو اجسام باہم عمل کرتے ہیں تو ان کے معیار حرکت کا سمتیہ حاصل جمع نہیں بدلتا۔ بشرطیکہ ان پر لگنے والی قوت صرف باہمی عمل کی قوت ہی ہو۔ دو یا دو سے زائد اجسام کے باہم عمل کے لئے بھی یہی بات درست پائی گئی ہے۔ عمومی طور پر

اگر دو یا دو سے زائد اجسام میں باہم عمل ہو رہا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ ایک نظام میں ہے۔ اگر نظام میں شامل جسم نظام کے باہر اجسام سے باہر عمل کر رہے ہیں تو ایسے نظام کو بند نظام یا علیحدہ نظام کہا جاتا ہے۔ علیحدہ نظام میں اجسام کے معیار حرکتوں کا سمتیہ حاصل جمع مستقلہ رہتا ہے۔ اسے معیارت حرکت کی بقا کا کلیہ کہتے ہیں۔

یہ بات بھی قابل غور ہے کہ ایک علیحدہ نظام میں اجسام کا کل معیار حرکت مستقلہ ہوتا ہے۔ لیکن منفرد اجسام کے معیار حرکت قدر کے اعتبار سے، سمت کے اعتبار سے یا دونوں کے اعتبار سے تبدیل ہو سکتے ہیں۔ اب آپ منطقی طور پر پوچھ سکتے ہیں کہ علیحدہ نظام میں منفرد جسم کا معیار حرکت تبدیل ہونے کی کیا وجہ ہے؟ یہ باہمی عملوں اور ان کی طاقتوں کی وجہ سے ہوتا ہے۔ خطی معیار حرکت کی برقراریت کے کلیہ کا دائرہ بہت وسیع ہے اور اس میں گونا گوں مظاہر شامل ہیں جیسے تصادمات، دھماکے، نیوکلیائی تعاملات اور تابکار رواں وغیرہ۔

4.5.1 نیوٹن کے کلیات کے نتیجہ کے طور پر معیار حرکت کی بقاء

نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیہ مساوات (4.1) کے مطابق کسی جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی صفر ہوگی یعنی جسم ...... جب ...... وقت تک اس پر F قوت کارفرما رہتی ہے تو

$$\overline{F}_{ext} = \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t} \qquad (4.6)$$

$$\text{if } \overline{F}_{ext} = 0, \text{ then } \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta \overline{p} = 0 \Rightarrow \overline{p}_{total} = \text{constant} \qquad (4.7)$$

اس نتیجہ کا مطلب یہ ہے کہ اگر جسم پر کوئی قوت کارفرما نہیں ہے تو اس کے معیار حرکت میں تبدیلی صفر ہوگی یعنی جسم کا معیار حرکت غیر متغیر رہے گا۔ اس دلیل کو اجسام کے نظام تک بھی وسعت دی جا سکتی ہے۔

اس نتیجہ پر پہنچنے کے لئے نیوٹن کا تیسرا کلیہ بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ A اور B پر مشتمل علیحدہ نظام کے دو جسم آپس میں ...... وقت کے لئے باہم عمل کرتے ہیں۔ اگر FAB اور FBA دو قوتیں باہم کارفرما ہیں تو نیوٹن کے تیسرے کلیہ کے مطابق:

$$\overline{F}_{AB} = -\overline{F}_{BA}$$

$$\frac{\Delta \overline{p}_A}{\Delta t} = -\frac{\Delta \overline{p}_B}{\Delta t}$$

$$\Delta \overline{p}_A + \Delta \overline{p}_B = 0 \qquad \text{(or)}$$

$$\Delta \overline{p}_{total} = 0$$

$$\text{(or)} \qquad \overline{p}_{total} = \text{constant}$$

یعنی نظام کے معیار حرکت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے یعنی نظام کا معیار حرکت برقرار ہے۔

4.5.2 تحرک کی بقا کی مثالیں

:(A Few Illustrations of Conservation of Momentum)

(a) بندوق کا پسپا ہونا(Recoil of a gun): جب ایک گولی داغی جاتی ہے تو بندوق پسپا ہوتی ہے۔ بندوق کی پسپائی رفتار V_2 معیار حرکت کی بقا کا کلیہ سے حاصل کی جاسکتی ہے۔ فرض کیجئے کہ m کمیت کی گولی M کمیت کی بندوق سے داغی جاتی ہے۔ اگر گولی کی رفتار V_1 ہو تو معیار حرکت کی بقا کہا جائے گا جب بندوق کی رفتاریں V_2 مندرجہ ذیل ہو۔

$$m\overline{v}_1 + M\overline{v}_2 = 0 \qquad (4.8)$$

$$m\overline{v}_1 = -M\overline{v}_2$$

$$\overline{v}_2 = -\frac{m}{M}\overline{v}_1$$

جہاں منفی علامت کرتی ہے کہ V_2 کے مخالف سمت میں ہے چوں کہ V_1 تو ظاہر ہے بندوق کی پسپائی رفتار گولی کی رفتار کے مقابلہ میں بہت کم ہوگی۔

(b) تصادم(Collision):

تصادم میں ہم فرض کر لیتے ہیں کہ ٹکرانے والے اجسام ایک نظام بناتے ہیں۔ ٹکرانے والے اجسام پر بیرونی قوت جیسے رگڑ کی قوت کی عدم موجودگی میں نظام کو علیحدہ نظام تسلیم کیا جاسکتا ہے ٹکرانے والے اجسام کے درمیان باہم عمل کی قوتیں ٹکرانے والے اجسام کے کل معیار حرکت کو تبدیل نہیں کریں گے۔

کیرم کے اسٹرائکر کا کیرم کی کوئن سے تصادم یا بیلیارڈ کی گیندوں کے درمیان ٹکراؤ' لچکدار اجسام کے درمیان تصادم کے مطالعہ کا بہترین ذریعہ ہوسکتا ہے۔

4.6 مثال(Example):

ایک ساتھ جڑی ہوئی دو ٹرالیاں جن کی کمیت m مساوی ہے ابتدائی رفتار v سے حرکت کر رہی ہے وہ ایسی تین ساکن مماثل ٹرالیوں سے ٹکراتی ہے جو آپس میں جڑی ہیں اور اسی سمت میں حرکت کرنا جاری رکھتا ہے۔ ٹکرانے کے بعد ٹرالیوں کی رفتار کیا ہوگی؟

حل(Solution):

فرض کیجئے کہ ٹکرانے کے بعد ٹرالیوں کی رفتار V' ہے۔

تصادم سے پہلے معیار حرکت = 2mv

تصادم کے بعد معیار حرکت = 5m V'

معیار حرکت کی بقا کے کلیہ کے مطابق لکھ سکتے ہیں۔

$$2\ mv = 5\ m\,V'$$

$$v' = \frac{2}{5}v$$

(c) بم دھاکہ (Explosion of Bomb): ایک بم پھٹ کر ٹکڑے ٹکڑے ہوجاتا ہے اور عظیم مقدار میں توانائی خارج ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک بم ابتدا میں ساکن ہے اور پھٹ کر دو ٹکڑوں A اور B میں ٹوٹ جاتا ہے چونکہ دھماکہ سے قبل بم کا معیار حرکت صفر تھا لہٰذا

دھماکہ کے بعد تشکیل پانے والے دونوں ٹکڑوں کا کل معیار حرکت بھی صفر ہوگا۔ اس وجہ سے دونوں ٹکڑے مخالف سمت میں اڑ جائیں گے۔ اگر دونوں ٹکڑوں کی کمیتیں مساوی ہوں تو دونوں کی رفتاریں بھی قدر کے اعتبار سے مساوی ہوں گی۔

(d) **راکٹ کا دھکیلا جانا (Rocket Propulsion):** راکٹ کا اڑنا معیار حرکت کی بقاء کا اہم عملی نمونہ ہے۔ راکٹ ایک ایندھن کے ٹینک کے ساتھ ایک خول پر مشتمل ہوتا ہے جسے ایک ہی جسم فرض کیا جاسکتا ہے۔ خول میں ایک نلی لگی ہوتی ہے جس سے اونچے دباؤ پر گیس خارج کرائی جاتی ہے۔ راکٹ فائر کرنے پر ایندھن جلنے سے بہت زیادہ دباؤ اور درجہ حرارت والی گیس پیدا ہوتی ہے اونچے دباؤ کی وجہ سے یہ گیس نلی کے ذریعہ تیز رفتار سے خارج ہوتی ہے اور نظام کے معیار حرکت کی بقا کی وجہ سے راکٹ کو اوپر کی جانب دھکا فراہم کرتی ہے۔ اگر راکٹ کی کمیت M ہو اور فی سکنڈ خارج ہونے والی گیس کی کمیت m اور رفتار v ہو تو t سکنڈ میں گیس کے معیار حرکت میں تبدیل mvt، اگر t سکنڈ میں راکٹ کی رفتار میں اضافہ v ہو تو راکٹ کے معیار حرکت میں اضافہ MV ہوتا۔ معیار حرکت کی برقراریت کے اصول کے مطابق

$$mvt + MV = 0$$

$$\frac{V}{t} = a = -\frac{mv}{M}$$

یا

یعنی راکٹ ایک اسراع 'a' کے ساتھ حرکت کرتا۔

$$a = -\frac{mv}{M}$$

4.6 رگڑ (Friction):

آپ نے غور کیا ہوگا کہ جب بلے باز گیند کو زمین پر لڑھکانے کے لئے مارتا ہے تو گیند ہمیشہ اپنی حرکت جاری نہیں رکھتی۔ یہ کچھ فاصلہ حرکت کے بعد ٹھہر جاتی ہے۔ گیند کا معیار حرکت جو اسے آغازی صورت میں بلے باز کے ذریعہ دھکیلے جانے پر حاصل ہوا تھا، رفتہ رفتہ صفر پر پہنچ جاتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ گیند کے معیار حرکت میں اس تبدیلی کے لئے قوت ذمہ دار ہوگی۔ یہ قوت رگڑ کی قوت کہلاتی ہے۔ یہ رگڑ کی قوت اس وقت موجود ہوتی ہے جب رابطے میں آئے اجسام ایک دوسرے کی مناسبت سے حرکت کرتے ہیں۔ وہ رگڑ کی قوت ہی ہوتی ہے جس پر ہمیں دھکے یا کھینچے جانے کے دوران قابو پانا ہوتا ہے۔

وہ رگڑ کی قوت ہی ہوتی ہے جس پر ہمیں فرش پر کسی کا مقام تبدیل کرنے کی غرض سے افقی سمت میں دھکا لگانے یا کھینچنے کے دوران قابو پانا ہوتا ہے رگڑ کی قوت ایک تماس کی قوت ہے جو سطحوں پر جسم کی حرکت کے مخالف سمت میں کام کرتی ہے۔ یہ عام معلومات ہے کہ رگڑ تماس میں آنے والی سطحوں کے کھردرے پن کی وجہ سے ہوتی ہے اسی وجہ سے ضرورت کے مطابق سطحوں کو کھردرا یا چکنا بنانے کی کوشش کی جاتی ہے۔

رگڑ اشیاء کی حرکت کی مخالفت کرتی ہے گھساؤ اور ٹوٹ پھوٹ پیدا کرتی ہے اور یہ میکانیکی توانائی کے نقصان کا باعث ہوتی ہے لیکن اس کے باوجود وہ رگڑ ہی ہے جس کی وجہ سے ہم چل سکتے ہیں، گاڑیاں چلا سکتے ہیں اور چلتی گاڑیوں کو روک سکتے ہیں اس طرح رگڑ ہماری زندگی

میں دوہرا کردار ادا کرتی ہے لہٰذا یہ کہا جاتا ہے کہ رگڑ ایک ضروری برائی ہے سمجھا جاتا ہے رگڑ کے تین اقسام ہیں:

(1) سکون رگڑ (2) حرکی رگڑ (3) گھماوی رگڑ

4.6.1 سکونی اور حرکی رگڑ (Static and Kinetic Friction):

ہم سب جانتے ہیں کہ کسی سطح پر کسی شئے کو حرکت دینے کے لئے ایک مخصوص کم سے کم قوت درکار ہوتی ہے۔ اس نقطہ کی وضاحت کے لئے افقی سطح پر رکھا ہوا ایک کندہ تصور کرتے ہیں جیسا کہ شکل (4.5) میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کیجئے کہ ایک بیرونی قوت F_{ext} کندہ پر لگائی جائے۔ شروعات میں کندہ حرکت نہیں کرتا یہ تب ہی ممکن ہے جب کندہ پر کوئی دوسری قوت بھی کام کر رہی ہو۔ اس قوت کو سکونی رگڑ کی قوت کہا جاتا ہے اور اسے علامت fs سے ظاہر کرتے ہیں جیسے جیسے F_{ext} میں اضافہ کیا جاتا ہے Fs میں بھی اضافہ ہوتا جاتا ہے اور f_S کی قدر F_{ext} کی قدر کے مساوی رہتی ہے یہاں تک کہ $f_S^{(max)}$ کی قدر ایک فاصل قدر F_{ext} پر پہنچ جاتی ہے۔ اب جب F_{ext} میں مزید اضافہ کیا جائے تو کندہ پھسلنا شروع ہوتا ہے اور تب اس پر حرکی رگڑ کام کرتی ہے یہ ہمارا عام تجربہ ہے کہ ایک شئے کو حرکت میں لانے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے وہ اسے مستقل رفتار سے حرکت میں رکھنے کے لئے درکار قوت سے زیادہ ہوتی ہے یہی وجہ ہے کہ تماس میں آنے والی دو سطحوں کے جوڑے کے درمیان سکونی رگڑ fs ان کے درمیان کارفرما حرکی رگڑ fk سے زیادہ ہوتی ہے۔ شکل 4.5 بیرونی قوت کے ساتھ رگڑ کی قوت میں تغیر کو ظاہر کرتی ہے۔

تماس میں آنے والی سطحوں کے جوڑے کے لئے آپ جاننا چاہیں گے کہ f_S اور f_k کن عوامل پر منحصر ہے؟ یہ ایک تجرباتی حقیقت ہے کہ $f^{(max)}$ عمودی قوت F_N کے راست متناسب ہے۔

$$f_s^{(max)} \propto F_N \quad \text{or} \quad f_s^{(max)} = \mu_s F_N \qquad (4.9)$$

جہاں μ_S سکونی رگڑ کا ضریبہ کہا جاتا ہے۔ سطح کے ذریعہ کندہ پر لگائی گئی عمودی قوت F_N اس قوت کو ناپ کر معلوم کی جاسکتی ہے جس قوت سے کندہ سطح کو دبا رہا ہے (دیکھئے 4.4) کندہ پر لگ رہی عمودی قوت F_N, mg ہوگی۔ جہاں m کندہ کی کمیت ہے

$$f_s = F_{ext} \quad \text{for} \quad f_s \le f_s^{max},$$

کیونکہ ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$f_s \le \mu_s F_N .$$

تجربہ میں یہ بھی پایا گیا ہے کہ سطحوں کے جوڑے کے درمیان بیشترین سکونی رگڑ کسی قوت تماس میں آئے رقبے پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں

$$f_k = \mu_k F_N \qquad (4.11)$$

جہاں μ_k حرکی رگڑ کا ضریبہ ہے عمومی طور پر $\mu_S > \mu_k$ مزید ضریبے μ_S اور μ_k دراصل سطحوں کے دئے ہوئے جوڑوں جیسے لکڑی پر لکڑی یا کنکریٹ پر ربر وغیرہ کے لئے مستقلے بھی نہیں ہے۔ مادوں کو دئے ہوئے جوڑوں کے لئے μ_S اور μ_k کی قدریں ان سطحوں کے کھردرے پن، صفائی، درجہ حرارت اور نمی وغیرہ پر منحصر ہوتی ہے۔

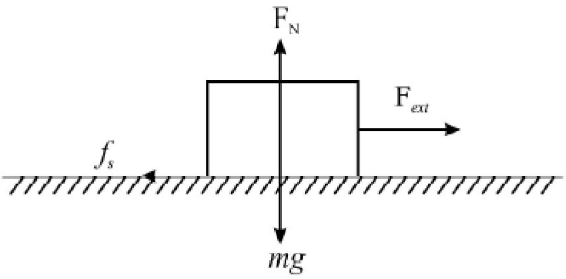


Fig. 4.4 : Forces acting on the block

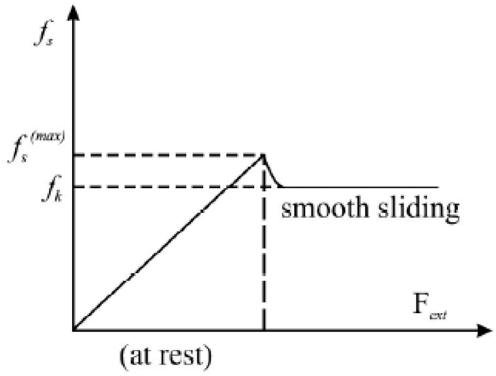


Fig. 4.5 : Variation of force of friction with external force

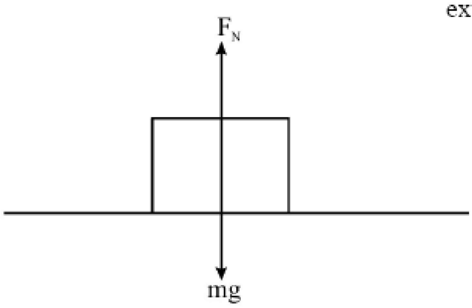


Fig. 4.6 : Normal force on the block

4.7 مثال(Example):

افقی سطح پر ایک 2kg کا کندہ رکھا ہوا ہے تماس میں آئی سطحوں کے درمیان سکونی رگڑ کا ضریبہ 0.25 ہے تماس میں آئی سطحوں کے درمیان سکونی رگڑ کی اعظم ترین قدر معلوم کیجئے۔

حل(Solution):

دیا گیا ہے کہ m=2kg اور ms=0.25

مساوات سے ,(4.9)

$$f_s^{(max)} = \mu_s F_N$$

$$= \mu_s \ mg$$

$$= 0.25 \ (2 \ kg) \ (9.8 \ ms^{-2})$$

$$= 4.9 \ N$$

4.8 مثال(Example):

ایک افقی سطح پر 5kg کا کندہ رکھا ہوا ہے سطح کے لئے ms=0.1 اگر افقی سمتم یں کندہ پر 10N قوت لگ رہی ہو تو کندہ میں اسراع کتنا ہوگا؟

حل(Solution):

چوں کہ $f_k = \mu_k F_N$ اور $F_N = mg$ کو ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$f_k = \mu_k mg$$
$$= (0.1)\ (5\ kg)\ (9.8\ ms^{-2})$$
$$= 49\ kg\ ms^{-2} = 4.9\ N$$

کندے پر کل قوت: $= F_{ext} - f_k$
$$= 10\ N - 4.9\ N$$
$$= 5.1\ N$$

اس طرح اسراع $= a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{5.1N}{5kg} = 1.02\ ms^{-2}$

اس لئے کندہ میں اسراع......ہوگا جولگ رہی قوت کے بیرونی قوت کی سمت میں ہوگا۔

2.6.2 گھماوی رگڑ (Rolling Friction):

یہ عام تجربہ ہے کہ پہیہ والی اشیاء جیسے بیل گاڑی کا کھینچنا یا دھکیلنا زیادہ آسان ہے۔ پہیوں کی حرکت سرکنے یا پھسلنے والی حرکت سے مختلف ہے۔ یہ گھماوی حرکت ہے گھماوی حرکت کی رگڑ کو گھماوی رگڑ کہا جاتا ہے۔ یکساں عمودی قوت کے لئے گھماوی رگڑ پھسلن رگڑ سے کافی کم ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر جب فولادی پہیہ فولاد کی پٹری پر لڑھکتا ہے تو یہ لڑھکن فولاد کی فولاد پر پھسلن رگڑ کی $1/100^{th}$ ہوتی ہے۔ گھماوی رگڑ کے ضریبہ μ_r کی کچھ مخصوص قدریں جیسے فولاد کی فولاد پر 0.006 اور ربر کی کنکریٹ پر 0.02-0.04 ہوتی ہے۔

اب ہم چاہیں گے کہ آپ ایک سادہ سرگرمی انجام دیں۔

4.1 سرگرمی (Activity):

میز پر ایک بھاری کتاب یا کتابوں کا ڈھیر رکھیں اور انہیں اپنی انگلیوں سے دھکیلنے کی کوشش کریں۔ اس کے بعد کتابوں کے نیچے تین یا زیادہ پنسلیں رکھیں اور اب انہیں دوبارہ دھکیل دیں۔ کس صورت میں آپ کو کم طاقت کی ضرورت ہے؟ آپ اپنے تجربے سے کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

Methods of Reducing Friction 2.6.2

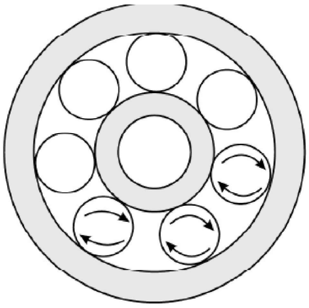


Fig. 4.7 : Balls in the ball-bearing

پہیہ انسان کی عظیم ترین ایجاد ہے اس کی سادہ وجہ یہ ہے کہ پھسلنے کے مقابلے لڑھکنا زیادہ آسان ہے اس لئے مشینوں میں رگڑ کو کم کرنے کے لئے بال بیرنگ استعمال کی جاتی ہے۔ ایک بال بیرنگ میں ایک ہی دھری میں چلنے والے دو اہم محور استوانوں کے درمیان اسٹیل کی گیندیں لگائی جاتی ہیں جیسا کہ شکل 4.7 میں دکھایا گیا ہے۔ عام طور پر ایک استوانہ کو دوسرے کی نسبت گھومنے دیا جاتا ہے یہاں گیندوں کی گردش تقریباً بغیر رگڑ کے ہوتی ہے۔ بجلی کی موٹروں اور پنکھوں وغیرہ میں بھی اس کا استعمال ہوتا ہے۔

تماس میں آنے والی سطحوں کے درمیان چکنائی کار مثلاً گریس یا تیل لگا دیے جاتے ہیں جو رگڑ کو کافی کم کر دیتے ہیں۔ بھاری مشینوں میں متحرک حصوں پر تیل ڈالا جاتا ہے۔ یہ متحرک حصوں میں قوت رگڑ کو کم کر دیتی ہے انہیں زیادہ گرم ہونے سے روکتا ہے۔ دراصل چکنائی کاروں کی موجودگی رگڑ کی فطرت کو خشک رگڑ سے سیال رگڑ میں تبدیل کر دیتی ہے جو خشک رگڑ سے بہت کم ہوتی ہے۔

تماس میں آنے والی سطحوں کے درمیان دبی ہوئی اور صاف ہوا بہانے سے بھی رگڑ میں کمی آتی ہے۔ یہ متحرک حصوں میں دھول اور گندگی کوئی بھی جمع ہونے سے روکتی ہے۔

سیال رگڑ(**Fluid Friction**): ایک شئے جو بہتی ہے سیال کہلاتی ہے۔ مائعات اور گیس دو سیال ہیں۔ جو اجسام سیال سے گذر کر حرکت کرتے ہیں ان کو بھی رگڑ کا سامنا کرنا پڑتا ہے۔ شہاب ثاقب ہوا کی رگڑ کی وجہ سے پیدا ہونے والی گرمی کی وجہ سے چمکتے ہیں ٹھوس رگڑ کے برخلاف سیال رگڑ اجسام کی شکل پر منحصر ہوتی ہے اس لئے مچھلیوں کی ایک مخصوص شکل ہوتی ہے اور تیز رفتار ہوائی جہازوں اور گاڑیوں کی شکلیں بھی مچھلی کی طرح بنائی جاتی ہیں۔ خط بہاؤ شکل کہتے ہیں چال میں اضافے سے سیال رگڑ تیزی سے بڑھتی ہے۔ اگر ایک کار کو تیز رفتاری سے چلایا جائے تو اس کی وہ سے سیال (ہوا) رگڑ میں اضافہ پر قابو پانے کے لئے زیادہ ایندھن جلانا پڑے گا۔ کار کمپنیاں مشورہ دیتی ہیں کہ کاروں کی بہترین کارکردگی کے لئے ہمیں انہیں $40 - 45\ kmh^{-1}$ کی رفتار سے چلانا چاہئے۔

4.7 آزاد جسم خاکہ تکنیک(The Free Body Diagram Technique):

میکانیات کے مسائل کو حل کرنے میں نیوٹن کے کلیات کا استعمال آزاد جسم خاکہ تکنیک کے استعمال کے ذریعہ مقابلتاً آسان ہوجاتا ہے۔ ایک ایسا خاکہ جو ایک جسم پر دی ہوئی حالت میں لگ رہی تمام قوتوں کو دکھاتا ہے آزاد خاکہ کہلاتا ہے۔ ایک آزاد جسم خاکہ کھینچنے کا طریقہ ذیل میں بیان کیا جارہا ہے۔

1. نظام کا ایک سادہ اور صاف خاکہ فراہم کردہ تفصیلات کے مطابق کھینچئے۔
2. مقصود شئے کو علیحدہ کرلیجیہ یہ شئے اب آزاد جسم کہلائے گی۔
3. آزاد جسم پر لگ رہی تمام بیرونی قوتوں کو لیجئے اور انہیں تیروں کے نشانوں سے اس طرح واضح طور پر دکھایئے کہ تیر جسم کو چھو رہے ہوں اور ان کے خط عمل کی بخوبی نشاندہی ہوجائے۔
4. اب نیوٹن کا دوسرا کلیہ استعمال کیجئے یعنی $\Sigma F = ma$
(یا $\Sigma F_X = m\,a_X$ اور $\Sigma F_Y = m\,a_Y$)

یاد رہے:

(i) حرکت کی سمت میں ایک کل قوت ضرور کارفرما ہوگی۔

(ii) مکمل حل کو حاصل کرنے کے لئے جتنی نامعلوم مقداریں ہوں اتنی ہی غیر تابع مساواتیں آپ کے پاس ہونی چاہئیں۔

مثال(Example)۔4.9:

دو کندے جن کی کمیتیں m_1 اور m_2 ہیں ایک ڈوری کے ذریعہ جڑے ہیں اور چکنی افقی سطح پر رکھے ہوئے ہیں۔ m_2 کمیت والے کندہ کو F قوت سے سطح کی افقی سمت میں کھینچا جارہا ہے۔ کندوں کا اسراع کتنا ہوگا اور ان کے درمیان کی ڈوری میں تناؤ کتنا ہوگا؟ (اسے افقی فرض کرتے ہیں)

حل(Solution):

دیکھئے شکل 4.8 'فرض کرو کہ کندوں کا اسراع قوت کی سمت 2 ہے اور دھاگے میں تناؤ T ہے 'F' اور T کمیتوں کے دو اجسام خاکہ پر $\Sigma F = ma$ کو اجزاء کی شکل میں استعمال کرتے ہیں۔

$$N - (m_1 + m_2)\,g = 0$$
$$F = (m_1 + m_2)\,a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad (4.12)$$

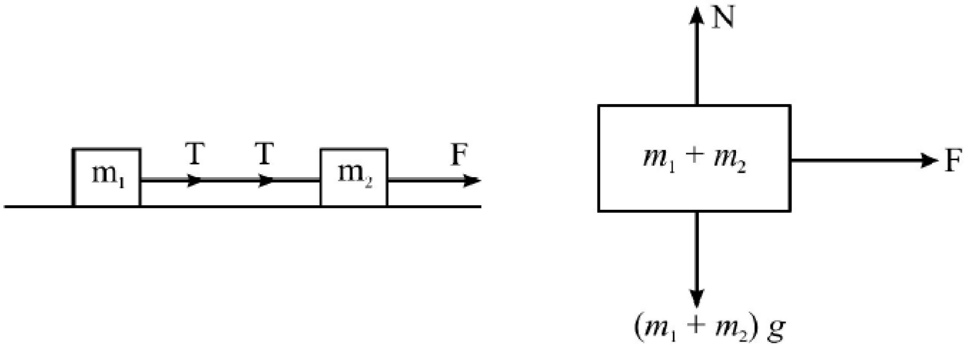


Fig. 4.8 : Free body diagram for two blocks connected by a string

$\Sigma F = ma$ کو اجزاء کی شکل میں m_1 کی آزاد جسم خاکہ پر استعمال کرنے پر

$$N_1 - m_1 g = 0 \text{ and } T = m_1 a$$

$$T = m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)F \qquad (4.13)$$

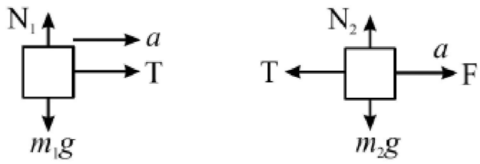


Fig. 4.9

اب $\Sigma F = ma$ کے آزاد جسم خاکہ پر ایک مرتبہ پھر m_2 استعمال کیجئے اور دیکھئے کہ کیا 2 اور T کے لئے وہی ریاضیاتی عبارتیں حاصل ہوتی ہیں۔

مثال (Example) 4.1.0:

ایک ہلکی نا قابل کھنچاؤ ڈوری ایک قائم بے رگڑ چرخی سے گذر رہی ہے اور اس کے ایک سرے پر کمیت m_1 اور m_2 اور دوسرے سرے پر کمیت $(m_1 > m_2)$ لگے ہوئے ہیں جب ان کمیتوں کو چھوڑا جاتا ہے اس وقت کمیتوں کے اسراع اور ان کو جوڑنے والی ڈوری کا تناؤ معلوم کرو۔

حل (Solution):

فرض کرو کہ m_2 کا اسراع a نیچے کی طرف ہو۔ کمیت کا اسراع بھی a ہوگا لیکن اوپر کی طرف (کیوں) فرض کرو کہ کمیتوں کو جوڑنے والی ڈوری کا تناؤ T ہو تو $\Sigma F = ma$ پر m_1 اور m_2 کا استعمال کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں:

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$T - m_2 g = m_2 a$$

اب a اور T کے لئے مساوات 1 اور 2 حل کرنے پر

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g \qquad (4.14)$$

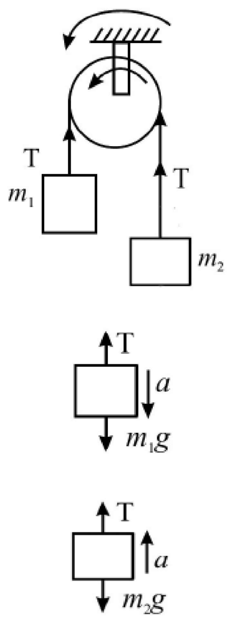


Fig. 4.10

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) a \qquad (4.15)$$

اب آپ اس طرح حاصل ہوئے نتائج سے متغیرات یعنی m_1 اور m_2 کی انتہائی قدروں کے لئے کی جاسکنے والی پیش گوئیوں کی جانچ کرسکتے ہیں یا تو $m_1 = m_2$ لیجئے یا $m_1 >> m_2$ لیجئے اور دیکھئے کیا 2 اور T کی متوقع قدریں حاصل ہوتی ہیں۔

4.1.1 مثال (Example):

ایک کمیت M=10kg کی ٹرالی کی کمیت M=2kg کے کندے سے ایک بغیر کمیت والی نا قابل کھنچاؤ ڈوری کے ذریعہ جڑی ہے جو شکل (a)4.11 کے مطابق ایک بے رگڑ والی ہلکی چرخی سے گذر رہی ہے۔ سطح اور ٹرالی کے درمیان حرکی رگڑ ضربیہ μ_k=0.02 ہے معلوم کیجئے۔

(a) ٹرالی کا اسراع اور (b) ڈوری میں تناؤ۔

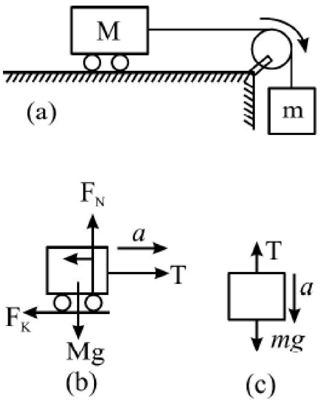


Fig. 4.11

حل (Solution):

شکل (b)4.11 اور (c) بالترتیب ٹرالی اور کندے کے آزاد جسم خاکہ ظاہر کررہے ہیں فرض کرو کہ ٹرالی اور کندے کا اسراع a ہے۔

ٹرالی کے لئے $F_N = Mg$ اور

$f_k = \mu_k N = \mu_k Mg$ جہاں $T - f_k = Ma$

اس لئے $T - f_k = Ma$ (1)

کندے کے لئے $mg - T = ma$

مساواتوں 1 اور 2 کو جمع کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$mg - V\ \mu_k Mg = (M + m)\, a$$

$$a = \frac{mg - \mu_k Mg}{M + m} = \frac{(2kg)(9.8\,ms^{-2}) - (0.02)(10kg)(9.8\,ms^{-2})}{(10+2)\,kg}$$

$$a = \frac{19.6\,kg\,ms^{-2} - 1.96\,kg\,ms^{-2}}{12\,kg} = 1.47\,ms^{-2}$$

اس لئے $a = 1.47\ ms^{-2}$

مساوات 2 سے اس لئے

$$T = mg - ma = m\,(g - a)$$

$$T = 2\ kg\ (9.8\ ms^{-2} - 1.47\ ms^{-2})$$

$$= 2\ kg\ (8.33\ ms^{-2})$$

$$T = 16.66\ N$$

4.4 متن پر مبنی سوالات (Intext Questions):

1. ایک m کمیت کا کندہ مائل کھردری سطح پر رکھا ہے جس کا میلان 1 ہے کندہ پر لگ رہی مختلف قوتوں کو خاکہ کے ذریعہ دکھایئے۔
2. 2kg اور 3kg کمیتوں کے دو کندوں بالترتیب A اور B پر ایک 100N کی قوت لگ رہی ہے۔ یہ کندہ ایک چکنی افقی سطح پر ایک دوسرے سے تماس میں رکھے ہوئے ہیں۔ جیسا کہ دکھایا گیا ہے کندہ A اور کندہ B پر جو قوت لگ رہی ہے اس کی قدر کیا ہے؟

Fig. 4.12

3. ایک ڈوری سے جب 5kg کمیت کی شئے لٹکا دی جائے تو ڈوری میں تناؤ کتنا ہوگا؟ اگر اس کو کھینچا جائے۔

(a) $2\ ms^{-1}$ رفتار سے (b) $2\ ms^{-2}$ اسراع سے

4.8 جمودی اور غیر جمودی فریموں کے بنیادی خیالات

(Elementary Ideas of Inertial and Non Inertial Frames)

ایک ابعادی حرکت (خط مستقیم) کے مطالعہ میں حوالہ کے لئے ایک نقطہ (مبداء) کافی ہے لیکن جب دو یا تین ابعادی حرکت کا مطالعہ کرتے ہیں تو ہمیں خلاء میں کسی نقطہ کا مقام متعین کرنے کے لئے حوالہ خطوط کا ایک سیٹ استعمال کرنا پڑتا ہے خطوط کا یہ سیٹ ہی حوالہ فریم کہلاتا ہے۔

ہر ایک حرکت کو کوئی شاہد بیان کرتا ہے۔ شاہد کی حرکت کی حالت میں تبدیلی کے مطابق حرکت کا بیان تبدیل ہوگا۔ مثال کے لئے ہم ایک صندوق کا خیال کرتے ہیں جو ریلوے پلیٹ فارم پر پڑا ہوا ہے۔ پلاٹ فارم پر کھڑا شخص کہے گا کہ صندوق سکون کی حالت میں ہے۔ ایک شخص جو ہموار رفتار v سے چلتی ہوئی ٹرین میں بیٹھا ہے، وہ کہے گا کہ بکس (-v) کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے لیکن اسراع a سے چلتی ہوئی ٹرین میں بیٹھے شخص کا بیان صندوق کے بارے میں کیا ہوگا؟ اس کا مشاہدہ یہ ہوگا کہ صندوق (-a) اسراع کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ واضح ہے کہ اس مشاہدے کے لئے حرکت کا پہلا کلیہ غلط ثابت ہو رہا ہے اس لئے حرکت کو بیان کرنے کے لئے ایک حوالہ فریم شاہد کے ساتھ جڑا ہوا طئے کر لیا گیا ہے۔ اگر زیر مطالعہ شئے کی مناسبت سے (جو ایک دوسرا حوالہ فریم ہے) فریم ساکن ہے یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہا ہے تو اس فریم میں جمود کا کلیہ درست ہوگا اس لئے اس طرح کے فریم جمودی فریم کہلاتے ہیں اور دوسری طرف اگر مشاہد کا فریم اسراع میں ہے تو ہم اسے غیر جمودی فریم کہیں گے۔

غیر جمودی فریم میں m کمیت کے ایک جسم کی حرکت جس کا اسراع a ہو ہم ایک ناقص قوت ma شامل کر کے حرکت کا دوسرا کلیہ استعمال کر سکتے ہیں گردش کرتے ہوئے جسم میں اس قوت کو مرکز گریز قوت کہتے ہیں۔

4.5 متن پر مبنی سوالات (Intext Questions):

1. ایک ٹرین میں میز پر پانی سے نصف بھرا گلاس افقی سطح پر رکھا ہے جب ٹرین چلنا شروع کرتی ہے تو کیا گلاس کے پانی آزاد سطح افقی رہے گی؟
2. جب ایک کار موٹر پر تیز رفتار سے چلائی جاتی ہے تو باہر کی طرف پھیل جاتی ہے۔ کار میں بیٹھا شخص کار کی حرکت کو کس طرح بیان کرے گا؟ سڑک پر کھڑا ایک مشاہد اس واقعہ کو کس طرح بیان کرے گا؟

.3 ایک چھوٹا ذرہ جس کی کمیت 6×10^{-10} ہے پانی کے معلقہ میں مرکز گریز مشین میں ہے جسے $2\pi \times 10^3\ rad\ s^{-1}$ کی زاویائی چال سے گردش کرایا جاتا ہے۔ ذرہ گردش محور سے 4cm کے فاصلہ پر ہے ذرہ پر لگنے والی کل مرکز گریز قوت کا حساب لگایئے۔

.4 زمین کی گردش کی زاویائی چال کتنی ہونی چاہئے جو اتنی مرکز گریز قوت پیدا کرے کہ اس کی سطح پر رکھی ہوئی اشیاء اڑ جائیں؟ g کی قدر $g = 10\ ms^{-2}$. لیجئے۔

.5 آزادانہ گرتے ہوئے 2kg کے جسم سے جڑے حوالہ فریم میں جسم پر کام کرنے والی جمودی قوت کی قدر اور سمت کیا ہوگی؟

آپ نے کیا سیکھا (What you have learnt):

.1 کسی جسم کو جمود اس کا وہ رجحان ہے جس کی وجہ سے وہ اپنی حالت سکون یا ہموار حرکت کی حالت میں کسی تبدیلی کی مزاحمت کرتا ہے۔

.2 نیوٹن کا پہلا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ کوئی جسم اپنی حالت سکون یا خط مستقیم میں ہموار حرکت کی حالت میں اس وقت تک قائم رہے گا جب تک اس پر لگ رہی کل بیرونی قوت صفر رہے گی۔

.3 رفتار v کے ساتھ چلتے ہوئے m کمیت کے واحد ذرے کے لئے ہم ایک سمتیہ p کی تعریف کرتے ہیں جسے خطی معیار حرکت کہا جاتا ہے۔ p=mv

.4 نیوٹن کا دوسرا کلیہ بیان کرتا ہے کہ کسی جسم کے معیار حرکت میں وقت کے ساتھ تبدیلی کی شرح اس جسم پر لگ رہی بیرونی قوت کے متناسب ہوتی ہے۔

.5 نیوٹن کے دوسرے کلیہ کے مطابق، مستقل کمیت کے جسم میں پیدا شدہ اسراع، اس جسم پر لگ رہی بیرونی قوت کے راست متناسب ہوتی ہے۔

.6 نیوٹن کا تیسرا کلیہ بیان کرتا ہے کہ جب دو جسم A اور B باہم عمل کرتے ہیں تو A، B پر جو قوت لگاتا ہے وہ اس قوت کے مساوی اور مخالف سمت میں ہوگی جو B جسم A پر لگائے گا۔

.7 معیار حرکت کی بقاء کے کلیہ کے مطابق اگر ذرات کے نظام پر کوئی کل بیرونی قوت نہیں لگ رہی ہے تو نظام کل معیار حرکت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوگی خواہ ان کے درمیان کام کررہی قوتوں کی فطرت کچھ بھی ہو۔

.8 رگڑ کی قوت وہ قوت ہے جو اس وقت کسی جسم پر عمل کرتی ہے جب وہ کسی سطح پر لڑھکنے یا پھسلنے کی کوشش کرتا ہے رگڑ کی قوت ہمیشہ تماس میں آنے والی سطحوں کے متوازی اور شئے کی حرکت کی سمت کے مخالف سمت میں ہوتی ہے۔

.9 ایک جسم اور ایک سطح کے درمیان اعظم ترین سکونی رگڑ $f_s^{(max)}$ جسم پر کارفرما عمودی قوت کے متناسب ہوتی ہے۔ اعظم ترین قوت اس وقت جمع ہوتی ہے جب تماس بس پھسلنے والا ہوتا ہے۔

.10 کسی سطح پر پھسلتے ہوئے جسم کے لئے اس کی حرکی رگڑ f_k کی قدر $f_k = \mu_k f_N$ لکھی جاتی ہے جہاں m_k تماس میں رہنے والی سطحوں کے لئے حرکی رگڑ کا ضریبہ ہے۔

.11 رولروں اور بال بیرنگ چھروں کے استعمال سے رگڑ اور متعلقہ توانائی کا نقصان کم ہوجاتا ہے کیوں کہ حرکی رگڑ کے مقابلہ گھماوی رگڑ کافی کم ہوتی ہے۔

12. نیوٹن کے حرکت کے کلیات صرف جمود حوالہ فریم میں ہی لاگو ہوتے ہیں جمودی فریم وہ ہے جس میں ایک علیحدہ کردہ شئے کا اسراع صفر ہوتا ہے۔

13. کسی شئے کے سکونی توازن میں رہنے کے لئے اس پر لگ رہی تمام قوتوں کا سمتیہ حاصل جمع صفر ہونا چاہئے یہ صرف نقطہ اشیاء کے لئے ضروری اور کافی شرط ہے۔

اختتامی مشق (Terminal Exercise):

1. مندرجہ ذیل میں کون سے ہمیشہ جسم پر کارفرما بیرونی قوت کی سمت میں ہوگا؟
   (a) نقل مقام (b) رفتار
   (c) اسراع (d) معیار حرکت میں تبدیلی

2. جب ایک شئے پر مستقل کل بیرونی قوت کام کرتی ہے تو ذیل میں سے کس میں تبدیلی کا امکان نہیں ہے؟
   (a) مقام (b) چال
   (c) رفتار (d) اسراع

3. ایک 0.5kg کی گیند اتنی اونچائی سے گرائی گئی کہ اسے زمین تک پہنچنے کے لئے 4s لگے۔ گیند کے معیار حرکت میں تبدیلی کو محسوب کیجئے۔

4. مندرجہ ذیل میں کس صورت میں 2kg کی شئے کے معیار حرکت میں زیادہ تبدیلی ہوگی؟
   (a) جب 10N قوت 1s کے لئے کام کرتی ہے
   (b) جب 10N قوت 1m تک کام کرتی ہے
   ہر صورت میں معیار حرکت کا حساب لگائیے۔

5. ایک گیند جس کی کمیت 0.2kg ہے۔ $6\ ms^{-2}$ اسراع کے ساتھ اٹھایا جاتا ہے گیند پر ہوائی کشید کا حساب لگائیے۔

6. رسی کی مدد سے 20 کلوگرام وزن مستقل اسراع کے ساتھ اٹھایا جاتا ہے وزن 3m کی اونچائی 2s میں طئے کرتا ہے رسی میں تناؤ کا حساب لگائیے۔ $(g = 10\ ms^{-2})$

7. راکٹ میں وقت کے ساتھ کمیت m میں تبدیلی ہوتی ہے اس صورت میں نیوٹن کے کلیہ کی ریاضیاتی شکل لکھیں اور طبعی تشریح کریں۔

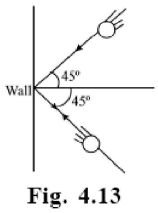


Fig. 4.13

8. ایک گیند جس کا وزن 0.1kg ہے $10\ ms^{-1}$ کی رفتار سے چل رہی ہے اور دیوار سے ٹکرا کر اسی چال سے اسی سمت میں واپس ہوتی ہے۔ گیند کے معیار حرکت کی تبدیلی کی کیا قدر ہے؟

9. ایک مشین گن کی اوسط پسپائی قوت معلوم کرو جو ایک منٹ میں 150 گولیاں فائر کرتی ہے۔ ان گولیوں کی رفتار $900\ ms^{-1}$ اور ہر گولی کی کمیت 12g ہے۔

10. وضاحت کیجئے کہ تیز چلتی ہوئی گیند کو پکڑتے ہوئے گیند کو سکون میں لانے کے لئے ہاتھ پیچھے کھینچنا پڑتا ہے کیوں؟

11. ایک جسم پر جس کی کمیت 2kg ہے 20N کی مستقل قوت 2s کے لئے کام کررہی ہے جو کہ ابتدا میں سکون میں تھا۔ جسم کی رفتار
(a) 1s بعد کیا ہوگی (b) 3s کے بعد کیا ہوگی؟

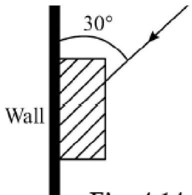


Fig. 4.14

12. شکل میں دکھائی گئی قوت کندے کو عمودی دیوار پر پھسلنے سے کس طرح روکتی ہے؟

13. ایک 1.2kg کا کندہ ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے کندہ اور سطح کے درمیان سکونی رگڑ کا ضریبہ 0.5 ہے کندہ پر لگ رہی رگڑ کی قوت کی قدر اس کی سمت کیا ہوگی اگر ایک بیرونی قوت کندہ پر افقی سمت میں کام کرے۔ بیرونی قوت کی مختلف قدریں ہیں

(a) 0N (b) 4.9N (c) 9.8N

14. ایک سطح پر رکھے ہوئے کندے کے لئے اعظم ترین سکونی قوت رگڑ 10N ہے، کندے پر رگڑ کی قوت کیا ہوگی جب 5N کی بیرونی قوت جس سطح پر وہ رکھا ہے اس کے متوازی لگائی جائے۔

15. ایک 30° مائل زاویہ کی مائل سطح پر رکھے ہوئے 5kg وزن والے کندے کو سکون کی حالت میں باقی رکھنے کے لئے درکار کم از کم قوت کتنی ہوگی؟ مائل سطح اور کندے کے درمیان کام کررہی سکونی رگڑ کا ضریبہ 0.25 ہے۔ $(g = 10\ ms^{-2})$

16. دو کندے P اور Q جن کی کمیتیں بالترتیب $m_1 = 2$ kg, اور $m_2 = 3$ kg ہیں ایک بغیر رگڑ والی افقی سطح پر ایک دوسرے کے تماس میں رکھے ہوئے ہیں ایک بیرونی قوت $F = 10$ N پر سطح کے متوازی سمت میں لگائی جارہی ہے مندرجہ ذیل معلوم کرو۔

(a) کندوں کا اسراع

(b) کندے P کے ذریعے کندے Q پر لگائی گئی قوت

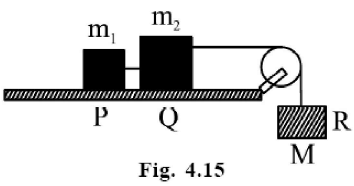


Fig. 4.15

17. دو کندے P اور Q جن کی کمیتیں بالترتیب $m_1 = 2$kg اور $m_2 = 4$ kg ہیں ایک تیسرے کندے R سے جس کی کمیت M ہے شکل 4.15 کے مطابق جوڑے گئے ہیں۔ M کی کس بیش ترین قدر کے لئے یہ نظام حالت توازن میں رہے گا؟ ہر بلاک (کندے) پر کام کرنے والی رگڑ کی قوت اس پر عمودی ردعمل کی قوت کے نصف ہے۔

18. ایک مائل سطح پر جس کا میلان θ= 37° ہے 2kg کے اوپر دھکیلا جاتا ہے جس سے کندے کو $20\ ms^{-1}$ کی چال حاصل ہوتی ہے سکون کی حالت میں آنے سے پہلے کندہ کتنا فاصلہ طئے کرے گا؟ کندہ اور مائل سطح کے درمیان حرکی رگڑ ضریبہ $\mu_k = 0.5$ ہے۔

Take $g = 10\ ms^{-2}$, $\sin 37° = 0.6$, $\cos 37° = 0.8$.

. g کی قدر...... لیجئے اور......اور......استعمال کیجئے۔

19. وقت t تفاعل کے طور پر کسی ذرہ کا خطی معیار حرکت $p = at + b$, دی گئی ہے جہاں a اور b ثبت مستقل ہے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کیا ہے؟

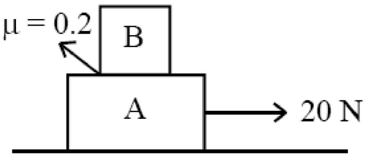


Fig. 4.16

20. ایک ہموار افقی سطح پر 10 کلوگرام کا ایک کندہ A رکھا گیا ہے اس کندے پر 5 کلوگرام کا دوسرا کندہ رکھا گیا ہے۔ دو کندوں کے درمیان رگڑ ضریبہ 0.2 ہے۔ نچلے کندے پر 20N کی افقی قوت کا اطلاق ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے دو کندوں کے درمیان قوت رگڑ کیا ہے؟

$(g = 10\ ms^{-2})$. $[\ F = (m_1 + m_2)\ a\ ]$

21. 60kg کا شخص لفٹ میں ہے' وزن دکھانے والی مشین پر کھڑا ہے۔ مندرجہ ذیل حالات میں وزن دکھانے والی مشین کی ریڈنگ کیا ہے؟

(a) $1.2\ ms^{-2}$ کے اسراع سے لفٹ کا اوپر کی جانب حرکت کریں

(b) $1.2\ ms^{-2}$ کے اسراع کے ساتھ لفٹ کے نیچے کی جانب حرکت کریں۔

(c) $5\ ms^{-1}$ کی ہموار رفتار سے لفٹ کے نیچے کی جانب حرکت کریں۔

(d) کی ہموار رفتار سے لفٹ اوپر کی جانب حرکت کریں۔

22. 3kg اور 4kg کی کمیت والے دو کندے لڑھکتے ہیں بے رگڑ چرخی کے اوپر سے گذرتے ہوئے بے وزن ڈوری سے بندھے ہوئے ہیں۔ ڈور کے تناؤ اور نظام کے اسراع کو معلوم کرو۔ $(g = 10\ ms^{-2})$

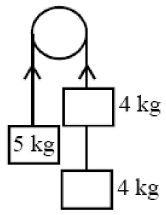


Fig. 4.17

23. ایک متعین چرخی سے ہلکی ڈوری ہوتی ہے جس کے ایک طرف 5kg اور دوسری طرف 4kg ہوتا ہے دوسرے 4kg سے مزید 4kg لٹکا ہوا ہے جیسا کہ ایک ایک ہلکی دوری کے ساتھ دکھایا گیا ہے۔

$(g = 10\ ms^{-2})$

24. دو افراد ایک رسی کو مخالف سمت میں کھینچتے ہیں F قوت کے ساتھ۔ رسی میں تناؤ معلوم کریں۔

25. سائیکل بریک کی صورت میں رگڑ کے کردار کی وضاحت کریں اگر چند تیل کے قطرے دم پر ڈالیں تو کیا ہوگا؟

متن پر مبنی سوالات کے جوابات (Answers to Intext Questions):

4.1

1. تمام صورتوں میں نہیں۔ ہموار دائروی حرکت کے دوران قوت' حرکت کی سمت پر عمل کرتی ہے۔

2. جمودی کمیت

3. ہاں' جیسا کہ ہموار دائروی حرکت میں ہوتا ہے۔

4. قوت شئے کی حالت کو تبدیل کرسکتی ہے یہ اشیاء کی حالت میں بگاڑ پیدا کرسکتی ہے۔

4.2

.1 مستقل

$$P = mv = \text{constant}$$
$$mv = \text{constant}$$
$$v \propto \frac{1}{m}$$

شئے کی چھوٹی کمیت تیز حرکت کرتی ہے

.2 (a) ہاں (b) نہیں

.3 p = mv : m گرتی گیند کا معیار حرکت اس ارضی کشش کی قوت کا کام کرنے کی وجہ سے بڑھتا ہے جس کی سمت حرکت کی سمت میں ہوتی ہے اور اس طرح رفتار بڑھتی ہے۔

.4 $$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \Rightarrow \Delta p = f \times \Delta t$$

صورت میں معیار حرکتمیں تبدیلی زیادہ ہوگی......کا حاصل ضرب معیار حرکت میں تبدیلی فراہم کرتا ہے(کیوں کہ......)

.5 نہیں! حالانکہ چال مستقلہ ہے لیکن سمت میں تبدیلی کی وجہ سے شئے کی رفتار میں تبدیلی واقع ہوگی۔ اس لئے معیار حرکت مستقلہ نہیں ہوگا۔

4.3

.1 کودنے والے پر زمین جتنی قوت لگاتی ہے اسی قوت سے کودنے والا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ یہ قوت اس کا ردعمل ہوتی ہے جو کودنے والا زمین لگاتا ہے۔

.2

(a) آدمی جس قوت سے فٹ بال کو کک مارتا ہے، وہ عمل ہے، اور وہ قوت جو فٹ بال آدمی پر لگاتی ہے، ردعمل ہے۔

(b) جس قوت سے زمین چاند کو کھینچتی ہے وہ عمل ہے، اور جو قوت چاند زمین پر لگاتا ہے وہ اسکا ردعمل ہوتا ہے۔

(c) گیند دیوار پر جو قوت لگاتی ہے وہ اگر عمل ہے، تو دیوار جو قوت گیند پر لگاتی ہے وہ اس کا ردعمل ہوگا۔

.3 نہیں، دلیل درست نہیں ہے۔ الماری اس وقت تک حرکت میں آتی ہے جب الماری اور فرش کے درمیان رگڑ کی قوت کے مقابلہ آدمی کے دھکیلنے کی قوت زیادہ ہو جاتی ہے اس کو پیچھے کی جانب دھکا نہیں لگتا کیوں کہ وہ فرش پر بہت زیادہ رگڑ حاصل کرتا ہے۔ پھسلنے والے فرش پر وہ الماری کو آگے نہیں دھکیل سکے گا۔

4.4

1.

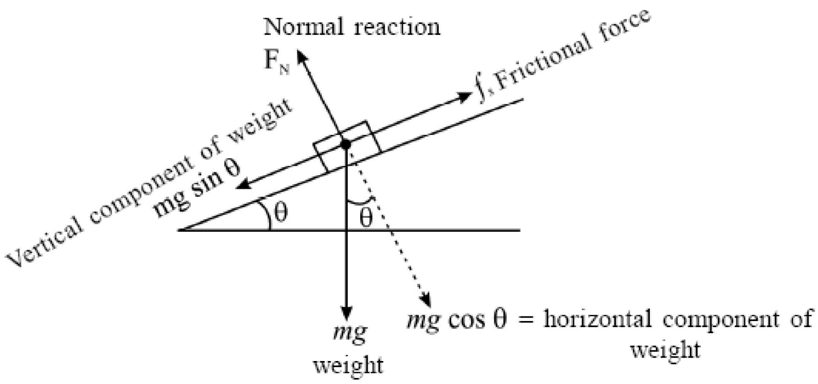
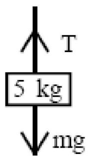


Fig. 4.18

2. $$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{100N}{(2+3)kg} = 20ms^{-2}$$

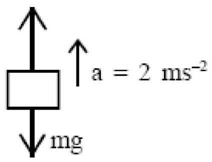
$$F = m_1 a = 2 \times 20 = 40 \text{ N}$$

3. (a)



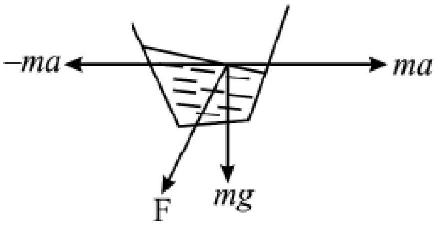
$$T = mg = (5 \times 9.8) \text{ N}$$
$$T = 49.0 \text{ N}$$

(b)



$$T - mg = ma$$
$$T = m(g + a)$$
$$= 5 \text{ kg } (9.8 + 2)$$
$$= 5 (11.8) \text{ N}$$
$$T = 59 \text{ N}$$

4.5



.1 جب ٹرین چلنا شروع کرتی ہے تو فرض کرو کہ اس میں اسراع (a) ہوتا ہے
لہٰذا ٹرین سے جڑے ہوئے حوالہ فریم میں پانی پر لگ رہی کل قوت: F=mg-ma
جہاں m پانی اور گلاس کی کمیت ہے (شکل 4.19) پانی کی سطح کا مقام F پر عمود ہوگا۔

2. کار میں بیٹھے مسافر کے لئے مرکز گریز قوت $\left(\frac{-mv^2}{r}\right)$ کار پر کام کرے گی۔ v جتنا زیادہ ہوگا r کی قدر بھی اتنی ہی زیادہ ہوگی۔

سڑک پر کھڑے مشاہد کے لئے موڑ پر چلتی ہوئی کار میں مرکز جو اسراع ہوگا جو $\frac{mv^2}{r}$ کے مطابق ہوگا۔ ایک مرتبہ پھر جتنا بڑا v ہوگ اس کے مطابق r بھی زیادہ ہوگا۔

3.
$$F = m\omega^2 r = \left(6\times10^{-12}\,kg\right)\left(2\pi\times10^{3}\,rad\,s^{-1}\right)^2\times\left(0.04\,m\right)$$
$$= 9.6\times10^{-4}\ \text{N}.$$

ذرے پر کل مرکز گریز قوت:

4. شئے کی حرکت = مرکز گریز قوت

$$\frac{mv^2}{r} = mg \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{rg}$$

$$\text{but}\qquad v = r\omega \qquad\Rightarrow \omega = v/r$$

$$\omega = \frac{\sqrt{rg}}{r} = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

5. صفر (کیونکہ یہ جسم کے آزادانہ گرنے کی صورت ہے)

اختتامی مشق سے متعلق سوالات کے جوابات

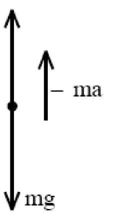
1. (d)

2. (a) مادے کے اندر پیدا ہونے والی اندرونی قوتیں بیرونی قوت کو بے اثر کر دیتی ہیں جیسا کہ اس وقت ہوتا ہے جب دیوار پر قوت لگائی جاتی ہے۔

(b) جسم کی حرکت کی سمت کے زاویہ قائمہ پر اگر قوت لگائی جاتی ہے تو قوت جسم کی حرکت کی سمت کو تبدیل کرتی ہے' چال نہیں۔

3.
$$v = u + at$$
$$v = 0 + (9.8)\times 4 \quad\Rightarrow\quad v = 40\ ms^{-1}$$
$$\Delta P = m\left(v-u\right) = 0.5\left(4.0-v\right) = 20\,kg\,ms^{-1}$$

4. جب 10N کی قوت 1s کے لئے کام کرے۔ $\Delta P = F\Delta t$.

5.


$$\therefore\ \text{force of air drag} = mg - ma$$
$$= m\,(g - a)$$
$$= 0.2\ kg\ (9.8 - 6)\ ms^{-2}$$
$$= 0.2 \times 3.8\ kg\ ms^{-2}$$
$$= 0.76\ N$$

6.

T = m (g + a)

from $s = ut + 1/2\ at^2$

$$s = 0 + 1/2 \times a \times 2^2 \quad \Rightarrow \quad 5 = 1/2 \times a \times 4$$

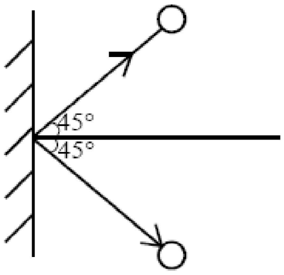
$$a = \frac{5}{2} = 2.5\,ms^{-2}$$

$$\therefore \quad T = 20\,kg\,(10 + 2.5)\,ms^{-2} = 20\,kg \times 12.5\,ms^{-2}$$

$$T = 250\ kg\ ms^{-2}$$

7. $F = \frac{d}{dt}(mv)$ جیسا کہ راکٹ ایک متغیر کمیت نظام ہے۔ہم لکھ سکتے ہیں $F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$

8.



ہم غور کرتے ہیں کہ دونوں افقی اجزاء ایک جیسے ہیں رفتار میں تبدیلی

$$(\Delta v) = 2u\cos\theta.$$

$$\Delta P = m\,\Delta v$$

$$= 0.1 \times 2 \times 10 \times \cos 45°$$

$$\Delta P = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,kg\,ms^{-1}$$

9.

$$F = \left(\frac{mv}{t}\right) \times n = \frac{12 \times 10^{-3}\,kg \times 900\,ms^{-1} \times 150}{60\,s}$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times 9 \times \cancel{15} \times 10^{-3} \times 10^{3}}{\underset{4}{\cancel{60}}} = 27N$$

10. وقت x قوت=دھکا

وقت میں اضافہ کرکے ہاتھوں پر لگ رہی قوت کو کم کیا جاسکتا ہے۔

11. F = 20 N, m = 2 kg $\quad a = F/m = \frac{20}{2} = 10\,ms^{-2}$

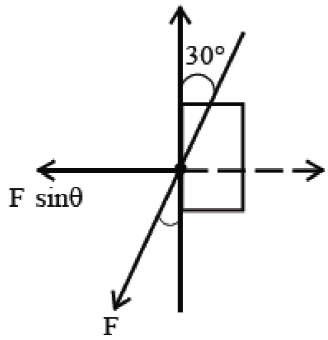
(a) $v = u + at \Rightarrow v = 0 + 10 \times 1 \Rightarrow v = 10\,m/s$

(b) قوت t=2s کیسے عمل کرتی ہے 2 سکنڈ بعد یہ اسی رفتار سے جاری رہتی ہے (اگر رگڑ صفر ہے)

$\therefore$ v after t = 2 s is

v = 0 + 10 × 2 = 20

$\therefore$ v = 20 m/s.

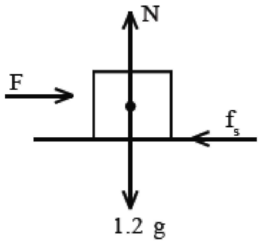


عمودی ردعمل $N = F \sin\theta$

قوت رگڑ $F = \mu_s N$

$F = \mu_s F \sin\theta$

.12 اگر قوت رگڑ F شئے کے وزن سے زیادہ ہے تب کندہ نہیں پھسلتا ہے۔



.13

$N = mg = 1.2\ kg; \quad g = 10\ ms^{-2}$

$\therefore N = 12\ N\ ; \quad \mu_s = 0.5$

$f_s = \mu_s N$

$f_s = 0.5 \times 12 = 6\ N$

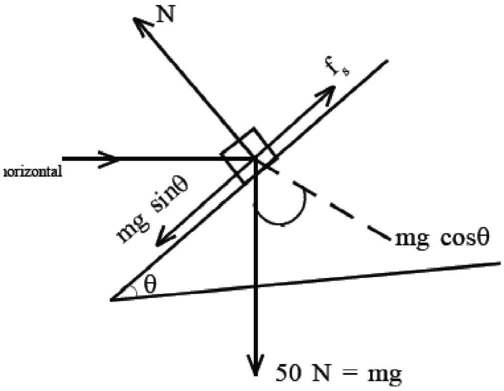
(a) $= 0\ N$

(b) $4.9N < 6N \quad \Rightarrow \quad friction = 4.9N$

(c) 6N سے بڑا ہے 9.8N کو حرکی رگڑ ہوگی۔ $f_k = \mu_K N$ سے کم ہوگی۔

.14 $f_S = 10N$ ' لگائی قوت 5N ہے جو زیادہ سے زیادہ قوت رگڑ سے کم ہے اس لئے رگڑ اس صورت میں صرف 5N ہو جائے گی۔

.15



اگر F بیرونی قوت ہے تو Fcosθ سائل مستوی پر متوازی بیرونی قوت ہے Fsinθ عمودی ردعمل پر اضافہ کرے گا۔

$\therefore \qquad N = mg \cos\theta + F \sin\theta$

frictional force $f_s = \mu_s N = \mu_s(mg \cos\theta + F \sin\theta)$

when $F \cos\theta = \mu_s(mg \cos\theta + F \sin\theta)$, the object will be in equilibrium

$$F \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.25\left(50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + F \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}F}{2} - \frac{F}{4\sqrt{2}} = 50 \times 0.25\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right]=25\times 0.25\times\sqrt{3}$$

$$F\left[\frac{1.732}{2}-\frac{0.25}{1.414}\right]=625\times 1.732\times 10^{-2}$$

$$F\,[0.866-0.176]=10.825$$

$$F\,(0.69)=10.825$$

$$F=\frac{10.825}{0.69}=15.6\,N$$

.16

$$a=\frac{F}{m_1+m_2}=\frac{10}{5}=2\,ms^{-2}$$

$$F=ma=3\times 2=6\text{ N}$$

.17

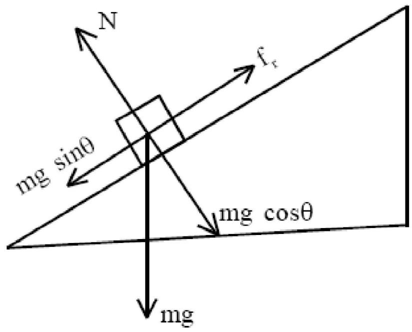
$$6a=M \quad \_\_\_\_ \ (1)$$

$$f_{r_1}=\frac{m_1 g}{2}=\frac{20}{2}=10\,N$$

$$f_{r_2}=\frac{m_2 g}{2}=\frac{40}{2}=20\,N$$

$$f_{r_1}+f_{r_2}=Mg \quad\Rightarrow\quad 30\,N=M\times 10 \quad\Rightarrow M=3\,kg.$$

.18



$$a=m(\sin\theta+\mu\cos\theta)$$

$$a=10(\sin 37^\circ+0.5\cos 37^\circ)$$

$$=10(0.6+0.5\times 0.8)$$

$$a=10\text{ ms}^{-2}$$

$$v^2-u^2=2as$$

$$0-(20)^2=2\times 10\times s$$

$$s=\frac{400}{200}=20\,m$$

.19

$$p=at+b\ ; \qquad F=\frac{dp}{dt}=a$$

$$f=(m_1+m_2)a \quad \Rightarrow \quad 20=15a$$

$$a=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}ms^{-2}$$

.20

$$f_r=m_2 a = 5\times\frac{4}{3}=6.6N$$

(a) $W=m(g+a)=60\,(9.8+1.2)=60\times 11=660N$

(b) $W=m(g-a)=60(9.8-1.2)=60(8.6)=516N$

(c) $a=0 \quad W=mg=60\times 9.8=588N$ .21

(d) W = m (g – a) = m (g – g) = 0.

$$a=\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g=\left(\frac{4-3}{7}\right)\times 10=1.4ms^{-2}$$

$$T=\left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\right)g=\left(\frac{2\times 3\times 4}{7}\right)\times 10=34.2N$$ .22

For 5 kg block T – 50 = 5a

For other two blocks 80 – T = 8a

on solving $a=\frac{30}{13}=2.4ms^{-2}$ .23

.24 T = F

.25 سائیکل کے رم اور بریکس کے درمیان رگڑ کی وجہ سے بریک لگنے ہی سے سائیکل رک جاتی ہے۔ جب تیل کو رم پر ڈالا جاتا ہے تو اس کی سطح ہموار ہو جاتی ہے جسکی وجہ سے رگڑ کم ہو جاتی ہے۔

☆☆

5

کام، توانائی اور طاقت

(Work, Energy and Power)

تعارف:

نیوٹن کے حرکت کے کلیات لفظ'' قوت'' سے تعلق رکھتے ہیں۔ مزید ہی سے متعلق بحث کرتے ہیں۔ قوت حرکت کی وجہ بنتی ہے اور جس کی وجہ شئے کی جسامت اور شکل تبدیل ہوتی ہے۔

اس باب میں آپ کام اور توانائی کے تصورات کا اکتساب حاصل کریں گے۔ لفظ کام کو ہم عام طور پر روزمرہ زندگی کے ان حالات میں استعمال کرتے ہیں جیسا کہ آفس کا کام ٹائپنگ اور گھریلو کام کھانا پکانا، اسکول کے کام پڑھنا لکھنا وغیرہ۔ لیکن طبعیات میں کام کے معنی ان روزمرہ کے کام سے مختلف ہوتے ہیں۔ آپ یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ کام کرنے کے لئے توانائی ضروری ہوتی ہے۔ کام کا لفظ 'قوت' نقل مقام اور ان دونوں سمتی مقداروں کے درمیان بننے والے زاویے سے تعلق رکھتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ کائنات میں کئی اقسام کی توانائیاں وجود رکھتی ہیں۔ شمسی توانائی، ہوائی توانائی، جیوتھرمل توانائی وغیرہ۔ توانائی اور کام دونوں قابل تبادلہ ہیں اور بعض اوقات یہ ایک جیسے ہی دکھائی دیتے ہیں۔

وقت کے ایک مقررہ وقفہ میں توانائی کی استعمال کی گئی مقدار یا کئے گئے کام کی مقدار 'طاقت' کہلاتی ہے۔

مقاصد:

اس سبق کا مطالعہ کرنے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے:

- کسی قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کی وضاحت کریں اور کام کی اکائی بتائیں گے۔
- لگائی گئی قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کا حساب لگائیں گے۔
- کام۔توانائی کے مسئلہ کو بیان کریں گے۔
- کسی نظام کی طاقت کی وضاحت کریں گے۔
- تجاذبی قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کا حساب لگائیں جب ایک کمیت ایک نقطہ سے دوسرے مقام پر جاتا ہے۔
- توانائی کے معنی بتایئے (وضاحت) کیجئے۔
- تجاذبی توانائی بالقوہ اور لچکدار توانائی بالقوہ کی عبارتیں حاصل کریں گے۔
- کسی طبعی نظام کے لئے توانائی کے تحفظ کے اصول کا اطلاق کریں گے۔
- کسی لچکدار تصادم کے نظام میں توانائی اور معیار حرکت کے کلیات تحفظ کا اطلاق کریں گے۔

5.1 کام:

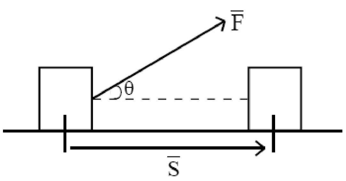


Fig. 5.1 : Work done in moving a block by applying a Force $\overline{F}$ by a displacement $\overline{S}$

لفظ'' کام'' مختلف لوگوں کے لئے مختلف معنی رکھتا ہے۔ ایک مزدور کا دعویٰ ہے کہ اس نے اپنے سر پر بیاگ اٹھا کر بہت لمبا فاصلہ طئے کرنے میں بہت کام کیا۔ اس طرح آپ کے والد یہ دعویٰ کرسکتے ہیں کہ انہیں دفتر کی فائلیں مکمل کرنے میں بہت زیادہ کام کرنا پڑا۔ کام کے تکنیکی معنی ہمیشہ عام معنی جیسا نہیں ہوتا ہے۔ کئے

گئے کام سے مراد جب جسم پر عمل کرنے والی ایک مستقل قوت F اس جسم کو حرکت دیتے ہوئے نقل مقام S تک منتقل کر دیتی ہے جیسا کہ شکل 5.1 میں بتایا گیا ہے۔

کام W کی وضاحت $\overline{F}$ اور $\overline{S}$ کے نقطی حاصل ضرب سے کی جاتی ہے۔

$$W = \overline{\mathbf{F}}.\overline{S} = FS\cos\theta = (F\cos\theta)S \quad (5.1)$$

جہاں پر $\overline{F}$ اور $\overline{S}$ کے درمیان زاویہ ہے۔

کام کی وضاحت اس طرح بھی کی جاسکتی ہے۔ دراصل یہ حاصل ضرب ہے۔ نقل مقام اور اس جسم پر عمل کرنے والی قوتی جز کے جو نقل مقام کی سمت میں لگائی گئی ہے۔ اگر S=0 تب W=0

کسی بھی مقدار میں لگائی گئی قوت سے اگر جسم نقل مقام نہیں کرتا تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ لگائی گئی قوت سے اگر جسم نقل مقام نہیں کرتا تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ لگائی گئی قوت سے کوئی بھی کام نہیں کیا گیا ہے۔ غیر سمتی مقدار دو سمتی مقداروں کا نقطی حاصل ضرب ہوتا ہے۔ اس طرح کام ایک غیر سمتی مقدار ہے جب کہ قوت اور نقل مقام سمتی مقدار ہے۔

مشغلہ 5.1:

آپ اور آپ کا دوست اپنے کمرۂ جماعت کی دیوار کو دھکیلتے ہیں کسی بھی مقدار میں لگائی گئی قوت سے دیوار حرکت نہیں کرتی ہے اور اس کا نقل مقام تبدیل نہیں ہوتا ہے۔ تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ کوئی کام نہیں ہوا ہے۔ مساوات (1) کے استعمال سے ہم کام کی اکائی کی وضاحت کر سکتے ہیں اگر لگائی گئی قوت نیوٹن میں اور نقل مقام کو میٹر میں، تب کام کی اکائی جول (Joule) ہوتی ہے۔

(قوت کی اکائی) × (نقل مقام کی اکائی) = نیوٹن × میٹر = Nm

اس اکائی کو مخصوص نام دیا گیا ہے وہ "Joule" جول ہے اور اس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک جول (Joule) کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔

ایک نیوٹن قوت عمل کرنے پر جسم ایک میٹر نقل مقام حرکت کرتا ہے۔ تب یہ قوت کے ذریعہ کیا گیا کام کہلاتا ہے۔ اس کو ایک جول کہتے ہیں۔ جول S.I نظام میں کام کی اکائی ہے۔

مثال 5.1:

کام کا ابعادی ضابطہ معلوم کیجئے۔

حل:

$$W = \text{Force} \times \text{displacement}$$
$$= \text{Mass} \times \text{Acceleration} \times \text{displacement}$$
$$\text{Dimension of work} = [M] \times [LT^{-2}] \times [L]$$
$$= [ML^2T^{-2}]$$

(KW-h) کیلوواٹ گھنٹہ برق کی پیمائش میں کام کی اکائی ہے اس کو جول سے جوڑا جاتا ہے۔

اس سبق کے اختتام میں آپ اس اکائی کے بارے میں سیکھیں گے۔

مثال 5.2:

ایک 6N افقی سطح پر 60° زاویے سے ایک جسم پر عمل کرتی ہے جس کی وجہ جسم افقی سمت میں 2 میٹر نقل مقام طئے کرتا ہے تب کیا گیا کام محسوب کیجئے۔

حل: مساوات 5.1 سے ہم جانتے ہیں کہ

$$W = FS \cos\theta$$
$$= 6 \times 2 \times \cos 60^\circ$$
$$= 6 \times 2 \times (½)$$
$$= 6\ J$$

مثال:5.3

ایک شخص 5 کلو آلو زمین سے 4 میٹر بلند پہلی منزل پر اٹھالاتا ہے۔تب اس شخص کا کیا گیا کام محسوب کیجئے۔

حل: چونکہ شخص آلو اٹھایا ہے' کیا گیا کام تجاذبی قوت کے مقابل سمت میں ہے۔اس لئے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{Force} = mg$$
$$= 5\ kg \times 9.8\ ms^{-2}$$
$$= 49\ N$$
$$\text{Work done} = 49 \times 4\ (N\ m)$$
$$= 196\ J$$

5.1.1 قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کی مختلف صورتیں

جیسا کہ آپ جانتے ہیں' کام کی وضاحت $W = FS\cos\theta$ سے کی جاتی ہے۔ جہاں پر قوت اور نقل مقام کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔ اس طرح قوت اور نقل مقام کے علاوہ ان دونوں کے درمیان بننے والا زاویہ بھی کام کی نوعیت پر اثر ڈالتا ہے۔

$$W = FS\cos\theta$$

1. اگر $\theta = \theta^0$ تب $\cos\theta^0 = 1$

یعنی $W = FS$

اس صورت میں کیا گیا کام مثبت ہوتا ہے اور یہ سب سے زیادہ ہوتا ہے۔مثلاً: کار کے انجن کے بڑھتے ہوئے اسراع کی وجہ سے کیا گیا کام اس کی رفتار بڑھتا ہے۔ یہاں پر عمل کرنے والی قوت اور نقل مقام ایک ہی سمت میں ہیں۔

2. اگر $\theta = 180^0$ تب $\cos 180^0 = -1$

یعنی $W = FS$

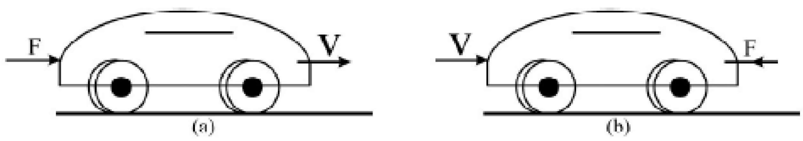
اس صورت میں کیا گیا کام منفی ہوتا ہے اور یہ سب سے کم ہوتا ہے۔مثلاً: کار کے انجن کے ذریعہ کیا گیا کام جب کہ بریک لگایا گیا ہے۔ اس صورت میں عمل کرنے والی قوت سمت نقل مقام کی سمت ایک دوسرے کے مقابل ہوتے ہیں۔

نہ صرف $\theta = 180^0$ کے لئے بلکہ تمام θ کی قدریں جو 180^0 تا 270^0 کے درمیان ہوتی ہیں کام منفی ہوتا ہے۔

3. اگر $\theta = 90^0$ تب $\text{Cos } 90^\circ = 0$

$$W = 0$$

مثلاً: ایک شخص سر پر سوٹ کیس اٹھائے، ریلوے پلیٹ فارم پر بہت لمبے وقت تک کھڑا رہتا ہے۔ یہاں پر طبیعات میں اس شخص سے کچھ کام نہیں ہوا۔ کیونکہ طے کردہ فاصلہ '0' صفر ہوتا ہے حالانکہ اس کے عضلاتی توانائی کام کر رہی ہے۔



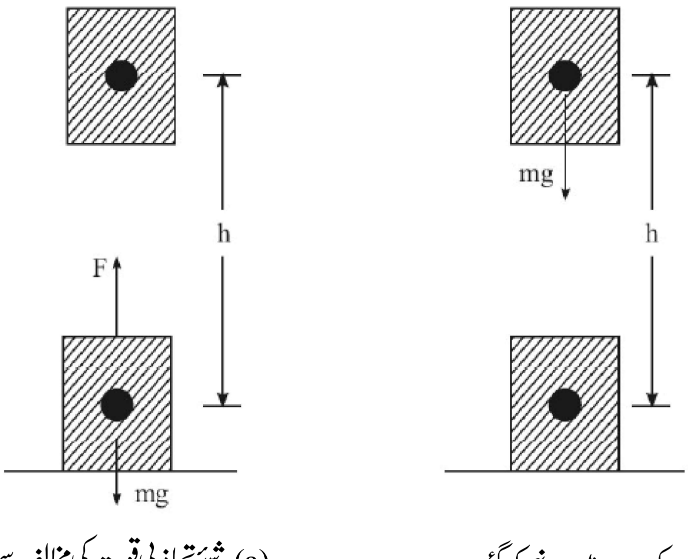
شکل 5.2: ایک کار افقی راستے پر حرکت کر رہی ہے۔(a) قوت F کار کی حرکت کی سمت میں عمل کر رہی ہے۔ تب کار میں اسراع حاصل ہوتا ہے۔(b) قوت F کار کی حرکت کی مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے تب کار میں ابطاء حاصل ہوتا ہے اس لئے کار کچھ فاصلہ طئے کرتے ہوئے رک جاتی ہے۔

5.1.2 تجاذبی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام:

شکل 5.3(a) میں کمیت 'm' کو 'h' بلندی تک اٹھایا گیا ہے اور شکل 5.2(b) میں اسی کمیت m کو h بلندی سے نیچے اتارا گیا ہے۔ شئے کا وزن mg ہوتا ہے۔ اعادہ کیجئے کہ پچھلے باب میں آپ نے سیکھا ہے کہ وزن دراصل قوت ہی ہے۔

شکل 5.3(a) میں کیا گیا کام قوت کے مختلف سمت میں ہوا ہے۔ کیونکہ عمل کرنے والی قوت mg نیچے کی طرف اور شئے کا نقل مقام اوپر کی سمت میں ہوتا ہے۔($\theta = 180^0$) اس لئے

$$W = FS \cos 180^\circ$$
$$= mgh\ (-1)$$
$$\therefore\ W = -\ mgh \qquad (5.2)$$



(a) شئے تجاذبی قوت کی مخالف سمت میں اٹھایا گیا ہے۔

(b) شئے تجاذبی قوت کی سمت میں نیچے کی گئی ہے۔

اوپر حاصل کردہ نتائج کی تشریح میں آپ کو بہت محتاط رہنا چاہئے۔ جب شئے کو اوپر اٹھایا جاتا ہے تو تجاذبی قوت کے ذریعہ کیا جانے والا کام منفی ہوتا ہے لیکن شخص کی طرف سے شئے کو اٹھانے کا کام مثبت ہوتا ہے جب شئے کو نیچے کیا جارہا ہو تجاذبی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام مثبت ہوتا ہے لیکن شخص کی طرف سے شئے کی بلندی کم کرنے کا کام منفی ہوتا ہے۔ ان دونوں صورتوں میں' یہ فرض کیا جاتا ہے کہ شئے کو بغیر اسراع کے حرکت دی گئی ہے۔ یعنی ایک مستقل رفتار کے ساتھ حرکت دی گئی ہے۔

سوالات: 5.1

1. جب کوئی ذرہ دائرے پر گھومتا ہے تب اس پر مرکز جو قوت (سینٹری پیٹل فورس) کام کرتی ہے۔ ذرہ پر اس قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کا حساب لگائیں۔
2. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کی ایک مثال دیں۔ قوت کے ذریعہ کیا گیا کام
   (a) صفر (b) منفی (c) مثبت
3. 2 کلوگرام کے اناج کے تھیلے کو 5 میٹر کی بلندی تک اٹھایا جاتا ہے۔
   (a) اٹھانے والی قوت کے ذریعہ کتنا کام کیا گیا ہے؟
   (b) تجاذبی قوت کے ذریعہ کتنا کام کیا گیا ہے؟
4. ایک قوت $\mathbf{F} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ کی وجہ سے نقل مقام $\overline{\mathbf{S}} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{m}$ حاصل ہوتا ہے۔ کیا گیا کام محسوب کیجئے۔
5. ایک قوت $\mathbf{F} = (5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ ایک ذرہ پر عمل کرتے ہوئے نقل مقام $\overline{\mathbf{S}} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{m}$ پر منتقل کردیتی ہے۔
   (a) نقل مقام کی مقدار محسوب کیجئے۔
   (b) قوت کی مقدار محسوب کیجئے۔
   (c) قوت کے ذریعہ کیا گیا کام محسوب کیجئے۔

5.2 متغیر قوت کے ذریعہ کیا گیا کام:

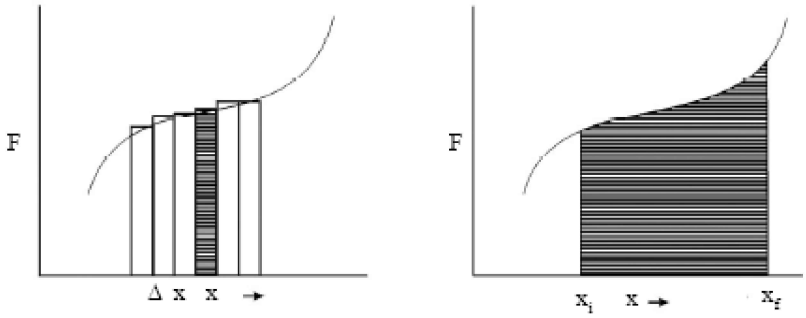
آپ نے اب تک تمام صورتوں میں شئے پر عمل کرنے والی مستقل قوت کے بارے میں مطالعہ کرچکے ہیں۔ ہمیشہ مستقل قوت ہی عمل کریں یہ درست نہیں ہے۔ چند صورتوں میں عمل کرنے والی قوت متغیر بھی ہوتی ہے وقت کے ساتھ ساتھ۔ آیئے اب اس صورت پر غور کریں۔ متغیر قوت کے ذریعہ کیے جانے والے کام کو محسوب کریں گے۔ فرض کرو کہ نقل مقام X_i سے X_f ہوتا ہے۔ جہاں پر X_i اور X_f شئے کے ابتدائی اور انتہائی مقامات ہیں۔ ان حالات میں کئے گئے کام کو محسوب کرنے کے لئے نقل مقام کے چھوٹے وقفہ Δx بہت زیادہ مقدار میں لیا جاتا ہے۔ حقیقت میں Δx بہت چھوٹا نقل مقام کیا جاتا ہے۔ تاکہ قوت $f(x)$ کو منتقل تصور کیا جاسکے اس پر ایک نقل مقام کے حصے پر تب قوت کے ذریعہ اس چھوٹے سے نقل مقام پر کیا گیا کام Δx ہوتا ہے۔

$$\Delta W = F(x)\,\Delta x \qquad (5.4)$$

$f(x),\Delta x$ کی عددی مقدار مساوی ہوتی ہے شکل 5.4(a) میں بتائے گئے سایہ دار حصے سے حاصل رقبہ کے۔ قوت کے ذریعہ X_i سے X_f کے درمیان کیا گیا کام کی مقدار اسطرح کے تمام رقبوں کا مجموعہ ہوتی ہے (تمام سایہ دار پٹیوں کے رقبوں کو جمع کرنے پر)

$$W = \Sigma \Delta W$$

$$= \Sigma\, F(x)\,\Delta x \qquad (5.5)$$



شکل5.4: متغیر قوت F شئے کو ابتدائی مقام X_i سے انتہائی مقام X_f تک حرکت دیتی ہے۔ متغیر قوت کو ٹھوس منحنی سے ظاہر کیا گیا ہے اور کئے گے کام کی مقدار کو سایہ دار حصے کے رقبے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سایہ دار پٹی کی چوڑائی اتنی چھوٹی ممکن ہونی چاہئے تا کہ قوت مستقل رہے۔ X_i اور X_f کے درمیان اس طرح کی تمام سایہ دار پٹیوں کا مجموعہ سے کل رقبے حاصل ہو۔ جس سے کلکیا گیا کام کی مقدار حاصل ہو سکے جو قوت X_i سے X_f کے درمیان لگی ہو۔

$$W = \sum_{\lim \Delta x \to 0} F(x)\Delta x \qquad (5.6)$$

جب Δx کی قدر صفر '0' کی طرف مائل ہوتی ہے تب متغیر قوت سے کیا گیا کام کو معین تکملے (Definite Integral) سے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ قوت کو نقل مقام $x = x_i$ سے $x = x_f$

$$\therefore \qquad W = \int_{x_i}^{x_2} F(x)\,dx. \qquad (5.7)$$

مثال5.4:

قوت F = -kx ایک ذرہ پر x- محور کے ساتھ عمل کرتی ہے۔ x=a سے x=2a تک ذرہ کو ہٹانے (نقل مقام دینے) میں قوت کے ذریعہ کیا گیا کام محسوب کیجئے۔ یہاں پر k ایک مثبت مستقل ہے۔

حل:

$$W = \int_{x=a}^{x=2a} F(x)\,dx$$

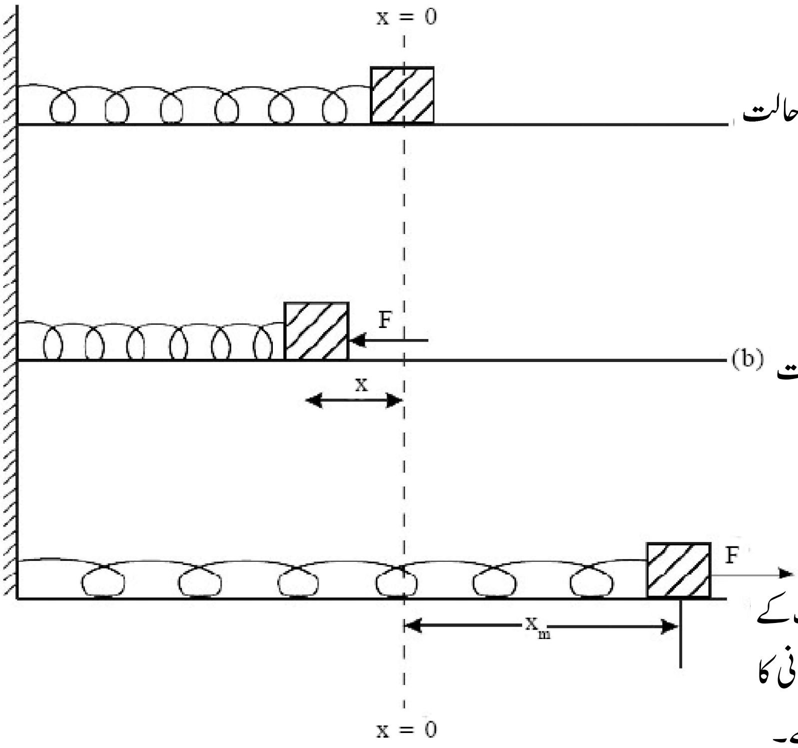
$$= \int_{x=a}^{2a} (-kx)\,dx = -k\int_{x=a}^{x=2a} x\,dx$$

$$= -k\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_a^{2a} = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{2a} \quad \left[\because \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{-k}{2}\left[(2a)^2 - a^2\right] = \frac{k}{2}\left[4a^2 - a^2\right] = \frac{-3a^2}{2}$$

5.2.1 کمانی قوت (Spring) کے ذریعہ کیا گیا کام

متغیر قوت کی ایک سادہ مثال کمانی قوت (اسپرنگ) سے لگائی گئی قوت ہوتی ہے۔ آیئے اس صورت میں کئے گئے کام کی عبارت کو اخذ کریں گے۔



(a) (Spring) کمانی کی عام حالت میں شئے کا مقام x=0 پر

(b) (Spring) کمانی کو بیرونی قوت کے زیر اثر دبایا گیا ہے۔

(c) (Spring) کمانی کو بیرونی قوت کے زیر اثر کھینچا گیا جس کی وجہ سے کمانی کا پھیلاؤ زیادہ سے زیادہ Xm ہے۔

شکل 5.5: ایک کمانی اور کمیت کے نظام میں کمانی کے ایک سر کو سخت حصے سے جوڑ دیا جاتا ہے اور دوسرے حصہ کو کمیت سے جوڑ کر افقی صاف سطح پر رکھا جاتا ہے۔

شکل 5.5(a) میں کمانی کے ایک سرے کو سخت حصے سے جوڑ دیا جاتا ہے اور دوسرے حصے کو m کمیت رکھنے والے بلاک سے جوڑ کر توازن کی حالت میں رکھا ہوا بتایا گیا ہے اور اس نظام کو افقی صاف سطح پر رکھا گیا ہے۔

ہم x- محور کو افقی سمت میں لیتے ہیں فرض کرو کہ کمیت m مقام X=0 پر ہے۔ اسپرنگ (کمانی) اب بیرونی قوت کے ذریعے دابتا (کمپریسڈ) یا لمبا ہوتا ہے۔ ایک اندرونی قوت $\mathbf{F_S}$ جو کمانی کی لچکدار خاصیت کی وجہ سے اس میں عمل کرتی ہے۔ یہ قوت $\mathbf{F_S}$ کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ بڑھتی ہے اور یہ F کے مساوی ہو جاتی ہے جب کہ کمانی کا دابنا یا لمبا ہونا انتہا تک ہو جائے یعنی $x = x_m$

ہوک (Horke's) کے کلیہ کے تحت (x کی چھوٹی قدروں کے لئے ہی) $|F_S|$ جہاں پر k اسپرنگ (کمانی) کا مستقل ہوتا ہے اور $\mathbf{F_S}$ کی سمت ہمیشہ مختلف ہوتی ہے (دابنے) یا (پھیلنے) کے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$F = F_S = -kx$$

آیئے اب ہم کئے گئے کام کو محسوب کریں اور اس کی جانچ کریں کہ آیا یہ مثبت ہوتی ہے یا منفی ہوتی ہے۔

جب اسپرنگ (کمانی) کو دبایا جاتا ہ۔ عمل کرنے والی بیرونی قوت کی سمت بائیں جانب ہوتی ہے اور نقل مقام x کی سمت بھی بائیں جانب ہوتی ہے۔ اس طرح بیرونی قوت کے زیر اثر کیا گیا کام مثبت ہوتا ہ۔ جب کہ اسی نقل مقام کی سمت میں ایک لچکی قوت اس اسپرنگ میں پیدا ہوتی ہے جس کی سمت دائیں جانب ہوتی ہے۔ یعنی f اور x ایک دوسرے کے مخالف سمت میں ہوتے ہیں۔ ہاں پر اسپرنگ کی قوت سے کیا

گیا کام منفی ہوتا ہے۔اب آپ خود اسپرنگ کے پھیلاؤ کے عمل کا مشاہدہ کرتے ہوئے جانچ کر سکتے ہیں کہ اس صورت میں بھی مندرجہ بالا نتائج حاصل ہوتے ہیں۔یعنی ''بیرونی قوت سے کیا گیا کام مثبت لیکن اسپرنگ کی قوت سے کیا گیا کام منفی ہوتا ہےاوراس کی مقدار $(½)\ kx^2_m$ ہوتی ہے۔

کئے گئے کام کی عبارت کواخذ کرنے کے لئے ایک سادہ سا حساب محسوب کرنے کی ضرورت ہے۔$x=0$ پرقوت $F_S = 0$ جیسے x کی قدر بڑھتی ہےاورقوت F_S بھی بڑھتی ہےاور بڑھتے ہوئے F کے مساوی ہوجاتی ہے $x = xm.$ اس طرح متغیرقوت نقل مقام کے ساتھ خطی ہوجاتی ہے۔اوسط قوت دابنے پر یا کھینچنے پر تقریباً $\left(\frac{0+F_s}{2}\right)=\frac{F_s}{2}$ ہوسکتی ہے۔قوت کے ذریعہ کیا گیا کام اس طرح ہوتا ہے۔

نقل مقام x قوت=2

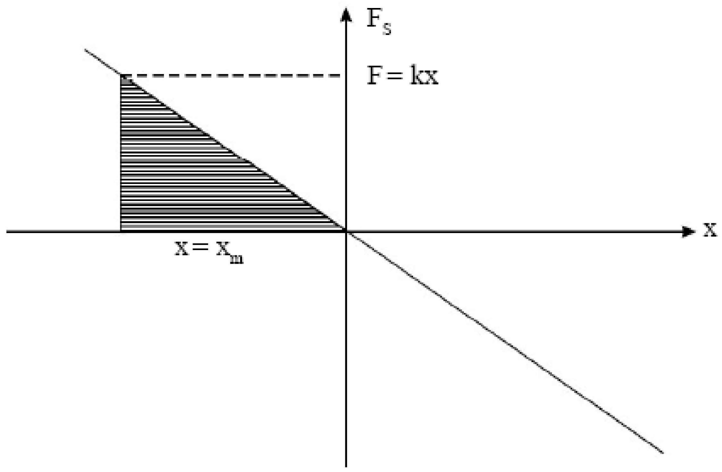
$$= \frac{F_s}{2} . x,$$

لیکن $|F_s| = k\,|x_m|$ یہاں

$$W = \frac{1}{2} kx_m \times x_m$$

$$= \frac{1}{2} kx_m^2 \qquad (5.9)$$

(گراف) ترسیم کے ذریعہ بھی کیا گیا کام کی عبارت حاصل کی جاتی ہے۔اس کوشکل 5.6 سے بتایا گیا۔ترسیم میں مثلث کا رقبہ جس کو سایہ دار حصے سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل 5.6: کیا گیا کام کی مقدار عددی حساب میں مساوی ہوتی ہے سایہ دار مثلث کے رقبے کے

$$\frac{1}{2} \text{ base } \times \text{ height}$$

$$W = \frac{1}{2} x_m \times kx_m \qquad (5.10)$$

$$= \frac{1}{2} kx_m^2$$

اس طرح یہ مساوات عملی طور پر حاصل مساوات (5.9) کے مساوی ہوتا ہے۔

مزید $W = \int_{x=0}^{x=x_m} F(x)\,dx$ کے ضابطے کی مدد سے بھی حاصل کیا جاتا ہے۔

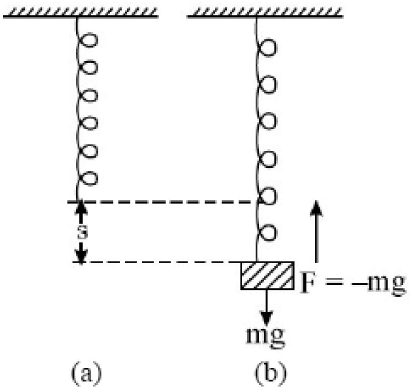
یہاں پر dx اسپرنگ (کمانی) میں چھوٹے سے چھوٹا پھیلاؤ/دبنے کا نقل مقام ہے۔

$$W = \int_{x=0}^{x=x_m} kx\,dx = k\int_{x=0}^{x=x_m} x\,dx = k\left[\frac{x_m^2}{2}\right]_0^x$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}kx_m^2$$

5.2 مشغلہ:

اسپرنگ (کمانی) کا مستقل کی پیمائش:



شکل 5.7: اسپرنگ کا پھیلاؤ' کمیت m لگانے پر

اسپرنگ (کمانی) کو عمودی طور پر لٹکائیے جیسا کہ شکل 5.7(a) میں دکھایا گیا ہے۔ اب اسپرنگ کے نچلے سرے پر کمیت 'm' کا ایک بلاک منسلک کریں۔ ایسا کرنے پر اسپرنگ (کمانی) کچھ فاصلے پر پھیل جاتا ہے۔ اس توسیع کی (پھیلاؤ) کی پیمائش کیجئے۔ فرض کرو کہ یہ پھیلاؤ s ہے جس کو شکل 5.7(b) میں دکھایا گیا۔ آیئے اب ہم اس پر غور کریں کہ اسپرنگ مزید کیوں نہیں پھیلتا ہے؟ اس کی وجہ یہ ہے کہ اوپر کی طرف کام کرنے والے اسپرنگ میں (بحال ہونے والی قوت) اور اس بلاک کا وزن mg ایک دوسرے کی متوازن حالت میں رکھتی ہے۔ آپ ان مقداروں کو ضابطہ میں درج کرتے ہوئے اسپرنگ (کمانی) کا مستقل معلوم کر سکتے ہیں۔

$$F_s = k.s$$

or $$mg = k.s.$$

Thus, $$k = \frac{mg}{s} \qquad (5.11)$$

5.2 سوالات:

1. اسپرنگ (کمانی) مستقل کی وضاحت کیجئے اور S.I اکائیاں کیا ہیں؟
2. ایک 10N قوت اسپرنگ میں 1cm کا پھیلاؤ پیدا کرتی ہے۔ تب کتنے نیوٹن قوت اس اسپرنگ میں 5cm کا پھیلاؤ پیدا کر سکتی ہے؟ بتلایئے کہ اس قوت سے کتنا کام کیا گیا ہے؟
3. ایک گراف ایک متغیر قوت (y- محور پر) اور شئے کا نقل مقام (x- محور پر) لیتے ہوئے بنایا گیا ہے۔ اس منحنی کا رقبہ اس کو ظاہر کرتا ہے۔

5.3 کام اور حرکی توانائی:

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، کام کرنے کی صلاحیت کو توانائی کہا جاتا ہے۔ اگر کسی نظام میں توانائی ہے تب اس میں کام کرنے کی صلاحیت ہے۔ کار جیسی آٹوموبائل گاڑی چلانے کے لئے اپنے ایندھن کی کیمیائی توانائی استعمال کرتی ہے۔ حرکت پذیر شئے کے پاس موجود توانائی کو (Kinetic Energy) حرکی توانائی کہتے ہیں۔

اگر ایک شئے کی کمیت 'm' اور اس کی رفتار $\vec{v}$ ہوتی ہے۔ تب اس متحرک شئے کی حرکی توانائی k یہ ہوتی ہے۔

$$K = \frac{1}{2}m(\bar{v}.\bar{v}) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (5.12)$$

حرکی توانائی ایک اسکیلر مقدار ہے۔

اگر رفتار صفر ہے، تب حرکی توانائی بھی صفر ہوتی ہے۔ مندرجہ بالا مساوات کو مندرجہ ذیل کے طور پر حاصل کیا جاتا ہے۔ ایک قوت F پر غور کریں جو کمیت 'm' پر عمل کرتی ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار u سے v ہو جاتی ہے وقت کے وقفہ 't' کے دوران اور شئے 's' فاصلہ طے کرتی ہے۔

$$v^2 - u^2 = 2as \qquad (5.13)$$

$$a = \frac{v^2 - u^2}{2s}$$

مساوات کے استعمال کی مدد سے F=ma درج کرنے پر حاصل کرتے ہیں۔

$$F = m\left(\frac{v^2 - u^2}{2s}\right) \qquad (5.14)$$

قوت کے ذریعہ کیا گیا کام یہ ہوتا ہے w=f-s

$$W = F.s. = m\left(\frac{v^2 - u^2}{2s}\right) \times s$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 \qquad (5.15)$$

$$W = KE_{final} - KE_{initial}$$

$$W = \Delta KE \qquad (5.16)$$

قوت کے ذریعہ کیا گیا کام مساوی ہوتا ہے۔ اس شئے کی حرکی توانائی کی تبدیلی ہے۔ یہ مسئلہ کو اس طرح بھی کہا جاتا ہے۔'' کام۔توانائی کا مسئلہ'' اگر ابتدائی رفتار 'u' صفر (0) ہوتی ہے۔ تب قوت کے ذریعہ کیا گیا کام $W = \frac{1}{2}mv^2$ ہوتا ہے۔ جو کہ شئے کی حرکی توانائی ہوتی ہے۔

$$\therefore \qquad KE = \frac{1}{2}mv^2$$

کام۔توانائی کا مسئلہ

کام۔توانائی کا مسئلہ کہتا ہے کہ جسم پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے نتیجے میں ہونے والا کام جسم کی اس کی حرکی توانائی میں تبدیلی کے مساوی ہوتا ہے۔

مثال 5.5:

ایک جسم جس کی کمیت 10 کلوگرام ہے ابتدائی رفتار $4.0\ ms^{-1}$ میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ایک قوت 30N کی اس پر عمل کرتی ہے 2 سکنڈ کے لئے۔

(i) سکنڈ کے بعد اس جسم کی انتہائی رفتار کیا ہوگی؟

(ii) اس دورانئے کے درمیان کئے گئے کام کی مقدار محسوب کیجئے۔

(iii) اس جسم کی ابتدائی حرکی توانائی کیا ہوتی ہے؟

(iv) اس جسم کی انتہائی حرکی توانائی کیا ہوتی ہے؟

(v) اس دورانئے کے درمیان کتنا فاصلہ طے کیا گیا ہے؟

(v) بتائیے کہ کیا گیا کام مساوی ہوتا ہے حرکی توانائی کی تبدیلی ہے؟

حل:

(i) Force $(F) = ma$

or $a = F/m$

$= 30/10$

$= 3\ m\ s^{-2}$

انتہائی رفتار ضابطہ کی مدد سے $v_2 = v_1 + at$

$= 4 + (3 \times 2) = 10\ m\ s^{-1}$

(ii) 2 سکنڈ کے دوران طئے کیا گیا فاصلہ ضابطہ کی مدد سے

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$= (4 \times 2) + \frac{1}{2}(3 \times 4)$$

$$= 8 + 6 = 14\ m$$

اس دوران کیا گیا کام $W = F \times S$

$= 30 \times 14 = 420\ J$

(iii) ابتدائی حرکی توانائی

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(10 \times 16) = 80\ J$$

(iv) انتہائی حرکی توانائیضابطہ کی مدد سے

$$K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(10 \times 100\right) = 500\ \text{J}$$

(v) اس دورانئے کے درمیان طئے کردہ فاصلہ اوپرحل (ii) کی رو سے 14m ہوتا ہے۔

(vi) حرکی توانائی میں تبدیلی یہ ہے $K_2 - K_1 = (500 - 80) = 420\ \text{J}$

نوٹ: کیا گیا کام مساوی ہوتا ہے اس کی حرکی توانائی کی تبدیلی کے۔

5.3 سوالات:

1. کیا یہ ممکن ہے کہ کسی ذرہ کی حرکی توانائی منفی ہوتی ہے؟ کیوں؟
2. کیا تبدیلی واقع ہوتی ہے ایک ذرہ کی حرکی توانائی میں اگر
   (a) ذرہ کی رفتار v کو 2v سے بدل دیا جائے۔
   (b) ذرہ کی کمیت m کو $\frac{m}{2}$ سے بدل دیا جائے۔
3. ایک ذرہ 3.65 حرکی توانائی کے ساتھ حرکت کررہا ہے ایک اسپرنگ کے مستقل...... کی قوت کے ساتھ ٹکراتا ہے۔ تب اسپرنگ کے دابنے کی انتہائی قدر محسوب کیجئے۔
4. اگر ایک اسپرنگ کو دابنے کے لئے قوت کے ذریعہ کیا گیا کام 3755 ہوتا ہے تب اس اسپرنگ کے ذریعہ قوت سے کیے جانے والے کام کی مقدار محسوب کیجئے۔

5.4 توانائی بالقوہ کا تصور:

پچھلے حصے میں ہم نے متحرک اجسام اپنے ساتھ حرکی توانائی رکھتے ہیں' اس پر بحث کر چکے ہیں۔ (پوٹنشیل انرجی) توانائی بالقوہ کی اصطلاح ایک ذخیرہ شدہ توانائی کی نشاندہی کرتی ہے جو کہ شئے کی خواہش کے خلاف کئے گئے کام کا نتیجہ ہے۔ یعنی ایک کمپریسڈ (دابے ہوئے) یا پھیلا ہوا اسپرنگ (کمانی) کی توانائی ٹینک یا ڈیم میں ذخیرہ شدہ پانی میں موجود توانائی اور ایک اڑتی ہوئی کوئی چیز اپنے اندر توانائی بالقوہ رکھتی ہے اور کمان کے ذریعہ چھوڑنے کے لئے تیار تیر میں ممکنہ توانائیاں ہوتی ہیں۔ مزید سکون برقی توانائی بھی اس کی ہی ایک مثال ہے۔ ان تمام مندرجہ بالا مثالوں میں توانائی ذخیرہ کی ہوئی ہوتی ہے توانائی بالقوہ کہلاتی ہے۔

کسی جسم میں آپ کے مقام یا حالت کی تبدیلی کی وجہ سے ذخیرہ کی ہوئی ممکنہ توانائی' توانائی بالقوہ کہلاتی ہے مثلاً تجاذبی میدان میں کسی جسم کی ظاہر ہونے والی قوت تجاذبی توانائی بالقوہ کہلاتی ہے۔ آیئے اب ہم اس کو سمجھیں۔

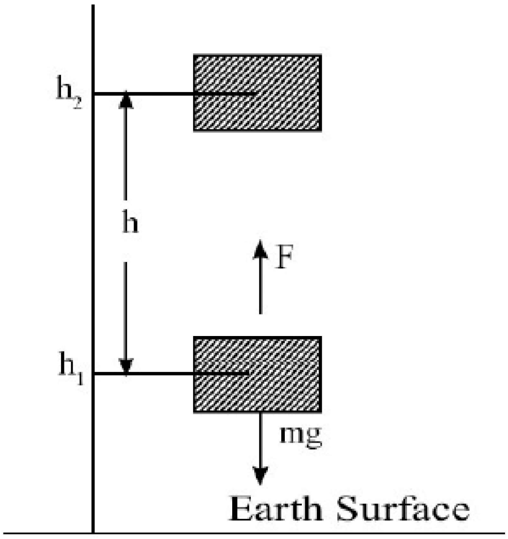
5.4.1 تجاذبی میدان میں توانائی بالقوہ:

فرض کرو کہ ایک شخص زمین کی سطح سے اوپر دی گئی اونچائی h_1 سے ایک شئے جس کی کمیت m ہے اونچائی h_2 تک اٹھاتا ہے۔ آیئے مزید یہ بھی فرض کریں کہ اسراع بہ وجہ جذب زمین کی قدر مستقل رہتی ہے۔ کمیت کو $h = (h_2 - h_1)$ بلندی تک نقل مقام طئے کیا گیا قوت تجاذبی کے مخالف سمت ہیں۔ اس قوت کی مقدار mg ہوتی ہے اور یہ قوت نیچے کی جانب عمل کرتی ہے۔ لہٰذا شخص کی طرف سے کیا گیا

کام فاصلہ x قوت=w کام

یہ کام مثبت ہے اور یہ توانائی کمیت m میں ذخیرہ کردی گئی ہے اس کی حالت (بلندی/اونچائی کی وجہ سے)

جسم میں یہ توانائی خلا میں اس کی حالت کی وجہ سے ذخیرہ ہو جاتی ہے۔تجاذبی توانائی بالقوہ کہلاتی ہے۔اس میں کام کرنے کی صلاحیت موجود رہتی ہے۔اگر اس شئے کی کمیت کو آزاد چھوڑ دیا جائے تب یہ نیچے گر جائے گا۔اگر اس گرتی ہوئی شئے کو مناسب طور پر استعمال کرتے ہوئے کیا جاسکتا ہے۔مثلاً اگر اس شئے کو کسی تار کے ذریعہ مناسب طور پر جوڑا جائے تب یہ کوئی اور کمیت کو اٹھانے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔جب کہ یہ تار ایک گھرنی کے اوپر گزر رہا ہو۔



شکل 5.8: جسم کی اونچائی کا مقام h_1 اپنے طور پر لیا گیا h_2 نقطہ ہوتا ہے۔

دراصل تبدیلی اونچائی یا نقل مقام کو h_1 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح ہم پہلے مقام $(h_2 - h_1)$ کو صفر توانائی بالقوہ کے طور پر مان لیتے ہیں۔خلا میں کسی بھی نقطہ کو صفر توانائی بالقوہ کا نقطہ تصور کیا جاسکتا ہے۔عام طور پر زمین پر کمیت کو صفر توانائی بالقوہ کا نقطہ فرض کیا جاتا ہے۔

5.4.2 اسپرنگ کی توانائی بالقوہ:

اسپرنگ کو پھیلانے کے لئے کیا گیا کام مخالف ہوتا ہے دراصل اسپرنگ کے اندر توانائی بالقوہ کا ذخیرہ کرنے کے۔

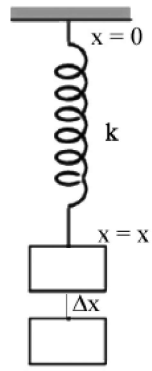
$$F = -kx \qquad (5.18)$$

$$W = \int_{x=0}^{x=x} F.dx \qquad (5.19)$$

$$W = \int -kx.dx = \frac{1}{2}kx^2$$

یہ کام' لچکدار توانائی بالقوہ کی شکل میں اسپرنگ میں ذخیرہ کیا گیا ہے۔

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (5.20)$$



(شکل 5.9: لچکدار توانائی بالقوہ۔کمیت اسپرنگ نظام کے)

جب اسپرنگ کو آزاد کیا جاتا ہے یہ واپس اچھلتا ہے اور اس میں ذخیرہ شدہ توانائی بالقوہ تبدیل ہو جاتی ہے حرکی توانائی میں۔یہ ہی اصول بندوق اور تانی ہوئی کمان جس کے ذریعہ تیر چھوڑا جاتا ہے' میں عمل کرتا ہے۔

5.5 بقائے توانائی:

ہماری روزمرہ زندگی میں ہم نے توانائی کے مختلف اقسام کے بارے میں جان چکے ہیں۔مثلاً برقی توانائی' حراری توانائی' تجاذبی توانائی' کیمیائی توانائی اور نیوکلیر توانائی وغیرہ۔توانائی کی یہ تمام اقسام اس لحاظ سے بہت گہرا تعلق رکھتی ہیں کہ ایک کو دوسری میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔یہ توانائی کے بارے میں بہت بنیادی قانون ہے۔اسے توانائی کے تحفظ کے قانون (کلیہ) کے نام سے جانا جاتا ہے۔یہ اس طرح بیان کیا

جاتا ہے''ایک مخصوص نظام کی کل توانائی ہمیشہ مستقل رہتی ہے''۔

توانائی اپنی شکل بدل سکتی ہے۔اسے ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔لیکن ایک نظام کی کل توانائی ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔ایک مخصوص نظام میں ایک توانائی کا کوئی نقصان ہوتا ہے تب توانائی کیدوسری شکل کے مساوی مقدار کا فائدہ ہوتا ہے۔اس طرح کل توانائی مستقل رہتی ہے۔اس طرح کہہ سکتے ہیں کہ توانائی نہ پیدا کی جاتی اور نہ ہی تباہ کی جاتی ہے۔

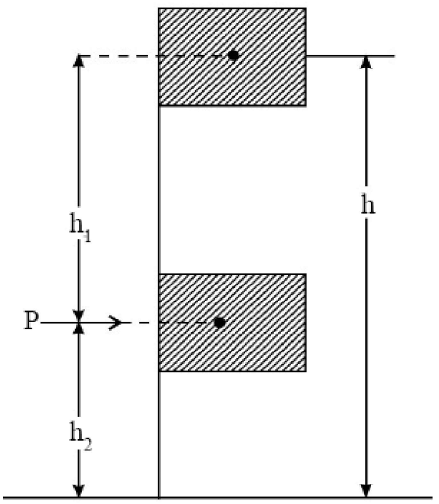
کائنات بھی ایک مخصوص (الگ تھلگ)نظام ہے کیونکہ اس سے آگے (باہر) کچھ بھی نہیں ہے۔یہی وجہ ہے کہ کائنات کی کل توانائی ہمیشہ قائم رہتی ہے۔اس حقیقت کے باوجود کہ کائنات میں ہر لمحہ مختلف قسم کی تبدیلیاں رونما ہورہی ہیں۔ یہ بہت اہمیت کا حامل ......اس کی وجہ سے سائنس میں بہت سی نئی دریافتیں ہوتی ہیں اور یہ ناکام نہیں پایا گیا ہے۔

تھرمل پاور اسٹیشن میں کوئلے کی کیمیائی توانائی برقی توانائی میں بدل جاتی ہے۔ برقی توانائی مشینیں چلاتی ہے۔ان مشینوں میں برقی توانائی میکینکل توانائی' برقی توانائی مشینیں چلاتی ہے۔ان مشینوں میں برقی توانائی میکینکل توانائی' روشنی کی توانائی یا حراری توانائی میں تبدیل ہوتی رہتی ہے۔توانائی کا تحفظ اس سے کہیں زیادہ عام ہے جتنا ہم سوچ سکتے ہیں۔اس کا اطلاق بڑے سیاروں اور ستاروں سے لے کر چھوٹے ایٹمی ذرات تک ہوتا ہے۔

(a) جسم کے آزادانہ گرنے کے دوران بقائے میکینکل توانائی:

اب ہم میکانکی توانائی کے معاملے میں توانائی کے تحفظ کے قانون کی درستگی کو جانچنا چاہتے ہیں اب یہ ہماری قومی دلچسپی کا حامل مسئلہ ہے۔

فرض کرو کہ ایک شئے میں جس کی کمیت m ہے زمین پر رکھی ہوئی ہے اس کو بلندی h اونچائی تک اٹھایا گیا ہے۔تب کیا گیا کام mgh ہوتا ہے جو توانائی بالقوہ کی شکل میں اس جسم میں ذخیرہ ہوجاتی ہے۔ اب اگر شئے کو آزادانہ طور پر چھوڑ دیا جاتا ہے آیئے اب ہم اس شئے کو فاصلے $h_2 = h - h1$ سے گرتے ہوئے جسم کی توانائی کو محسوب کریں گے۔اب شئے کی بلندی زمین کی سطح سے جیسا کہ شکل (5.10) میں بتایا گیا ہے۔اس نقطہ p پر توانائی بالقوہ مساوی ہوتی ہے $= mgh2$ کے۔



شکل 5.10 (کمیت m کو h بلندی تک اٹھایا گیا ہے۔زمین کی سطح سے۔مزید اس کو نیچے کیا گیا h_2 بلندی تک جو نقطہ p ہے۔P پر کل توانائی مساوی ہوتی ہے اس کے سب سے اونچے مقام کے)

جب کوئی شئے آزادانہ طور پر گرتی ہے اس کو اسراع حاصل ہوتا ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار تیز ہوتی ہے۔ جب ہم کسی چیز کی رفتار کا حساب لگا سکتے ہیں جب وہ شئے بلندی h_1 سے گر رہی ہو مساوات $v^2 = u^2 + 2gs$ کی مدد سے۔

جہاں پر u ابتدائی رفتار ہے ابتدائی بلندی h_1 پر اور یہ $u=0$ اور $s = h_1$ اس طرح

$$v^2 = 2gh1$$

نقطہ p پر حرکی توانائی

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{m}{2} \times 2gh_1$$

$$= mgh_1 \qquad (5.22)$$

نقطہ p پر کل توانائی

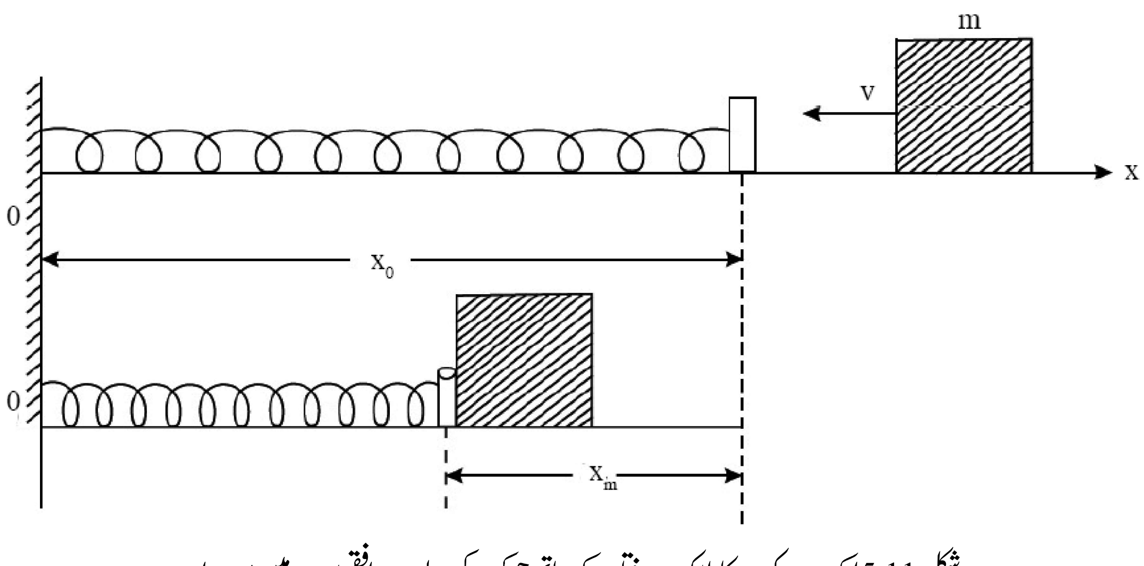
توانائی بالقوہ + حرکی توانائی = کل توانائی

یہ توانائی کل توانائی ہے اور یہ مساوی ہے سب سے اونچے مقام h کی توانائی کے اس طرح ''کل توانائی کا بقائے ہوتا ہے''۔

(b) کمیت کے ساتھ گردش کرتے ہوئے اسپرنگ کے لئے بقائے میکینکی توانائی

شکل 5.11 ایک اسپرنگ دکھایا گیا ہے جس کا ایک سرا سخت دیوار سے لگا ہوا ہے اور دوسرا سرا ایک ہموار افقی میز پر پڑے لکڑی کے بلاک سے جڑا اور دوسرا سرا ایک ہموار افقی میز پر پڑے لکڑی کے بلاک سے جڑا ہوا ہے۔ یہ آزاد سرا نقطہ x_0 پر ہے اور یہ اسپرنگ کی آزاد حالت میں ہے۔ ایک m کمیت رکھنے والا بلاک v رفتار کے ساتھ اسپرنگ سے ٹکراتا ہے x_0 سمت میں۔ جس کی وجہ سے اسپرنگ دابتا جاتا ہے xm فاصلے تک۔ اور یہ سب سے زیادہ دابنے والا فاصلہ نقطہ x_0 ہوتا ہے۔ کل توانائی $\frac{1}{2}mv^2$ ہوتی ہے اسپرنگ۔ کمیت کے نظام میں۔ یہ کمیت کی حرکی توانائی ہے، اسپرنگ کی توانائی بالقوہ صفر ہوتی ہے۔ سب سے زیادہ دابنے والے مقام پر اسپرنگ کی توانائی بالقوہ $\frac{1}{2}kx_m^2$ ہوتی ہے۔ جب کہ حرکی توانائی صفر ہوتی ہے۔ کل توانائی اس مقام پر $\frac{1}{2}kx_m^2$ ہے۔ اس طرح

$$\frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (5.24)$$



شکل 5.11 ایک m کمیت کا بلاک v رفتار کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ افقی سمت میں میز پر اور ٹکرا جاتا ہے ایک اسپرنگ سے۔ جس کے نتیجہ میں اسپرنگ داب کر x_m فاصلہ طے کرتا ہے۔

(ٹکراؤ کے بعد) (ٹکراؤ سے پہلے)

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (5.25)$$

کل توانائی کا بقاء ہوتا ہے۔

جوہری (نیوکلیر) متعاملات میں بقائے (کمیت ۔توانائی)

جوہری توانائی، توانائی کی دیگر اقسام سے اس لحاظ سے مختلف ہے کہ یہ توانائی کسی دوسری شکل کی تبدیلی سے حاصل نہیں ہوتی ہے۔اس کے برعکس یہ کمیت کو توانائی میں تبدیل کرکے حاصل کی جاتی ہے۔

لہٰذا جوہری متعاملات میں کمیت قانون تحفظ اور توانائی قانون تحفظ کو ایک ساتھ جوڑ کر لکھا جاتا ہے۔ بقائے کلیہ (قانون کمیت ۔توانائی)

مثال 5.6:

2.5 میٹر عمودی اونچائی 'A' سے ایک بلاک جس کی کمیت 0.5 کلوگرام وزن ہوتی ہے۔ایک ہموار مائل سطح سے نیچے پھسلتا ہوا افقی سطح پر نقطہ B پر پہنچتا ہے۔شکل 5.12 میں بتایا گیا ہے۔توانائی کے تحفظ کی بنیاد پر محسوب کیجئے۔(i) نقطہ 'A' پر بلاک توانائی اور (ii) نقطہ 'B' پر بلاک کی رفتار۔

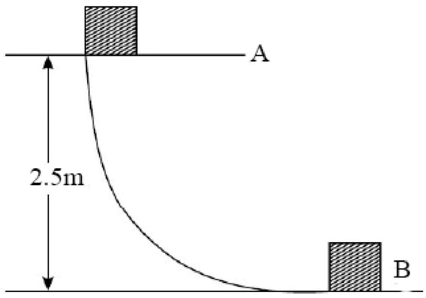


Fig. 5.12 : A block slides on a curved surface. The total energy at A (potential only) gets converted into total energy at B (kinetic only)

حل:

(i) نقطہ 'a' پر توانائی بالقوہ:

توانائی بالقوہ = mgh

$$= mgh = (0.5) \times (9.8) \times 2.5 \text{ J}$$
$$= 4.9 \times 2.5 \text{ J} = 12.25 \text{ J}$$

حرکی توانائی نقطہ 'A' پر صفر '0' ہوتی ہے اور کل توانائی

12.25 J کل توانائی

(ii) ہم جانتے ہیں کہ نقطہ 'A' پر کل توانائی کی مقدار مساوی ہوتی ہے نقطہ B پر کل توانائی کی مقدار کے۔

نقطہ 'A' پر کل توانائی A = 12.25 J نقطہ 'B' پر کل توانائی $B = \frac{1}{2}mv^2$

اس طرح نقطہ 'B' پر توانائی بالقوہ '0' ہوتی ہے۔اس طرح کل توانائی صرف......ہوتی ہے......کل توانائی

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 = 12.25$$

$$v^2 = \frac{12.25 \times 2}{0.5} = 12.25 \times 4$$

$$v^2 = 49.00$$

Hence $\quad v = 7.0 \text{ ms}^{-1}$

نوٹ: اس رفتار کی قدر کو حرکت کی مساوات کے ذریعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$v^2 = v_0^2 + 2gx$$
$$= 0 + 2 \times 9.8 \times 2.5$$
$$v^2 = 49$$
$$v = 7\ ms^{-1}$$

5.6 طاقت:

آپ پہلے ہی قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کو محسوب کر چکے ہیں۔ مندرجہ بالا حالات میں ہم نے غور نہیں کیا کہ کام ایک سیکنڈ میں ہوتا ہے یا ایک گھنٹے میں۔ تاہم ہماری روزمرہ کی زندگی میں، کسی خاص کام کو انجام دینے میں لگنے والا وقت بڑی اہمیت رکھتا ہے۔ مثلاً سیمنٹ کے تھیلوں سے ٹرک پر لوڈ کرنے میں کئی گھنٹے لگ سکتے ہیں جب کہ ایک مشین یا کرین یہ کام بہت کم وقت میں کر سکتی ہے۔ لہٰذا یہ جاننا ضروری ہے کہ کس شرح سے کام کیا جاتا ہے۔ یا کسی خاص کام کو کرنے کے لئے جس شرح پر توانائی فراہم کی جاتی ہے "کام کرنے کی شرح یا توانائی کے استعمال کی شرح کو طاقت کہتے ہیں"

$$\text{طاقت} = \frac{\text{کیا گیا کام}}{\text{درکار وقت}} = \frac{\text{فراہم کی گئی توانائی}}{\text{درکار وقت}}$$

اس طرح لکھنے پر

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad (5.26)$$

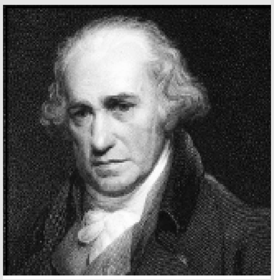
اگر کام کرنے کی شرح مستقل نہیں ہوتی ہے۔ یہ شرح متغیر ہوتی ہے۔ ان صورتوں میں ہم لحاتی طاقت کی اصطلاح استعمال کرتے ہیں۔

$$P = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right) = \frac{dW}{dt} \qquad (5.27)$$

☆ طاقت کو نقطی حاصل ضرب کے طور پر بھی لکھا جاتا ہے۔ قوت اور رفتار کے $P = \overline{F} \cdot \overline{V}$

☆ SI نظام طاقت کی اکائی Joule/Second (جول فی سکنڈ) ہوتی ہے۔ مزید اس کو WaH(w) میں کیا جاتا ہے۔ یہ اکائی James Watt کی یاد میں دی گئی ہے۔ جس نے Steam Engine بھاپ کا مشین ایجاد کیا۔

جیمز واٹ ((James Watt (1736-1819):



اسکاٹ لینڈ کے موجد اور میکینکل انجینئر جیمز واٹ بھاپ کے انجان کی کارکردگی کو بہتر بنانے کے لئے مشہور ہیں۔ اس سے صنعتی انقلاب کی راہ ہموار ہوئی۔ اس نے ہارس پاور کو طاقت کی اکائی کے طور پر متعارف کرایا۔ پاور SI نظام میں واٹ کو اکائی کے طور پر ان کے اعزاز میں رکھا گیا ہے۔ جیمز واٹ کی چند اہم ایجادات یہ ہیں: ایک بھاپ انجن اور ایک منسلکہ جس کی مدد سے دوربین کے ذریعہ بڑے فاصلوں کی پیائش ممکن ہوئی۔

طاقت کی بڑی اکائی ہارس پاور (hp) ہوتی ہے۔

$$1\ \text{hp} = 746\ \text{W}$$

کام (توانائی) کے لئے ایک نئی اکائی استعمال کی جاتی ہے۔ یہ طاقت کی اکائی (Watt) ہے۔اس طرح کی ایک اور بڑی اکائی کلوواٹ گھنٹہ Kw-hour لی جاتی ہے۔ یہ اکائی عام طور پر الکٹریک استعمال میں لی جاتی ہے۔

$$1\ \text{kwh} = 1 \times 10^3 \times \text{J/s} \times 60 \times 60\text{s}$$

$$1\text{kwh} = 36 \times 10^5\text{J} = 3.6\ \text{MJ (mega joules)}$$

☆ مختلف حالات میں طاقت کی اس طرح وضاحت کی جاتی ہے۔

$$P = \frac{KE}{\text{time}} = \frac{1/2\,mv^2}{t} \qquad (5.28)$$

$$P = \frac{\text{Potential energy}}{\text{time}} = \frac{mgh}{t} \qquad (5.29)$$

مثال 5.7:

ایک لاری چینی کے تھیلوں سے لدی ہوی ہے۔لاری اور تھیلوں کا مجموعی کل وزن 1,00,000 کلوگرام ہے۔ لاری ایک گھنٹہ میں 700 میٹر کی بلندی تک پہاڑ کے اوپر سمیٹے ہوئے راست پر چلتی ہے۔(مواد) اس وزن کو لے جانے کے لئے انجن کو کتنی اوسط طاقت پیدا کرنی چاہئے؟

حل:

$$\begin{aligned} W &= mgh \\ &= (100{,}000\ \text{kg}) \times (9.8\ \text{m s}^{-2} \times 700\ \text{m}) \\ &= 9.8 \times 7 \times 10^7\ \text{J} \\ &= 68.6 \times 10^7\text{J} \end{aligned}$$

لیا گیا وقت $= 1\ \text{hour} = 60 \times 60\ \text{s}$

$$= 3600\ \text{s}$$

اوسط طاقت $\text{r},\ P = W / t$

$$= \frac{68.6 \times 10^7\ \text{J}}{3600\ \text{s}}$$

$$= 1.91 \times 10^5\ \text{watt}$$

ہم جانتے ہیں کہ $746\ \text{W} = 1\ \text{hp}$

$$P = \frac{1.91 \times 10^5}{746} = 2.56 \times 10^2 = 256\,\text{hp}$$

مثال 5.8: ہائیڈرو الکٹرک پاور جنریشن گرتے ہوئے پانی کو توانائی کے منبع کے طور پر استعمال کرتی ہے۔ تا کہ ٹربائن بلیڈ کو موڑ سکے اور برقی طاقت پیدا کی جا سکے۔ایک پاور اسٹیشن میں 100x1000 کلو پانی 51m اونچائی سے ایک سکنڈ میں گرتا ہے۔

(i) گرتے ہوئے پانی سے کیے گئے کام کو محسوب کیجئے۔
(ii) مثالی حالت میں کتنی بجلی پیدا کی جا سکتی ہے؟

حل:

(i) ٹربائن کے بلیڈ کو موڑنے (حرکت دینے) میں پانی کی توانائی بالقوہ استعمال کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} PE = Work &= mgh \\ &= (1000 \times 10^3\ kg) \times (9.8 ms^{-2}) \times (51\ m) \\ PE = W &= 500 \times 10^6\ J \end{aligned}$$

(ii) کیا گیا کام فی سکنڈ مساوی ہوتا ہے۔

$$P = \frac{W}{t} = \frac{500 \times 10^6\ J}{1 s}$$

$$= 500 \times 10^6\ watt$$

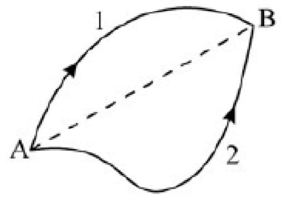
$$PE = 500\ MW$$

5.4 سوالات:

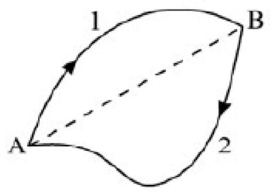
1. 100 کلوگرام وزن کا ایک جسم 10 سکنڈ میں 8 میٹر کے فاصلے تک اٹھایا جاتا ہے۔ اٹھانے والے شخص کی طاقت کو محسوب کیجئے۔
2. 10 ہارس طاقت کو کلوواٹ میں تبدیل کریں۔
3. 1000 کلوگرام وزنی کار 90 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ بریک لگائے جاتے ہیں اور گاڑی بریکنگ پوائنٹ سے 15 میٹر کے فاصلے پر رک جاتی ہے۔ بریک کے ذریعہ لگائی جانے والی اوسط طاقت کیا ہے؟
اگر گاڑی رکنے کے بعد 25 سکنڈ میں رک جاتی ہے تو اوسط طاقت کا حساب لگائیں۔
4. گاڑی کا ایک انجن N 4000 کی قوت کا استعمال کرتے ہوئے گاڑی کی 72km/ph کی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ تب انجن کی طاقت کو محسوب کیجئے۔

5.7 برقراری اور غیر برقراری قوتیں (منحرف قوتیں)

(a) برقراری قوتیں: ہم نے دیکھا ہے کہ تجاذبی قوت کے زیر اثر کیا گیا کام منحصر ہوتا ہے جسم کے وزن اور اسکے عمودی نقل مقام کے حاصل ضرب پر۔ اگر ایک جسم کو نقطہ A سے نقطہ B تک تجاذبی قوت کے زیر اثر حرکت دی جاتی ہے جس کو شکل 5.13 میں دکھایا گیا ہے۔
تجاذبی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام ان دونوں نقاط کے عمودی فاصلہ پر منحصر ہوتا ہے۔
یہ A سے شروع ہوتے ہوئے راستے جو B تک آتا ہے اس پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ جب قوتیں ان اصول پر عمل کرتی ہے۔ تب یہ برقراری قوتیں کہلاتی ہیں۔ برقراری قوت کی چند مثالیں یہ ہیں: تجاذبی قوت، لچکداری قوت اور سکونی برقی قوت وغیرہ۔
برقراری قوت کی ایک خصوصیت یہ ہوتی ہے کہ یہ قراری قوت کے ذریعہ کیا گیا کام راستے پر منحصر نہیں ہوتا ہے۔ شکل (a)5.13 میں دکھایا گیا ہے۔



(a) The object is moved from A to B along two different paths



(b) It is taken from A to B along path 1 and brought back to A along path 2

Fig. 5.13

$$W_{AB} \text{ (along 1)} = W_{AB} \text{ (along 2)}$$

5.13(b) شکل میں جسم کی ایک جیسی دو مقام کو دکھایا گیا ہے جسم راستے 1 کے ساتھ A سے B تک حرکت کرتا ہے اور واپس A کی طرف راستے 2 کے ساتھ B سے آجاتا ہے۔ برقراری قوت کی تعریف کی مدد سے کیا گیا کام رستہ ایک کا مساوی اور مخالف ہوتا ہے کیا گیا کام راستے 2 کے۔

$$W_{AB} \text{ (along 1)} = -W_{BA} \text{ (along 2)}$$

$$\text{or} \quad W_{AB} + W_{BA} = 0$$

یہاں اس نتیجہ سے یہ قراری قوت کی اہم خاصیت ظاہر ہوتی ہے کہ ایک جسم پر عمل کرنے والی برقراری قوت سے کیا گیا کام صفر ہوتا ہے جب کہ جسم ایک بند راستے پر ایک نقطہ سے حرکت شروع کرے اور واپس اسی مقام پر کسی بھی راستے سے پہنچ جائے۔

شکل: جسم A سے B تک راستے '1' سے جاتا ہے اور واپس A آتا ہے رستے 2 سے۔

(b) غیر برقراری قوتیں: رگڑ کی قوت غیر برقراری قوت کی ایک بہترین مثال ہے۔ شکل 5.14 میں دکھایا گیا ایک افقی راستہ ہے۔ ایک جسم m کمیت اسی راستے پر حرکت v رفتار کے ساتھ کر رہا ہے۔ نقطہ A سے ایک خاص فاصلہ طئے کرتے ہوئے نقطہ 'B' پر رک جاتا ہے۔ تب جس جسم کی حرکی توانائی $E = \frac{1}{2}mv^2$ نقطہ A پر اور نقطہ B پر نہ تو اس جسم میں حرکی توانائی ہوتی ہے اور نہ ہی توانائی بالقوہ۔ یہ تمام توانائیاں کھو چکی ہیں۔

کیا آپ جانتے ہیں یہ توانائی کہاں گئی ہے؟ اس توانائی نے اپنی شکل تبدیل کر لی ہے۔ رگڑ کی مخالفت میں یہاں کام کیا گیا ہے یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ رگڑ کی قوت جسم پر منفی کام کیا ہے۔ یہ حرکی توانائی' اس نظام میں حراری توانائی میں تبدیل ہو چکی ہے۔ اسی جسم کو A سے B تک دوسرے بڑے راستے سے اسی حرکی توانائی کے ساتھ حرکت دی جاتی ہے۔ تب یہ نقطہ B تک بھی پہنچ نہیں پاتا ہے۔ یہ نقطہ B سے پہلے ہی کسی مقام پر رک جاتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوتا ہے کہ کام کو اس کے مخصوص راستے سے کیا جانا چاہئے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ'' کیا گیا کام راستے پر منحصر ہوتا ہے۔

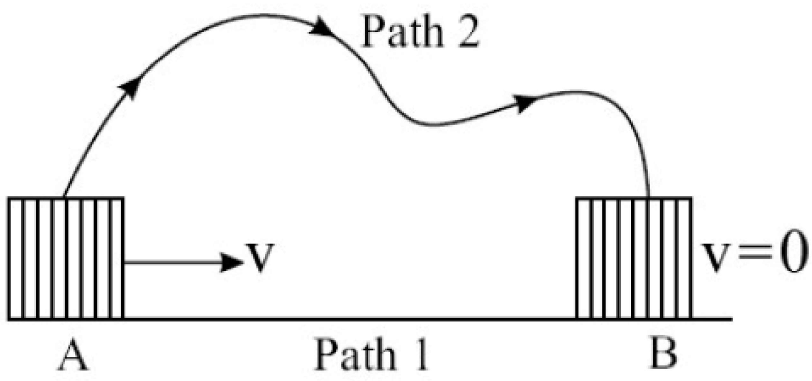


Fig. 5.14 : A block which is given an initial speed v on a rough horizontal surface, moves along a straight line path 1 and comes to rest at B. It starts with the same speed at A but now moves along a different path 2.

سوالات :5.5

1. ABC ایک مثلث ہے جہاں پر AB افقی ضلع اور BC عمودی ضلع ہے۔ضلعوں کے طول AB=3m‘ BC=4m اور AC=5m (شکل 5.15 میں دکھایا گیا ہے) ایک بلاک جس کی کمیت 2 کلوگرام نقطہ 'A' پر ہے۔ بلاک کی توانائی بالقوہ میں کیا تبدیلی واقع ہوتی ہے؟

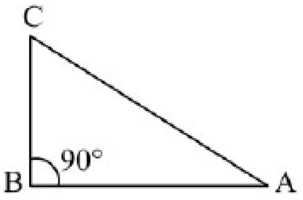


Fig. 5.15

(a) اگر بلاک نقطہ A سے نقطہ B پر منتقل ہے۔
(b) اگر بلاک B سے نقطہ C پر منتقل کرنے پر۔
(c) اگر بلاک C سے نقطہ A پر منتقل کرنے پر۔
(d) بلاک کو نقطہ B سے C تک منتقل کرنے کے لئے تجاذبی قوت کے ذریعہ کئے گئے کام کو محسوب کیجئے۔(منفی کام/مثبت کام)

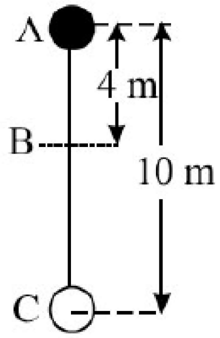


Fig. 5.16

2. ایک گیند جس کی کمیت 0.5 کلوگرام نقطہ A پر یہ جو زمین سے 10m بلندی پر واقع ہے۔(شکل 5.16 میں دکھایا گیا ہے) آزادانہ طور پر گرتی ہوئی گیند کے لئے ذیل میں دئے گئے سوالات کو حل کریں:
(a) نقطہ B پر گیند کی رفتار محسوب کیجئے۔
(b) نقطہ C پر گیند کی رفتار کیا ہوگی؟
(c) گیند کو A سے C تک لانے کے لئے تجاذبی قوت کے ذریعہ کیا گیا کام محسوب کیجئے (مناسب علامات دیجئے)

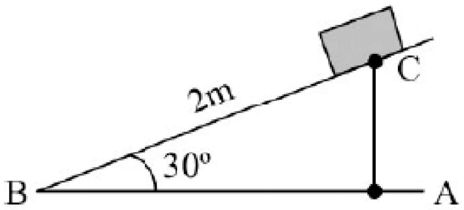


Fig. 5.17

3. ایک بلاک جو مسائل سطح پر اوپر سے نیچے کی طرف پھیلتا ہے‘ مائل سطح BC=2m لمبائی ہے جو افقی سطح سے 30° کا زاویہ بناتی ہے (شکل 5.17 میں دکھایا گیا ہے)۔ بلاک کی کمیت 2m کلوگرام ہے۔نقطہ B پر اس بلاک کی حرکی توانائی 15.65 ہوتی ہے۔کتنی مقدار میں توانائی بالقوہ کم ہوتی ہے غیر برقراری (رگڑ) کی قوت سے۔رگڑ کی قوت کی مقدار معلوم کیجئے۔

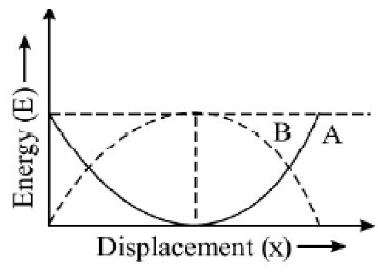


Fig. 5.18

4. سادہ رقاص کے باب کو (شکل 5.18 میں) توانائی E اور نقل مقام x کو دونوں منحنیوں A اور B کے درمیان میں۔ان میں سے کون سی ایک باب کی......توانائی بالقوہ کو ظاہر کرتی ہے؟
5. کیا جب غیر برقراری قوتوں کے ذریعہ ایک نظام میں کیا گیا کام‘ کی کل میکانیکی توانائی مستقل رہتی ہے؟
6. جب کسی جسم پر برقراری قوت کے ذریعہ مثبت کام کیا جاتا ہے تب اس جسم کی توانائی بالقوہ کیا ہوتی ہے؟

5.8 لچکدار اور غیر لچکدار تصادم:

روزمرہ زندگی میں ہم مختلف اقسام کے تصادم سے دوچار ہوتے رہتے ہیں مثلاً گاڑیوں کے درمیان تصادم‘ ہتھوڑی اور کیلے کے درمیان تصادم‘ گیند اور بلہ کے درمیان تصادم وغیرہ۔نہ صرف نظر آنے والے اجسام کے درمیان تصادم بلکہ نہ نظر آنے والے ذرات‘ جوہروں اور مرکزوں کے درمیان تصادم ہوتا ہے۔ بیرونی قوتوں کی غیر موجودگی میں‘ جب دو اجسام ایک مختصر سے وقفے کے دوران ایک دوسرے سے

کراجاتے ہیں تب اس عمل کودواجسام کے درمیان تصادم کہتے ہیں۔

آیئے دوگیندوں کے درمیان تصادم عمل کوآسانی سے سمجھنے کی کوشش کریں گے۔''سرے سے تصادم''یا''مرکزی تصادم''ان تصادم میں عمل کروانے والے اجسام کے مرکز ملانے والی خطی خط کے ساتھ تصادم کرتے ہیں۔تصادم دواقسام کے ہوتے ہیں:

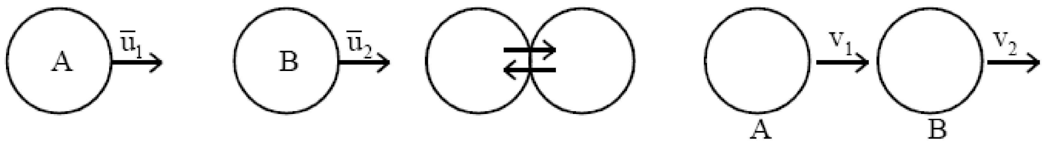
(i) **مکمل لچکدار تصادم:** ایک تصادم جس میں دونوں قانون کی پابندی ہوتی ہے جیسے کلیہ بقائے خطی معیارحرکت اورکلیہ بقائے حرکی توانائی یعنی کل معیارحرکت اورکل حرکی توانائی تصادم سے پہلےاور بعد میں مساوی ہوتی ہے۔

(ii) **مکمل غیر لچکدار تصادم:** ایک تصادم جس میں کلیہ بقائے خطی معیارحرکت پابندی ہوتی ہے لیکن کلیہ بقائے حرکی توانائی کی پابندی نہیں ہوتی ہے یعنی اس قسم کے تصادم میں' تصادم میں حصہ لینے والے اجسام ایک دوسرے سے چپک جاتے ہیں۔تصادم بعداورایک مشترک رفتار سے حرکت کرتے ہیں۔

درج بالا دواقسام کے تصادم میں کلیہ بقائے توانائی کی پابندی ہوتی ہے۔

5.8.1 لچکدار تصادم:

آیئے دوگیندیں A اور B جن کی کمیت ترتیب وار m_1 اور m_2 سروں سے ٹکراتے ہیں۔اس تصادم کوسروں سے تصادم کہتے ہیں۔(جس کوشکل 5.19 میں دکھایا گیا ہے)فرض کروکہ $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ ان گیندوں کی ابتدائی رفتار ہے تصادم سے پہلے اور تصادم کے بعد ان گیندوں کی رفتار انتہائی رفتار $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ ہوجاتی ہے۔فرض کروکہ $u_1 > u_2$



تصادم سے پہلے　　　　تصادم کے بعد

شکل:5.19 سروں سے لچکداری تصادم کاتصوری اظہار

آیئے اب ہم کلیہ بقائے خطی معیارحرکت کااطلاق کریں۔کل معیارحرکت تصادم سے پہلے= کل معیارحرکت تصادم کے بعد

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 (u_1 - v_1) = m_2 (u_2 - v_2) \qquad (5.30)$$

کلیہ بقائے حرکی توانائی کے لئے

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_1 \left(u_1^2 - v_1^2\right) = m_2 \left(u_2^2 - v_2^2\right) \qquad (5.31)$$

مساوات (5.31) کو (5.30) سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

We get $\qquad u_1 + v_1 = u_2 + v_2$

or $\qquad u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \qquad (5.32)$

اس سے ظاہر ہے کہ اضافی رفتار ایک دوسرے کے قریب آنے کی مساوی ہوتی ہے۔اضافی رفتار دور جانے کی مساوات 5.32 سے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$v_2 = u_1 - u_2 + v_2 \tag{5.33}$$

مساوات (5.33) کو مساوات 5.30 میں درج کرنے پر

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_1 - u_2 + v_1 - u_2)$$
$$m_1u_1 - m_1v_1 = m_2u_1 + m_2v_1 - 2\ m_2u_2$$
$$v_1(m_1 + m_2) = u_2(m_1 - m_2) + 2\ m_2u_2$$

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2 \tag{5.34}$$

اس طرح $v_1 = v_2 + u_2 - u_1$ مساوات (5.32) سے مساوات 5.30 میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2 \tag{5.35}$$

آیئے اب ہم چند مخصوص صورتوں پر غور و بحث کریں۔

صورت I:

فرض کرو کہ دونوں گیندوں کی کمیت مساوی ہے تب $m_1 = m_2 = m$ مساوات 5.32 اور 5.33 میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔
اس طرح اگر دو یکساں کمیتوں کے گیند سرے سے تصادم کرتے ہیں تب ان کی رفتار تصادم کے بعد ایک دوسرے سے باہم بدل جاتی ہے۔

$$v_1 = u_2$$
$$v_2 = u_1$$

آیئے غور کریں کہ اگر ایک گیند تصادم سے پہلے حالت سکون میں ہے۔

فرض کرو کہ گیند B حالت سکون میں ہے اس طرح $u_2 = 0$ تب

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1$$

اگر $m_1 = m_2$ تب $v_1 = 0$ اور $v_2 = u_1$

تصادم کے بعد A حالت سکون میں آجاتا ہے اور B کی رفتار تصادم سے پہلے A کی رفتار کے مساوی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ اس طرح گیندوں کے تصادم سے حرکی توانائی کے نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔

مکمل حرکی توانائی کا نقصان یا کچھ حصہ حرکی توانائی $(m_1 + m_2)$ کے لئے مساوی ہوتی ہے حرکی توانائی حاصل B کے لئے۔

یہ خاصیت بڑی اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ نیوکلیرری ایکٹرس میں جہاں پر نیوٹران کی رفتار کو بہت حد تک کم کرنا ہوتا ہے۔

صورت II:

دو غیر مساوی کمیتوں کے اجسام کے تصادم میں:

(i) فرض کرو کہ m_2 بہت بڑی کمیت ہے m_1 کی نسبت اور گیند B ابتدا میں حالت سکون میں ہے۔

$$m_2 >> m_1 \quad u_2 = 0$$

تب m_1 کی کمیت کو نظرانداز کیا جاتا ہے m_2 کی نسبت

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) u_1 = -u_1$$ (چونکہ m_1 کو نظرانداز کیا گیا ہے بڑی کمیت m_2 ; $m + m = m_2$ کی نسبت)

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) u_1$$

$$v_2 = 0 \quad \left(\because \quad m_1 << m_2 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0\right)$$

تصادم کے بعد بڑی کمیت والا جسم حالت سکون میں ہی رہتا ہے جب کہ کم کمیت والا جسم اپنی ابتدائی رفتار کے ساتھ واپس پلٹ جاتا ہ۔

جب ایک لڑکا گیند سے دیوار پر مارتا ہے تب اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح کے نتائج اور اطلاق جوہری طبیعات میں استعمال ہوتے ہیں۔ مثلاً یورانیم کے مرکز میں جہاں پر بہت بڑی کمیت ہوتی ہے α ذرہ تصادم کرتا ہے وغیرہ۔

5.8.2 عود کی شرح (Coefficient of Restitution):

عود کی شرح 'e' کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ تصادم کے بعد جدائی کی اضافی رفتار...... سے قبل تقرب کی اضافی رفتار...... کے درمیان پائی جانے والی نسبت ہے۔ اس کو e سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \qquad (5.36)$$

جہاں پر u_1, u_2 رفتاریں ہیں دو اجسام کی تصادم سے پہلے کی اور v_1, v_2 رفتاریں تصادم کے بعد کی۔

e کی کوئی اکائی نہیں ہوتی ہے اور اس کا کوئی ابعاد نہیں ہوتا ہے۔ e کی قیمت کا انحصار متصادم اجسام کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ کامل لچکدار اجسام کے درمیان تصادم پر e=1 ہوتا ہے۔ اور غیر کامل لچکدار اجسام کے درمیان تصادم پر e=0 ہوتا ہے۔ جب کہ عام تجربات میں e کی قدر کو 0 تا 1 کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

5.8.3 عود کی شرح کی تخصیص (Determination of Coefficient of Restitution):

دو اجسام کے درمیان عود کی شرح کی تخمین کے لئے ضروری ہے کہ دونوں میں سے ایک چھوٹے کرہ (گیند) کی شکل میں ہو اور دوسرا ایک تختی یا پلیٹ کی شکل میں ہو۔ گیند کو بلندی h_1 سے تختی پر گرایا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ گیند تختی سے ٹکرانے کے بعد واپس h_2 بلندی تک اچھلتی ہے تب عود کی شرح کی تخمین اس طرح کی جاتی ہے۔

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \qquad (5.37)$$

5.6 سوالات:

1. دوٹھوس گیندیں ایک دوسرے سے متصادم ہوتے ہیں جب کہ ان میں ایک حالت سکون میں رہتا ہے۔
(a) کیا یہ ممکن ہے کہ تصادم کے بعد دونوں گیند حالت سکون میں ہوں؟
(b) کیا یہ ممکن ہے کہ تصادم کے بعد ان میں سے کوئی ایک حالت سکون میں ہو؟

2. تین گیندوں کے اس نظام میں جس کو شکل 5.20 میں بتایا گیا ہے۔ A، B اور C یکساں گیندیں ہیں۔ B اور C خطی خط پر ایک ساتھ جڑے ہوئے حالت سکون میں ہیں جب کہ A، v رفتار سے سرے سے متصادم ہوجاتا ہے۔ تصادم کے بعد A، B اور C کی انفرادی رفتار محسوب کیجئے مزید ان کی تشریح کیجئے۔

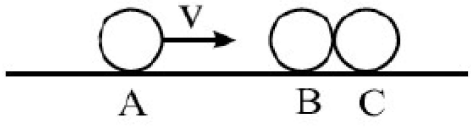


Fig. 5.20

3. ایک گیند A جس کی کمیت 2 کلوگرام ہے دوسری گیند B جس کی کمیت 4 کلوگرام ہے متصادم ہوتے ہیں۔ $50\ ms^{-1}$ سمت میں 40 ms^{-1} کی رفتار سے حرکت کرتا ہے اور B، x- سمت میں x– کی رفتار سے حرکتا ہے۔ تصادم کے بعد A اور B کی انفرادی رفتار محسوب کیجئے۔ کیا یہ لچکدار تصادم ہے؟

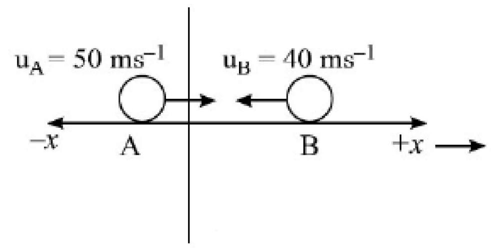


Fig. 5.21

4. ایک گولی جسکی کمیت 1g گرام ہے، چلائیجاتی ہے ایک لکڑی کے بلاک جو حالت سکون میں رہتا ہے جس کی کمیت 1kg ہے، میں دھنس جاتی ہے۔ اگر تصادم سے پہلے گولی کی رفتار
(a) تصادم کے بعد اس نظام کی رفتار کیا ہوگی؟
(b) تصادم سے پہلے اور تصادم کے بعد ان کی حرکی توانائی محسوب کیجئے۔
(c) کیا یہ لچکدار تصادم ہے یا غیر لچکدار تصادم ہے؟
(d) اس تصادم میں کتنی توانائی کا نقصان ہوتا ہے؟
5. دوگیندوں کے درمیان لچکدار تصادم ہوتب کیا تصادم کے بعد ان کی انفرادی حرکی توانائی تبدیل ہوتی ہے؟
6. جبکوئی دوگیندیں مکمل غیر لچکدار متصادم ہوتی ہیں، تب ان کی اضافی رفتار تصادم کے بعد کیا ہوگی؟ محسوب کریں۔
7. ایک لچکدار تصادم میں شامل قوتوں کی نوعیت کیا ہوتی ہے؟
8. کس قسم کے تصادم میں، میکانیکی توانائی، دوسری تانائی کی شکل میں تبدیل ہوتی ہے؟
9. بلندی سے گرنے والی گیند زمین سے تصادم کے بعد واپس اچھلتی ہے۔ یہاں بیان کردہ کون سے منظر طلبا بقائے معیار حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؟

آپ کیا سیکھ چکے ہیں؟

مستقل قوت F سے کیا گیا کام یہ ہوتا ہے۔

$$W = \overline{F}.\overline{S} = FS\cos\theta$$

جہاں پر θ زاویہ ہے قوت F اور نقل مقام $\overline{F}$ اور $\overline{S}$ کے درمیان۔

☆ کام غیرسمتی مقدار (میزانئے) ہےاس کی SI اکائی جول (J) ہے۔

☆ کام کی مقدار عددی طور پر مساوی ہوتی ہےقوت اور نقل مقام کی ترسیم کے رقبہ کے۔

☆ لچکدار قوت ہوک کے کلیہ (Hook'a Law) کے اصول کی پابند ہوتی ہے سے کیا گیا کام مساوی ہوتا ہے $W = \frac{1}{2}kx^2$

جہاں پر k اسپرنگ کی قوت کا مستقل ہے۔

☆ اسپرنگ پر بیرونی قوت عمل کرتی ہےتب کیا جانے والا کام 2 کی علامت مثبت لی جاتی ہے۔اور کام کی w کی علامت منفی جب اسپرنگ کی بحالی قوت کے ذریعہ کام کیا گیا ہو۔ یہاں پر 'x' اسپرنگ کا دابنا یا پھسلنا ہے۔

☆ k اسپرنگ کے مستقل کی اکائی نیوٹن فی میٹر (Nm–1) ہے۔

☆ میکانیکی توانائی کے ان دو نظام پر وجود رکھتی ہے۔(i) حرکی توانائی۔(ii) توانائی بالقوہ۔

☆ حرکی توانائی وہ توانائی ہے جو کسی متحرک جسم میں موجود رہتی ہے۔اس کی قدر $KE = \frac{1}{2}mv^2$ ہوتی ہے۔

☆ توانائی بالقوہ ایک ذریعہ شدہ توانائی ہے جو کسی جسم کے پاس اس کی حالت (مقام) اور ترتیب کی وجہ سے ہوتی ہے۔ تجاذبی توانائی بالقوہ

☆ توانائی ایک غیرسمتی مقدار (میزانئے) ہے۔اس کی اکائی کام کی اکائی بھی ہوتی ہے۔

☆ کام۔توانائی کا مسئلہ کہتا ہے کہ ''نتیجہ خیز قوت'' (Resultant Force) کے ذریعہ کیا جانے والا کام مساوی ہوتا ہےجسم کی حرکی توانائی کے فرق کے۔

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

☆ طاقت دراصل کام کرنے کی صرح ہے یا توانائی کی استعمال کی شرح طاقت کہلاتا ہے۔

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E}{t}\text{; units J/s or watt (W)}$$

☆ کسی ذرہ پر برقراری قوت کے ذریعہ کیا گیا کام مساوی ہوتا ہے ذرہ کے میکانیکی توانائی کے فرق کے۔ یہ فرق ''حرکی توانائی کی تبدیلی + توانائی بالقوہ کی تبدیلی ہوتا ہے'' دوسرے الفاظ میں میکانیکی توانائی کا تحفظ برقراری قوتوں کی وجہ سے۔

$$\Delta E = (\Delta E)_{KE} + (\Delta E)_{PE}$$

☆ برقراری قوت کے ذریعہ کسی جسم پر کیا گیا کام صفر ہوتا ہے اگر جسم ایک حلقہ پر حرکت کرتے ہوئے اپنی ابتدائی مقام پر واپس آجائے۔

برقراری قوت کے کیا گیا کام منحصر نہیں ہوتا ہے راستے کے۔ یہ منحصر ہوتا ہے اس کے ابتدائی اور انتہائی مقامات پر۔

☆ دابے ہوئے یا پھیلے ہوئے اسپرنگ کے اندر ذخیرہ کردہ توانائی لچکدار توانائی بالقوہ کہلاتی ہے اور اسکی قدر $PE_{elastic} = \frac{1}{2}kx^2$

☆ کلیہ بقائے توانائی: توانائی نہ تو پیدا کی جا سکتی ہے اور نہ ہی تباہ کی جا سکتی ہے لیکن اس کو ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ کسی مخصوص نظام کے لئے کل توانائی مستقل رہتی ہے۔

☆ کلیہ بقائے خطی معیارحرکت کسی بھی طرح کے تصادم کے لئے صادق (پابند ہوتا ہے) آتا ہے۔ لیکن کلیہ بقائے حرکی توانائی صرف لچکدار تصادم کے لئے ہی (پابند ہوتا ہے) صادق آتا ہے۔

☆ کلیہ بقائے توانائی ہر قسم کے تصادمات کے لئے صادق آتا ہے۔

☆ عود کی شرح کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ تصادم کے بعد جدائی کی اضافی رفتار سے قبل تقرب کی اضافی رفتار کے درمیان پائی جانے والی نسبت ہے۔

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}$$

☆ e=1 مکمل لچکدار تصادم کے لئے

☆ e=0 مکمل غیر لچکدار تصادم کے لئے

☆ عمل قدر عود 'e' کی 0 اور 1 کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

اختتامی مشق

1. اگر دو ذرات کی حرکی توانائی مساوی ہے تب کیا ان ذرات کا معیارحرکت بھی مساوی ہوتا ہے؟ وضاحت کیجئے۔
2. ایک متحرک ذرہ ساکن ذرہ سے متصادم ہوتا ہے۔ کیا یہ ممکن ہے کہ تصادم کے بعد دونوں حالت سکون میں ہوں؟
3. کیا ایک مخصوص نظام میں میکانیکی توانائی مستقل ہوتی ہے جب اس نظام میں منتشر قوتیں کام کرتی ہیں؟
4. ایک بچہ $20\ ms^{-1}$ کی رفتار عمودی طور پر اوپر کی طرف پھینکتا ہے۔
   (a) کس مقام پر حرکی توانائی زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے؟
   (b) کس مقام پر توانائی بالقوہ زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے؟
5. ایک بلاک جس کی کمیت 3kg ہوتی ہے $20 m\ s^{-1}$ کی رفتار سے ایک اسپرنگ جس کا قوت مستقل $1200\ N\ m^{-1}$ سے متصادم ہوتا ہے۔ اسپرنگ میں زیادہ سے زیادہ دابنے کی قدر محسوب کیجئے۔
6. سوال 5 میں اسپرنگ کا کمپریشن (دابنے) کی قدر کیا ہوگی جب کہ بلاک کی حرکی توانائی دوگنا ہوا سپرنگ کی لچکدار توانائی بالقوہ سے؟
7. ایک برقی بلب جس کی طاقت 60w ہوتی ہے۔ اگر بلب روزانہ 12 گھنٹے روشن رہتا ہے تو 30 دنوں میں استعمال ہونے والی برقی توانائی کا حساب لگائیں۔
8. 120 میٹر کی بلندی سے ہر سکنڈ میں 1000 کلو پانی گرتا ہے۔ اس گرتے پانی کی توانائی بجلی پیدا کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہے۔ جنریٹر کی طاقت کا حساب لگائیں اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ کوئی نقصان نہیں ہے۔

9. ایک ہائی وے پر 1200 کلووزنی کار کی رفتار 90 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ ڈرائیور گاڑی کو روکنے کے لئے بریک لگاتا ہے۔ کار 3 سکنڈ میں رک جاتی ہے۔ کار کے بریک کی اوسط طاقت کو محسوب کریں۔

10. ایک 400g کمیت والا متحرک بال جس کی رفتار $5\ ms^{-1}$ ہوتی ہے ایک دوسرے ساکن بال جس کی کمیت 600g ہے سے متصادم ہوتا ہے۔ تب تصادم کے بعد گیندوں کی رفتار محسوب کیجئے۔

11. ایک 10g کمیت والی گولی جس کو ابتدائی رفتار $500\ ms^{-1}$ سے چلایا جاتا ہے۔ یہ 20 کلووزنی لکڑی کے بلاک سے ٹکراتی ہے تو بلاک میں سرایت کر جاتی ہے۔

(a) تصادم کے بعد بلاک کی رفتار محسوب کیجئے۔

(b) اس تصادم میں کتنی توانائی ضائع ہوتی ہے؟

12. 6 کلوگرام ایک شئے افقی سطح پر رکی ہوئی ہے۔ 15N کی ایک افقی قوت مسلسل شئے پر لگائی جاتی ہے۔ شئے 10 سکنڈ میں 100 میٹر کا فاصل طے کرتی ہے۔

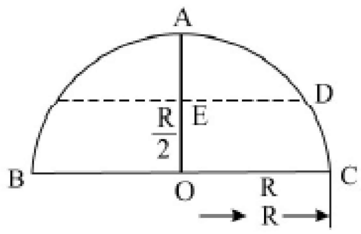
(a) لگائی گئی قوت کتنا کام انجام دیتی ہے؟

(b) 10 سکنڈ کے بعد شئے کی حرکی توانائی کیا ہوتی ہے؟

(c) رگڑ کی قوت کی مقدار اور سمت کیا ہے (اگر کوئی ہے)؟

(d) حرکت کے دوران کتنی توانائی ضائع ہوتی ہے؟

13. ایک نصف کرہ نما کپ جس کا قطر سمر BC=50 ہے زمین پر الٹ کر رکھا گیا ہے۔ اس کپ پر چار نقاط A' B' C' اور D (شکل میں دکھایا گیا ہے) پر نشاندہی کی گئی ہے۔ ایک جسم 250g کمیت والا ابتدا میں ساکن حالت میں نقطہ A پر رکھا جاتا ہے۔ اگر یہ جسم کپ کے اس مائل سطح سے پھسل کر گرتا ہے تب محسوب کیجئے:



(a) نقطہ 'A' پر توانائی بالقوہ بنسبت B کے۔

(b) نقطہ B پر بلاک کی رفتار کیا ہوگی؟

(c) نقطہ D پر حرکی توانائی اور توانائی بالقوہ محسوب کیجئے۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ بلاک کی میکانیکل توانائی محفوظ ہے؟ کیوں؟

14. ایک اسپرنگ کی قوت مستقل 400 N/m ہے۔ اسپرنگ (a) کو 6.0 سنٹی میٹر x=4.0 سنٹی میٹر سے x=6.0 سنٹی میٹر تک پھیلانے کے لئے اس پر کتنا کام کرنا ہوگا محسوب کریں؟ جہاں پر x=0 اسپرنگ کی سکونی حالت کو ظاہر کرتا ہے۔

15. ایک کار کا وزن 1000 کلوگرام ہے۔ یہ حالت سکون سے حرکت میں آتی ہے اور 30 سکنڈ میں $15\ ms^{-1}$ کی رفتار حاصل کرتی ہے۔ تب محسوب کریں۔

(a) انجن کی اوسط طاقت محسوب کریں۔

(b) انجن کے ذریعہ کار پر کیا گیا کام۔

16. 0.6 کلوگرام وزن کی ایک گیند جو 2 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ 0.8 کلوگرام وزن کی گیند سے تصادم کرتی ہے۔ اگر تصادم ایک لچکدار تصادم ہے تب تصادم کے بعد دونوں گیندوں کی رفتار معلوم کریں۔

17. 0.2 کلوگرام وزن کی ایک گیند کو 1 میٹر کی اونچائی سے مسطح سطح پر گرتا ہے۔ تصادم کے بعد گیند 0.64 میٹر کی اونچائی پر واپس اچھلتی ہے۔ عود کی شرح گیند اور مسطح سطح کے درمیان محسوب کرے۔

18. سکونی حالت میں ایک بم پھٹتا ہے جس کے دو ٹکڑے بالترتیب 1 کلوگرام اور 2 کلوگرام کے ہوجاتے ہیں۔ اگر چھوٹے ٹکڑے کی رفتار $200\ ms^{-1}$ ہے تب دوسرے کی رفتار کیا ہوتی ہے؟
19. ایک مشین گن 240 گولیاں فی منٹ فائر کرسکتی ہے۔ یہ گولی کی رفتار 500 میٹر فی سکنڈ ہے۔ بندوق کی طاقت 2.5 کلوواٹ ہے۔ تب یہ ایک گولی کی کمیت محسوب کریں۔
20. 70 کلو وزن کا ایک مسافر جس کے سر پر 30 کلوگرام وزنی بیگ ہے۔ اور وہ اپنے پلیٹ فام تک پہنچنے کے لئے ریلوے اسٹیشن کی سیڑھیاں چڑھ رہا ہے۔ ہر قدم کی اونچائی 30 سنٹی میٹر ہے اور سیڑھیوں کی تعداد 30 ہے۔ مسافر کا تجاذبی قوت کے مخالف سمت میں کئے گئے کام کی مقدار کو محسوب کیجئے۔

جوابات

5.1

1. $W = FS\cos\theta$

$W = FS\cos 90° = 0$

اس طرح قوت کے ذریعہ کوئی کام نہیں ہوتا ہے۔

2. (a) قوت کے عمل کرنے کے باوجود جب نقل مقام میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی ہے۔ مثال: ایک لڑکا بڑی دیوار کو ڈھکیلنے کی کوشش کرتا ہے۔

(b) جب قوت اور نقل مقام کے درمیان بننے والا زاویہ 180° تا 270° ہوتا ہے۔

مثال: رگڑ کی قوت کے زیر اثر کیا گیا کام۔

(c) جب قوت اور نقل مقام کے درمیان بننے والا زاویہ 90° درجے سے چھوٹا ہوتا ہے۔ مثال: کھلاڑی گول کرنے کے لئے فٹ بال پر کک کرتا ہے۔

3. (a) $W = mgh = +98J$

(b) $W = mgh = -98J$

4.

$$\mathbf{F} = \left(2\hat{i} + 3\hat{j}\right)N,\ S = \left(-\hat{i} + 2\hat{j}\right)m$$

$$W = F.S = \left(2\hat{i} + 3\hat{j}\right).\left(-\hat{i} + 2\hat{j}\right)$$

$$= 2\times -1\left(\hat{i}.\hat{i}\right) + 3\times 2\left(\hat{j}.\hat{j}\right)$$

$$= \left(2\times -1\right) + \left(3\times 2\right)$$

$$W = -2 + 6 = 4$$

$$W = 4J$$

$$F = \left(5\hat{i} + 3\hat{j}\right)N;\ \overline{S} = \left(3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}\right)m$$

(a) $|S| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\,m$

(b) $|F| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = 5.83\,N$

.5 (c) $W = \overline{\mathbf{F}}.\overline{S} = \left(5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\right).\left(3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}\right)$

$= 15 + 12 = 27$

$\therefore \quad W = 27\,J$

5.2

.1 اسپرنگ مستقل (k) کو بحال کرنے والی قوت فی اکائی پھیلاؤ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔اس کی اکائی Nm^{-1} ہوتی ہے۔

$$k = \frac{10\,N}{10^{-2}\,m} = 1000\,Nm^{-1}$$

As $F = kx$ for $x = 5\ cm = 5 \times 10^{-2}\ m$

.2 $F = 1000 \times 5 \times 10^{-2}$

$F = 50\ N$

اس طرح

.3 قوت کے ذریعہ کیا گیا کام

5.3

.1 $K = \frac{1}{2}mv^2$ نہیں یہ قدر کسی بھی صورت میں منفی نہیں آسکتی ہے۔نہ تو m اور نہ ہی v^2 کی قدر منفی ہوتی ہے۔

.2 (a) K.E کی قدر 4 گنا ہو جاتی ہے۔

(b) K.E کی قدر نصف ہو جاتی ہے۔

$$PE = \frac{1}{2}4x^2 = 3.6J$$

.3 $$x^2 = \frac{2 \times 3.6}{k} = \frac{2 \times 3.6}{180} = 0.04\,m$$

$x = 0.2\ m = 20\ cm.$

.4 $-375J$

5.4

$$PE = mgh = 100 \times 9.8 \times 8$$
$$t = 10\ s$$

.1
$$\text{Power} = \frac{mgh}{t} = \frac{100 \times 9.8 \times 8}{10} W = 784 W$$

.2
$$10\,hp = 10 \times 746\,\text{watts} = \frac{10 \times 746}{1000} \text{Kilo watts}$$
$$= 7.46\ KW$$

.3
$$v^2 - u^2 = 2 \text{ as } u = 0;\ u = 90\,km/h = 25\,ms^{-1}$$
$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{25 \times 25}{2 \times 15} = 20.83\,ms^{-2}$$
$$F = ma = 1000 \times 20.83 = 20830\ N.$$
$$P = \frac{W}{t} = \frac{20830}{25} = 12498\,W$$

.4
$$P = F.V = 4000 \times \left(\frac{\overset{4}{\cancel{72}} \times 5}{\cancel{18}} m/s \right)$$
$$= 4000 \times 20 = 80000 = 80\ KW$$

5.5

.1 (a) کوئی تبدیلی نہیں

(b) توانائی بالقوہ میں تبدیلی P.E= mgh=2x9.8x4=78.45

(c) $\Delta PE = 78.45$

.2
(a) $\Delta PE = mgh = 0.5 \times 9.8 \times 4 = 19.6 J$

$$KE \text{ at } B = \frac{1}{2} mv^2 = 19.6 J$$
$$v^2 = \frac{19.6 \times 2}{0.5} = 78.4$$
$$v = \sqrt{78.4} = 8.85\,ms^{-1}$$

(b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 10} = 14ms^{-1}$

(c) $W = mgh = +49\ J$

.3

$$BC = 2m\ ;\ \sin 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{2}$$

$$AC = 2\sin 30° = 2 \times \frac{1}{2} = 1m$$

Δ PE from C to B = mgh = $2 \times 9.8 \times 1 = 19.6$ J

KE at B = 15.6 J

Energy lost = (19.6 – 15.6) J = 4 J.

4 J = F $\times$ S = F $\times$ 2

Frictional force F = 2N.

.4 سادہ رقاص کے باب اہتزاز کرتا ہے تب اس کی K.E نقطہ $x=0$ پر انتہا پر ہوتی ہے۔ اور $x = x_m$ پر سب سے کم ہوتی ہے۔
PE نقطہ $x=0$ پر سب سے کم اور نقطہ $x = x_m$ پر سب سے زیادہ ہوتی ہے۔
مزید A توانائی بالقوہ PE کی منحنی کو ظاہر کرتا ہے۔

.5 نہیں

.6 توانائی بالقوہ P.E کم ہوتا ہے۔
$U_f - U_i = -dW$

5.6

.1 (a) نہیں یہ کلیہ بقائے خطی معیار حرکت کی خلاف ورزی کرتا ہے۔
(b) ہاں

.2 $v_A = 0\ ;\ v_B = 0\ ;\ v_C = v$
قانون تحفظ (i) خطی معیار حرکت اور (ii) کل حرکی توانائی اطاعت کریں۔

.3 5.34 اور 5.35 کے استعمال کی مدد سے
$V_A = -35ms^{-1}$
$v_B = 20$ m/s

.4 (a) $1.76\ ms^{-1}$ (b) 81.5 اور 1.585
(c) غیر لچکدار تصادم (d) 79.425

.5 ہاں

6. صفر
7. برقراری قوتیں
8. غیر لچکدار تصادم
9. گیند اونچائی سے گرتی ہے اور پھر زمین سے ٹکرانے کے بعد واپس اچھلتی ہے۔

اختتامی مشق کے جوابات

1. No, $KE = \frac{p^2}{2m}$; $KE_1 = KE_2$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_2^2}{2m_2} \Rightarrow p_1 \neq p_2 \text{ as } m_1 \neq m_2$$

2. نہیں
3. نہیں
4. (a) ابتدائی نقطہ پر

(b) سب سے زیادہ بلندی پر

5.
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$3 \times (20)^2 = 1200 \times x^2$$

$$3 \times 400 = 1200x^2 \Rightarrow x = 1m$$

6. 0.707 m

7.
$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = Pt$$

$$= 60 \times 30 \times 12 \times 60 \times 60 \text{ joules}$$

$$E = \frac{60 \times 30 \times 12 \times 60 \times 60}{36 \times 10^5} \text{KWh}$$

8.
$$P = \frac{mgh}{t} = \frac{1000 \times 9.8 \times 120}{1} = 1176000 \text{ J/s}$$

$$\simeq 1.2 \text{ mega Watt}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1200 \times \left(\frac{90 \times 5}{18}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1200 \times (25)^2$$

$$= 600 \times 625 = 375000 \text{ J}$$

.9

$$P = \frac{W}{t} = \frac{375000}{3} = 125000\,\text{W}$$

$$= 125 \text{ KW.}$$

.10

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) u_1 = \frac{(-200)}{1000} \times 5 = -1 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \left(\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\right) u_1 = \frac{(2 \times 400)}{1000} \times 5 \text{ ms}^{-1} = 4\,\text{ms}^{-1}$$

.11

(a) $m_1 u_1 = (m_1 + m_2)v$

$$v = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} = \frac{10^{-2} \times 500}{10^{-2} + 20} = \frac{5}{20 + 0.01} \; ; \; 0.25\,\text{ms}^{-1}$$

(b) $\Delta KE = \frac{1}{2}\left[m_1 u_1^2 - (m_1 + m_2)v^2\right] = 1249.4\text{J}$

.12 (a) 500J

(b) 1200J

(c) 3N حرکت کی مخالف سمت میں

(d) 300 J

.13 (a) mgh = 0.625 J

(b) $PE = \frac{1}{2}mv^2$

(c) 0.313 J

.14

(a) k = 400 n/m $W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 400 \times (0.06)^2$

(b) $W = \frac{1}{2}\left[x_2^2 - x_1^2\right] = 0.4 \text{ J}$

15.

(a) $$W = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t} = \frac{1}{2} \times \frac{1000 \times 15 \times 15}{3} = 37.5\,\text{kW}$$

(b) $$W = p \times t = 1.125 \times 10^5\ \text{J}$$

16. $v = 0.28$ m/s $v = 1.72$ m/s

$(\text{Hint}\ \ m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2\ ;\ u_1 - u_2 = v_1 - v_2)$

17. $$e = 0.8\left(\because\quad e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\right)$$

18. $-100\,\text{m/s}\ (0 = m_1v_1 + m_2v_2)$

19. $$m = 5\,g\left(\because\quad P = \frac{\frac{1}{2}mnv^2}{t}\right)$$

20.

$$\begin{aligned} W &= (m_1 + m_2)\ gh \\ &= 100 \times 10 \times (0.3\,\text{m}) \times 30 \\ &= 1000 \times 9 \\ &= 9\ \text{KJ} \end{aligned}$$

6 ذرات کانظام اور گردشی حرکت

(System Particles and Rotatory Motion)

تعارف(Introduction):

تب تک آپ نے شئے کی حرکت کے بارے میں سیکھا ہے۔ جسے عام طور پر کمیتی نقطہ کے طور پر لیا جاتا ہے۔ میکانکس(Mechanics) کے قوانین کوسیکھنے کے لئے یہ مفید ثابت ہوتی ہے۔لیکن حقیقی زندگی میں شئے بڑی تعداد میں ذرات پر مشتمل ہوتی ہے۔ایک چھوٹے سے کنکر میں لاکھوں ذرات ہوتے ہیں پھر ہم ہر ایک ذرہ کے لئے لاکھوں مساوات لکھتے ہیں؟ یا کوئی آسان طریقہ ہے؟اس سوال کا جواب دریافت کرنے کے دوران مرکز کمیت اور جمود کا معیار اثر کے وقفوں کے بارے میں جانیں گے جو گردشی حرکت میں وہی خصوصیات ادا کرتا ہے جیساک ہ خطی حرکت میں کمیت کا ہوتا ہے۔

اب طبعیات کے ایک اہم زاویائی معیار حرکت کا مطالعہ کریں گے اگر کوئی بیرونی قوت اثر نہ کرے تو گردش کرنے والے نظام میں اس کی رفتار مستقل ہوتی ہے۔طبعیات میں یہ خاصیت اہم افادیت رکھتی ہے۔ یہ ہمیں سمجھنے کے قابل بناتا ہے کہ ایک تیراک کشتی چلاتے ہوئے نیچے کے پانی میں غوطہ لگاتے ہوئے کرتب دکھاتے ہیں۔

مقاصد(Objectives):

اس سبق کا مطالعہ کرنے کے بعد آپ اچھی طرح واقفیت حاصل کریں گے۔

1 استوار جسم اور دوسرے اجسام کے درمیان فرق بیان کرو۔
1 ایک استوار جسم میں مرکزی کمیت اور تجاذبی مرکز کی وضاحت کرو۔
1 استواری جسم میں حرکت کی اقسام کی وضاحت کرو۔
1 انتقالی حرکت اور گردشی حرکت میں فرق کو بیان کرو۔
1 جمود کا معیار اثر عمودی اور متوازی محوروں کے مسئلے کی وضاحت کرو۔
1 قوت گردشہ (معیار اثر) اور اس کے گردشی سمت کی وضاحت کرو۔
1 استواری جسم کی حرکت کی مساواتیں لکھئے۔
1 زاویائی معیار حرکت کی بقا کا اصول بیان کرو۔
1 استوار جسم کے ذریعہ حاصل کردہ رفتار اور مستوی مائل سطح کی حرکت کو محسوب کیجئے۔

6.1 استوار جسم(Rigid Body):

جیسا کہ پہلے ذکر کیا گیا ہے نقطہ کمیت مثالی نظریہ ہے اس کو بہت آسانی سے سمجھا یا جاتا ہے لیکن حقیقت میں تمام اشیاء کی ساخت محدود ہوتی ہے ان کو پیچیدہ اجسام کہا جاتا ہے جب پیچیدہ اجسام ایک دوسرے کے ساتھ تعامل کرتے ہیں تو ان کے درمیان فاصلہ اور ساخت بہت

زیادہ (بڑی) ہوتی ہے تو ان کی بہت بڑی ساخت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے اس کو نقطہ کمیت کہتے ہیں۔

اگر چہ سیاروں، ستاروں اور دیگر فلکی اجسام کی ساخت بہت بڑی ہوتی ہے لیکن ہم انہیں دوسروں سے زیادہ فاصلے کی وجہ سے مادی نقطہ سمجھتے ہیں کشش ثقل کے کائنات قانون سے نمٹنے کے دوران تمام اجسام بشمول فلکی اجسام کو نقطہ کمیت کے طور پر سمجھا جاتا ہے۔ لیکن جب ہمیں کسی محور کے گرد جسم کی گردش پر غور کرنا ہو تو جسم کی ساخت اہم کردار ادا کرتی ہے۔ جب ہم فٹ بال جیسی کئی بڑی چیز کی نمائندگی کرتے ہیں تو ہم مرکز کمیت کو فٹ بال جیسا تمام بڑے ذرات کا نمائندہ سمجھتے ہیں۔

جب ہم کسی شئے کی گردشی حرکت پر غور کرتے ہیں تو ہم اس شئے کے ذرات کے نظام کے طور پر دیکھتے ہیں۔

ایک پیچیدہ جسم کو ایک سخت جسم کے طور پر سمجھا جا سکتا ہے یہ ایک مثالی تصور ہے اس طرح ہمارے آس پاس کوئی استوار اجسام نہیں ہیں ایک ایسا جسم جس میں اس کے کسی بھی دو نقطوں کے درمیان نسبتاً فاصلہ تبدیل نہیں ہوتا حتیٰ کہ بڑی قوت کے استعمال کے بعد بھی تبدیلی نہیں آتی ایک استوار جسم کہا جاتا ہے یا ایسا جسم جو استعمال کے بعد بھی اپنی شکل یا ساخت میں قوت کے عمل سے بگاڑ واقع نہیں ہوتا ایسے جسم کو استوار کہتے ہیں۔ استوار جسم جیسے کرکٹ کی گیند، اسٹیل کا ریم، پہیہ، زمین اور چاند وغیرہ۔ کیا بالٹی میں رکھا ہوا پانی استوار جسم سمجھا جا سکتا ہے؟ ظاہر ہے کہ بالٹی میں پانی استوار جسم نہیں ہو سکتا۔ کیونکہ بالٹی کو گھماتے ہیں تو یہ شکل بدل دیتا ہے اب آپ یہ سمجھتے ہیں کہ ایک استوار جسم کے بارے میں کیا معلومات حاصل کیں؟

6.1 اسباقی سوالات (Intext Questions):

1. ایک لکڑی کا فریم جو لکڑی کے چھ (6) سلاخوں سے بنا ہے لکڑی کی سلاخیں ایک دوسرے سے مضبوطی سے جڑی ہوتی ہیں کیا اس نظام کو ایک استوار جسم سمجھا جا سکتا ہے؟
2. کیا ریت کے ڈھیر کو ایک استوار جسم سمجھا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کرو۔

6.2 استوار جسم کی مرکز کمیت (Centre of Mass (CM) of a Rigid Body):

فرض کرو کہ ایک مضبوط دھاگے کی مدد سے ایک میٹر اسکیل کو افقی طور پر اٹھایئے۔ آپ میٹر اسکیل کو کہاں باندھتے ہیں؟ اگر میٹر اسکیل کے آخری سرے پر کچھ کمیت باندھتے ہیں تو آپ اسکیل کو اٹھانے کی کوشش کریں۔ کیا آخری مقام پر بندھے ہوئے دھاگے سے افقی طور پر اٹھ سکتا ہے؟ دونوں سوالوں کے جواب درج ذیل ہیں:

1۔ اگر آپ یکساں موٹائی کے میٹر اسکیل (Scale) کو اٹھانا چاہتے ہیں تو ظاہر ہے کہ آپ دھاگے کو وسطی نقطہ پر باندھنا چاہئے یعنی اسکیل کے 50 سنٹی میٹر وسطی مقام کہلاتا ہے اس لئے اس کو افقی طور پر اٹھا سکتے ہیں۔

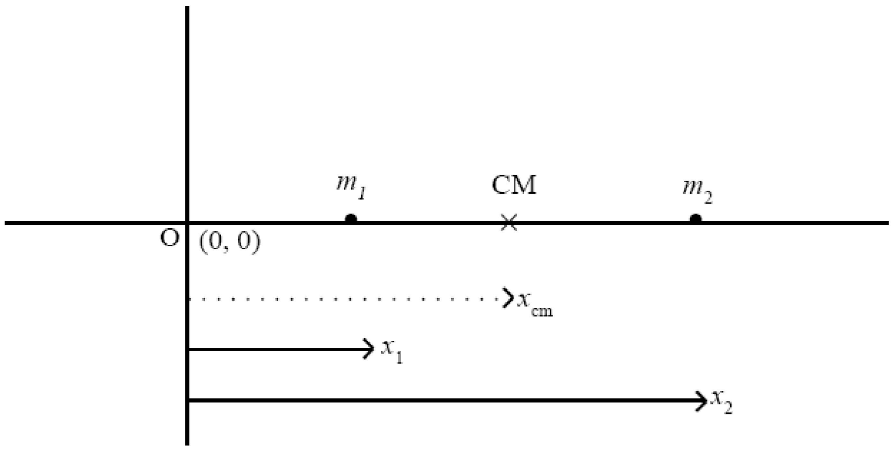
2۔ جب کچھ کمیت کو اسکیل سے منسلک کیا جاتا ہے تو آپ اس اسکیل کو افقی طور پر نہیں اٹھا سکتے ہیں۔

کیونکہ دھاگے کی گانٹھ کے مقام کو تبدیل کرنا پڑتا ہے پہلی صورت میں اگر چہ آپ ایک ہی نقطے پر دھاگہ باندھتے ہیں آپ پورے اسکیل کو اٹھانے کے قابل ہوتے ہیں اور آپ کو پیمانے کا مجموعی اسکیل کی کمیت کا اندازہ ہوتا ہے اگر ہم اسکیل کے ایک بہت ہی چھوٹے حصے کو 50 حصہ میں تقسیم کرتے ہیں۔

لہٰذا مرکز کمیت ایک استوار جسم کا وہ نقطہ ہے جہاں اسکا پوری کمیت خالص دکھائی دیتی ہے۔

فرض کرو کہ اسکیل کے دونوں سروں پر مساوی کمیت منسلک ہو تو مرکز کمیت کا مقام اسکیل کے وسط میں ہوگا۔

مرکز کمیت سادہ ترین شئے کی حرکت ہے حالانکہ شئے کے کمیتی نقطے کی حرکت بہت پیچیدہ ہے آیئے دو ذراتی نظام سے شروع کرتے ہیں۔ دو ذرات m_1 اور m_2 ان کی کمیتیں ہیں اور x_1 اور x_2 لا متناہی مقام پر رکھیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے



شکل 1: دو ذرات کے نظام میں مرکز کمیت

اگر دو ذرات کے نظام کا مرکز کمیت مبدا سے Xcm پر ہو تو O

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.1)$$

اگر $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ کمیتیں کے n ذرات کے فاصلے مبدا سے x محور پر ترتیب وار $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ ہوں تو ان کا مرکز کمیت CM حسب ذیل ہوگا:

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n}$$

$$X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i \qquad (6.2)$$

جہاں پر $M = \Sigma m$ نظام کی جملہ کمیت

اس طرح دو ابعادی فضا میں ذرات پر مشتمل نظام مرکز کمیت کے XY کو درج ذیل مساواتیں استعمال کرتے ہوئے معلوم کر سکتے ہیں۔

$m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots\ldots m_n$ اور محددوں $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots\ldots (xn, yn)$ تب مرکز کمیت

$$\left(X_{cm},Y_{cm}\right)=\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\right) \qquad (6.3)$$

اس طرح سہ ابعادی ذرات کی کمیت m_1, m_2, m_3 .... m_n اور محدوددوں (x1, y1, z1), (x2, y2, z2), ... (xn, yn, zn), تب مرکز کمیت

$$\left(X_{cm},Y_{cm},Z_{cm}\right)=\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}\right) \qquad (6.4)$$

ہم ایک ہی مساوات میں مقام سمتیہ اور کمیتیں $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}$ .... $\overline{r_n}$ تب m_1, m_2, m_3 .... m_n امرکز کمیت سے۔

$$\overline{r}_{cm} = \frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 + \ldots\ldots m_n\overline{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n} \qquad (6.5)$$

ایک استوار جسم جیسے دھاتی کرہ وغیرہ میں متواتر کمیتی پھیلاؤ ہوتا ہے انفرادی ذرہ کے لئے مساوات کا مبدا کے مقام سے کر سکتے ہیں تب حسابی انضمام (Integration) اور مقام سے مرکزی کمیت کے ذریعہ لکھ سکتے ہیں۔

$$\left(X_{cm},Y_{cm},Z_{cm}\right)=\left(\frac{1}{M}\int xdm,\frac{1}{M}\int ydm,\frac{1}{M}\int zdm\right) \qquad (6.6)$$

مثال 6.1:

زمین کی کمیت چاند سے 81 گنا زیادہ ہے زمین اور چاند کے درمیان کا فاصلہ 3.84 x 105 km کلومیٹر ہے۔ زمین کے مرکز سے چاند کا مرکز اور مقام معلوم کرو۔

حل:

فرض کرو کہ چاند کی کمیت m ہے۔

زمین کی کمیت =81 میٹر

فرض کرو کہ......اور......زمین کا مقام اور مرکز ہے۔

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3.84 \times 10^5 \text{ km}$$

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$X_{cm} = \frac{81m\times0+m\times3.84\times10^5}{81m+m}$$

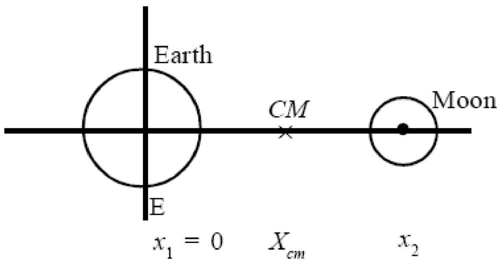


Fig. 6.2

$$X_{cm} = \frac{m\times3.84\times10^5}{82m} = \frac{3.84\times10^5}{82}km \simeq 4700\,km$$

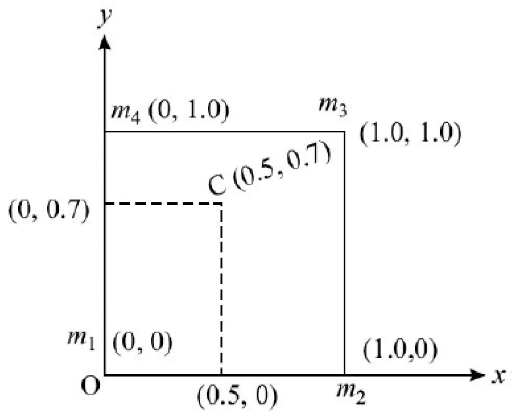


Fig. 6.3 : Locating CM of four masses placed at the corners of a square

مثال 6.2:

فرض کرو کہ چار کمیتیں بالترتیب 4kg, 3kg, 2kg, 1kg مربع کے 1 میٹر کے کناروں پر واقع ہے اس کی مرکز کمیت معلوم کرو۔

حل:

ہم ہمیشہ مربع کو مستوی پر بناتے ہیں اس مستوی کے (x,y) محددمیں ہم ربطی کمیتی بالترتیب (xy) کو شکل 6.3 میں بتلایا گیا۔

مساوات (6.3) سے

چار کنارے پر مرکز کمیت

$$x = \frac{1.0\times0+2.0\times1.0+3.0\times1.0+4.0\times0}{1.0+2.0+3.0+4.0}m \ = 0.5 \ m$$

$$y = \frac{1.0\times0+2.0\times0+3.0\times1.0+4.0\times1.0}{1.0+2.0+3.0+4.0}m \ = 0.7m$$

مرکز کمیت ہم ربطی (0.5m, 0.7m) شکل 6.3 میں C کے نشان سے ظاہر کرتے ہیں۔

مرکز کمیت مرکز میں نہ ہونے کی کیا وجہ ہوسکتی ہے؟ اسکا جواب جاننے کے لئے مرکز کمیت کے نقاط کا حساب کیجئے۔

مثال 6.3:

دو اشیاء جن کی کمیتیں 3kg,1kg ہیں۔ مقام سمتیہ $\left(2\overline{\mathbf{i}}+5\overline{\mathbf{j}}+13\overline{\mathbf{k}}\right)m$ اور $\left(-6\overline{\mathbf{i}}+4\overline{\mathbf{j}}-2\overline{\mathbf{k}}\right)m$ ہیں تب مقام سمتیہ کا مرکز کمیت معلوم کرو۔

حل:

$$\overline{r_{cm}} = \frac{m_1\overline{r_1} + m_2\overline{r_2}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1\left(2\overline{\mathbf{i}}+5\overline{\mathbf{j}}+13\overline{\mathbf{k}}\right)+3\left(-6\overline{\mathbf{i}}+4\overline{\mathbf{j}}-2\overline{\mathbf{k}}\right)}{1+3}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\overline{\mathbf{i}}+5\overline{\mathbf{j}}+13\overline{\mathbf{k}}-18\overline{\mathbf{i}}+12\overline{\mathbf{j}}-6\overline{\mathbf{k}}\right)m$$

$$\overline{r_{cm}} = \frac{1}{4}\left(-16\overline{\mathbf{i}}+17\overline{\mathbf{j}}+7\overline{\mathbf{k}}\right)m$$

مرکز کمیت کی کیوں صحیح وضاحت کرنی چاہئے؟

ہم جانتے ہیں کہ نقل مکانی کی شرح رفتار کہلاتی ہے اور رفتار کی تبدیلی کی شرح اسراع کہلاتی ہے۔
مرکز کمیت کی تعریف کے مطابق کمیتیں $m_1, m_2 \ldots m_n$ ذرات کے مطابق میں x- محور کے مطابق $x_1, x_2 \ldots x_n$ ہیں تب x-محور اور مرکز پر

$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 \ldots\ldots + m_nx_n}{M}$$

$$MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots + m_nx_n$$

اوپر کی مساوات کو رفرق (Differentiate) کرنے پر

$$M\frac{dx_m}{dt} = m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt} + \ldots\ldots\ldots + m_n\frac{dx_n}{dt} \tag{6.7}$$

$$\text{but } \frac{dx}{dt} = \text{velocity}$$

$$MV_{cm} = m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots\ldots + m_nv_n \tag{6.8}$$

اسراع سے مراد رفتار میں شرح تبدیلی ہے لیکن قوت

$$M\frac{dv_{cm}}{dt} = m_1\frac{dv_1}{dt} + m_2\frac{dv_2}{dt} + \ldots\ldots\ldots + m_n\frac{dv_n}{dt}$$

$$Ma_{cm} = m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots\ldots + m_na_n \tag{6.9}$$

$$\text{but } \quad ma = \text{force.}$$

$$\therefore \; F_{cm} = f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n \tag{6.10}$$

لیکن ذرات کی کمیت انفرادی قوت سے مرکز کمیت سے $F_{cm} = F_{external} = Ma_{cm}$ کی علحدہ کردہ نظام کے مرکز کمیت کی رفتار مستقل رہتی ہے۔ جب تک کہ بیرونی قوت نظام پر عمل نہ کرے۔

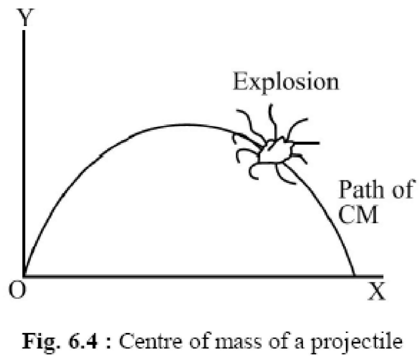


Fig. 6.4 : Centre of mass of a projectile

جب ایک بم (Bomb) کو پھینکا گیا تو یہ مکافی (Parabolic) راستے پر حرکت کرے گا جیسا کہ شکل 6.4 میں بتلایا گیا۔ بم درمیانی راستے میں حرکت کے دوران اندرونی قوتوں کے زیر اثر پھٹ پڑتا ہے اس دھاکے کی وجہ سے بم کئی ٹکڑوں میں تقسیم ہوجاتا ہے اور یہ ٹکڑے مختلف سمتوں میں اڑ سکتے ہیں۔ لیکن اس نظام میں ایک خاص نقطہ اسی مکافی راستے پر حرکت جاری رکھے گا۔ جو کہ مرکز کمیت کی حرکت صرف بیرونی قوت (تجاذبی قوت) پر منحصر ہوتی ہے جو ابتدا سے بم پر عمل کرتی ہے پس مرکز کمیت کا راستہ مکافی برقرار رہتا ہے۔

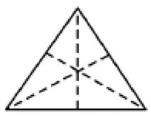
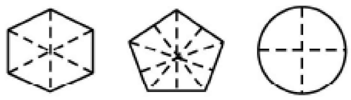
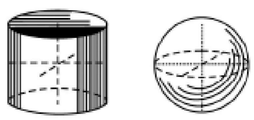
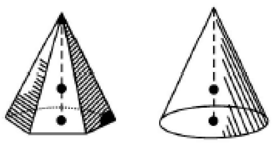
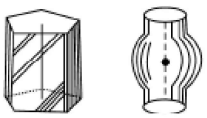
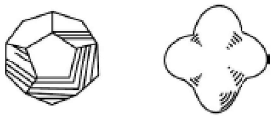
6.2.1 مرکز کمیت کی خصوصیات (Characteristics of CM)

1. مرکز کمیت کے لحاظ سے صرف ذرات کی کمیت اور مطلق (Relative) مقام پر منحصر ہے اسکا مطلب یہ ہے کہ صرف کمیت کی وضاحت کرتی ہے۔
2. مرکز کمیت کی الجبرائی کمیتوں کا مجموعہ (کمیت x مطلق فاصلہ) صفر ہوتا ہے۔
3. نظام کی اندرونی قوتوں کا مرکز کمیت پر کوئی اثر نہیں پڑتا ہے دھاتی انگوٹھی کے مرکز کمیت اس کا جیومٹری مرکز ہوتا ہے۔
4. مرکز کمیت آزادانہ حالت میں حوالی فریم میں ہوتی ہے۔

6.2.2 کچھ اجسام کی مرکزی کمیت (CM of Some bodies):

بڑے اجسام کی مرکزی کمیت آسانی سے معلوم نہیں کر سکتے ہیں کیونکہ جسم کو تشکیل دینے والے ذرات کی بہت بڑی تعداد پر غور کرنا پڑتا ہے حقیقت میں استوار جسم کے تمام ذرات ایک ہی کمیت رکھتے ہیں جسم کی کمیت اور اس کی شکل اور جسامت گردشی محور کے اطراف کمیت کی تقسیم اور گردشی محور کے مقام اور تشریق کے تابع ہے۔ بڑے گردشی جمود کی شکل تشاکل یا استوانہ یا دائری قرص کے حساب میں اچانک کمی یا زیادتی کے خلاف قابو پیدا کر سکتے ہیں۔ لیکن حسابی طریقہ سے کچھ حد تک معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم مرکز کمیت (CM) کی اہمیت کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم جدول (6.1) میں کچھ منظّم (Regular) متشاکل (Symmetrical) اجسام کے بارے میں مرکز کمیت کا مقام کا مطالعہ کریں گے۔

Table - 6.1 : Centres of Mass of some regular symmetrical bodies

Figure	Position of Centre of Mass
	*Triangular Plate* Point of intersection of the three medians.
	*Regular polygon and circular plate* At the geometrical centre of the figure.
	*Cylinder and sphere* At the geometrical centre of the figure.
	*Pyramid and cone* On line joining vertex with centre of base and at h/4 of the height measured from the base.
	*Figure with axial symmetry* Some point on the axis of symmetry.
	*Figure with centre of symmetry* At the centre of symmetry.

ماس کے مرکز کے بارے میں دو چیزیں یاد رکھنا ضروری ہیں: (i) یہ جسم سے باہر ہوسکتا ہے جیسا کہ انگوٹھی کی صورت میں۔ (ii) جب دو اجسام ایک دوسرے کے گرد گھومتے ہیں، تو وہ درحقیقت اپنے مشترکہ مرکز کے گرد گھومتے ہیں۔ مثال کے طور پر، بائنری نظام میں ستارے اپنے مشترکہ مرکز کے گرد گھومتے ہیں۔ زمین سورج کا نظام بھی اپنے مشترکہ مرکز کے گرد گھومتا ہے۔ لیکن چونکہ سورج کی کمیت زمین کی کمیت کے مقابلے میں بہت زیادہ ہے، اس لیے نظام کے ماس کا مرکز سورج کے مرکز کے بہت قریب ہے۔

اب یہ وقت آپ کی پیشرفت کی جانچ کا ہے۔

6.2 اسباقی سوالات (Intext Questions):

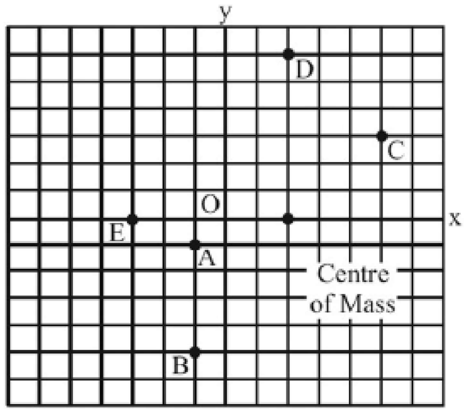


Fig. 6.5

1. یہاں دکھائے گئے گرڈ میں ذرات A, B, C, D اور E بالترتیب 1.0 kg، 2.0 kg، 3.0 kg، 4.0 kg اور 5.0 kg ہیں۔ نظام کے ماس کے مرکز کی پوزیشن کے نقاط کا حساب لگائیں تصویر 6.5۔
2. اگر ماسز کے تین ذرات $m_1 = 1kg$، $m_2 = 2kg$، اور $m_3 = 3kg$ سمت 1.0 m کے ایک مساوی مثلث کے کونوں پر واقع ہیں، تو نظام کے ماس کے مرکز کی پوزیشن کو آرڈینیٹ حاصل کریں۔
3. دکھائیں کہ دو ذرات کے ان کے مشترکہ مرکز سے فاصلوں کا تناسب ان کے کمیت کے تناسب کے الٹا متناسب ہے۔
4. ایک سخت جسم کے سی ایم پر کوئی بیرونی قوت کام نہیں کرتی۔ کیا نظام کے تمام ذرات کی کل رفتار میں کوئی تبدیلی آئے گی؟

6.3 جاذبی مرکز (Centre of Gravity):

ذرات کے نظام میں تمام ذرات کی کمیت ہوتی ہے۔ زمین کی تجاذبی قوت ان کو کشش کرتی ہے۔ زمین کی قوت کشش کے عمل کرنے کو وزن کہتے ہیں۔

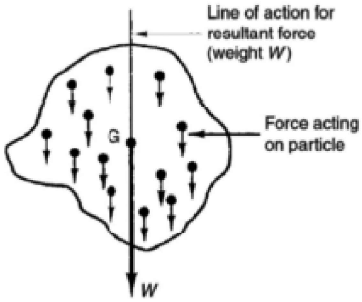


Fig. 6.6 : Resultant weight acting along the centre of gravity

$$F = ma$$

$$\text{When } a = g \quad F = W$$

$$\therefore \quad W = mg \qquad (6.11)$$

تمام ذرات پر قوتیں عمل کرتے ہوئے زمین کے متوازی ہوتی ہیں اس لئے وزن کے عمل کرنے کے خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں لہٰذا وزن ایک سمتی مقدار ہے ان تمام متوازی قوتوں کا حاصل جسم کے ایک مخصوص نقطہ سے گزرتا ہے۔ یہ وہ مخصوص نقطہ ہوتا ہے جس پر جسم کا وزن ہمیشہ عمل کرتا رہتا ہے اس نقطہ کو جاذبی مرکز کہتے ہیں۔ مساوی موٹائی کے اجسام کے لئے مساوی تجاذبی میدان میں اجسام رکھا جاے تو مرکز جاذبہ مخصوص نقطہ کمیت پر مرکوز ہوتا ہے مرکز کمیت آسان انداز میں نظام کی حرکت کو بیان کرتی ہے جب کہ مرکز جاذبہ شئے کے استحکام کو بیان کرتا ہے۔

اگر کوئی شئے زیادہ قیام پذیر ہونے کی وجہ وزن یا سمتی قوت شئے سے گذرتی ہے اس لئے کم اونچائی والی گاڑیاں زیادہ قیام پذیر ہوتی ہیں۔

☆ ایک لڑکی، دوکھمبوں سے بندھی ہوئی رسی پر چل رہی ہے۔ اسکا توازن برقرار رکھنے کے لئے ہاتھوں میں ایک لمبی لکڑی ہے تاکہ کل وزن باریک رسی پر پڑے اور گزر جائے۔

☆ ریسنگ کی کاریں کم اونچائی اور چھوٹی چوڑائی میں زیادہ ہوتی ہیں۔

☆ ایک ہمالیہ یا کوہ پیما پہاڑ پر چڑھتے وقت آگے جھکتے ہیں تاکہ اس کا وزن توازن میں رہے۔

6.4 خطی حرکت اور گردشی حرکت استوار جسم میں (تقابل)

اگر کسی جسم کے تمام ذرات ایک ہی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے ان کے راستے متوازی ہوں تو جسم کی اس حرکت کو خطی حرکت کہتے ہیں۔ جس کو 6.7 شکل میں بتلایا گیا ہے۔ خطی حرکت میں ایک جسم ایک مقام سے دوسرے مقام کو یا تو خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے یا دائری راستہ میں حرکت کرتا ہے۔ جسم کی جسامت اور شکل سے اس کی حرکت پر کچھ اثر نہیں پڑتا ہاں پر جسم کو ایک ذرہ سے ظاہر کرتے ہیں جس پر جسم کی تمام کمیت مرکوز ہوتی ہے۔ خطی حرکت کو ایک قوت کے ذریعہ تبدیل کرسکتے ہیں۔ کسی بھی موقع پر ہر ایک ذرہ کا خطی اسراع مساوی مساوی ہوتا ہے۔

$$M\,a = F_{ext}$$

کیا آپ کسی جسم کی مرکز کمیت کی وضاحت کرنے کا استعمال یا فائدہ بتلا سکتے ہیں؟ خطی حرکتکو ایک ذرہ سے ظاہر کرتے ہیں جس پر جسم کی تمام کمیت مرکوز ہوتی ہے استوار جسم کو قوت کے ذریعہ تبدیل کرسکتے ہیں اس تصور کو سمجھنے کے لئے ذیل کا مشغلہ انجام دیں گے۔

مشغلہ 6.1(Activity):

ایک لکڑی کا کندہ لیجئے اس کی سطح پر دو یا تین نشان لگایئے۔ اب نشان والی سطح کو اپنے سامنے رکھئے اور کندہ کو افقی فرش پر ڈھکیلئے۔ اور نشانات کے ذریعہ راستوں کو نوٹ کیجئے۔ ان تمام نشانات فرش پر متوازی ہیں راستے پر بموجب شکل 6.7 بتلایا گیا آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ راستے کی طول بھی مساوی ہے۔

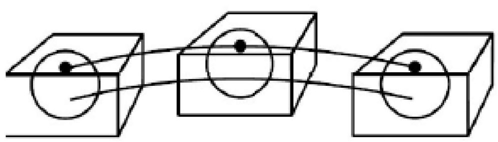


Fig. 6.7 : A wooden block moving along the floor performs translational motion.

مشغلہ 6.2 (Activity):

آیئے اب ایک آسان تجربہ کرتے ہیں۔ لکڑی کا ایک استوانہ نما ٹکڑا لیجئے۔ اس کے مستوی سطح پر ایک یا دو نشان بنایئے۔ اب مستوی سطح کا رخ اپنی طرف رکھتے ہوئے استوانہ کو فرش پر آہستہ آہستہ گھمایئے۔ آپ شکل 6.8 میں A جیسا نشان فرش کے متوازی منتقل ہوکر دائری حرکت میں ہے۔ لہٰذا جسم خطی حرکت اور گردشی حرکت کرتا ہے۔

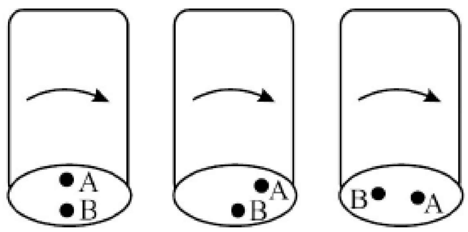


Fig. 6.8 : Rolling motion of a cylinder: The point A has not only moved parallel to the floor but also performed circular motion

عام طور سے زیادہ تر استوار جسم میں خطی حرکت اور گردشی حرکت دونوں ایک ساتھ رکھتے ہیں جسم کا ہر ایک ذرہ ایک ہی خطی حرکت رکھتا ہے جسم کے مختلف استوار جسم مختلف خطی حرکت رکھتے ہیں گردشی حرکت آگے کی طرف نہیں بڑھتی ہے۔

آپ نے ایک چکی (پیسنے) میں پیسنے والا پتھر دیکھا ہوگا۔ پتھر پر ایک ہینڈل لگایا جاتا ہے۔ یہ ہینڈل دائروی راستے پر چلتا ہے۔ پتھر دائروی راستے پر حرکت کرتا ہے بموجب شکل 6.9 میں بتلایا گیا ہے۔

''ایک جسم گردشی حرکت میں ہے' اس وقت کہتے ہیں جب کہ وہ ایک مخصوص (Special) نقطہ کے اطراف یا محور کے اطراف گھومتا ہے''۔ گردشی حرکت میں مختلف استوار جسم مختلف حرکت کرتے ہیں ان استوار جسم کی خطی حرکت گردشی محور سے ان استوار جسم کے فاصلوں پر منحصر رہتی ہے۔ اس حرکت میں ہر ایک جسم کی حرکت مساوی ہوتی ہے۔ گردشی حرکت کو ایک قوت کی مدد سے تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

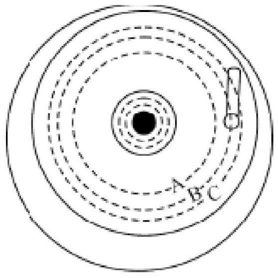


Fig. 6.9 : Pure rotation of a grinding stone

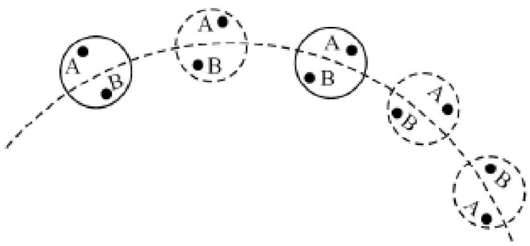


Fig. 6.10 : Rotation of the earth

گردش کی ایک اچھی مثال زمین کا اسکے محور کے اطراف گردش کرنا شکل 6.10 میں بتلایا گیا۔ آپ نے پہلے کے سبق میں جسم کی کمیت کے بارے میں مطالعہ کیا ہے۔ گردشی حرکت کو ایک قوت کی مدد سے اسراع کے مساوی کیا جاتا ہے یعنی قوت سے گردشی حرکت میں تبدیلی اور جسم کا اسراع مساوی ہوتا ہے آیئے اس کی وضاحت کس طرح کرسکتے ہیں۔ گردشی حرکت میں تمام ذرات دائروی حرکت محور کے اطراف کرتے ہیں۔

6.4.1 Angular displacement (q)

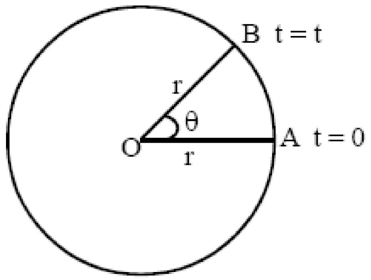


Fig. 6.11

دئے گئے وقت (t) میں سمتی نصف قطر t جو زاویہ طے کرتا ہے اسکو زاویائی نقل مکان کہتے ہیں۔ سمتی نصف قطر جو زاویہ طے کرتا ہے جب کہ وقت دوران t کو زاویائی نقل مکان کہا جاتا ہے۔

بموجب شکل 6.11 سے $\angle AOB = \theta$

زاویائی نقل مکان کی اکائی ریڈین ہوتی ہے۔ ایک مکمل گردش $2\pi = \theta$ ریڈین

6.4.2 زاویائی رفتار اور زاویائی اسراع

''زاویائی نقل مکان کی شرح کو زاویائی رفتار (ω) کہتے ہیں۔

$$\omega = \frac{angle}{time} = \frac{\theta}{t} \qquad (6.12)$$

اس کی اکائی ω ریڈین فی فلنڈ ہے۔

ω ایک سمتی مقدار ہے اس کی سمت سیدھے ہاتھ والے انگوٹھے کے اصول کی مدد سے اس کی سمتی گردشی سطح کے عموداً رہتی ہے۔

اگر ذرہ کی n گردشیں ہوتو t وقت میں تب $\omega = \dfrac{2\pi n}{t}$

خطی نقل مکان کی شرح کو خطی رفتار V کہتے ہیں زاویائی اسراع سے مراد شرح تغیر زاویائی رفتار کو زاویائی اسراع کہتے ہیں۔

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} \qquad (6.13)$$

$$\text{or} \qquad \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

اس کی اکائی ریڈین فی مربع سکنڈ ہے۔ یہ ایک سمتی مقدار ہے۔ خطی رفتار اور زاویائی رفتار میں رشتے سے

$$v = r\omega \qquad (6.14)$$

جہاں پر α زاویائی اسراع ہے۔

$$a = r\alpha \qquad (6.15)$$

6.5 جمود کا معیار اثر (Moment of Inertion)

ایک استوار جسم جس کی کمیت m اور اس کا محور سے فاصلہ r ہو تو جیسا کہ شکل 6.12 میں بتلایا گیا ہے۔

اگر ایک سختیا استوار جسم لیا جائے جس کے کئی ذرات رہتے ہیں جن کی کمیتیں m1, m2, m3... ہیں اور محور سے ان کے فاصلہ r1, r2, r3... ہوں تو اوران کی رفتاریں v1, v2, v3 ہے تب پہلے ذرہ کی توانائی بالحرکت $(½)\, m_1 v_1^2$. اس طرح ذرہ کی توانائی بالحرکت $(½)\, m_2 v_2^2$

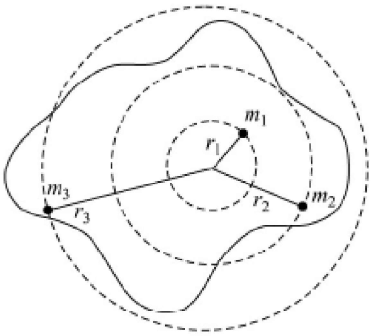


Fig. 6.12 : Rotation of a plane lamina about an axis passing through its centre of mass

اگر ہم تمام ذرات کی جملہ توانائی کو جمع کرتے ہیں تو T جملہ توانائی سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$T = (1/2)\, m_1 v_1^2 + (1/2)\, m_2 v_2^2 + ...$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2}\right) m_i v_i^2 \qquad (6.16)$$

جہاں پر $\sum_{i=1}^{i=n}$ سے مراد جملہ ذرات ہے۔

تب مساوات 6.16 میں. v = rω کی قیمت رکھنے پر

$$T = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{2}\right)m_i\left(r_i\omega\right)^2 \qquad (6.17)$$

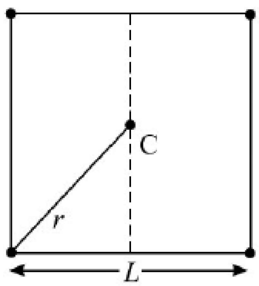
جب جمود کا معیار اثر مساوات 6.17 سے

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 \qquad (6.18)$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (6.19)$$

جہاں پر I جمود کا معیار اثر ہے۔



مثال 6.4:

چار ذرات کی کمیت m ہے مربع L کے کنارے پر واقع ہیں۔ مربع کے مرکز سے گزرنے والے محور کے بارے میں ان کے جمود کا معیار اثر کو معلوم کرو جب کہ محور مستوی پر عمودی طور پر ہے۔

حل:

سادہ جیومٹری کی مدد سے گردش کے محور سے ہر ایک ذرہ کا فاصلہ یہ بتلا تا ہے کہ

$$I = mr^2 + mr^2 + mr^2 + mr^2$$

$$I = 4mr^2$$

$$I = 4m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 2\,mL^2$$

ایک محور کے اطراف کسی سخت جسم کے جمود کا معیار اثر ہر ذرہ کی کمیت اور اس ذرہ کا گردشی محور سے فاصلے کے مربع کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر I جمود کا معیار اثر چار ذرات کی کمیتیں مساوی ہوں تو بموجب شکل کے مطابق جمود کا معیار اثر کو m^2 میں ظاہر کرتے ہیں۔

$$I = M\,K^2 \qquad (6.20)$$

جہاں K گردشی نصف قطر Radius of Gyration ہے۔ گردشی نصف قطر سے مراد محور پر گھومتی کسی شئے کے گھیراؤ کے نصف قطر K محور سے اس نقطہ کا فاصلہ ہوتا ہے۔ جہاں شئے کی ساری کیمت مرکوز کرنے پر اس کے گردشی جمود میں کوئی تبدیلی نہیں آتی ہے۔

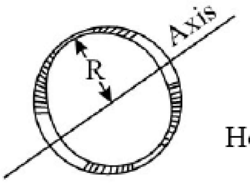
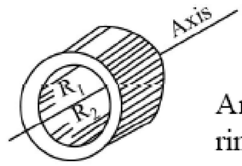
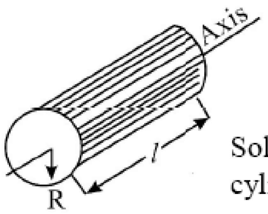
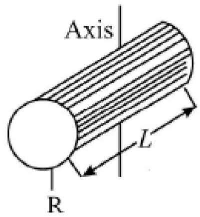
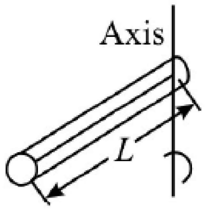
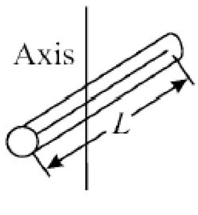
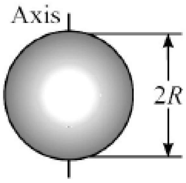
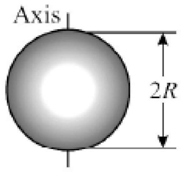
کسی جسم کا گردشی نصف قطر اس جسم کے گردشی محور کے لحاظ سے تمام ذرات کے اثر انداز فاصلہ ہوتا ہے اگر جسم کی تمام کمیت کو گردشی محور سے ایک ایسے نقطہ پر مرتکز کر دیا جاتا ہے جو گردشی نصف قطر کے مساوی ہو تو جمود کا معیار اثر میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوگی۔ مثال (6.4) میں اگر دوسری کمیت کے مربع کے کنارے پر جمع کرتے ہیں تب جمود کا معیار اثر محور مستوی L پر عمودی طور پر ہے۔

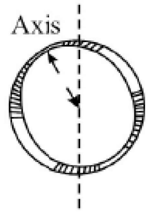
$$I = mr^2 + 2mr^2 + mr^2 + 2mr^2$$
$$= 6mr^2$$

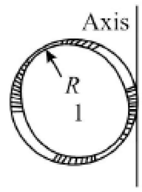
نوٹ کیجئے جمود کا معیار اثر $2mL^2$ سے $3\ mL^2$ تبدیل ہوتا ہے۔

جدول 6.2 جمود کا معیار اثر چند منظّم اجسام کے لئے

(Moments of Inertion of a few regular and uniform bodies)

 Hoop about central axis $I = MR^2$	 Angular cylinder (or ring) about cylinder axis $I = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$
 Solid cylinder about cylinderical axis $I = \frac{MR^2}{2}$	 Solid cylinder (or disk about a central diameter $I = \frac{MR^2}{4} + \frac{M^2l^2}{12}$
 Thin rod about an axis passing through its centre and normal to its length $I = \frac{ML^2}{12}$	 Thin rod about an axis passing through one end and perpendicular to length $I = \frac{MR^2}{3}$
 Solid shpere about any diameter $I = \frac{2MR^2}{5}$	 Thin spherical shell about any diameter $I = \frac{2MR^2}{3}$





دوبارہ 6.18 مساوات کے مطابق خطی حرکت میں کسی جسم کی توانائی بالحرکت کی مساوات سے تقابل کریں۔ کیا آپ کوئی مشابہت بتلا سکتے ہیں؟ آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ گردشی حرکت میں جسم کی حرکت یا کمیت مشابہ ہوتی ہے۔ گردشی حرکت سے جسم کی کمیت میں کوئی تبدیلی نہ لانے کی خاصیت جمود کا معیار اثر اور زاویائی رفتار خطی رفتار میں تبدیلی ہوتی ہے۔ اس طرح فلائی وہیل جمود کے معیار اثر کے ساتھ جھٹکا دینے والی حرکت کو روکتی ہے اور مسافروں کو آرام دہ سواری کو یقینی بناتی ہے۔

ہم نے دیکھا ہے کہ گردشی حرکت زاویائی رفتار خطی رفتار کے مشابہ (Same) ہے اس لئے زاویائی اسراع سے مراد زاویائی رفتار میں شرح تبدیلی ہے اس لیے خطی حرکت اسراع کے مطابق ہوتی ہے۔ زاویائی اسراع کو سے ظاہر کرتے ہیں۔

A. جمود کے معیار اثر کی طبعی اہمیت

خطی حرکت کی طرح مشابہ خصوصیت گردشی حرکت میں ہوتی ہے جو جمود کے معیار اثر کی طبعی اہمیت کی تعمیل کرتی ہے۔

جس طرح جسم کی کمیت خطی حرکت اپنی حالت میں تبدیلی کے خلاف مزاحمت کرتی ہے اسی طرح جمود کا معیار اثر بھی گردشی حرکت میں تبدیلی کے خلاف مزاحمت کرتا ہے۔ ایسی خاصیت جمود کے معیار اثر کی زیادہ تر عملی کام میں استعمال میں لایا جاتا ہ زیادہ تر مشین جو گردشی حرکت پیدا کرتا ہے ان کے اجزا میں ایک ڈسک (Disc) ہے جس میں بہت زیادہ جمود کا معیار اثر ہوتا ہے۔ ایسی مشینوں کی مثالوں میں بھاپ کا انجن اور آٹوموبائیل انجن ہیں۔ جمود کا معیار اثر والی ڈسک (Disc) کو فلائی وہیل کہا جاتا ہے۔ یہ سمجھنے کے لئے فلائی وہیل کیسے کام کرتا ہے تصور کریں کہ انجن کا ڈرائیور اچانک رفتار بڑھانا چاہتا ہے تو جمود کا معیار اثر کی وجہ سے فلائی وہیل اس کوشش کے خلاف مزاحمت کرتا ہے۔ یہ رفتار میں صرف بتدریج اضافے کی اجازت دیتا ہے اس طرح رفتار اچانک کم کرنے کی کوششوں کے خلاف کام کرتا ہے اور رفتار میں صرف بتدریج کمی کی بھی اجازت دیتا ہے۔

B. استوار جسم کی ہموار حرکت کی مساوات

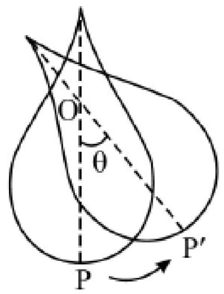


Fig. 6.13 : Rotation of a lamina about a fixed nail

0 سے گذرنے والی محور کے گرد گھومنے والے لیمنا (Lamina) پر غور کریں۔ یہ عام مستوی کی طرف مستقل زاویائی رفتار ω جیسا کہ شکل 6.13 میں بتلایا گیا ہے ایک ثابت زاویہ θ اور وقت t تب

$$\theta = \omega t \qquad (6.21\ [a])$$

تاہم اگر لیمنا (Lamina) کو مستقل ٹارک (Torque) کے عمل سے ایک مستقل زاویائی اسراع پیدا ہوتا ہے۔ ذیل کی مساوات کے ذریعہ گردشی حرکت

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad (6.21\ [b])$$

جہاں پر ω_1 ابتدائی زاویائی رفتاراور ω_f انتہائی (آخری) زاویائی رفتاراس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (6.21\ [c])$$

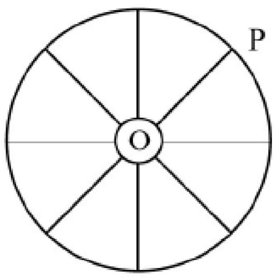
$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta \qquad (6.21\ [d])$$

جہاں پر θ زاویائی نقل مقام وقت t کے ذریعہ اس طرح تھوڑی سی توجہ مرکوز کرنے پر اور جانچ پڑتال کرنے سے آپ حرکیات کے خطی حرکت کی مساوات کو حل کریں گے۔

مثال 6.5:

ایک سائیکل کا پہیہ افقی محور کے گرد آزادانہ گھومتا ہے۔ بموجب شکل 6.14 میں بتلایا گیا۔ یہ ابتدائی طور پر ساکن ہے تصور کیجئے کہ op ایک خط سے کس زاویے پر 2 سکنڈ میں حرکت کرے گا؟ جب کہ ہموار زاویائی اسراع $2.5\ rads^{-2}$ ریڈین فی مربع سکنڈ ہے۔

حل:



شکل 6.14: سائیکل کے پہیہ کی گردشی

زاویائی نقل مکان خط op سے دیا گیا ہے۔

$$\theta = \omega_0 t + (1/2)\alpha t^2$$

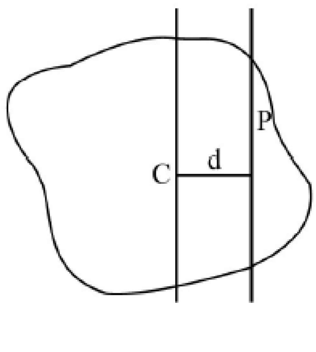
$$= 0 + (1/2) \times \left(2.5\,rad\,s^{-2}\right) \times 4s^2$$

$$\theta = 5\ rad$$

ہم نے اوپر ذکر کیا ہے کہ ایک استوار جسم کی گردش کے لئے مرکزی کمیت مستقل ہوتی ہے تاہم یہ صرف آسانی کی بات ہے کہ ہم مرکز کمیت کو مستقل رکھتے ہیں۔

لیکن مرکزی کمیت کے علاوہ کئی اہم نکات پر غور کریں گے اس لئے جسم ثابت نقطہ کے گرد گھومتا ہے لیکن ثابت نقطہ کے گرد محوری گردش ہوسکتی ہے اس محور کی مرکزی کمیت کا جمود کا معیار اثر گزرتے محور کے جمود کے معیار اثر کچھ لمحہ میں مختلف ہوتا ہے دو لمحوں کا جمود کا معیار اثر کے درمیانی رشتے کو مسئلے معیار اثر سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

6.5.1 جمود کا معیار اثر کا مسئلہ (Theorems of moment of inertia):



شکل 6.15: متوازی محوروں کا مسئلہ مرکز کمیت دوسرا نقطہ P

جمود کا معیار اثر کو دو محوروں سے دو نظریات اور دو مسئلے سے جوڑتے ہیں جس میں ایک جسم کی مرکز کمیت سے گزر رہا ہے یہ وہ ہیں۔

(i) متوازی محوروں کا مسئلہ۔

(ii) عمودی محوروں کا نظریہ

(i) متوازی محوروں کا مسئلہ

فرض کرو کہ M ایک مستوی جسم کی کمیت اور استوار جسم ایک محور کے گرد گھومتا ہے جو مرکز کمیت کے کسی بھی نقطہ P سے گذرتا ہے جمود کا معیار اثر کی تفہیم متوازی

محوراور مرکز کمیت سے گزرتا ہے متوازی محوروں کے مسئلہ کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں ''کسی محور کے گرد ایک جسم کے جمود کا معیار اثر مرکز کمیت سے گزرنے والے ایک متوازی محور کے گرد جسم کے جمودک ے معیار اثر اور جسم کی کمیت اور ان عمودی محوروں کے درمیانی فاصلے کے مربع کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر I جمود معیار اور......جمود کا معیار اثر متوازی محور سے گزرتے ہوئے مرکز کمیت سے ظاہر کرتے ہیں۔

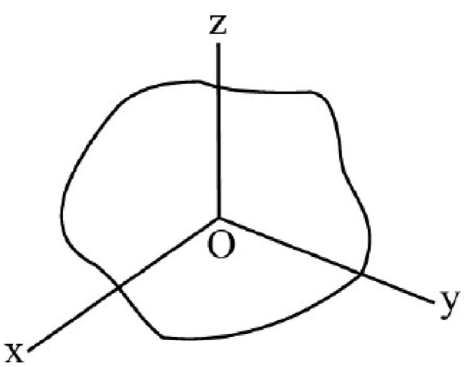
$$I = I_C + M\ d^2 \tag{6.22}$$

جہاں پر M مستوی جسم کی کیت اور d محوروں کا درمیانی فاصلہ یہ مسئلہ کو متوازی محوروں کا مسئلہ کہتے ہیں۔

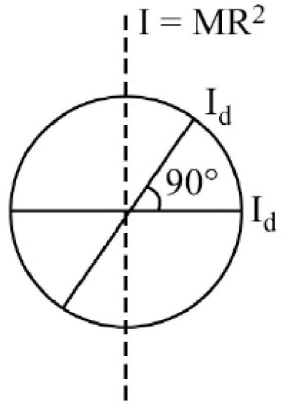
(ii) عمودی محور کا مسئلہ (Theorem of Perpendicular Axis):

فرض کرو کہ تین علی القوائم محوروں x اور y ایک مستوی سطح میں ہیں جب کہ Z محور کے عمودی مستوی پر ہے جیسا کہ شکل 6.16 میں بتلایا گیا ہے۔

دو عمود وار محور x اور y معیار اثر کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے Z۔ محور جمود کے معیار اثر کے۔



شکل 6.16(a): عمود وار محوروں کا مسئلہ یہ ہے



شکل 6.16(b): حلقے کے جمود کا معیار اثر

$$I_z = I_x + I_y \tag{6.23}$$

آیئے اب ہم مندرجہ ذیل مثال سے اس مسئلے کی وضاحت کرسکتے ہیں۔ جیسا کہ 6.16 شکل میں بتلایا گیا ہے کہ دائروی چھلا لیجئے جدول 6.2 سے آپ کو ایک محور کا جمود معیار اثر یاد ہوگا چھلا کی سطح کے عمود وار محور کے گرد جمود کا معیار اثر، $M\ R^2$ ہوگا۔ جہاں پر M چھلے کی کمیت اور نصف قطر R ہے عمود وار محور کے گرد اور قطر کے گرد مساوی ہوتا ہے۔ یعنی مرکز کمیت سے گزرنے والے اور چھلے کی سطح کے عمدوار محور کے گرد جمود کا معیار اثر کا مجموعہ دو قطروں کے گرد مساوی ہوتا ہے۔ چونکہ جمود کا معیار اثر ہر ایک مشابہ ہوتا ہے جس کو

$$M\ R^2 = 2\ I_d$$

کہتے ہیں تب مساوات 6.23 سے

$$I = (½)\ MR2$$

$$(½)\ M\ R^2$$

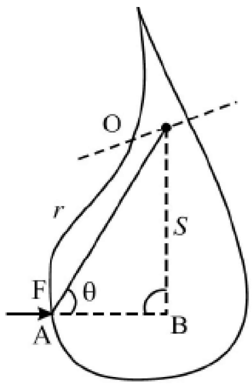
یہ دائروی چھلے کے جمود کا معیار اثر قطر کی مساوات ہے۔آیئے اب رم (Rim) پہیئے کے بیرونی حصہ پرایک نقطہ P لیتے ہیں اس مقام پر چھلے کے ایک مماس پرغور کریں جو چھلے کے محور کے متوازی ہے دومحوروں کے درمیانی فاصلہ واضح طور پر R کے برابر ہے۔مماس کے بارے میں جمودی معیار اثر متوازی محوروں کے مسئلے کا استعمال کرتے ہوئے لیا جاتا ہے

$$I_{tan} = M\ R^2 + M\ R^2 = 2\ M\ R^2$$

یہ نوٹ کرنا ضروری ہے کہ جدول 6.2 کو استعمال کرتے ہوئے متوازی اور عمودی محوروں کے مسئلے کو معلوم کر سکتے ہیں۔

6.6 جفت اور ٹارک (Torque and Couple):

6.3 مشغلہ



شکل6.17:جسم کی گردش

کیا آپ نے کبھی غور کیا ہے کہ (Hinges) چول سے دور کسی مقام پر قوت لگا کر دروازہ کھولنا آسان ہے؟ اگر آپ چول کے قریب قوت لگا کر دروازہ کھولنا آسان ہے؟ اگر آپ چول کے قریب قوت لگا کر دروازہ کھولنے کی کوشش کریں تو کیا ہوگا؟ اس کام کو چند بار انجام دیجئے' آپ محسوس کریں گے کہ دروازہ کھولنے کے لئے بہت زیادہ کوشش یا محنت کی ضرورت ہے اگر آپ چول کے قریب قوت کا استعمال کرتے ہوئے چول سے دور کسی مقام پر کیوں کرتے ہیں؟ اسکرو کو موڑنے کے لئے ہم ایک لمبے ہینڈل کے ساتھ اسپینر (Spanner) کا استعمال کرتے ہیں ہینڈل کو لمبا رکھنے کا مقصد کیا ہے؟ آیئے اب ان سوالات کے جوابات تلاش کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ جسم میں ایک ثابت نقطہ 0 ہے اور یہ اس ثابت نقطہ سے گزرنے والے محور کے گرد گھومتا ہے جیسا کہ شکل 6.17 سے بتلایا گیا ہے۔

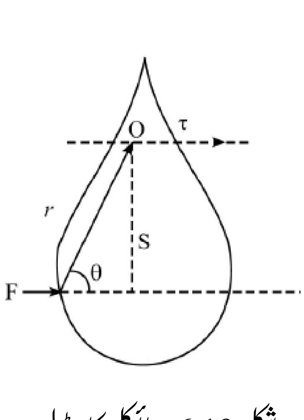
فرض کرو کہ مقدار قوت F عمل کرتے ہوئے مبدا A کے مطابق خط AB پر ہے۔اگر AB خط نقطہ A سے گزرتا ہے تو قوت جسم کو گردش دینے کے قابل نہیں ہوگی بلکہ خط AB نقطہ '0' کے ذریعہ جسم کو محور کے گرد گھمانے کی قوت لی صلاحیت بہت زیادہ ہے۔''کسی قوت کے موڑنے والے اثر کو ٹارک (جفت) کہتے ہیں''اس طرح ٹارک دیا گیا ہے۔

$$\tau = Fs = Fr\sin\theta \qquad (6.24\ [a])$$

جہاں پر S گردشی محور اور خط کے درمیان فاصلہ ہے جس پر قوت کا اطلاق ہوتا ہے۔

ٹارک کی اکائیاں نیوٹن میٹر یا Nm ہے۔ٹارک حقیقت میں سمتی مقدار ہے مساوات (a)6.24 سے

$$\tau = \mathrm{r}\times\mathrm{F} \qquad (6.24\ [b])$$



شکل6.19: سائیکل کا پیڈل

اس طرح ٹارک میں دونوں سمت اور مقدار ہوتے ہیں۔جسم کی سمت اور کس طرف مڑتا ہے اس کو دریافت کرنے کے لئے ہم سمتی حاصل ضرب (سبق 3 میں ہے) F اور r دو سمتی مقداریں ایک مستوی میں T عمودی مقدار ہے۔اگر T مستوی کاغذ ہے تو شکل 6.18 میں بتلایا گیا۔تب سیدھے انگوٹھے کی رو سے اگر ہم سیدھے ہاتھ کے انگوٹھے کو سیدھا زاویوں سے انگلیوں تک بڑھاتے ہیں اور انگلیوں کو گھماتے ہیں تو چھوٹا زاویہ r سے F کی طرف اشارہ لیا جاسکتا ہے تو انگوٹھا جس سمت میں اشارہ کرتا ہے وہ τ کی سمت ہے۔

مندرجہ بالا اصول کے ذریعہ سے شکل 6.18 میں مستوی کاغذ' قوت موڑ جسم کی گھڑی کی سمتی گردش کے مساوی ہوتا ہے۔

مثال 6.6:

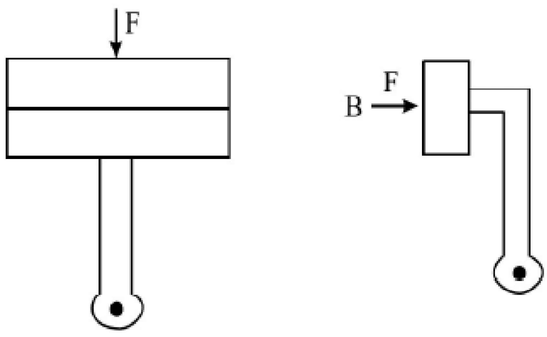


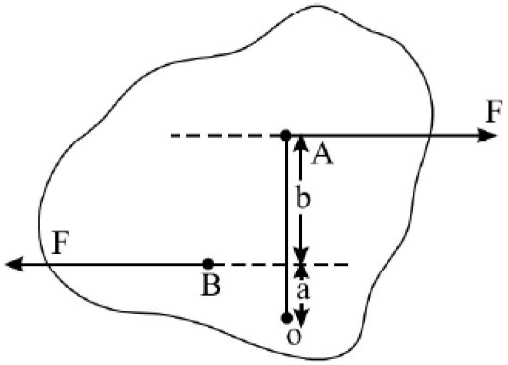
Fig. 6.19 : A bicycle pedal (a) at the top when $\tau = 0$; (b) when τ is maximum

بموجب شکل 6.19 میں سائیکل کا پیڈل (Pedal) دکھایا گیا ہے۔ مان لیجئے کہ آپ کا پاؤں اوپر ہے اور آپ پیڈل کو نیچے کی طرف دبا رہے ہیں۔ (i) آپ کیا ٹارک پیدا کر سکتے ہیں؟ (ii) زیادہ سے زیادہ ٹارک پیدا کرنے کے لئے آپ کا پاؤں کہاں ہونا چاہئے؟

حل:

(i) جب آپ کا پاؤں پیڈل کے اوپر ہوتا ہے تو قوت کا عمل مرکز کے خط پر ہوتا ہے اس لئے $\tau = Fr \sin\theta = 0$

(ii) ٹارک اعظم ترین حاصل کرنے کے لئے $\sin\theta$ کی قدر اعظم ترین ہونی چاہئے یعنی θ کی قدر 90^0 ہونی چاہئے۔ ایسا اس وقت حاصل ہوتا ہے جب کہ آپ کا پاؤں مقام B پر ہو تو پیڈل کو نیچے کی طرف دبا رہے ہو۔



شکل 6.20: دو مخالف قوتیں عمل کر رہی جسم پر

اگر جسم پر کئی ٹارک عمل کر رہے ہیں تو جملہ ٹارک کا مجموعہ سمتی ٹارک ہوگا۔ آپ کو گردشی حرکت میں ٹارک کے عمل اور خطی حرکت میں کیا کوئی مطابقت نظر آتی ہے؟ مان لیجئے کہ ایک جسم پر دو قوتیں مساوی اور مخالف قوتیں عمل کر رہی ہیں۔

فرض کرو کہ جسم آزادانہ محور کے گرد گردش کرتے ہوئے 0 سے گذرتا ہے جسم پر عمل کرنے والا دو ٹارک

$$\tau_1 = (a+b)F$$

$$\tau_2 = aF .$$

ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ موڑنے والا ٹارک مخالف سمت میں ہے جسم پر عمل کرنے والا موڑنے والا ٹارک اعظم ترین ٹارک ہوگا۔

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = \text{bF} \qquad (6.25)$$

لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دو مساوی اور مخالف قوتوں کی مختلف نقاط پر جفت کے عمل سے گردش کرتی ہیں۔ جب کہ ٹارک کے عمل سے ایک قوت کے عمل سے خط اور اس نقطہ کے درمیانی عمودی فاصلہ کے حاصل ضرب سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ٹارک کو بیان کرنے کے لئے ایک کارآمد بیان یا مثال قوت کی خطی حرکت ہے۔ فرض کرو کہ ایک استوار جسم اپنے محور سے گذرتے ہوئے 0 جیسا کہ شکل 6.21 میں بتلایا گیا ہے کہ P ایک ذرہ دائرہ کے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ اگر اس کی دائروی حرکت غیر ہموار ہے تو ذرہ مرکز جو قوت

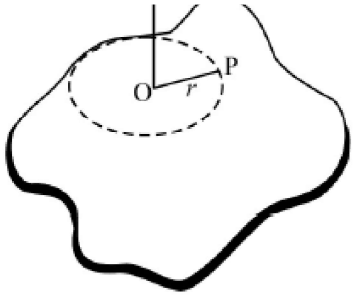


Fig. 6.21 : A rigid body rotating about on axis

(Radial force) (ریڈیل) اور مماسی سمت میں عمل پیرا رہے گا۔ ریڈیل قوت (مرکز جو قوت) کو مرکز جو قوت $m\omega^2 r$ کہتے ہیں۔ یعنی ذرہ دائروی راستہ پر ہوگا۔ جب کہ مماسی قوت سے مقداریت میں تبدیلی کی وجہ سے V حاصل ہوتی ہے اور ذرہ مماسی قوت کی وجہ سے دائروی راستہ پر گامزن ہوگا۔ تب مقداریت ma ہوگی۔ جہاں پر مماسی اسراع ہے۔ ریڈیل قوت سے کوئی بھی ٹارک پیدا نہیں ہوگا ایسا کیونکر ہوتا ہے؟ اس لئے مماسی قوت سے ٹارک پیدا ہوگا جو mar کے مساوی ہے لیکن $a = r\alpha$ جہاں پر α زاویائی اسراع ہے تب ٹارک کا مقداریت سے

$$\tau = \sum_{i=0}^{i=n} m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha \qquad (6.26)$$

$$= I\alpha$$

کیونکہ α ایک دیے گئے لمحے میں تمام ذرات کے لئے مساوی ہے۔ کیونکہ مساوات $\mathbf{F} = ma$ سے یہ پتہ چلتا ہے کہ ٹارک (t) گردشی حرکت کے مشابہ ہوتا ہے جیسا کہ خطی حرکت قوت عمل سے ہوتی ہے۔ جدول 6.3 میں گردشی حرکت اور خطی حرکت کی مدد سے کسی بھی مساوات کو لکھ سکتے ہیں۔

جدول 6.3: گردشی اور خطی حرکت میں مشابہت

Translational Motion		**Rotation about a Fixed Axis**	
Displacement	x	Angular displacement	θ
Velocity	$v = \frac{dx}{dt}$	Angular velocity	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Acceleration	$a = \frac{dv}{dt}$	Angular acceleration	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Mass	M	Moment of inertia	I
Force	$F = ma$	Torque	$\tau = I\alpha$
Work	$w = \int F dx$	Work	$W = \int \tau d\theta$
Kinetic energy	$\frac{1}{2} Mv^2$	Kinetic energy	$(\frac{1}{2}) I\omega^2$
Power	$P = Fv$	Power	$P = \tau\omega$
Linear momentum	Mv	Angular momentum	$I\omega$

مساوات 6.26 کی مدد سے زاویائی اسراع کا ٹارک معلوم کر سکتے ہیں۔

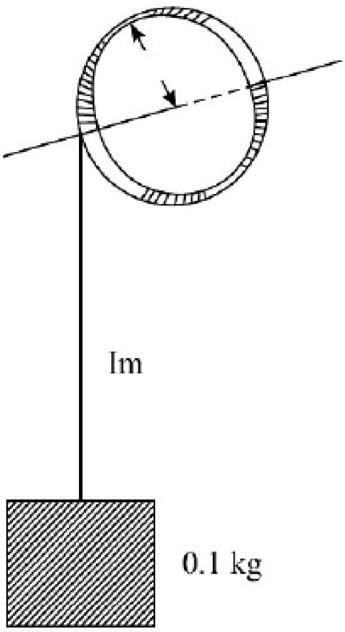


Fig. 6.22

مثال 6.7:

ایک ہموار ڈسک (Disc) کی کمیتیں 1.0kg اور نصف قطر 0.1m ہے۔ یہ اپنے مرکز سے گزرنے والے محور کے گرد گھومتا ہے۔ مستوی پر رگڑ کا عمل نہیں ہوتا ہے ایک چھوٹی کمیتی ڈوری یا تار ڈسک کے کنارے پر گھومتا ہے اسکے سرے 0.1 کلوگرام وزن کو لٹکایا گیا شکل 6.22 کے مطابق محسوب کیجئے۔ (i) زاویائی اسراع ڈسک کا۔ (ii) ڈسک کی گردش کا ایک سکنڈ میں زاویہ۔ (iii) ایک سکنڈ کے بعد ڈسک کا زاویائی رفتار جب کہ g = 10 ms^{-2} دیا گیا ہے۔

حل:

(i) اگر جمود کا معیار اثر دیا گیا ہے $I = (½)\ M\ R^2$ جہاں پر M اور R ڈسک کی کمیت اور نصف قطر ہے تب قوت F = mg تار کا زاویائی اسراع

$$\alpha = \tau / I = FR / I = 2F / MR$$

$$= \frac{2\times(0.1\text{kg})\times(10\text{ms}^{-2})}{(1.0\text{kg})\times(0.1\text{m})} = 20\,\text{rad s}^{-2}$$

(ii) مساوات ((6.21(c)) سے ابتدائی زاویائی رفتار صفر ہوتی ہے تب زاویہ

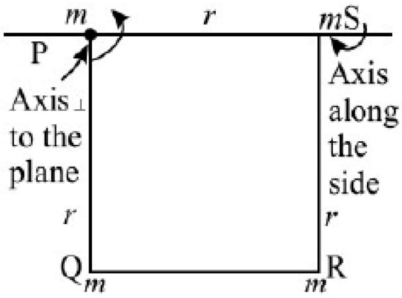
$$\theta = (1/2) \times 20 \times 1.0 = 10 \text{ rad}$$

(iii) ایک سکنڈ کے بعد زاویائی رفتار

$$\omega = \alpha t = 20 \times 1.0 = 20 \text{ rad s}^{-1}$$

اب، آپ اپنی پیشرفت کو دیکھنا پسند کر سکتے ہیں۔ درج ذیل سوالات کو آزمائیں۔

اسباقی سوالات (Intext Questions)



1. چار ذرات کی کمیتیں m مربع کے ضلعوں پر طے کر دی گئی ہے۔ مربع کی لمبائی r ہے مربع کے ایک محور سے گزرتے ہوئے عمودی مستوی ضلع کا جمود کا معیار اگر معلوم کرو۔ جب کہ ایک محور مستقل ضلع کی طرف منتقل ہوتا ہے، تب جمود کا معیار اثر کیا ہوگا؟ عمودی محوروں کے مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے اپنے نتیجے کی تصدیق کرو۔

2. اگر کرے کا مماس محور کے گرد ہوتو ٹھوس کرہ کے گردشی نصف قطر کو محسوب کیجئے۔ (جدول 6.2 کا استعمال کرو)

3. ہاتھ کی گھڑی کے منٹ کی زاویائی رفتار معلوم کرو۔

4. ایک بس ڈرائیور کو پنکچر شدہ (Punctured) ٹائر کو بدلنا پڑتا ہے جس کے لئے وہ لمبا دھاتی پائپ لگا رہا ہوتا ہے اور اسپینر (Spanner) کے سرے پر قوت لگاتا ہے۔ لمبے پائپ کے استعمال کی وضاحت کرو۔

5. جفت کی قوتوں کی چند مثالیں دیجئے جن کو ہم اپنی روزمرہ زندگی میں استعمال کرتے ہیں۔

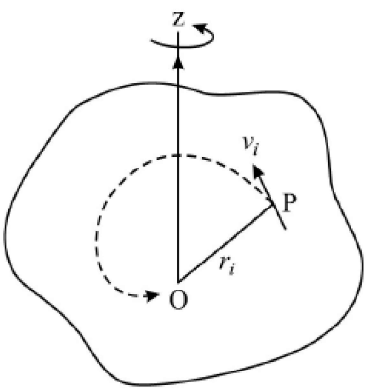
6. مثال کے طور پر ایک سکہ کو اچھالنے کا اطلاق جفت کا معیار اثر یا ٹارک کو بیان کرو۔

7. جمود کے معیار اثر کی اکائیاں کیا ہیں؟

6.7 زاویائی معیار حرکت (Angular Momentum)

جدول 6.3 کے بموجب آپ کو یاد ہوگا کہ خطی رفتار کا گردشی حرکت کے مشابہ معیار حرکت کو زاویائی معیار حرکت کہتے ہیں۔ اس کی طبعی اہمیت کو ہم سمجھیں گے۔ آپ سمجھنے کے لئے ایک مشغلہ انجام دیں گے۔

مشغلہ 6.4 (Activity):



شکل 6.23: ایک استوار جسم کی گردش اپنے محور 0 کے بارے میں

اگر آپ تپائی (Stool) کو پکڑ سکتے ہیں جو بغیر مزاحمت کے گھومتا ہے تو آپ ایک دلچسپ تجربہ کر سکتے ہیں۔ اپنے دوست کو تپائی پر بیٹھنے کو کہیں تپائی کے بازو کو باندھا گیا ہے۔ تپائی کو تیزی سے گھمائیے۔ گردش کی رفتار کو نوٹ کیجئے۔ اپنے دوست کو بولئے کہ بازوؤں کو پھیلائے تب رفتار کو دوبارہ نوٹ کیجئے۔ کیا آپ تپائی کی گردش کی رفتار میں کوئی تبدیلی نوٹ کی ہے؟ پھر اپنے دوست کے بازو قریب کرنے کو کہیں، پھر رفتار کو نوٹ کیجئے۔ کیا آپ رفتار میں تبدیلی کا مشاہدہ کیا ہے؟ آیئے یہ سمجھنے کی کوشش کریں کہ ہم تپائی کے گردش کرنے کی رفتار کی دو صورتیں ہیں۔ یہ کہ بیٹھ کر بازو کو پھیلانا اور بازو کو قریب کرنا۔ اس سے ہم دوبارہ ایک محور کے گرد گھومنے والے استوار جسم پر غور کریں۔

ایک جسم اپنے ثابت نقطہ 0 کے گرد Z- محور پر دائروی راستہ پر خطی رفتار سے حرکت کرتا ہے بموجب شکل 6.23 کے مطابق P ایک ذرہ '0' اور فاصلہ 'r' محور سے خطی رفتار v_i - $v_i\omega$ اور معیار حرکت v_i - $v_i\omega$ ہوگی۔

''خطی معیار حرکت کا حاصل ضرب اور محور تک کے فاصلہ کو زاویائی معیار حرکت کہتے ہیں۔ اس کو L سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر تمام اجسام کے ذرات کا حاصل ضرب سے

$$L = \sum_i m_i \omega r_i \; r_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$= I\omega \qquad (6.27)$$

یاد کیجئے کہ زاویائی رفتار تمام ذرات کی مشابہ ہے اور بریکٹ (Bracket) کے اندر کی اصطلاح کو جمود کا معیار اثر کہتے ہیں جیسے خطی معیار

حرکت اورزاویائی معیارحرکت سمتی مقداریں ہیں مساوات (6.23) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ محور کے گرد گردش صرف سمتی مقدار "L" کا جزو ترکیبی ہے اور یہ سمجھا جائے کہ I محور مشابہ ہے زاویائی معیارحرکت کی اکائی $m^2\ s^{-1}$ کلوگرام مربع فی سکنڈ ہے۔

اب ہم یادکریں کہ ω سے مرادشرح تبدیلی کو کہتے ہیں۔

اس لئے زاویائی معیارحرکت میں شرح تبدیلی کوٹارک (Torque) کہتے ہیں سمتی مقدار کی مساوات سے

$$\frac{dL}{dt} = \tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad (6.28)$$

6.7.1 بقائے زاویائی معیارحرکت (Conservation of Angular Momentum)

مساوات 6.28 یہ بتلاتی ہے کہ اگرجسم پرکوئی نیٹ ٹارک (net torque) عمل نہیں کرتا ہے یعنی اس کا مطلب یہ ہے کہ زاویائی معیار حرکت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی یعنی زاویائی معیارحرکت مستقل ہوتا ہے یہ اصول بقائے زاویائی معیارحرکت کہلاتا ہے۔

بقائے توانائی اور معیارحرکت بھی طبیعیات کے سب سے اہم اصولوں میں سے ایک ہے۔

بقائے زاویائی معیارحرکت کے اصول سے ہم سوالات کے جوابات کی وضاحت کرسکتے ہیں جیسے کہ ہوا میں تیرتی ہوئی کھلونے کی چھتری کی سمت کیسے قائم رہتی ہے؟ ہم چال (Trick) سے اسے گھمایا جائے اوراس طرح کچھ زاویائی معیارحرکت فراہم کی جائے تو ایک بار ہوا میں چلی جاتی ہے اس پرکوئی ٹارک (Torque) عمل نہیں کرتا ہے۔

اس کی زاویائی معیارحرکت مستقل ہوتا ہے چونکہ اس کی مقدار اورسمت قیام پذیر ہوتی ہے اس لیے کھلونا چھتری کی سمت ہوا میں ثابت (مستقل) رہتی ہے۔

اس صورت میں گھومتی ہوئی تپائی (Stool) پرآپ کے دوست کے معاملے میں جب تپائی پرکوئی نٹ ٹارک (Net torque) عمل نہیں کرتا ہے۔ تپائی کی زاویائی معیارحرکت اوراس پر موجود شاہد (شخص) میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی ہے یعنی مستقل رہتا ہے جب بازو پھیلاتا ہے اس کی وجہ سے نظام کے جمود کے معیاراثر میں اضافہ ہوتا ہے۔ مساوات (6.19) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ زاویائی رفتار میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اس طرح جب وہ اپنے بازوقریب کرتا ہے تو نظام کے جمود کے معیاراثر میں کمی ہوتی ہے اور یہ زاویائی رفتار میں اضافہ کا باعث بنتی ہے۔

نوٹ کریں کہ بنیادی طور پرگردشی محور سے ذرات کے فاصلے میں تبدیلی کی وجہ سے جمود کے معیاراثر میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

آیئے ہم بقائے زاویائی معیارحرکت کی چندمزید مثالوں کے بارے میں غورکریں گے۔ فرض کروکہ ایک کروی (گیند) گولہ کا نصف قطر R اورکمیت M ہے گیند پر ٹارک کے عمل سے گھومتا ہے۔ پھر ٹارک کو ہٹادیا جاتا ہے جب کوئی بیرونی ٹارک کا عمل نہ ہونے کی وجہ سے زاویائی معیارحرکت مستقل ہوتا ہے چونکہ گیند کے جمود کا معیاراثر $(2/5)\ M\ R^2$ (جدول 6.2) سے زاویائی معیارحرکت حاصل کرتا ہے۔

$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega \qquad (6.29)$$

جہاں پر ω زاویائی رفتار ہے اب تصورکریں کہ گیند کا نصف قطرکس طرح کم ہوجاتا ہے۔ اس کی زاویائی رفتار میں اضافے سے گیند تیزی سے گھومتی ہے۔ یہ واقعہ کچھ ستاروں میں ہوتا ہے جیسا کہ وہ پلسر (Pulsar) بن جاتے ہیں۔

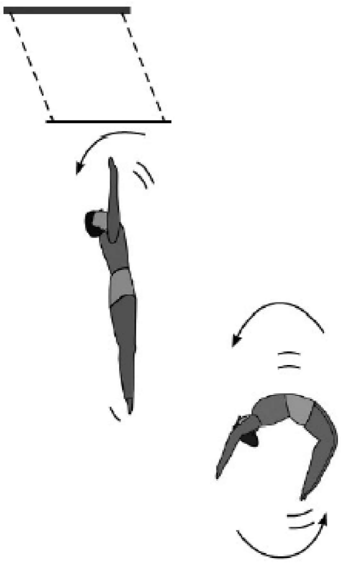
اگرگیند کا نصف قطر اچانک بڑھادیا جائے تو کیا ہوگا؟

آپ دوبارہ مساوات (6.19) سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر R بڑھا دیا جائے تو ω میں کمی سے زاویائی معیار حرکت کا تحفظ کیا جا سکتا ہے اگر قطر کے بجائے جمود کا معیار اثر کے نظام میں تبدیلی سے ω بھی تبدیل ہو جائے گی۔ اس قسم کے دلچسپ اثر کو نیچے باکس (Box) کا مطالعہ کریں۔

دن کی لمبائی مستقل نہیں ہے (The length of the day is not constant)

سائنس دانوں نے اپنے محور کے گرد زمین کی گردش کے دورانیے یعنی دن کے طول میں بہت چھوٹی اور بے قاعدہ تبدیلیوں کا مشاہدہ کیا ہے۔ انہوں نے جن وجوہات کی نشاندہی کی ہے ان میں سے ایک موسم ہے۔ موسم میں تبدیلی کی وجہ سے زمین کا فضائی کرہ کی حرکت متاثر ہوتی ہے۔ یہ زمین کے محور کے گرد بری کمیتی مقدار میں تبدیلی کا سبب بنتی ہے جس کے نتیجہ میں زمین کا جمود کا معیار اثر میں آتی ہے چونکہ زمین کا زاویائی معیار حرکت $L = I\omega$ مستقل ہوتا ہے اس لئے زمین کی گردش کی وجہ سے دن کے طول میں تبدیلی کا باعث ہے۔

بازی گر یا شعبدہ باز، شعبدہ (Acrobts) برف پر چلنے اور دوڑنے والے (Skaters)، غوطہ خور (Diver) اور دوسرے کھیلوں کے کھلاڑی اپنے کارنامے دکھانے کے لئے بقائے زاویہ کی معیار حرکت کے اصول کو استعمال کرتے ہیں۔ آپ ایشین گیمز (Asian Games) اور اولمپکس (Olympics) جیسے قومی یا بین الاقوامی مقابلوں میں تیراکی کے دوران غوطہ خوروں کو ڈائیونگ بورڈ (Diving board) چھلانگ لگاتے دیکھا ہوگا۔ یا قومی اجلاس میں چھلانگ کے وقت غوطہ خور اپنے آپ کو ہلکا سا چکر دیتے ہیں جس سے وہ کچھ زاویائی معیار حرکت کو حاصل کرتا ہے اگر وہ اپنے جسم کو ہاتھ باندھ لینے کی وجہ سے پیر (Foot) بند کرنے سے جمود کا معیار اثر کم ہو جاتا ہے۔ جیسا کہ شکل 6.24 میں بتلایا گیا اگر وہ اپنے جسم کو پھیلائے تو جمود کا معیار اثر بڑھ جاتا ہے اور ایسے آہستہ آہستہ گھومتے ہیں اپنے جسم کی شکل کو کنٹرول کرتے ہوئے غوطہ خور پانی، تالاب (Pool) میں داخل ہونے سے پہلے اپنے پیروں کا مظاہرہ کرنے کے قابل ہو جاتے ہیں۔



شکل 6.24: غوطہ خور جس کا مطلب غوطہ خوری سے چھلانگ لگانا

مثال 6.8:

شیلا ایک گھومنے والے پلیٹ فارم کے مرکز پر کھڑی ہے اس میں رگڑ کم کرنے کے لئے بیرنگ میں گردشی محور سے 1 میٹر کے فاصلے پر ہر ایک ہاتھ میں 2 کلوگرام کی شئے ہے۔ نظام کی ابتدائی طور پر 10 گردش فی منٹ سے گھوم رہا ہے تب نظام کی (a) زاویائی رفتار ریڈین فی سکنڈ میں (b) شئے کو گردشی محور پر 0.2 میٹر کے فاصلہ پر لانے کے بعد زاویائی رفتار (c) نظام میں حرکی توانائی میں تبدیلی (d) اگر حرکی توانائی میں اضافہ کی وجہ کیا ہے تب محسوب کیجئے (فرض کرو کہ شیلا پلیٹ فارم پر ٹھہری ہے تب جمود کا معیار اثر 1 کلو مربع میٹر مستقل رہتا ہے)

حل:

(a) ایک گردش = 2π ریڈین

یعنی ابتدائی زاویائی رفتار $\omega = \dfrac{10 \times 2\pi \text{ radian}}{60\text{s}} = 1.05 \text{ rad s}^{-1}$

(b) بقائے زاویائی معیار حرکت کی رو سے ابتدائی جمود کا معیار اثر $I_i = I_{SP} + mr_i^2 + mr_i^2$

اگر شئے 0.2 میٹر کے فاصلے پر لانے کے بعد انتہائی جمود کا معیار اثر

$$=1.0kg\,m^2 + (2.0kg)\times(1m^2) + (2.0kg)\times(1m^2)$$

$$= 5.0 \text{ kg m}^2$$

بقائے زاویائی جمود کا معیار اثر سے

$$I_t = I_{SP} + mr_f^2 + mr_f^2$$

$$= 1.0 \text{ kg m}^2 + 2.0 \text{ kg} \times (0.2)^2 \text{ m}^2 + 2.0 \text{ kg} \times (0.2)^2$$

$$= 1.16 \text{ kg m}^2.$$

(c) توانائی بالحرکت

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f}$$

$$= \frac{(5.0\text{kgm}^2)1.05\,\text{rad s}^{-1}}{1.16\text{kgm}^2}$$

$$= 4.5 \text{ rad s}^{-1}$$

میں تبدیلی تب

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_f\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_i\,\omega_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 1.16\text{kgm}^2 \times (4.5)^2 (\text{rad s}^{-1})^2 - \frac{1}{2}\times 5.0\text{kgm}^2 \times (10.5)^2 (\text{rad s}^{-1})^2$$

$$= 9.05 \text{ J}$$

اس لئے انتہائی حرکی تانائی ابتدائی حرکی توانائی سے زیادہ ہے۔اس لئے نظام کی حرکی توانائی میں اضافہ ہوتا ہے۔

(d) جب شیلا کام کو انجام دیتی ہے تو شئے محور کی جانب بڑھتی ہے تو نظام کی حرکی توانائی میں اضافہ ہوتا ہے۔

6.4 اسباقی سوالات (Intext Questions)

1. ایک ہائیڈروجن کا سالمہ دو مشابہ جوہروں پر مشتمل ہوتا ہے۔ ہر ایک کی کمیت m اور مقررہ فاصلہ d سے الگ ہوتا ہے سالمے ایک محور کے گرد گھومتے ہیں جو دو جوہروں کے درمیان آدھا راستے پر ہے تب زاویائی رفتار ω ہے تو سالمے کی زاویائی معیار حرکت کو محسوب کیجئے۔

2. ایک ہموار دائروی ڈسک (Disc) کی کمیت 2.0kg اور نصف قطر 20cm سے گردش کرتے ہوئے قطر کی جانب اس کی زاویائی رفتار 10 ریڈین فی سکنڈ ہوجاتی ہے تب محور کے گرد گردش کی زاویائی معیارت حرکت معلوم کرو۔
3. ایک پہیہ اپنے محور کے گرد زاویائی رفتار سے گھوم رہا ہے جسے عمودی طور پر رکھا گیا۔ دوسرا پہیہ جس کا نصف قطر مشابہ ہے لیکن کمیت کو نصف کردیا گیا۔ ابتدائی طور پر حالت سکون میں ہے اور اس ایکسل (Axle) پر آہستہ سے پھسل جاتا ہے۔ یہ دونوں پہیے پھر ایک ہی رفتار کے ساتھ گھومتے ہیں تو طبعی زاویائی رفتار محسوب کیجئے۔
4. زمانہ قدیم میں یہ سمجھا جاتا تھا کہ زمین گیسوں اور بادلوں سے بنی ہے۔ فرض کریں ماضی میں زمین کا نصف قطر موجود نصف قطر کا 25 گنا تھا۔ تب زمین اپنے محور کے گرد گردشی مدت (محوری گردش) کیا ہے۔

6.8 بیک وقت گردشی اور خطی حرکت

ہم پہلے ہی نوٹ کر چکے ہیں کہ اگر کسی استوار جسم میں کوئی نقطہ ثابت (سخت) نہیں ہے۔ یہ گردشی حرکت کے ساتھ خطی حرکت میں بھی ہوتا ہے۔ عام طور پر زیادہ تر استوار اجسام خطی حرکت اور گردشی حرکت دونوں ایک ساتھ رکھتے ہیں فرض کرو کہ آٹوموبائیل (موٹر گاڑی کا پہیہ) وہیل مستوی سطح پر افقی طور پر مشتمل ہے۔

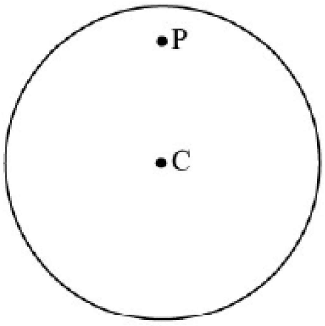


Fig. 6.25

فرض کرو کہ آپ دائروی شکل 6.25 کا مشاہدہ کررہے ہیں اپنی توجہ ایک نقطہ P پر اور دائروی شکل کے مرکز c پر کا آخری نقطہ ہے۔ جب یہ گھومتا ہے تو نقطہ p نقطہ c کے گرد گھومتا ہے۔ نقطہ c خود حرکت کی سمت میں خطی حرکت کرتا ہے۔ لہٰذا پہیے میں گردشی اور خطی حرکت دونوں موجود ہے۔ اگر نقطہ c مرکزی کمیت حاصل کرکے خطی رفتار، v_{cm} میں تبدیل ہوجاتا تب خطی حرکی توانائی سے

$$(KE)_{tr} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \qquad (6.30)$$

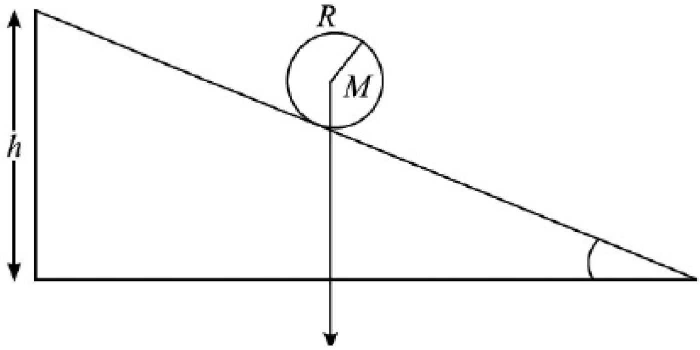
جہاں پر M کمیت ہے اور ω زاویائی گردشی رفتار ہے تب گردشی حرکی توانائی سے

$$(KE)_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6.31)$$

جہاں پر I جمود کا معیار اثر ہے جسم کی کل توانائی خطی اور گردشی حرکت کا مجموعہ حرکی توانائی کہلاتا ہے اس طرح مائل مستوی میں گردشی اور خطی حرکات دونوں پائی جاتی ہیں۔

مثال 6.9:

فرض کرو کہ ایک استوار جسم کی کمیت M' نصف قطر R اور جمود کا معیار اثر I ہے یہ مائل مستوی پر نیچے رولنگ (Rolling) بلندی h سے کرتا ہے شکل کے مطابق آخری مقام کے اختتام پر زاویائی رفتار ω حاصل کرتا ہے رگڑ کی وجہ بہت چھوٹی توانائی کے نقصان کو نظرانداز کرتے ہیں h کے لحاظ سے v کی قدر معلوم کرو۔



شکل 6.26: مائل مستوی پر استوار جسم کی حرکت

حل:

کلیہ بقائے توانائی کی رو سے خطی اور گردشی حرکت مائل مستوی کی حرکی توانائی کا مجموعہ مساوی ہوتا ہے توانائی بالقوہ کے جب کہ جسم مائل مستوی کے اوپر ہو۔ اسلئے

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh \qquad (6.32)$$

اگر حرکت خالص طور پر رولنگ اور پھسلنا نہ ہو تو تب ہم $v = R\omega$ لکھ سکتے ہیں۔ مساوات (6.32) میں قیمت درج کرنے پر

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = Mgh \qquad (6.33)$$

ایک سادہ مثال کے طور پر دائروی چھلہ کے جدول (6.2) میں جمود کا معیار اثر اپنے محور پر MR^2 ہوتا ہے تب 6.33 مساوات سے

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2v^2}{R^2} = Mgh \qquad (6.34)$$

$$v = \sqrt{gh} \qquad (6.35)$$

کیا آپ کو اوپر کی مساوات میں کوئی دلچسپ شئے نظر آتی ہے؟ ''خطی رفتار میں کمیت اور نصف قطر دائری چھلہ کا آزادانہ ہوتا ہے یعنی دائری چھلہ (قرص) کا نصف قطر مائل مستوی کے نیچے رول (Rolls) یا لڑھکتا ہے تو اس کی رفتار مساوی ہوتی ہے''

6.5 اسباقی سوالات (Intext Questions)

1. ایک ٹھوس کرہ بغیر پھیلے (Rolls) ایک ڈھلوان سے نیچے گرتا ہے ڈھلوان کی بلندی کے لحاظ سے اس کی رفتار کیا ہوگی؟

2. ایک ٹھوس استوانہ بغیر پھیلے (Rolls) ایک مائل مستوی سے نیچے گرتا ہے اس کی حرکی توانائی کا کون سا حصہ خطی ہوگا؟ اس کی رفتار کیا ہوگی جب وہ h بلندی سے نیچے گرتا ہے۔

3. ایک دائری کرہ جس کی کمیت 2kg اور نصف قطر 10cm مائل مستوی پر حالت سکون میں 30^0 کا زاویہ افقی سطح پر بناتا ہے۔ (a) زاویائی اسراع (b) زاویائی اسراع مستوی پر (c) حرکی توانائی مستوی پر 2 میٹر طے کرتا ہے۔ ان تمام کو محسوب کیجئے۔

خفیہ نابض (Secret of Pulsars):

کلیہ بقائے معیار حرکت کی ایک دلچسپ مثال وہ ستارے جو باقاعدہ وقفوں سے ریڈیو تعدد کی برقی مقناطیسی اشعاع خارج کرتے ہیں۔ان کو نابض (Pulsars) کہتے ہیں یہ ستارے ہماری جانب زیادہ حدت کے اشعاع (Pulses) بھیجتے ہیں یہ انتہائی واضح طور پر Pulses دوری ہوتے ہیں۔ان کا وقت دوران کچھ ملی سکنڈ سے لے کر چند سکنڈ ہوتا ہے۔اس طرح کے مختصر وقت دوران سے پتہ چلتا ہے کہ ستارے بہت تیزی سے گھومتے ہیں ان ستاروں کا زیادہ تر معاملہ نیوٹران کی طرح ہے (نیوٹران اور پروٹان سے مرکزہ) ان ستاروں کو نیوٹران اسٹار بھی کہا جاتا ہے۔ یہ ستارے اپنی آخری مرحلے تک نمائندگی کرتے ہیں ان کی تیز رفتار گردش کا راز ان کی چھوٹی جسامت ہوتی ہے۔ایک عام نیوٹران کا نصف قطر 10 کلومیٹر ہے اس کا تقابل سورج کے نصف قطر سے کریں تو تقریباً $105\ km. \times 7$ کلومیٹر ہے۔سورج اپنے محور کے گرد گردش 25 دن میں مکمل کرتا ہے۔تصور کریں کہ سورج اچانک اپنی کمیت میں کسی تبدیلی کے بغیر ایک نیوٹران ستارے کے سائز تک سکڑ جاتا ہے اپنی زاویائی رفتار کو برقرار رکھنے کے لئے سورج کو ایک ملی سکنڈ کے حصے سے گردش کرنا ہوگا۔

ہم نے کیا سیکھا؟ (What We have learnt)

- ایک استوار جسم میں گردشی اور خطی حرکت علیحدہ اور مشترکہ طور پر ہوسکتی ہے۔
- ایک استوار جسم میں خطی حرکت کی مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں جس میں مرکز کمیت ذرہ کی حرکت ایک لمحے کے لئے ہوتی ہے۔
- ایک استوار جسم میں اضافی فاصلہ ذرات کے درمیان بیرونی قوت کے عمل سے بھی تبدیل نہیں ہوتا ہے۔
- حقیقت میں کائنات میں کوئی استوار جسم نہیں ہے لیکن ہم بہت اجسام کو مانتے ہیں جیسے ریل کی پٹریاں، پہیے، دھاتی کرے استوار جسم کہلاتے ہیں۔
- شئے کا وہ نقطہ جہاں پر کل کمیت مرکوز ہوتی ہے اسکو مرکز کمیت کہتے ہیں۔
- ذرات کے نظام میں استوار جسم کی حرکت کا مطالعہ مرکزی کمیت کہلاتا ہے۔
- مرکز کمیت میں کمیت کا ہونا ضروری نہیں ہے۔
- شئے کا وہ نقطہ جہاں پر کل وزن مرکوز ہوتا ہے اسکو مرکز تجاذب کہتے ہیں۔
- کشش ثقل کا قیام پذیر ہونا شئے کی قیام پذیری پر ہوتا ہے۔

- ایک مخصوص گردشی حرکت میں ایک استوار جسم کے تمام ذرات محور کے گرد مرکوز ہوکر (Fulcrum) دائری راستہ پر گھومتے ہیں۔
- تمام ذرات کی زاویائی رفتار مشابہ ہوتی ہے لیکن خطی رفتار مختلف ہوتی ہے۔
- اگر استوار جسم ثابت نقطہ کے گرد گزرتا ہے تو وہ گردشی حرکت رکھتا ہے۔
- جمود کا معیار اثر جو اپنے محور کے گرد گھومتا ہے تو $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = MK^2$

جہاں M= جملہ کمیت، K= گردشی نصف قطر

- جمود کا معیار اثر گردشی حرکت میں مشابہ خاصیت رکتا ہے جب کہ خطی حرکت میں کمیت کا ہوتا ہے۔
- قوت کا معیار اثر (ٹارک) دیا گیا ہے۔

$$\tau = \overline{\mathbf{r}} \times \overline{\mathbf{F}}$$

اس کو قوت کا موڑ کا اثر کہتے ہیں یا Turning Effect قوت کا کہتے ہیں۔

- دو مساوی مخالف اور متوازی قوتیں ایک جفت کی تشکیل دیتی ہیں۔ موڑ کا اثر (Turning effect) کی مقداریت جب جفت (Couple) کی طرح عمل کرتی ہیں جفت سے مفرادا ایک قوت کا حاصل ضرب اور دو متوازی قوتوں کے درمیان عمودی فاصلے کے طور پر کی جاتی ہے۔
- بیرونی ٹارک کا اطلاق جسم کے زاویائی معیار حرکت کو تبدیل کرتا ہے۔
- زاویائی معیار حرکت $L = I\omega$
- جب کسی جسم پر کوئی جملہ ٹارک عمل نہیں کرتا ہے تو جسم کا زاویائی معیار حرکت مستقل رہتا ہے۔

اگر $\tau_{ext} = 0$ تب $L = I\,\omega$ مستقل

یا $I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2$

☆ کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق اسپرنگ بورڈ میں غوطہ خوری کا کھیل، اسکیٹنگ (Scating)، قلابازی وغیرہ میں ہوتا ہے۔

☆ جب کوئی استوانہ یا کروی جسم مائل مستوی سے نیچے گرتا ہے تو اس کی کمیت اور نصف قطر آزادانہ ہوتا ہے۔

ٹرمنل مشق (Terminal Exercise)

1. عام طور پر جسم کا وزن Mg بتلایا گیا جسم پر مرکز کمیت عمل کرتی ہے جب کہ زمین دوسرے ذرات کو اپنی جانب کشش نہیں کرتی ہے اس کی وجہ بتلائیے۔
2. کسی جسم کی مرکز کمیت جسم کے بیرونی جانب رکھی گئی کیا یہ ممکن ہے اگر آپ ثابت کرنے کے لئے دو مثالیں دیجئے۔
3. کاربن مونو آکسائیڈ (CO) کے سالمے میں دو جوہر کے مرکزے کا فاصلہ 1.13×10^{-10}m میٹر کی دوری پر ہے سالمے کی مرکز کمیت کا تعین کیجئے۔
4. ایک چکی پیسنے والا پہیہ کی کمیت 5kg کلوگرام اور قطر 0.20m میٹر اس کی زاویائی چال 100 ریڈین فی سکنڈ سے گھوم رہا ہے۔ اگر اس کی حرکی توانائی کو حاصل کرنے کے لئے آزادانہ چھوڑ دیا جائے تو وہ کس فاصلہ پر حرکی توانائی حاصل کرے گا؟ اس کی حرکی توانائی محسوب کیجئے۔ ($g = 10.0\ ms^{-2}$ دیا گیا ہے)

5. ایک پہیہ کا قطر 1.0 میٹر مقررہ محور کے گرد گھوم رہا ہے جس کی ابتدائی زاویائی چال $2\ rev\ s^{-1}$ گردش فی سکنڈ ہے تب اس کا زاویائی اسراع $3\ rev\ s^{-2}$ گردش فی مربع سکنڈ دیا گیا ہے تب
(a) 2 سکنڈ کے بعد زاویائی رفتار کا حساب لگایئے۔
(b) کون سے وقت پہیہ کس زاویے پر گھومے گا۔
(c) پہیے کے بیرونی نقطہ پر مماسی رفتار معلوم کیجئے جب کہ وقت t=25 سکنڈ دیا گیا ہے۔
(d) پہیے کے بیرونی نقطہ پر مرکز جو اسراع معلوم کرو جب کہ وقت t=25 دیا گیا ہے۔

6. 20 ریڈین فی سکنڈ کی زاویائی چال سے گھومنے والا ایک پہیہ 4.0 سکنڈ میں مستقل ٹارک کے عمل سے حالت سکون میں آجاتا ہے اگر پہیے اپنے محور کے گرد $20\ rads^{-1}$ کلوگرام مربع میٹر جمود کے معیار اثر سے گردش کرتا ہے تو تب پہلے دو سکنڈ میں ٹارک کے ذریعہ کیا گیا کام محسوب کیجئے۔

7. ایک ہی ایکسل (Axle) پر دو پہیے لگے ہوئے ہیں پہیہ A اور B کا جمود کا معیار اثر $5 \times 10^{-2}\ kg\ m^2$ کلوگرام مربع میٹر اور $0.2 kg\ m^2$ کلوگرام مربع میٹر ہے۔ اگر پہیہ B ساکن ہے A اور B کو ایک کلچ (Clutch) کے ذریعہ جوڑ کر ایک ساتھ گھومتے ہیں۔
(a) وہ کس چال (Speed) سے گردش کرے گا؟
(b) گردشی حرکی توانائی سے پہلے حرکی توانائی کو شامل کرتے ہوئے تقابل کیجئے۔
(c) 10 گردشوں کے دوران ٹارک فراہم ہوتا ہے تو کلچ (Clutch) کا عمل کیا ہوگا؟

8. ایک جیسے دو کرے دیئے گئے اور یہ ظاہر کیا گیا کہ ان میں سے ایک کھوکھلا ہے۔ تب آپ کس طرح کھوکھلے کرے کا پتہ لگائیں گے؟

9. ایک پہیہ ہموار اسراع میں ہیں جس کا معیار اثر 1000 کلوگرام میٹر ہے۔ کچھ لمحات کے بعد زاویائی چال $10\ rad\ s^{-1}$ ریڈین فی سکنڈ ہے۔ پہیہ 100 ریڈین کے زاویے پر گھومنے کے بعد اس کی رفتار 100 ریڈین فی سکنڈ ہوجاتی ہے ٹارک کے عمل کرنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی کو کس طرح محسوب کروگے؟

10. ایک ڈسک (Disc) کا نصف قطر 10cm سنٹی میٹر اور کمیت 10kg کلوگرام اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ یہ ہموار اسراع سے حالت سکون میں آتا ہے تو پہلے سکنڈ کے دوران (2.5) ریڈین میں گھومتا ہے۔ اگلے سکنڈ کے دوران اس کا زاویہ معلوم کیجئے۔ ٹارک کے عمل سے ڈسک (Disc) کی مقداریت کیا ہوگی؟

11. جمود کے معیار اثر سے کروی خول (Shell) کا قطر $\frac{MR^2}{4}$ ہے۔ تب مماسی کروی خول کا معیار اثر متعین کیجئے (اشارہ: متوازی محوروں کا مسئلہ)

12. جب گردشی نصف قطر (Radius of gyration) میں 10% فیصد کا اضافہ ہوتا ہے تو جمود کا معیار اثر میں کتنے فیصد کا اضافہ ہوگا؟

13. ایک فلائی وہیل (Fly wheel)' 300 گردش فی سکنڈ کرتا ہے۔ جب کہ جمود کا معیار اثر 0.3 کلوگرام مربع میٹر ہے اس پر کتنا ٹارک عائد کیا جانا چاہئے کہ وہ 20 سکنڈ میں حرکت کرنا بند کردے؟

14. ایک پہیہ کا جمود کا معیار اثر $0.63\ kg\ m^2$ کلوگرام مربع میٹر ہے۔کام کے عمل سے زاویائی رفتار 40 rpm سے 80 rpm تک کا اضافہ ہوتا ہے۔کام کی مقدار کو محسوب کیجئے۔

15. ایک ذرہ پر قوت کے عمل سے مقام سمتیہ (Position vector) $7\bar{\mathbf{i}}+3\bar{\mathbf{j}}-3\bar{\mathbf{k}}$ ہوجاتا ہے تب مبدا پر $\bar{\mathbf{i}}+\bar{\mathbf{j}}-\bar{\mathbf{k}}$ کا ٹارک کی قوت معلوم کرو۔

اسباقی سوالات کے جوابات (Ansers to Intext Questions)

6.1

1. ہاں' کیوں نکہ دو نقاط کے درمیانی فاصلہ فریم میں تبدیل نہ ہوسکا۔
2. نہیں

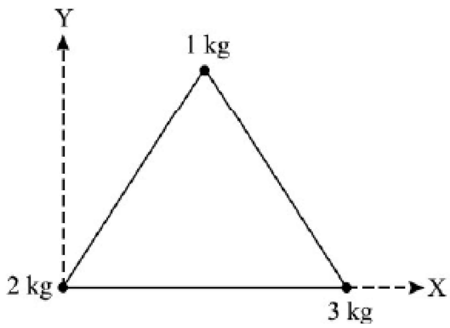
6.2

1. دئے گئے پانچ محوروں کے نقاط......اوران کی کمیتیں بالترتیب 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg لہٰذا نظام کی مرکزی کمیت

$$x=\frac{-1\times1\ -5\times2\ +6\times3\ +2\times4-3\times5}{1+2+3+4+5}=0$$

$$y=\frac{-1\times1\ -1\times2\ +1\times3\ +4\times6+0\times5}{1+2+3+4+5}=\frac{30}{15}=2.0$$

2. بموجب شکل کسی نظام میں تین نقاط کو بتلایا گیا محوروں پر غور کریں جیسا کہ مبدا سے 2kg کمیت بتلایا گیا ہے۔



$$x=\frac{2\times0\ +1\times0.5\ +3\times1}{1+2+3}=\frac{3.5}{6}m$$

$$y=\frac{2\times0\ +1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ +3\times0}{1+2+3}=\frac{\sqrt{3}}{12}m$$

تب محور پر مرکزی کمیت $\left(\frac{3.5}{6},\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$

3. دو ذرات کو x محور پر رکھا گیا تب محور کی مرکزی کمیت سے

$$X=\frac{m_1\times0+m_2\times x}{m_1+m_2}=\frac{m_2x}{m_1+m_2},\ Y=0$$

m سے x کا فاصلہ بھی ہے تب سے مرکزی کمیت

$$x - X = x - \frac{m_2 x}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \frac{X}{x+X} = \frac{m_2}{m_1}$$

اس طرح مرکزی کمیت بالعکس متناسب کمیت اور فاصلہ کے

4. نہیں

6.3

1. کسی نظام میں جمود کا معیار اثر مستوی کے کنارے سے گزرنے والے عمودی محور اور مربع کے۔ تب

$= m\,r^2 + m\,(2\,r^2) + m\,r^2 = 4\,m\,r^2$

جمود کا معیار اثر محور کی جانب $= m\,r^2 + m\,r^2 = 2\,m\,r^2$

تصدیق(Verification): جمود کا معیار اثر QP محور سے $QP = m\,r^2 + m\,r^2 = 2\,m\,r^2$ تب جمودی محوروں کے مسئلہ کے مطابق جمود کا معیار اثر SP محور سے MI + $(2\,m\,r^2)$ SP اور $2\,m\,r^2$;QP اس طرح جمود کا معیار اثر محور P پر مستوی کے مربع کے $(4\,m\,r^2)$ اس طرح نتائج کی تصدیق کی گئی۔

2. مماس کے گرد جمود کا معیار اثر

$= \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$ تب متوازی محوروں کے مسئلہ کی رو سے

اگر گردشی نصف قطر K ہو تب $M\,K^2 = \frac{7}{5}\,M\,R^2$

گردشی نصف قطر $K = R\sqrt{\frac{7}{5}}$

3. $\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2\pi \times 1}{60 \times 60} = \frac{\pi}{1800}\ rad/second$

4. اگر $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}$ in $|r|$ کو اضافہ کرنے پر

5. (a)......کو گھمانے پر

(b) سائیکل کے پیڈل پر قوت لگانے سے

(c) اسٹیرنگ وہیل (Steering Wheel) کو دو ہاتھوں سے گھمانا۔

6. اگر ہم سکہ کو اچھالتے وقت انگوٹھے کے ذریعہ سکے کے کنارے پر قوت کا اطلاق کرتے ہیں جب کہ سکہ شہادت کی انگلی کے ذریعہ متوازن رہتا ہے۔

7. کلوگرام مربع میٹر

6.4

1. زاویائی معیارحرکت

$$L=\left(m\frac{d^2}{4}+m\frac{d^2}{4}\right)\omega$$

$$L=\frac{md^2\omega}{2}$$

2. زاویائی معیارحرکت محور کے گرد گھومنے سے

$$L=I\omega=m\frac{r^2}{4}\times\omega$$

جمود کا معیار اثر قطر کی وجہ سے $r=\frac{mr^2}{4}$

$$\therefore\ \mathrm{L}=2.0\mathrm{kg}\times\frac{(0.2)^2\,\mathrm{m}^2}{4}\times10\,\mathrm{rads}^{-1}=0.2\mathrm{kg\,m^2s^{-1}}$$

3. کلیہ بقائے معیارحرکت سے

$$I_i\omega=\left(I_1+I_2\right)\ \omega_1$$

جہاں پر I_1 جمود کا معیار اثر حقیقی پہیہ اور I_2 دوسرے پہیہ کا ابتدائی زاویائی رفتار ω اور انتہائی زاویائی رفتار ω_1 ہے۔

$$mr^2\ \omega=\left(mr^2+\frac{m}{2}r^2\right)\omega_1$$

$$\omega=\frac{3}{2}\omega_1\Rightarrow\ \omega_1=\frac{2}{3}\omega$$

4. زمین کی موجودہ دوران گردش T اور بعد کی $\mathrm{T_0}$ ہے تب بقائے معیارحرکت کی رو سے

$$\frac{2}{5}M\left(25R\right)^2\times\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)=\frac{2}{5}MR^2\times\left(\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$=\frac{2}{5}MR^2\times\left(\frac{2\pi}{T}\right)$$

$\mathrm{T_0}=6.25\ \mathrm{T}$ اس طرح زمین کا بعد کا دوران گردش موجود گردش کی مدد سے $\mathrm{T_0}=6.25$ گنا ہے۔

6.5

.1 اس طرح، $\left(I=\frac{2}{5}MR^2\right)$

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=mgh$$

or $$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mr^2.\frac{v^2}{r^2}=mgh$$

$$\therefore \omega=v/r$$

It gives $v=\sqrt{\frac{10}{7}gh}$

.2 ٹھوس استوانہ سے $I=\frac{mR^2}{2}$

جملہ . 1 K.E $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}.\frac{v^2}{R^2}=\frac{3}{4}mv^2$

$\because \omega=v/r$

لہٰذا خطی حرکی توانائی کی کسر سے. K.E.$=\dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{3}{4}mv^2}=\frac{2}{3}$

اوپر کے سوال 1 کے مطابق: $v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}$

.3 m = 2 kg r = 10 cm = 0.1 m θ = 30°, s = 2 m

(a) & (b) a = g sin θ

$$= 10\times\sin 30° = 10\times\frac{1}{2} = 5\,\text{m/s}^2$$

$$a = r\propto \;\Rightarrow\; \propto=\frac{a}{r}=\frac{5}{0.1}=50\ \text{rad/s}^2$$

(c) $v^2-u^2=2as$

$v^2-0=2\times5\times2=20$

$v=\sqrt{20}\,\text{m/s},\quad \omega=v/r=\frac{\sqrt{2.0}}{0.1}=10\sqrt{20}\ \text{rad/s}$

$KE = 1/2\ mv^2 + 1/2\ I\omega^2$ (where $I = 2/5\ mr^2$)

$$= 1/\cancel{2} \times \cancel{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} \times 2 \times (0.1)^2 \right) \times 100 \times 20$$

$$= 20 + \frac{1}{\cancel{2}} \left(\frac{\cancel{4}^2}{5} \times 0.01 \right) \times 2000$$

$$= 20 + \frac{\cancel{40}^8}{5}$$

$$\therefore \quad KE = 28 \text{ J}$$

ٹرمنل مشقی جوابات

.1 نہیں۔ زمین تمام ذرات کو کشش کرتی ہے۔ لیکن ان تمام پر کشش قوتوں کا نتیجہ مرکزی کمیت mg پر عمل کرتا ہے۔

.2 ہاں (1) دھاتی چھلہ (2) کھوکھلا کرہ

.3

$$m_c = 12 \;\; ; \;\; m_{O_2} = 16$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1.13 \times 10^{-10}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{16 \times 1.13 \times 10^{-10}}{28} = 0.64 \times 10^{-10} m$$

.4

$$m = 5\text{kg}, \quad d = 0.2 \text{ m} \quad \omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$$

$$I = mr^2 = 5 \times (0.1)^2 = 5 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2$$

$$KE = 1/2 \times 5 \times 10^{-2} \times 100 \times 100 = 250\text{J}$$

$$KE = mgh \Rightarrow 250 = 5 \times 10 \times h \Rightarrow h = 5\text{m}$$

.5

$$r = 1/2m \quad \omega_0 = 2\text{rev s}^{-1} \quad \alpha = 3\text{rev s}^{-2}$$

(a) $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$$= 2 + 3 \times 2 = 8\text{rev/s} = 8 \times 2\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = 16\pi \text{ rads}^{-1}$$

(b) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 2 \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{2}{\cancel{4}} = 10 \text{ reveloution}$

$$\theta = 20\pi \text{ rad}$$

$$\text{(d)} \quad a=\omega^2 r=(16\pi)^2 \times \frac{1}{2}=1280\, m/s^2$$

$$\omega=20\, rads^{-1} \quad \omega=0 \quad t=4s \quad I=0.2kgm$$

.6
$$\Delta E=\frac{1}{2}I\left(\omega^2-\omega_0^2\right)=\frac{1}{2}\times 0.2\times 400=40J$$

.7
$$\text{(a)} \quad I_1=5\times 10^{-2}\, kg\, m^2 \quad \omega_1=\frac{600\times \pi}{60}=20\pi\, rads^{-1}$$

$$I_2=0.2kg\, m^2 \quad \omega_{comm}=?$$

$$I_1\,\omega_1=(I_1+I_2)\,\omega_{comm} \Rightarrow \omega_{comn}=4\pi\, rads^{-1}$$

$$\text{(b)} \quad E_i=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2=\frac{1}{2}\times 5\times 10^{-2}\times 400\times \pi^2=100$$

$$E_f=\frac{1}{2}(I_1+I_2)\,\omega_{cm}^2=\frac{1}{2}(0.25)\times 16\, \pi^2$$

$$=0.125\times 160=20$$

$$E_f=\frac{E_i}{5}$$

$$\text{(c)} \quad \alpha=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\theta} \qquad \tau=I_1\,\alpha=49\pi J$$

.8 بنائے گئے مائل مستوی پر ٹھوس لڑکھڑاتے ہوئے نیچے کی طرف تیزی سے حرکت کرتا ہے۔

.9
$I=1000\ kg\ m^2 \quad \omega=10\ rad/s \quad \omega_2=100\ rad/s$

$\theta=100$ radian

$$\omega_2^2-\omega_1^2=2\alpha\theta \Rightarrow (100)^2-(10)^2=2\alpha(100)$$

$$10000-100=200\alpha$$

$$\alpha=\frac{\cancel{9900}}{\cancel{200}}=49.5\, rad/s^2$$

$$\tau=I\alpha=1000\times 49.5=49500\, Nm$$

$$\Delta KE=\frac{1}{2}I\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)=\frac{1}{2}\times 10^3\times(9900)$$

$$49.5\times 10^5 J$$

$r = 0.1m \quad m = 1kg \quad \omega_0 = 0 \quad \theta_1 = 2.5$ .10

$$\theta_1 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}\alpha(1)^2 = 2.5$$

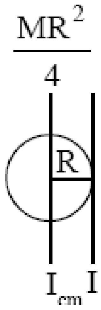
$$\alpha = 5; \quad \theta_1 = \frac{5}{2}\, rad$$

$$\theta_2 = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha(2)^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10\, rad$$

$$\theta \text{ in next second } = \theta_2 - \theta_1 = 10 - \frac{5}{2} = 7.5 \text{ rad}$$

$$\tau = I\alpha = \left(mr^2\right)\alpha = 1 \times (0.1)^2 \times 5$$

$$\tau = 5 \times 10^{-2} J$$



$$I = I_{cm} + MR^2 = \frac{MR^2}{4} + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$$ .11

$$I = MK^2 \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{K_1^2}{K_2^2} \quad \frac{100}{100+x} = \frac{(100)^2}{(110)^2} = \frac{100\cancel{00}}{121\cancel{00}}$$

$$\frac{100}{100+x} = \frac{100}{121} \Rightarrow x = 21\%$$ .12

$$I = 0.3\, kg\, m^2 \quad \omega_0 = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\pi \quad \omega = 0$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{\tau} = \frac{10\pi}{20} = \frac{-\pi}{10}\, rad/s^2$$ .13

$$\tau = I\alpha = 0.3 \times \frac{\pi}{10} = 3\pi \times 10^{-2} Nm$$

$$I = 0.63\, Kgm^2 \quad \omega_1 = \frac{\overset{2}{\cancel{40}} \times 2\pi}{\underset{3}{\cancel{60}}} = \frac{4\pi}{3}\, rad/s$$ .14

$$\omega_2 = \frac{\overset{4}{\cancel{80}} \times 2\pi}{\underset{3}{\cancel{60}}} \quad = \frac{8\pi}{3}\ rad/s$$

$$W = \frac{1}{2} I\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = \frac{1}{2} \times 0.63 \left(\frac{64\pi^2}{9} - \frac{16\pi^2}{6}\right)$$

$$= \frac{0.63}{2} \times \frac{10}{9}(48) = 16.8J$$

$$\overline{\mathbf{F}} = 7\bar{\mathbf{i}} + 3\bar{\mathbf{j}} - 3\overline{\mathbf{k}} \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{k}}$$

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

.15

$$= \hat{\mathbf{i}}(-3+3) - \hat{\mathbf{j}}(-3+7) + \hat{\mathbf{k}}(3-7)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = -4\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$$

7 سادہ موسیقی حرکت

(Simple Hermonic Motion)

تعارف:

ہم اپنی روزانہ زندگی میں حرکت کی بہت سی قسمیں دیکھ چکے ہیں۔ان میں سے کچھ کے بارے میں آپ پہلے سیکھ چکے ہیں مثلاً مستقیم حرکت (Rectilinear Motion)' محرک غلا(Projectile) کی حرکت گردشی (دائروی راستہ) پرحرکت اور کچھ دوسرے اجسام مختلف حرکت کوانجام دیتے ہیں جو وقت کے ایک خاص وقفے کے بعد دہرائی جاتی ہیں۔مثال کے طور پر سورج کے اطراف سیاروں کی حرکت ہاتھ کی گھڑی کی حرکت' جھولے کی حرکت' دیواری گھڑی کے رقاص (پنڈولم) کی حرکت اسی نوعیت میں دہرائی جاتی ہے ایسی حرکت کو دوری حرکت کہتے ہیں۔

مقاصد:

اس سبق کا مطالعہ کرنے کے بعد آپ اچھی طرح سے واقفیت حاصل کریں گے۔

- اہتزازی حرکت اور دوری حرکت کی وضاحت کیجئے۔
- بتلائیے کہ اہتزازی حرکت دوری ہوتی ہے لیکن دوری حرکت ضروری نہیں کہ اہتزازی ہو۔
- سادہ موسیقی حرکت کی وضاحت کیجئے ہموار دائروی حرکت کا پروجیکشن یا تخمینے دائرے کے قطر پر پیش کیجئے۔
- سادہ موسیقی اہتزازندہ(Oscillator) کا بنیادی اصطلاحاتی تعلق کی وضاحت کیجئے۔
- دئے گئے سادہ موسیقی اہتزازندہ کا وقت دوران اخذ کیجئے۔
- دئے گئے سادہ موسیقی اہتزازندہ(Oscillator) کا توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت اخذ کیجئے۔
- جبری (تقصیرDamped) اور آزادانہ ارتعاشات میں فرق کو بتلائیے۔
- گمگ کے مظہر کو سمجھائیے۔

دوری حرکت(Periodic Motion):

ایسی حرکت جو اپنے آپ کو باقاعدہ مساوی وقفوں میں دہرائی جاتی ہے' دوری حرکت کہلاتی ہے۔وقت کا سب سے چھوٹا وقفہ (مکمل گردش) کے لئے جس کے بعد حرکت دہرائی جاتی ہے اسکو وقت دوران کہتے ہیں۔اس کو علامت T سے ظاہر کرتے ہیں۔اس کی اکائی S.I نظام میں سکنڈ ہے۔کچھ دوری حرکتیں بہت تیز اور کچھ سست ہوتی ہیں۔اس لیے وقت کی آسان اکائیاں بھی استعمال کی جاتی ہیں۔مثال کے طور پر قلمی کوارٹز(Quartz) کی چھوٹی اکائی سکنڈ ہے کیونکہ یہ 10-6 سکنڈ ہے جب کہ سیارہ زمین کی مداری گردش 365 دنوں میں مکمل ہوتی ہے۔

دوری حرکت میں جھولے کی حرکت' دیوار کی گھڑی کے رقاص کی حرکت سورج کے گرد سیاروں کی حرکت' دوری حرکت سے مختلف ہے۔

ہاتھ کی گھڑی کی حرکت یہاں دوری حرکت میں کچھ ذرات اپنے اوسط مقام کے آگے پیچھے حرکت کررہے ہیں۔ جہاں پر کچھ دیگر ذرات ایک مقررہ نقطہ یا محور کے اطراف گھومتے ہیں۔ یہاں دوری حرکت میں کچھ ذرات اپنے اوسط مقام کے آگے پیچھے حرکت کررہے ہیں جہاں پر کچھ دیگر ذرات ایک مقررہ نقطہ یا محور کے اطراف گھومتے ہیں اسلیے دوری حرکت کی دوقسمیں ہیں۔ (i) اہتزازی حرکت (ii) غیر اہتزازی حرکت۔ذرات کی دوری حرکت یا اہتزازی حرکت یا موسیقی حرکت کے طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے جب کہ ایک مقررہ نقطہ یا محور کے اطراف ہو غیر اہتزازی حرکت کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔

Jean Baptiste Joseph Fourier (1798-1830):

جین بپٹسٹ جوزف فوئیر (1830-1768) فرانسیسی ریاضی داں جو اپنی فورئیر سلسلہ (Fourier Series) کے لئے سب سے زیادہ مشہور تھا وہ ایک پیچیدہ اہتزاز کا تجزیہ کرنے کے لئے Sine اور Cosine تفاعلات کی شکل میں کیا۔فوئیرے حرارت کے ایصال کے لئے ریاضیاتی نظریہ کا مطالعہ کیا۔وہ حرارت کے پھیلاؤ کو کنٹرول کرنے والی جزوی تفریقی مساوات قائم کی اور علم مثلث تفاعل کی لامحدود سلسلہ کا استعمال کرتے ہوئے حل کیا۔ایک ٹیلر (Taylor) کی دوسری بیوی سے نویں بچے کے طور پر پیدا ہوا وہ یتیم ہوگیا۔ 10 سال کی عمر میں ایک پادری ایک استاد ایک انقلابی ایک ریاضی داں اور نپولین بوناپارٹ کے مشیر کے طور پر تربیت لے کر اس کی زندگی میں کئی رنگ تھے۔وہ لاپلاس، لگرینج بائیوٹ بوزش مالس ڈیلامرے آراگو اور کارنوٹ کا ہم عصر تھا۔ Lunar کریٹر اور ایفل ٹاور پر اس کا نام ان کی شراکت کو خراج تحسین ہے۔

7.2 اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion):

دوری حرکت میں اگر کوئی ذرہ ہی اوسط مقام پر آگے پیچھے حرکت انجام دیتا ہے تو اس حرکت کو اہتزازی حرکت یا موسیقی حرکت کہتے ہیں۔ یہ نوٹ کرنا ضروری ہے کہ ایک اہتزازی حرکت دوری ہوتی ہے لیکن ایک دوری حرکت ضروری نہیں ہے کہ اہتزازی ہو۔اہتزازی حرکت کی چند مثالیں یہ ہیں۔

1. جب جھولے میں موجود بچے کو ڈھکیلا جاتا ہے تو جھولا اپنے اوسط مقام پر آگے پیچھے حرکت کرتا ہے۔
2. دیواری گھڑی کا رقاص (پنڈولم) اہتزازی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جب کہ اوسط مقام پر آگے پیچھے حرکت کرتا ہے۔
3. گٹار کے تار پر ہلکے ہلکے انگلیاں پھیرنا پر ارتعاش اوسط مقام پر آگے پیچھے حرکت کرتا ہے۔
4. ایک سادہ رقاص (پنڈولم) کے باب (Bob) کی حرکت ایک اہتزازی حرکت ہے۔
5. AC برقی سپلائی کا وولٹیج یا کرنٹ متبادل طور پر اوسط قدر (صفر) کے مثبت اور منفی ہوتی ہے۔

7.1 اسباقی سوالات

1. دوری حرکت اور اہتزازی حرکت میں فرق کیا ہے؟
2. مندرجہ ذیل میں کون سی مثالیں دوری حرکت کی نمائندگی کرتی ہیں؟

(i) بندوق سے چلائی گئی گولی۔

(ii) جوہر میں الکٹران مرکزے کے اطراف گردش کرتا ہے۔

(iii) سڑک پر ہموار رفتار سے چلنے والی گاری۔

(iv) سورج کے اطراف گردش کرنے والے دمدار ستارا۔

(v) U نما نلی میں مرکزی کالم میں پارہ کی ارتعاشی حرکت۔

.3 (i) اہتزازی دوری حرکت۔ (ii) غیر اہتزازی دوری حرکت

7.3 سادہ موسیقی حرکت (Simple Harmonic Motion):

موسیقی اہتزازندہ کے (اہتزازات) ارتعاشات کی نمائندگی ان اصطلاحات سے کی جاسکتی ہے جس میں زاویہ Sine اور Cosine شامل ہو۔ پھر اس کی اوسط مقام سے اہتزازی ذرہ کا نقل مکان کو ایک مساوات کے ذریعہ پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$y = a \sin \theta \text{ (or) } y = a \cos \theta \text{ (or) } y = A \sin \theta + B \cos \theta \qquad (7.1)$$

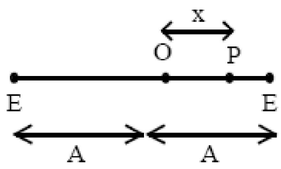


Fig. 7.1 : Particle executing oscillatory motion about the origin 'O' of the x-axis. (Linear Oscillations)

جہاں پر B, A, a مستقل ہیں۔ ذرہ کی اہتزازی حرکت مبدا 0 اور 2- محور فرض کرو کہ m کمیت والے ذرہ کا مبدا (E-0-E) x- محور پر ایک قوت F عمل کرتی ہے۔ اس قوت کی وجہ سے ذرہ اہتزازی حرکت حاصل کرتا ہے۔ اس کو شکل 7.1 میں بتلایا گیا۔ مان لیجئے کہ ذرہ کا نقل مقام x اکائی وقتمیں ہے۔ ذرہ کا نقل مقام راست متناسب ہوتا ہے۔ مبدا پر عمل کرنے والی قوت F کے اور قوت کی سمت نقل مقام کی مخالفت کرتی ہے ہم اسے اس طرح بیان کرتے ہیں۔

$$F \,\alpha\, -x$$

$$F = -kx \qquad (7.2)$$

جہاں پر K ایک مستقل ہے جسے قوت کا مستقل کہا جاتا ہے اور منفی نشان اس بات کی نمائندگی کرتا ہے کہ قوت کی سمت نقل مقام کی سمت کے مخالف ہے۔ اہتزازی ذرے پر عمل کرنے والی قوت کے لئے نیوٹن کا دوسرے کلیہ حرکت کی رو سے

$$F = m\,a \qquad (7.3)$$

مساوات 7.2 اور 7.3 سے

$$m\,a = -kx \text{ (or)} \qquad (7.4)$$

$$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x \qquad (7.5)$$

$$a \,\alpha\, -x$$

جہاں پر $\left(\frac{k}{m}\right) = \omega^2$ مستقل ہے۔

مساوات (7.5) سے یہ معلوم ہوتا ہے توازنی نظام میں اہتزازی حرکت ذرہ کے اسراع پر عمل کرنے والے نقل مقام کے راست متناسب ہوتی ہے۔

جب اہتزازی حرکت کرنے والے جسم پر لگ رہی قوت اہتزاز کے کسی بھی نقطے پر وسطی نقطہ سے جو مقام توازن بھی ہے نقل مقام کی سمت وسطی نقطہ کی جانب ہوتی ہے اس کو سادہ موسیقی حرکت کہتے ہیں۔

کسی ذرے کی ایک ثابت راستے پر ایک اوسط مقام کے گرد آگے پیچھے کی وہ حرکت جس میں ذرے کا اسراع ہمیشہ اوسط مقام کی جانب اور اوسط مقام سے ذرے کے نقل مکان کے راست متناسب ہو۔ سادہ موسیقی حرکت کہلاتی ہے۔

مندرجہ بالا مساوات (7.4) میں اہتزازی ذرہ کا مقام اسراع کے لئے نقل مکان دوسرے درجے کی تفرقی مساوات سے

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

جہاں پر $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ زاویائی تعدد ہے۔

مساوات (7.6) سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات ہے۔

مشغلہ 7.1

فرض کرو کہ ایک ذرہ کا نقل مکان y ہے۔ سادہ موسیقی حرکت میں مساوات کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$y = A\cos\theta$ یا $y = A\sin\theta$

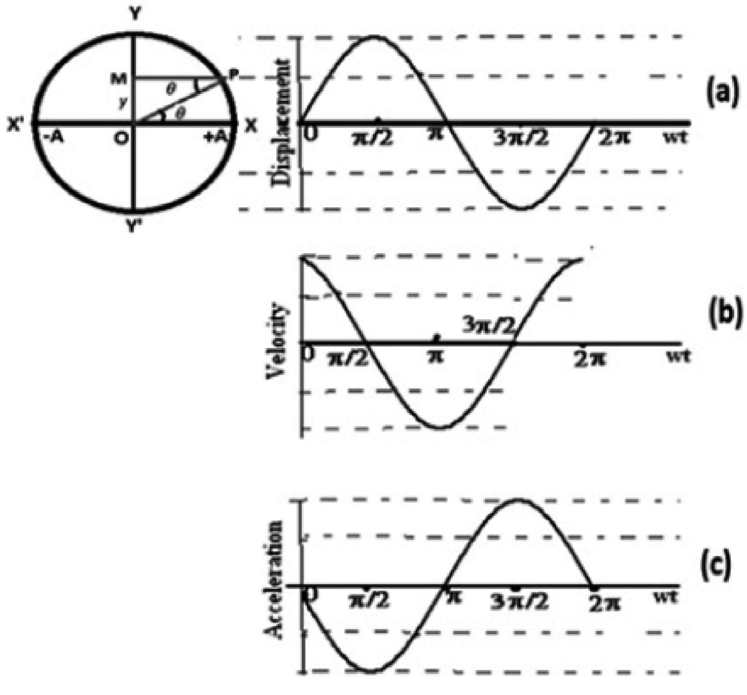
آپ کی ریاضی کی کتاب میں $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی قدریں $\theta = 0$, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o, 150^o, 180^o, 210^o, 240^o, 270^o, 300^o, 330^o اور 360^o درجے۔ مان لیجئے کہ A(2.5)cm سنٹی میٹر A= پر زاویہ کے مطابق y کی اقدار کا تعین کرتا ہے رشتے کے لحاظ سے θ ایک مناسب پیمانہ منتخب کر کے y اور θ کے درمیان ایک پلا کا گراف بنائیں گے۔ اس طرح θ پلاٹ θ کا دوسرا گراف y اور θ کے درمیان بنائیں گے آپ نوٹ کریں کہ دونوں گراف کا اہتزاز (ارتعاش) A+ اور A- کی نمائندگی کرتا ہے۔ اس طرح ایک خاص قسم کی اہتزازی حرکت کو ظاہر کیا جاتا ہے جس میں کسی زاویہ کی ہو اس طرح کے اثرات کا امتزاج ہوتا ہے۔

7.4 ترسیمی سادہ موسیقی حرکت (دائرہ میں)

فرض کرو کہ ایک ذرہ دائرے کے محیط پر حرکت کر رہا ہے جس کا نصف قطر A ذرہ کی مستقل رفتار v ہے۔ مان لیجئے کہ ذرہ x- محور کی سمت میں حرکت کرتے ہوئے اکائی وقفہ t=0 جب کہ نقطہ p پر ہو۔ مقام سمتی مقدار op کی جانب ذرہ کا وقفہ t لیا گیا ہے۔

OM قطر yy پر op مقامی سمتی مقدار دائرے کے محیط پر گھومتا ہے اس طرح مقامی سمتی مقدار op سادہ موحرکت انجام دیتا ہے اوپر کی

مساوات Fig 7.2(a) سے مثلث OMP



نقل مقام

رفتار

اسراع اہتزازی حرکت جب کہ مقامی سمتی مقدار کا ذرہ دائرے کے محیط سے نصف

Fig. 7.2

$$\sin\theta = \frac{OM}{OP}$$

$$OM = OP\ \sin\theta \qquad (7.7)$$

جہاں پر دائرے کا نصف قطر OP=A اور پری مقامی سمتی مقدار om=y اور θ زاویائی مقام

گھومنے والے ذرہ کا زاویائی رفتار $\omega = \frac{\theta}{t}$ ہے اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\theta = \omega t$$

مساوات (7.7) میں om,op کی اور θ کی قدریں درج کرنے پر

$$y\ (t) = A\ \sin\ \omega t \qquad (7.8)$$

مساوات (7.8) کو اس طرح لکھا جاتا ہے کہ مساوات میں ہیئت (Phase) کی قدر t=0 پر اگر مقامی سمتی مقدار کا ذرہ (دوسرے x- محور پر) سے معلوم کی جاتی ہے۔

$$y\ (t) = A\ \sin\ (\omega t + \phi) \qquad (7.9)$$

جہاں پر ϕ ہیتی زاویہ یا ہیئت مستقل اگر حیطہ معلوم ہو تب ہمیت t=0 پر مقامی سمتی مقدار سے معلوم کی جاتی ہے۔

جہاں پر......ابتدائی ہیئت جوزاویہ x- محور پرسمتی مقامی op وقت 0=t ہے۔شکل (a)7.2 کے مطابق Sine کی ترسیم وقت t مقامی سمتی مقدار کی نقل مکان y کے درمیان پلاٹ کردہ گراف سے حاصل ہوتا ہے۔

سادہ موسیقی اہتزازندہ کی رفتار

سادہ موسیقی اہتزازندہ اکائی وقت t میں چال v ہو تب تفرقی طریقے سے نقل مکان کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} A \sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = A\ \omega\ \cos\ (\omega t + \phi) \qquad (7.10)$$

شکل (a)7.2 کے مطابق Cosine کی ترسیم وقت t مقامی سمتی مقدار کی رفتار سادہ موسیقی اہتزازندہ کی رفتار v کے درمیان پلاٹ کردہ گراف سے حاصل ہوتا ہے۔

سادہ موسیقی اہتزازندہ کا اسراع

سادہ موسیقی اہتزازندہ اکائی وقت t میں اسراع a ہوتو تب تفرقی طریقے سے رفتار کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} A\ \omega\ \cos(\omega t + \phi)$$

$$a\ (t) = -A\ \omega^2\ \sin\ (\omega t + \phi) \qquad (7.11)$$

شکل (a)7.2 کے مطابق Sine کی ترسیمی وقت مقامی سمتی مقدار کی اسراع کے درمیان پلاٹ کردہ گراف سے حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (7.9) اور (7.11) میں قیمتیں درج کرنے پر

$$a = -\ \omega^2 y \qquad (7.12)$$

$a\ \alpha\ -\ y,$ جہاں پر ω^2 ایک مستقل ہے۔

اوپر کی مساوات (7.12) کے مطابق ذرہ کے اسراع a کی سمت دائرے کے محیط مقامی سمتی مقدار (نقل مقام) کے راست تناسب میں ہوتی ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کسی بھی قطر پر سادہ موسیسی اہتزازندہ حرکت کرتا ہے۔

7.5 سادہ موسیقی حرکت کے بنیادی وابستہ شرائط

نقل مکان: نقل مقام سے مراد ایک دئے گئے وقفہ میں سادہ موسیقی حرکت (موسیقی اہتزازندہ) کو اپنی اوسط مقام سے ذرہ تک فاصلہ ہے حسابی انداز میں موسیقی اہتزازندہ کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$y\ (t) = A \cos \theta \quad (\text{یا}) \quad y\ (t) = A \sin \theta$$

جہاں θ ہیئتی زاویہ اور $\theta = \omega t$ زاویائی رفتار ہے۔

لہٰذا ہم موسیقی اہتزازندہ کی نقل مکانی کا اظہار اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$y\ (t) = A \sin \omega t \ \ (\text{or})\ y\ (t) = A \cos \omega t \qquad (7.13)$$

مندرجہ بالا اظہار سے ہر وضاحت ہوتی ہے کہ نقل مکان wt کا ایک تفاعل ہے اور دیکھا جا سکتا ہے کہ موسیقی اہتزازندہ کی نقل مکان دہرایا جاتا ہے تو 2π ریڈین کے (Integral multiple) کامل حاصل ضرب سے بڑھایا جا سکتا ہے۔

Amplitude (حیط ارتعاش): حیط ارتعاش سے مراد انتہا کی نقل مکان موسیقی اہتزازندہ کے اوسط مقام کی جانب ہو۔ اس کو a یا A سے ظاہر کرتے ہیں اس کی اکائی S.I نظام میں میٹر اور CGS نظام میں سنٹی میٹر ہوتی ہے۔

اہتزازندہ (Oscillator) کی نقل مکان کی مساوات میں A حیط ارتعاش ہے۔

وقت دوران (Time Period): اہتزازندہ کو ایک مکمل اہتزاز کے لئے درکار وقت' وقت دوران کہلاتا ہے۔ اس کو T سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کو سکنڈ میں پیمائش کرتے ہیں۔

مندرجہ بالا تعریف سے ایک اہتزازندہ اپنی نقل مکان کو دہراتا ہے جب ہیئت زاویہ wt میں 2π ریڈین کا اضافہ ہوتا ہے اس کے لئے درکار وقت' وقت دوران T لیا جاتا ہے اس کو ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

$$\omega T = 2\pi$$

$$\text{Time period}(T) = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (7.14)$$

زاویائی تعدد (Angular Frequency): سے مراد ہیئتی زاویہ میں شرح تبدیلی کو زاویائی تعدد کہتے ہیں۔ ایک مکمل اہتزاز کے لئے ہیئت زاویہ 0 تا 2π ریڈین ہوتا ہے۔ زاویائی تعدد کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (7.15)$$

زاویائی تعداد کو ریڈین فی سکنڈ ہے۔

تعدد (Frequency): اہتزازندہ (Ocillator) کے اکائی وقت میں ارتعاشات یا اہتزازیت کو تعدد کہتے ہیں۔ اس کو اہتزازندہ کا تعدد کہتے ہیں اس کو f یا v یا n سے ظاہر کرتے ہیں حسابی انداز میں تعدد سے مراد وقت دوران کا برعکس کو کہتے ہیں اس کو T سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$f = \frac{1}{T} \qquad (7.16)$$

تعدد کی اکائی فی فکنڈ یا Hertz ہے۔ اوپر کی مساوات ہے

$$\text{Angular frequency, } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\left(\text{since, } \frac{1}{T} = f, \qquad \text{where } f \text{ is frequency}\right)$$

$$\omega = 2\pi\ f \qquad (7.17)$$

اہتزازندہ کی ہیئت (Phase of the Oscillator): ہیئتی زاویہ سے مراد ایسا زاویہ جس کی Sine یا Cosine اہتزازندہ کی حرکت کے سمت اور مقام کے لئے اکائی وقفہ کی نشاندہی کرتی ہے۔اس کو ریڈین میں محسوب کرتے ہیں۔

موسیقی اہتزازندہ کی نقل مقام کی مساوات کو ہم جانتے ہیں۔

$$y\ (t) = A \sin \omega t$$

اگر اہتزازندہ کی زاویائی نقل مقام t=0 محدود محور کے ساتھ t=0 مطابقت نہیں رکھتی ہے تب زاویائی نقل مقام کا (ϕ) ابتدائی ہیئت سمجھا جاتا ہے۔اس طرح اہتزازندہ کی نقل مقام کی مساوات کو اس طرح تبدیل یا لکھا جاتا ہے۔

$$y\ (t) = A \sin (\omega t + \phi)$$

اوپر کی مساوات میں ($\omega t + \phi$) اہتزازندہ کا اہتزازندہ کی ہیئت ہے جس کی Sine یا Cosine سمت اور مقام کے لئے نشاندہی کرتی ہے۔

مثال 7.1:

ایک تھالی جس میں 9 کلوگرام کمیتی بلاک کو رکھا گیا۔جس کو ایک اسپرنگ سے سہارا دیا گیا۔تھالی کو تھوڑے نیچے کی طرف دیا گیا اور پھر چھوڑ دیا گیا تو تھالی پر ایک مستقل قوت k جس کی شکل 7.3 میں بتلایا گیا یہ سادہ موسیقی حرکت کی شروعات کرتی ہے جب کہ وقفہ 1 سکنڈ لیا گیا اگر وقفہ کو بڑھا کر 2 سکنڈ کرنے پر بلاک کی کمیت محسوب کیجئے۔

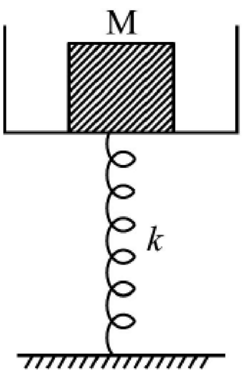


Fig. 7.3

حل:

کسی نظام کا زاویائی تعدد دیا گیا ہے $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

جہاں m اہتزازی نظام کی کمیت ہے

اس طرح $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}$$

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

اگر تھالی خالی ہو m=9kg اور T=is تب

$$9 = \frac{k\,(1)^2}{4\pi^2}$$

اگر وقفہ بڑھا کر بلاک کی کمیت m=9+m اور T=25 تب

$$9 + M = \frac{k(2)^2}{4\pi^2}$$

اوپر کی دو مساوات سے

$$\frac{9 + M}{9} = 4$$

Therefore, M = 27 kg

مثال 7.2:

ایک اسپرنگ کے مستقل $1600\ N\ m^{-1}$ سے افقی میز بموجب شکل 7.4 میں بتلایا گیا ہے ایک کمیت m=4.0kg اسپرنگ کے نچلا یا آخری سرے سے منسلک کر کے کمیت کے دائیں جانب افقی فاصلے 4.0cm سے کھینچا گیا کو محسوب کیجئے۔ (i) تعدد (ii) اعظم ترین اسراع (iii) اعظم ترین کمیتی چال یا رفتار

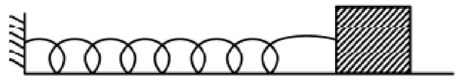


Fig. 7.4

حل:

$$\text{ہم جانتے ہیں}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ and } \omega = 2\pi f$$

$$\text{تب تعدد } f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1600}{4}} = \frac{1}{2\pi} \times 20 = 3.18\ Hz$$

$$\text{اعظم ترین اسراع} = a\,\omega^2,$$

جہاں پر a تعدد ہے

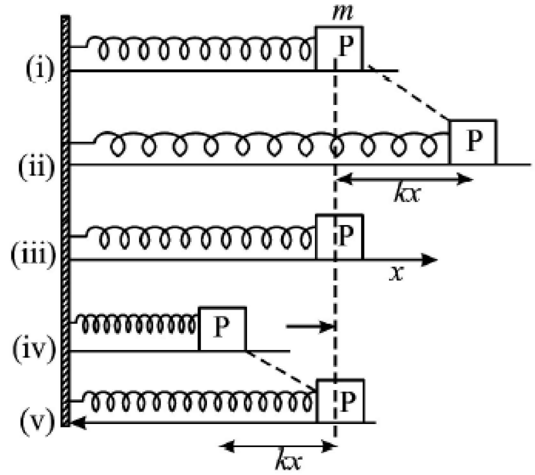
$$= a\left(\frac{k}{m}\right) = (0.04\,m)\left(\frac{1600\,Nm^{-1}}{4\,kg}\right) = 16\ m s^{-2}$$

$$\text{اعظم ترین چال}, \quad v_{max} = a\,\omega = a\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= (0.04\,m)\sqrt{\left(\frac{1600\,Nm^{-1}}{4\,kg}\right)} = 0.8\,m s^{-1}$$

7.6 سادہ موسیقی حرکت کی مثالیں

7.6.1 کمیتی نظام میں افقی اسپرنگ سے اہتزاز (ارتعاش)



کمیتی نظام میں افقی اسپرنگ سے اہتزاز

ایک ہموار افقی سطح پر لچکدار اسپرنگ کی قوت پر غور کریں۔ اس کی لمبائی x- محور کے ساتھ اسپرنگ کے ایک سرے پر کمیت m کو جوڑیں اور اسپرنگ کے دوسرے سرے کو سخت دیوار کے سہارے سے جوڑ دیجئے۔ مان لیجئے کہ اسپرنگ کی کمیت جوڑے ہوئے بلاک کی کمیت کے مقابلے میں نہ ہونے کے برابر ہے ہوا کی مزاحمت اور رگڑ کی وجہ سے توانائی کا کوئی نقصان نہیں ہوتا ہے۔

جب بلاک p کو تھوڑے فاصلے سے افقی طور پر کھینچا جاتا ہے تو اسپرنگ کا پھیلاؤ x اور بلاک p پر قوت $K = \frac{1}{2}mv^2$ عمل کرتی ہے۔ یہ قوت اسپرنگ کے پھیلاؤ کے مخالف ہوتی ہے تو اسپرنگ کے بلاک توازنی نظام میں واپس آ جاتے ہیں۔ رفتار v اور حرکی توانائی k کی وجہ سے بلاک اوسط مقام پر اہتزاز کرتا ہے۔ کمیتی نظام میں افقی اسپرنگ سے اہتزاز کا وقت دوران یہ ہے

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

جہاں پر؛ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

اس طرح

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7.18)$$

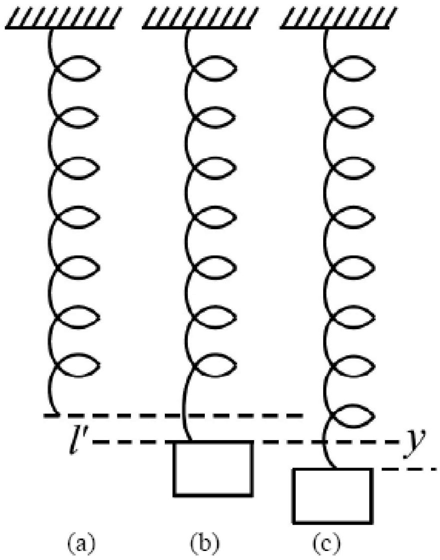
جہاں پر k قوت کا مستقل ہے اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اسپرنگ میں پھیلاؤ فی اکائی قوت ہے اور m اسپرنگ سے منسلک کمیت ہے۔

7.6.2 کمیتی نظام میں عمودی اسپرنگ سے اہتزاز

فرض کرو کہ ایک اسپرنگ کے ایک سرے کو سخت استوار سے لٹکایا گیا اسپرنگ کے نچلے سرے پر ایک کمیت m لگائی جاتی ہے۔ کمیت کی وجہ سے اسپرنگ پر قوت mg عمل کرتی ہے تو اسپرنگ کے پھیلاؤ کو l شکل 7.6 میں بتلایا گیا۔ اسپرنگ پر مستقل قوت عمل کرنے کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$k = \frac{mg}{l}$$

اگر بلاک y کو ایک طرف کھینچا جائے اور پھر چھوڑ دیا جائے تو یہ وسطی مقام کے آگے پیچھے حرکت کرتا ہے اسپرنگ میں ایک مخالف قوت پیدا ہوگی جو کمیت کو اس کے تعدیلی مقام کی طرف کھینچے گی اور یہ مخالف قوت f=-ky ہوگی۔ اس لئے یہ سادہ موسیقی حرکت میں نیچے اور اوپر حرکت کرے گی۔ اہتزاز کا وقت دوران T سے

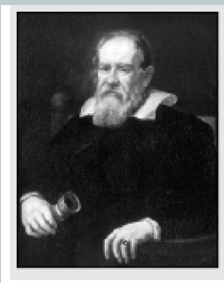


7.6 کمیتی نظام میں عمودی اسپرنگ میں اہتزاز

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7.19)$$

k اسپرنگ کا مستقل ایک استوار جسم سے منسلک ایک بلاک جس کی کمیت m طبعی طور پر (7.19) مساوات سے زیادہ اہتزازی تعدد کا حاصل ہوگا۔

گیلیلیو گیلیلی (1564-1642)(Galileo Galilei (1564-1642)):



Vincezio Galilei کے بیٹے کا نام گیلیلیو تھا۔ ان کے والد پیسا اٹلی میں اون کے تاجر تھے۔ جدید سائنس میں عقل اور تجربہ کی بنیاد پر گلیلیو کو بہت زیادہ ان کے سر سہرا جاتا ہے۔ بچپن میں گلیلیو کو موسیقی، آرٹ اور کھلونا سازی میں دلچسپی رکھتے تھے۔ ایک نوجوان کے طور پر وہ ایک ڈاکٹر بننا چاہتے تھے۔ طب کی تعلیم حاصل کرنے کے لئے وہ پیسا یونیورسٹی میں داخل ہوئے یہیں اس نے اپنی پہلی دریافت ایک سادہ رقاص Isochronosity پر کی۔ پہلا سادہ رقاص کو کرسچن ہیوگن پینڈولم گھڑی بنائی۔

پیسے کی کمی کی وجہ سے گلیلیو اپنی تعلیم مکمل نہ کرسکا۔ لیکن اپنی کوششوں سے اس نے مکینکس (Mechanic) کے مضمون کو اس سطح تک سیکھا اور ترقی دی کہ وہ گرینڈ ڈیوک نے ان کو ریاضی کا پروفیسر پیسا یونیورسٹی میں مقرر کیا۔ گلیلیو نے فلکیاتی اجسام کا مطالعہ کرنے کے لئے دوربین بنائی اور استعمال کرکے اپنے مشاہدات کے ذریعہ اس بات کے قائل ہوگئے کہ کوپرنیکس تھوری آف ہیلیوسنیٹرک کائنات درست ہے۔ اس نے اپنے دلائل کو ایک کتاب کی شکل میں 1632 میں شائع کیا۔ ''دنیا کے دو بنیادی نظاموں پر ایک مکالمہ'' میں شائع کیا جو کہ جغرافیائی کائنات کے ارسطو کے نظریہ سے مختلف ہے۔ چرچ کے تعاون سے گیلیلیو پر مقدمہ چلایا گیا اور اسے معافی مانگنی پڑی۔ لیکن 1636ء میں اس نے ایک اور کتاب "Dialogue on two

"New Sciences" شائع کی جس میں اس نے دوبارہ ارسطو کے قوانین حرکت میں غلط فہمی کو بتلایا۔ چونکہ گیلیلیو کے زمانے میں جدید ترین پیمائش آلات دستیاب نہیں تھے۔اس لیے اسے اپنے تجربات کو انجام دینے کے لئے اپنی ذہانت کا استعمال کرنا پڑا۔اس نے فکری تجربات کا آئیڈیا متعارف کرایا۔ جسے جدید سائنسداں اپنے تمام تر جدید ترین آلات کے باوجود استعمال کررہے ہیں۔

7.6.3 سادہ رقاص (Simple Pendulum)

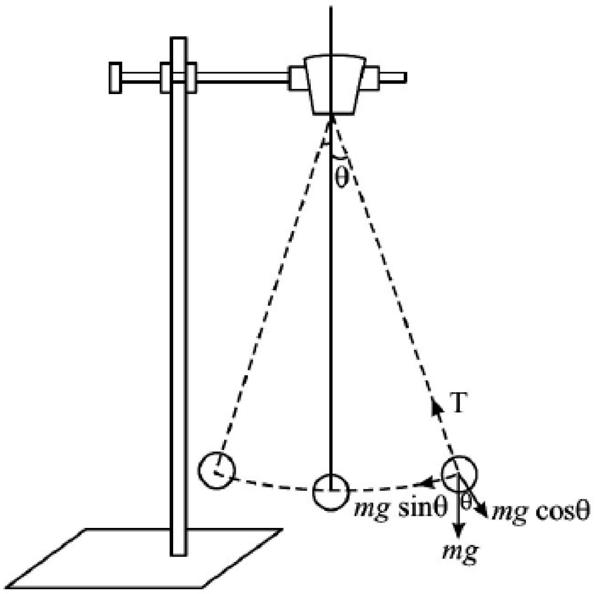


Fig. 7.7: Oscillations of a Simple Pendulum

سادہ رقاص ایک چھوٹا کروی گولہ (باب) ہوتا ہے جیسے انتصاباً ہلکے غیر کھنچاؤ دار لمبے دھاگے یا ڈوری کو ریٹارڈ استادہ سے منقسم کارک (Split Cork) کے دوحصوں کو معطل (کس) جاتا ہے جیسا کہ شکل 7.7 میں بتلایا گیا ہے۔ سادہ رقاص کا اہتزاز مان لیجئے کہ باب (گولہ) کو کمیتی ...... سمجھا جاتا ہے اور دھاگے کو ناقابل تسخیر سمجھا جاتا ہے۔اگر رقاص کو ایک طرف ڈھکیل رکھینچ کر چھوڑ دیا جائے تو وہ تعدیلی مقام کے اطراف آگے اور پیچھے ارتعاش (اہتزاز) کرتا ہے جس نقطہ سے رقاص لٹکایا جاتا ہے اس کو نقطہ تعلیق کہتے ہیں۔گولہ کا مرکز جاذبہ اہتزازی مرکز کہلاتا ہے۔ نقطہ تعلیق سے ارتعاشی مرکز کا درمیانی فاصلہ رقاص کا طول کہلاتا ہے رقاص پر قوت کے عمل سے باب (گولہ) تعدیلی مقام کو شکل 7.7 میں دکھایا گیا ہے وہ یہ ہے:

(a) باب (گولہ) کا وزن mg انتصاباً نیچے عمل کرتا ہے۔

(b) ڈوری کا تناؤ T انتصاباً اوپر کی طرف عمل کرنا ہے۔

اب باب (گولہ) کا وزن معلوم کرنے کے لئے دو اجزا میں تحلیل کرتے ہیں۔

1. دھاگے میں تناؤ کو متوازن کرنے کے لئے $mg \cos\theta$ مخالف سمت میں کام کرتا ہے۔
2. دھاگے کی سمت ساعت میں اسراع پیدا کرنے کے لئے باب کو تعدیلی مقام پر واپس لانے کے لئے $mg \sin \theta$ لیا جاتا ہے۔

سادہ رقاص میں اہتزاز لانے کے لئے $mg \sin\theta$ واپسی قوت کہلاتی ہے۔چھوٹے نقل مکان کے لئے گولے کو x اور واپسی قوت f کہا جاتا ہے۔

$$F = mg \sin\theta$$

بہت چھوٹی قدر کے لئے $'\theta', \sin\theta \approx \theta$

ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$F = mg\theta$$

شکل 7.7 سے

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{l}$$

اوپر کی مساوات میں......کی قیمت درج کرنے پر

$$F = mg\frac{x}{l} = \frac{mg}{l}x$$

$$F = \frac{mg}{l}x \tag{7.20}$$

لیکن اس کو تعدیلی مقام پر واپس لانے کے لئے باب پر کام کرنے والی واپسی قوت کے ذریعے سے

$$F = kx \tag{7.21}$$

مساوات (7.20) اور (7.21) سے

$$k = \frac{mg}{l}$$

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{l}$$

لیکن $\frac{k}{m} = \omega^2$ مندرجہ بالا مساوات یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7.22}$$

ہم جانتے ہیں زاویہ کی رفتار اور وقت دوران

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

مساوات (7.22) سے

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

سادہ رقاص کا وقت دوران

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.23}$$

مثال 7.3:

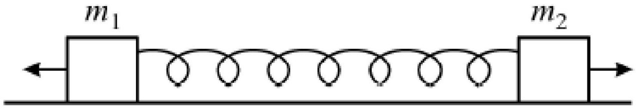


Fig. 7.8: Oscillatory system of masses attached to a spring

ایک اہتزازی نظام میں دو بلاک کمیتیں m_1 اور m_2 کو ہلکا اسپرنگ کا مستقل k سے منسلک کیا گیا ہے جب دو بلاک کو علیحدہ کر دیا جاتا ہے تو قوت F منتقل ہوتی ہے تب ہر ایک کا زاویائی تعدد محسوب کیجئے (مان لیجئے کہ بلاک ہموار سطح پر حرکت کرتے ہیں) اہتزازی نظام میں کمیتوں کو منسلک اسپرنگ سے

حل:

فرض کرو کہ دو بلاک کو علیحدہ کرنے پر نقل مقام اور کمیتیں بالترتیب x_1 اور x_2 ہے اور اسپرنگ کا پھیلاؤ $(x_1 + x_2)$ ہے تب m_1 کا اسراع $\frac{k(x_1+x_2)}{m_1}$ اور m_2 کا اسراع $\frac{k(x_1+x_2)}{m_2}$ ہے۔ چونکہ ایک ہی بے وزنی اسپرنگ سے کمیتوں کو واپسی قوت فراہم کی جاتی ہے ا

سلیے دو کمیتوں پر مشتمل نظام کی جملہ اسراع کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے اسطرح اسراع کو

$$a = \frac{k(x_1+x_2)}{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)} = \frac{kx}{\mu}$$

جہاں پر $x = x_1 + x_2$ اسپرنگ کا پھیلاؤ اور......کی نظام کی گھٹی......کمیت ہے۔ تب زاویائی تعدد

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

اس طرح دو جوہری سالمے H_2، Cl_2 اور HCl وغیرہ کے تجزیہ کو سمجھنے میں مدد کرتا ہے۔

7.2 اسباقی سوالات

1. ایک چھوٹے کروی گیند کی کمیت m ہموار کروی پیالے پر مس رکھتے ہوئے رکھا گیا جو نیچے مرکزی نقلہ سے تھوڑا دور ہے جیسا کہ شکل 7.9 میں بتلایا گیا تب گیند کا اہتزازی وقت دوران معلوم کرو۔

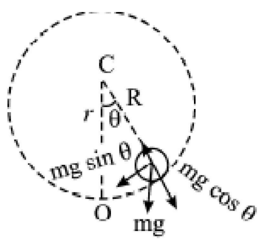


Fig. 7.9

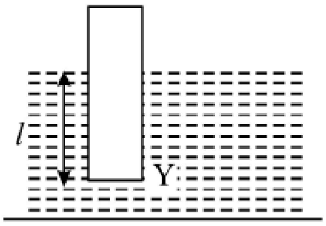


Fig. 7.10

2. ایک استوانہ جس کی کمیت m ہے جو عمودی طور پر مائع کی کثافت میں تیرتا ہے مائع کے اندر استوانہ کی لمبائی l ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے تو اہتزازی وقت دوران معلوم کرو۔

Fig. 7.11

3. دو ربر بیانڈ سے کمیت m جوڑ دیا گیا ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا تب اہتزازی تعدد معلوم کرو اور ربر بیانڈ کی مستقل قوت ہر ایک کی محسوب کرو۔

7.7 سادی موسیقی اہتزازندہ کی توانائی

ہم جانتے ہیں کہ جسم کا نقل مقام کی سادہ موسیقی اہتزازندہ کی مساوات سے

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \qquad (7.24)$$

رفتار سے مراد نقل مقام کی شرح تبدیلی کو کہتے ہیں۔تب سادہ موسیقی اہتزازندہ کی مساوات کو تفرق کرنے پر نقل مکان اور رفتار تبدیل ہوتے ہیں۔

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi) \qquad (7.25)$$

توانائی بالحرکت کی وجہ سے سادہ موسیقی اہتزازندہ کی مساوات اس طرح سیکھا جاتا ہے۔

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

جہاں پر m اہتزازندہ کی کمیت اور v رفتار ہے۔مساوات (7.25) میں درج کرنے پر

توانائی بالحرکت، $K.E. = \frac{1}{2} m \left(A\omega \cos(\omega t + \phi)\right)^2$

$$K = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (7.26)$$

$$K = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 (1 - \sin^2(\omega t + \phi))$$

$$K = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \phi))$$

مساوات (7.24) سے

$$K = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (7.27)$$

توازنی حالت میں جب کہ x سادہ موسیقی اہتزازندہ فاصلہ حاصل واپس قوت $F = -kx$ تب توانائی بالقوہ اہتزازندہ کی مساوات سے

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

مساوات 7.24 میں اوپر کی کمیت درج کرنے پر

$$U = \frac{1}{2} k (A \sin(\omega t + \phi))^2$$

$$U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 (\omega t + \phi) \quad (7.28)$$

مساوات 7.24 میں درج کرنے پر

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (7.29)$$

لیکن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ زاویائی تعدد اور مستقل قوت $k = m\omega^2$

مساوات 7.24 میں قیمتیں درج کرنے پر

$$U = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \phi) \quad (7.30)$$

لیکن جملہ توانائی اہتزازندہ کیا اس طرح ہم جانتے ہیں اس وقت

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \phi)$$

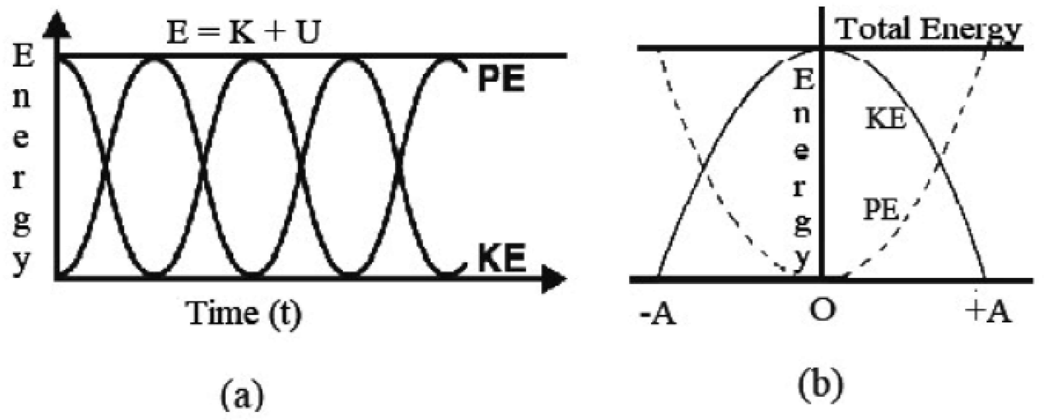
$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \left(\cos^2 (\omega t + \phi) + \sin^2 (\omega t + \phi)\right) \quad (7.31)$$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

(Since, $\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2 (\omega t + \phi) = 1$)

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (7.32)$$

مساوات (7.32) یہ بتلاتی ہے کہ جملہ توانائی سادہ موسیقی اہتزازندہ کی وقت پر منحصر نہیں ہوتی ہے۔ مساوات (7.26) اور (7.28) وقت پر منحصر ہوتی ہے۔اس طرح نقل مکان، توانائی بالحرکت اور بالقوہ جملہ توانائی کو سادہ موسیقی اہتزازندہ کی شکل 7.12 میں دکھایا گیا۔



7.12 سادہ موسیقی اہتزازندہ کی توانائی بالحرکت بالقوہ وقت نقل مکان پر منحصر

7.3 اسباقی سوالات

1. کیا توازنی مقام پر موسیقی اہتزازندہ کی بالحرکت اعظم ترین ہوتی ہے یا نقل مقام پر اعظم ترین ہوتی ہے؟ کہاں پر اسراع اعظم ترین ہوتا ہے؟
2. سادہ رقاص کا حیطہ ارتعاش وقت کے لحاظ سے کیونکہ گھٹتا ہے کن وجوہات کی بنا پر رقاص کی توانائی اور حیطہ ارتعاش گھٹتا ہے؟

7.8 مقصود موسیقی اہتزازات

ہم جانتے ہیں کہ سادہ موسیقی اہتزازندہ کی حرکت جیسے سادہ رقاص ہوا میں جھولتے ہوئے آخرکار ختم ہوجاتی ہے ایسا کیونکر ہوتا ہے؟ اس لئے کہ ہوا رگڑ کے مترادف عمل کرتی ہے اور یہاں یہ عوامل سادہ رقاص کے اہتزازی حرکت کی توانائی کو ختم کرتے ہیں۔ اہتزازندہ کے حیطہ ارتاش کو ہوا مسلسل گھٹا دیتی ہے۔اسے اہتزاز کو مقصود اہتزاز کہتے ہیں۔

مخالف قوتیں عام طور پر رگڑ کی قوت ہوتی ہیں۔اس طرح بیرونی قوتوں کے زیر اثر اہتزازندہ کی حرکت کو 7.13 شکل دکھایا گیا۔

ایک سادہ موسیقی اہتزازندہ لیجئے۔ایک دھاتی (بلاک) کندہ B اسپرنگ G سے کمانی دار استوار S سے لٹکایا گیا جیسا کہ شکل 7.13(a) میں دکھایا گیا۔

دھاتی کندہ B کو شیشے کے بیکر میں لٹکا دیں اور بیکر کو پانی سے بھر دیں تا کہ دھاتی کندہ B کو پانی کی سطح سے 6 ملی میٹر فاصلہ پر رکھ دیں۔بیکر کے عمودی جانب ایک ملی میٹر پیمانہ چسپاں کیجئے۔ پیمانہ پر کندہ کی حالت (مقام) کو بڑھنے کے لئے دھاتی کندہ پر نشانات لگایئے اور کندے کو ایک طرف کھینچا جائے اور پھر چھوڑ دیا جائے تو یہ ایک وسطی مقام کے آگے پیچھے اہتزاز کرتا ہے۔اقل ترین اہتزاز اور اعظم ترین وقفہ اہتزاز کو ملی میٹر پیمانہ کی مدد سے نوٹ کیجئے۔ وقت اور حیطہ ارتعاش وقت کے ساتھ اہتزازی ترسیم کو ظاہر کیجئے۔ کیا ترسیم

میں وقت کے ساتھ حیطہ ارتعاشات گھٹتے ہیں؟ ایسے اہتزازات کو مقصود اہتزاز کہتے ہیں۔
مقصود ارتعاش دو عوامل پر منحصر ہے: (i) طبعی (ii) واسطہ۔
مقصود کے اہتزاز گھٹتے ہیں۔ اگر مائع میں کندہ کو رکھا گیا تو مقصود کے اہتزاز بڑھتے ہیں۔ مقصود قوت عام طور پر راست متناسب ہوتی ہے کندہ کی رفتار اور رفتار کی سمت کی مخالفت کرتی ہے مقصود قوت کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

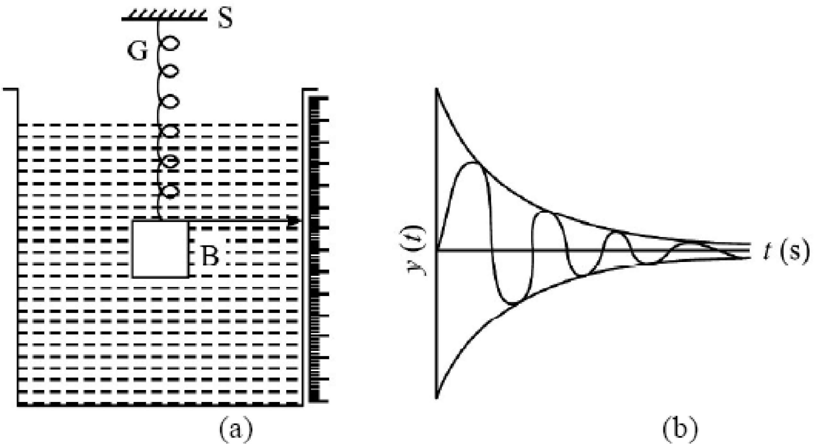


Fig. 7.13 : Damped vibrations: (a) Experimental setup; (b) Graphical representation

$$F_{damped} = -b\ v \quad (7.33)$$

جہاں پر b مستقل ہے جو کندہ کے واسط اور جسامت پر منحصر ہے۔ اہتزازندہ کی رفتار اس وقت لی جاتی ہے۔ اس لیے لی جاتی ہے اہتزازندہ کی رفتار پر مقصود قوت مخالف سمت میں عمل کرنے کی وجہ سے منفی علامت لی جاتی ہے۔

$$F_{restoring} = -kx \quad (7.34)$$

مقصود ارتعاش

$$F = -kx - bv \quad (7.35)$$

تجرباتی مرحلے اور ترسیمی

$$ma = -kx - bv \quad (7.36)$$

جب کہ کندہ کو اہتزاز میں لایا گیا تو حاصل واپس قوت پیدا ہوتی ہے اس کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔ اہتزازندہ کی جملہ قوت یہ ہے نیوٹن کے کلیہ حرکت کی رو سے

جہاں پر m اہتزازندہ کی کمیت اور اسراع ہے دو متغیر تفاعل کی مساوات سے

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (7.37)$$

اوپر کی مساوات مقصود قوت کے زیر اثر اہتزازندہ کی حرکت کو بیان کرتی ہے۔

مشغلہ 7.2

ایک سادہ موسیقی اہتزازندہ لیجیئے۔ایک دھاتی (بلاک) کندہ B اسپرنگ (G) سے کمانی داراستوار S سے لٹکایا گیا جیسا (a)7.13 میں بتلایا گیا۔ دھاتی کندہ B کو شیشے کے بیکر میں لٹکا دیں اور بیکر کو پانی سے بھریں تا کہ دھاتی کندہ B کو پانی کی سطح سے 6 سنٹی میٹر فاصلہ پر رکھ دیں۔بیکر کے عمودی جانب ایک ملی میٹر پیمانہ چسپاں کیجئے۔ پیمانہ پر کندہ کی حالت (مقام) کو پڑھنے کے لئے دھاتی کندہ پر نشانات لگایئے اور کندہ کو ایک طرف کھینچا جائے اور پھر چھوڑ دیا جائے تو یہ ایک وسطی مقام کے آگے پیچھے اہتزاز کرتا ہے۔اقل ترین اہتزاز اور اعظم ترین اہتزازی وقفہ کو ملی میٹر پیمانہ سے نوٹ کیجئے۔ وقت اور حیطہ ارتعاش کے درمیان اہتزاز کی ترسیم کو ظاہر کیجئے۔ کیا ترسیم میں وقت کے ساتھ حیطہ ارتعاش گھٹتا ہے۔ایسے اہتزاز کو مقصور (Damped) اہتزاز کہتے ہیں۔

7.9 آزادانہ اور جبری اہتزازات اور گمگ

جب ایک نظام (اہتزازندہ) کو حالت توازن سے چھوڑا جاتا ہے تو یہ طبعی تعداد سے اہتزاز کرتا ہے اور ان اہتزاز کو آزاد اہتزازات کہتے ہیں۔اس طرح ہر جسم کا اپنا ایک تعداد ہوتا ہے جس کو طبعی تعدد (Natural Frequency) کہتے ہیں۔لیکن ایک بیرونی قوت ان اہتزازات کو قائم رکھتی ہے۔لیکن ایک بیرونی قوت ان اہتزازات کو قائم رکھتی ہے۔ یہ جبری اہتزازات کہلاتے ہیں۔ جب کہ بیرونی قوت ......ایک دوری ہے۔ جو تعدد کو جبری تعدد (Driven Frequence) کہلاتی ہے۔فرض کرو کہ ایک باہری قوت جس کا حیطہ اور وقت کے ساتھ دوری طور پر تبدیل ہوتی ہے جبری اہتزاز کی وجہ سے قوت اس طرح ظاہر کی جاسکتی ہے۔

$$F(t) = F_o \sin \omega_p t \qquad (7.38)$$

ذرہ کی حرکت جس پر ایک خطی

$$ma = -kx - bv + F_o \sin \omega_p t \qquad (7.39)$$

قوت جبری قوت اور تابع قوت چلانے والے قوت لگ رہی ہو اس طرح

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o \sin \omega_p t$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin \omega_p t \qquad (7.40)$$

اوپر کی مساوات پہلے اور دوسرے درجے نقل مقام رفتار اور اسراع کی جگہ رکھنے پر جبری اہتزاز کی اہتزاز کی مساوات ہے۔

$$x(t) = A \sin(\omega_p t + \phi) \qquad (7.41)$$

ایک زاویائی تعدد ω_p کی دوری قوت لگائی گئی ار طبعی تعدد زندہ کا ہے۔اوپر کی اہتزاز کی مساوات کو حل کرنے پر ہم میں حیطہ ارتعاش A حاصل ہوتا ہے۔

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_p^2) + \omega_p^2 b^2}} \quad (7.42)$$

حیطہ ارتعاش راست متناسب ہوتا ہے۔ دوری قوت حیطے Fo کے اور جبری اہتزاز کی حیطہ چلانے والی قوت (Drive Force) کے زاویائی تعدد پر منحصر ہے جب کہ چلانے والی قوت کا تعدد......مساوی ہوتا ہے طبعی تعدد اہتزازندہ......تب

$$A = \frac{F_o}{\omega_p b} = \text{maximum} \quad (7.43)$$

اس سے واضح ہوجاتا ہے ایک دی ہوئی چلانے والے تعدد کی قدر کے ہے۔ اعظم ترین ممکنہ حیطہ چلانے والی قوت کے تعدد اور جبری سے معین ہوتی ہے اور لامتناہی نہیں ہوتی۔ چلانے والی قوت کے تعدد کی قدر اہتزازندہ کے طبعی تعدد کے قدر کے قریب ہونے پر حیطہ میں اضافہ کا مظہر گمگ کہلاتا ہے۔

جبری ارتعاش اور گمگ کے مظہر کو سیکھنے کے لئے مشغلہ مندرجہ ذیل

مشغلہ 7.3

آیئے ہم پانچ سادہ رقاص کے ایک سیٹ (Set) پر غور کریں (E, D, C, B, A) کو افقی رسی سے لٹکایا گیا ہے۔ جیسا کہ شکل 7.14 میں دکھایا گیا۔ سادہ رقاص A اور C کے طول مساوی میں رقاص E, D, B کے طول مختلف ہیں۔ رقاص A کو ارتعاش میں لائے رقاص A کی توانائی رسی کے ذریعہ منتقل ہوگی اور دوسرے رقاص بھی حیطہ ارتعاش سے ارتعاش کرنے لگیں گے۔

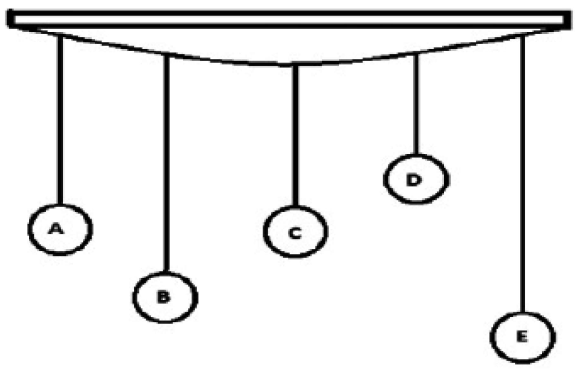


Fig. 7.14: Forced vvibrations and Resonance.

D, B اور E طبعی تعدد سے ارتعاش کرنے لگیں گے۔ D, B اور E کے ارتعاشات کے تعدد A کے تعدد کے زیر اثر یا مساوی ہوتے ہیں یہ کہا جائے گا کہ رقاص D, B اور E جبری ارتعاش کرتے ہیں۔ جب کہ رقاص C اور A کے طول مساوی ہیں اس لئے ان کا طبعی تعدد مساوی ہو جب کہ رقاص A اور C گمگ میں ہے اس واقعہ کو گمگ کہتے ہیں۔

7.4 اسباقی سوالات

1. جب ایک دوشاخہ کو مار کر اس کے دستے کو ایک میز کی سطح پر رکھیں تو آواز زیادہ تیز ہوگی کیا یہ مشاہدہ گمگ یا جبری ارتعاشات کا مظہر ہے؟ کیوں آواز زیادہ تیز ہوگی؟
2. مخصوص موسیقی آلات کو کھوکھلے آواز کے صندوق (Boxes) کیوں فراہم کئے جاتے ہیں؟

مخفی واقعات اور گمگ (Mysterious Happening and Resonance)

1. Ta coma Narrows معلق پل USA واشنگٹن میں اپنے کھلنے کے چھ ماہ 1940ء کے اندر ایک طوفان کی زد میں آ کر منہدم ہو گیا۔ ہوا کے جھونکوں کا تعدد اور طبعی تعدد مساوی ہونے کی وجہ سے پل کا ڈھانچہ کا تعدد بہت زیادہ کا شکار ہو گیا اور گر گیا۔ معلق پل گرنے کے واقعات بھی اس وقت پیش آئے جب مارچ کرنے والے فوجیوں کے گروپ نے انہیں عبور کیا۔ اسی لیے اب فوجیوں کو پل عبور کرتے وقت قدموں کی ترتیب کو توڑنے کے لئے کہا جاتا ہے۔ فیکٹریوں کی چمنیاں اور کولنگ ٹاور ہوا کی وجہ سے اہتزاز میں آ جاتے ہیں اور بعض اوقات منہدم ہو جاتے ہیں۔
2. آپ نے مخفی طاقتوں کے حامل کچھ گلوکاروں کے بارے میں سنا ہوگا۔ دراصل ایسی کوئی طاقت موجود نہیں ہے۔ جب وہ گاتے ہیں تو آڈیٹوریم میں کھڑکیوں کے شیشے ٹوٹ جاتے ہیں۔ وہ صرف یہ نوٹ کرتے ہیں کہ کھڑکی خانہ کا شیشہ کا تعدد اور طبعی تعدد سے میل کھا جائے۔
3. آپ نے سوچا ہوگا کہ آپ اپنے ریڈیو یا TV کے ٹیونر کو چلا کر کسی خاص اسٹیشن کو کیسے ملاتے ہیں؟ جس میں آپ کی دلچسپی ہے۔ ٹیونر درحقیقت ایک الکٹرانک اہتزاز ندہ ہے جس میں اس کے تعدد کو تبدیل کرنے کا انتظام ہوتا ہے۔ جب ٹیونر کا تعدد مخصوص اسٹیشن کے ذریعہ منتقل کیے جانے والے تعدد سے میل کھاتا ہے تو گمگ پیدا ہوتا ہے اور انٹینا اس اسٹیشن کے ذریعہ نشر ہونے والے پروگرام کو ملاتا ہے۔

ہم نے کیا سیکھا (What you have learnt)

- دوری حرکت ایک ایسی حرکت ہے جو وقت کے مساوی وقفوں میں دہرائی جاتی ہے۔
- اہتزازی حرکت ایک ایسی حرکت ہے جو اوسط مقام کے گرد آگے پیچھے حرکت کرتی ہے۔
- ہر اہتزازی حرکت دوری ہوتی ہے لیکن ہر دوری حرکت ضروری نہیں ہے کہ اہتزازی ہو۔
- سادہ موسیقی حرکت اس وقت پیدا ہوتی ہے جب اہتزاز کرنے والے جسم پر لگائی گئی قوت اہتزاز کے کسی بھی نقطے پر وسطی نقطہ سے جو مقام توازن بھی ہے، نقل مقام کے راست متناسب ہوتی ہے۔ کسی بھی نقطے پر اس کی سمت وسطی نقطہ کی جانب ہوتی ہے۔
- ایک ذرے کو ایک مکمل اہتزاز کے لئے درکار وقت 'وقت دوران' کہلاتا ہے۔
- اکائی وقت میں مکمل اہتزاز کی تعداد اہتزاز ندہ کا تعدد کو کہتے ہیں یا اہتزاز ندہ کا اکائی وقت میں مکمل اہتزاز کی تعداد کو تعدد کہتے ہیں۔

- ہتی زاویہ سے مراد ایسا زاویہ جس کی Sine یا Cosine اہتزاز کی حرکت کے لئے سمت اور مقام ایک لمحے کی نشاندہی کرتا ہے۔

- زاویائی تعدد سے مراد ہتی زاویہ میں شرح تبدیلی کو زاویائی تعدد کہتے ہیں۔ نوٹ کیجیے $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \upsilon$

جہاں پر ω سے مراد زاویائی تعدد کو ریڈین فی سکنڈ v کو تعدد Hertz اور T وقت دوران سکنڈ میں لیا جاتا ہے۔

- سادہ موسیقی حرکت کی مساوات $y(t) = a \sin(\omega t + \phi)$ یا $(t) = a \cos(\omega t + \phi)$

جہاں پر y نقل مقام وسطی نقطہ پر اکائی وقت t اور φ ابتدائی ہتی زاویہ (جب کہ t=0) ہے۔

- ذرہ کی پروجکشن (ابھار) حرکت دائرے کے محیط پر ہو۔ اس کو سادہ موسیقی قطر کہتے ہیں۔

- کمیتی نظام میں اسپرنگ کا اہتزاز $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, جہاں پر m اسپرنگ کی منسلک کمیت اور k اسپرنگ کا مستقل ہے۔

- سادہ رقاص کا وقت دوران کا اہتزاز $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, جہاں پر سادہ رقاص کا طول اور g اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔

- سادہ موسیقی اہتزازندہ کی توانائی بالحرکت $K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

- سادہ موسیقی اہتزازندہ کی توانائی بالقوہ $U = \frac{1}{2}kx^2$

- سادہ موسیقی اہتزازندہ کی جملہ توانائی $E = \frac{1}{2}kA^2$

- جب ایک نظام اہتزاز یا ارتعاش اپنے خود سے ارتعاش کرتا ہے اس کو آزاد ارتعاشات اور اس کے تعدد کو طبعی تعدد کہتے ہیں۔

- گھٹتے ہوئے حیطہ اور توانائی والے اہتزازندہ کے ارتعاشات کو مقصور ارتعاشات کہتے ہیں۔

- اگر اہتزازی نظام بیرونی دوری قوت کے زیر اثر ارتعاشات کرتا ہے تو جسم کے ارتعاشات جبری ارتعاش کہتے ہیں۔

آخری حصہ مشق (Terminal Exercise)

1. اہتزازی حرکت اور دوری حرکت میں فرق بیان کرو۔
2. سادہ موسیقی حرکت سے کیا مراد ہے؟

3. مندرجہ ذیل میں سے کون سے تفاعل کی نمائندگی کرتا ہے؟ (i) سادہ موسیقی حرکت۔ (ii) ایک دوری حرکت لیکن سادہ موسیقی نہیں۔ (iii) ایک غیر دوری حرکت ہر دوری حرکت کے۔

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$ (ii) $1 + \omega^2 + \omega t$ (iii) $3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

4. وقت دوران کا ارتعاشی کمیت 0.1kg کلوگرام ہک اسپرنگ کا وقفہ 1 سکنڈ ہے۔تب ارتعاشی وقت دوران کی کیمت 0.9kg کلوگرام معلق لٹکا دئے گئے اسپرنگ کی طرح ہےتب اہتزازی یاارتعاشی وقت دوران معلوم کرو۔

5. ہیئت زاویہ کیا ہے؟ یہ کس طرح زاویائی تعدد سے تعلق رکھتا ہے؟

6. ایک سادہ موسیقی اہتزازندہ کا' اہتزاز $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$? دیا گیا ہے تو ایک سادہ رقاص کا اہتزازی باب (Bob) کیونکر آزادانہ ہے؟

7. سادہ موسیقی حرکت کس وقت اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ ذرہ کا اسراع کی حالت کو حاصل کرتا ہے تو واپسی قوت اعظم ترین کب ہوتی ہے؟

8. بتلایئے کہ ہموار دائروی حرکت کا پروجنکشن دائرے کے قطر پر ایک سادہ موسیقی حرکت کرتا ہے تو مستقل قوت اور کمیت کے لحاظ سے سادہ موسیقی اہتزازندہ کا وقت دوران محسوب کیجئے۔

9. سادہ موسیقی اہتزازندہ کی لمحاتی توانائی بالحرکت' توانائی بالقوہ اور جملہ توانائی محسوب کیجئے۔

10. سادہ موسیقی اہتزازندہ کا توازنی مقام سے نقل مقام مختلف ہے جب کہ توانائی بالقوہ U توانائی بالحرکت k اور جملہ توانائی E ترسیمی طریقہ سے معلوم کرو۔

11. کسی بھی لمحے میں ایک ثابت نقطہ پر نقل مقام دیا گیا ہے $x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ کیا ذرہ کی حرکت سادہ موسیقی ہے اگر آپ کا جواب نہ ہو تب سمجھایئے اگر آپ کا جواب ہاں نہیں ہے تو ارتعاش کا تعدد اور ہیئت زاویہ محسوب کیجئے۔

12. اعظم ترین رفتار محسوب کرو کہ اگر وقت دوران 10 سکنڈ اور سادہ رقاص کا اہتزازی تعدد 0.04m ہو۔

13. تصور کرو کہ ایک گولے کو بغیر رگڑ والی سرنگ میں گرایا گیا جو اس کے مرکز سے زمین پر کٹی ہوئی ہے' زمین کے لحاظ سے وقت دوران نصف قطر اسراع بوجہ جاذبہ زمین محسوب کیجئے۔

14. دو اسپرنگ سے 2kg کلوگرام کا بلاک (کندہ) شکل کے مطابق جوڑ دیا گیا ہے ہر ایک پر مستقل قوت $k = 400\ N\ m^{-1}$ ہے۔اگر بلاک (کندہ) کو توازنی نظام 0.05m دھکیلا یا کھینچا جائے تو ذیل کو محسوب کیجئے۔

(a) بلاک (کندہ) کی زاویائی تعدد ω

(b) اعظم ترین چال یا رفتار

(c) اعظم ترین اسراع

(d) جب حالت سکون میں مقصور کے خلاف کل توانائی غائب ہوجاتی ہے

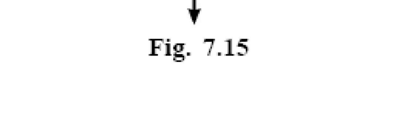


Fig. 7.15

اسباقی سوالات وجوابات(Answers to Intext Questions)

7.1

1. وہ حرکت جو وقت کے مساوی وقفوں میں دہرائی جاتی ہے دوری حرکت کہلاتی ہے۔ایک ہی راستہ پر آگے اور پیچھے کی حرکت کو اہتزازی حرکت کہتے ہیں۔دوری حرکت اہتزازی نہیں ہوسکتی لیکن ارتعاشی حرکت دوری ہوتی ہے۔

2. (ii) (iv) (v)

3. (i) سادہ رقاص کی آگے اور پیچھے کی حرکت

 (ii) اپنے مدار میں سیارے کی حرکت

7.2

1. گولہ x فاصلہ طئے کرتا ہے واپسی قوت کی وجہ سے توازنی قوت مقام سے لیکن F=-kx اوپر کی دو مساوات سے

$$F = mg\sin\theta = mg\,\theta = mg\frac{x}{r}$$

But, $F = -kx$

Comparing the above Eqns., we have

$$k = \frac{mg}{r}\ (\text{or})\ \frac{k}{m} = \frac{g}{r}$$

But $\frac{k}{m} = \omega^2$ where ω is the angular frequency.

$$\omega^2 = \frac{g}{r}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ (\text{or})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

2. کچھ فاصلہ سے نیچے کی جانب دھکیلنے پر استوانہ اوپر کی جانب جاتا ہے۔

$F = -\rho g v$

جہاں پر ρ مائع کی کثافت اور g اسراع بوجہ جاذبہ زمین اور v=(Al) استوانہ کا حجم

$F = -\rho g A l$

اوپر کی مساواتوں سے F=-kl اور k=ρgA زیادہ تر مائع

تعدد $m=\rho V = \rho Al$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{\rho g A}{\rho A l} = \frac{g}{l}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{and}$$

$$\text{Frequency, } f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

نوٹ کریں کہ جب کمیت کو ہٹا دیا جاتا ہے تو پٹی (Band) میں صرف ایک بحال کرنے والی قوت کا استعمال ہوتا ہے۔

7.3

1. K.E اعظم ترین توازنی مقام پر ہوتا ہے اسراع اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ نقل مکان اعظم ترین ہو۔

2. جیسے ہی سادہ رقاص اہتزاز کرتا ہے تو ہوائی مزاحمتی لزوجت کے خلاف کام کرتا ہے اور اس سہارے پر رگڑ سے لٹکا ہوا ہوتا ہے۔ رگڑ کی وجہ سے کیا گیا کام حرارت میں ختم ہو جاتا ہے جس کی وجہ سے حیطہ ارتعاش گھٹتا ہے۔

7.4

1. جب کوئی نظام بیرونی دوری قوت کے زیر اثر ارتعاشات کرتا ہے تو نظام کے ارتعاشات جبری ارتعاشات کہلاتے ہیں۔ جس میں ایک ہی طبعی تعدد کے دو نظام میں سے ایک کو مرتعش کریں تو دوسرا نظام بھی پہلے نظام کے زیر اثر بڑے حیلے کے ساتھ ارتعاش کرنے لگے گا اس کو گمک کہتے ہیں۔
2. دوشاخے کے تعدد سے میز ارتعاش کرتا ہے چونکہ میز کے اوپری حصہ میں ارتعاش پیدا ہوتا ہے میز کے اوپری سطح کے ارتعاشات کو جبری ارتعاشات کہتے ہیں۔
3. صوتی ڈبوں کا رقبہ زیادہ ہونے کی وجہ سے موسیقی آلات میں حیطہ تعدد جبری ارتعاش پیدا کرتا ہے مرتعش کے ارتعاشی حیطے وقت کے ساتھ گھٹتے اور بڑھتے ہیں۔

(Answers to Terminal Exercise)

4. 3s

11. $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

12. $\frac{2}{\pi} \times 10^{-3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

14.

(a) 14.14 s^{-1} (b) 0.6 m s^{-1} (c) 0.3 m s^{-2} (d) 0.5 J

.

☆☆☆

8 کشش ثقل

(Gravitation)

تعارف

کیا آپ نے کبھی سوچا ہے کہ جب کوئی گیند اوپر کی جانب پھینکی جاتی ہے تو وہ ہمیشہ زمین کی طرف کیوں واپس آتی ہے؟ یا کوئی سکہ جو ہوا میں اچھالا جاتا ہے تو واپس زمین پر کیوں گرتا ہے؟ جب سے وقت کا آغاز ہوا ہے لوگ اس عجوبہ کے بارے میں جاننے کے لئے پر تجسس ہیں۔ سترہویں صدی میں سر آئزک نیوٹن نے اس کا جواب مہیا کیا۔ انہوں نے یہ مفروضہ پیش کیا کہ یہ کشش ثقل ہے جس کی وجہ سے زمین اجسام کو اپنی جانب کھینچتی ہے۔ انہوں نے یہ بھی کہا کہ یہ وہی قوت ہے جس نے چاند کو زمین کے اطراف اور سیاروں کو سورج کے اطراف مدار میں پکڑے رکھتا ہے۔ یہ ایک ہمہ گیر آفاقی قوت ہے جو کائنات میں ہر جگہ پائی جاتی ہے، درحقیقت یہ وہ قوت ہے جو ساری کائنات کو ایک ساتھ پکڑی ہوئی ہے۔ اس سبق میں ہم نیوٹن کے کشش ثقل کے کلیات کے بارے میں پڑھیں گے۔ اس کے علاوہ ہم سرعت کے بارے میں بھی پڑھیں گے جو کہ زمین کے اجسام کو اپنی جانب کھینچنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ سرعت (Acceleration) جانی جاتی ہے سرعت بوجھ کو کشش ثقل کے جو کہ زمین پر کہیں بھی مستقل نہیں ہوتی۔ سرعت اسراع بھی کہلاتی ہے۔ ہم ان عوامل کے بارے میں بھی پڑھیں گے جو سرعت بوجھ کشش ثقل کے تبدیل ہونے یا مختلف ہونے کے موجب ہوتے ہیں۔ اس سبق میں آپ سیاروں کی حرکت کے کلیات اور مختلف قسم کے مصنوعی سیاروں اور ان کے مدار کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔ آخر میں ہم خلائی تحقیق کے میدان میں ہندوستان کی کامیابیاں اور اہم پروگراموں پر نظر ڈالیں گے۔

مقاصد (Objectives):

ہم اس سبق کو پڑھنے کے بعد اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کشش ثقل کا قانون بیان کریں گے۔
- کشش ثقل مستقل کی تعریف کریں گے اور G کی قیمت کا تعین کریں گے۔
- کشش ثقل کا میدان، میدان کی قوت اور کشش ثقل کی ممکنہ توانائی کی وضاحت کریں گے۔
- اجرام فلکی کی سرعت بوجھ کشش ثقل کی قیمت کا حساب لگائیں گے۔
- ''سرعت بوجھ کشش ثقل'' کی قیمت بلحاظ بلندی، گہرائی اور چوڑائی کے کیسے تبدیل ہوتی ہے، تجزیہ کریں گے۔
- سیاروں کی حرکت کے لئے ذمہ دار قوت کی نشاندہی کریں گے اور کیپلر کے سیاروں کی حرکت کے قوانین بیان کریں گے۔
- مداری رفتار اور گریز کی رفتار کا حساب لگائیں گے۔
- مصنوعی سیارہ کیسے داغا جاتا ہے اس کی وضاحت کریں گے۔
- قطبی اور استوائی سیاروں کے درمیان فرق بتائیں گے۔
- کسی مصنوعی سیارہ کے جیو اسٹیشنری سیارہ ہونے کے لئے شرائط بیان کریں گے۔
- جیو اسٹیشنری سیارہ کی بلندی محسوب کریں گے اور استعمالات کی فہرست بنائیں گے۔
- مصنوعی سیارہ کی صنعت و حرفت میں ہندوستان کی کامیابیوں کو بیان کریں گے۔

8.1 کلیہ تجاذب (Law of Gravitation)

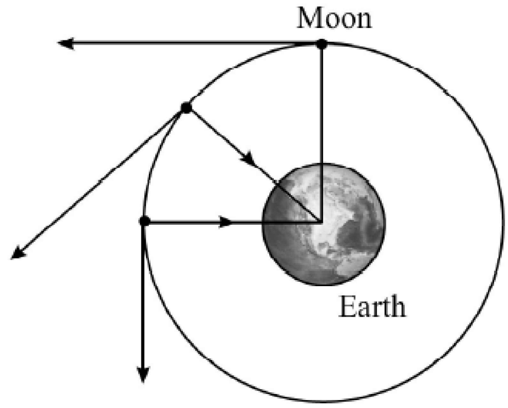


Fig. 8.1 : At each point on its orbit, the moon would have flown off along a tangent but the attraction of the earth keeps it in its orbit.

یہ کہا جاتا ہے کہ نیوٹن درخت کے نیچے بیٹھا تھا تبھی ایک سیب زمین پر آ گرا۔ جس نے اسے سوچنے پر مجبور کیا کہ تمام سیب اور جو بھی دوسرے اجسام ہیں جو زمین پر گرتے ہیں ان تمام کو کوئی نہ کوئی زمینی قوت ہے جو تھام کر رکھتی ہے۔ نیوٹن نے اپنے آپ سے سوال کیا کہ کیا یہ وہی قوت تو نہیں ہے جس نے چاند کو زمین کے اطراف پکڑے رکھا ہے۔ یہ مشاہدہ کیا کہ مستقل گرنے کی جو کیفیت ہے وہی قوت چاند کو مدار میں پکڑے رکھتی ہے اور سیب زمین پر گر جاتا ہے۔ کیپلر کے قوانین کی مدد سے نیوٹن نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ سورج اور سیارے ایک مخصوص فاصلہ کے ذریعہ ایک دوسرے بندھے ہوئے ہیں $1/r^2$ جہاں r سورج اور سیارے کے درمیان کا فاصلہ ہے۔ اس نتیجہ کے ذریعہ یہ بتانے کے قابل ہوا کہ یہی قوت چاند کو اپنے مدار پر زمین کے اطراف گردش کرنے میں معاون ہوتی ہے۔ ان مشاہدات کی بنا پر نیوٹن نے آفاقی کلیہ تجاذب تجویز کیا۔'

'اس کائنات میں ہر ایک جسم پر دوسرے جسم کو ایک ایسی قوت کے ساتھ کھینچتا ہے جو ان کی کمیتوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے درمیان دوری کے مربع کے معکوس تناسب ہوتی ہے''۔

اسے ریاضیاتی طور پر اس طریقہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ دو اجسام کی کمیتیں m_1 اور m_2 ہیں ان کے درمیان فاصلہ r ہے۔ ان پر لگائی گئی قوت F کی عددی قیمت ہوگی۔

$$\vec{F} \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (8.1)$$

یہاں '_' کی علامت یہ اشارہ دے رہی ہے کہ قوت کشش ہے۔ یہاں G آفاقی تجاذبی مستقل ہے۔ کائنات میں کسی بھی دو اجسام کے درمیان اس کی قیمت برابر ہوتی ہے۔

تجاذبی قوت کی انتہائی اہم خصوصیت یہ ہے کہ وہ ہمیشہ کششی ہوتی ہے۔ اور یہ قدرت کی بنیادی قوتوں میں سے ایک ہے۔

یہاں یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ کشش باہمی ہوتی ہے۔ جو کمیت m_1 اور کمیت m_2 سے کشش کرتی ہے اور قوت F ان پر لگی ہوگی۔

یہ جانتے ہوئے کہ قوت ایک سمتیہ قدر ہے مساوات (8.1) میں ترمیم کی ضرورت ہے تو اس کا جواب یہ ہے کہ مساوات کو قوت کی سمت اور قدر دونوں کو مخالف سمت میں ہونا چاہئے۔

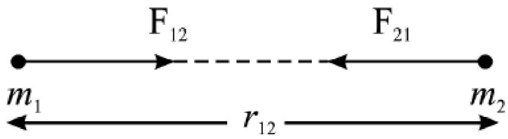


Fig. 8.2 : The masses m_1 and m_2 are placed at a distance r_{12} from each other. The mass m_1 attracts m_2 with a force F_{12} and the mass m_2 attracts m_1 with a force F_{21}.

جیسا کہ بتایا گیا ہے تجاذبی قوت (-r) کی سمت میں ہے۔نقطہ کمیت m_1 اور m_2 کے ذریعہ لگی قوت جیسا کہ شکل (8.2) میں دکھائی گئی ہے۔ m_1 اور m_2 کے درمیان کششی قوت جو F_{12} بتائی گئی ہے جن کے درمیان فاصلہ r_{12} ہے تب سمتیہ کلیہ تجاذب کی رو سے

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1m_2}{(\mathbf{r}_{12})^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad (8.2)$$

یہاں $\hat{r}_{12}$ سمتیہ اکائی ہے کمیتوں m_1 اور m_2 کے ذریعہ۔اسی طرح ہم اس کو رکھ سکتے ہیں کہ قوت جب کمیت m_1 اور m_2 پر عمل کرتی ہے تب $\vec{F}_{21}$ اس طرح بتایا جاتا ہے۔

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_2m_1}{(\mathbf{r}_{21})^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (8.3)$$

یادرہے $\hat{r}_{12}$ اور $\hat{r}_{21}$ عددی قدر ہے تو اس کی سمت ایک دوسرے کے مخالف ہوگی۔

یہاں پر منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ سمتیہ $\hat{r}_{21}$ ،سمتیہ $\hat{r}_{12}$ کے مخالف سمت میں ہوگا کیونکہ وہ عددی قدر ہیں۔ $\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\hat{\mathbf{r}}_{21}$

اس لئے مساوات 8.2 اور 8.3 کے ذریعہ ہم جان سکتے ہیں۔

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (8.4)$$

قوتیں $\vec{F}_{12}$ اور $\vec{F}_{21}$ قدر میں مساوی ہوں گی اور سمتوں میں مخالف ہوں گی اور نیوٹن کے تیسرے کلیہ کے مطابق قوتوں کی ایک جوڑ کا عمل اور ردعمل ہوگا۔

آفاقی تجاذبی مستقل G، کیونکہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اس لئے وہ نیوٹن سے تعین نہ ہوسکا اس کو ہنری کیونڈش نے پہلی دفعہ 100 سال قبل تعین کیا۔اس کی قابل قبول قدر 6.67×10^{-11} Nm^2 kg^{-2} ہے۔یہ G کی کمترین قدر ہے کیونکہ معمولی اجسام کی تجاذبی قوت دریافت نہیں کی جاسکتی۔

مثال(8.1)

کیپلر کے تیسرے کلیہ کے مطابق (جو آگے ہم پڑھیں گے) مطابق اگر r سورج اور سیارہ کے اوسط فاصلہ ہے تو T اس کی مدار کی مدت ہوگی۔

تب $\frac{r^3}{T^2}$ = مستقل بتایئے کہ ایک سیارہ پر عملدرآمد قوت معکوس تناسب میں ہوگی فاصلہ کے مربع کے۔

حل:

فرض کریں کہ سیارہ کا مدار دائروی شکل میں ہے تب مرکز مائل قوت (Centripetal force) جو سیارہ پر عمل کرتی ہے۔

$$\vec{F} = \frac{mv^2}{r}$$

جہاں v مداری رفتار ہے۔ کیونکہ $\vec{v} = r\omega = \frac{2\pi r}{T}$ یہاں T وقفہ ہے۔ ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\vec{F} = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

لیکن $T^2 \propto r^3$ یا $T^2 = Kr^3$ (کیپلر کے تیسرے کلیہ کے مطابق) جہاں k مستقل ہے۔ اس لئے

$$\vec{F} = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{K} \times \frac{m}{r^2} = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{F} \propto \frac{1}{r^2} \qquad (\because \ \frac{4\pi^2 m}{K} \text{ is constant for a planet})$$

8.2 آفاقی تجاذبی مستقل (The Gravitational Constant)

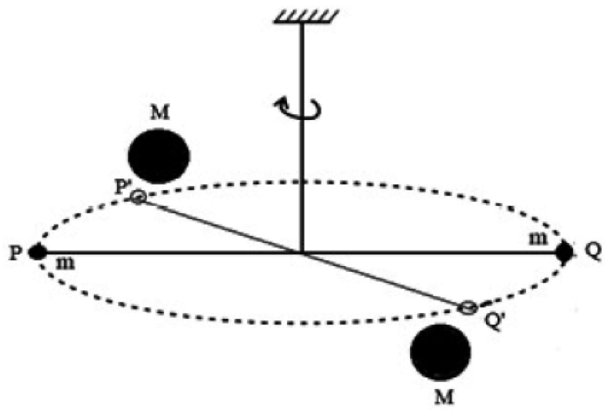


Fig. 8.3 : Schematic drawing of Cavendish's

آفاقی تجاذبی مستقل میں شامل تجاذبی مستقل G کی قدر تجربہ کی بنیاد پر معلوم کی جاسکتی ہے اور اس کو سب سے پہلے ایک انگریز سائنسداں ہنری کیونڈس نے 1798 میں کیا تھا۔ کیونڈش نے اس تجربہ کے لئے جو آلہ استعمال کیا تھا شکل (8.3) میں دکھایا گیا ہے۔

سلاخ AB کے سروں پر دو سیسہ کے کرے جن کی کمیت m ہے جڑے ہوئے ہیں۔ سلاخ کو ایک پتلے تار کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔

دو بڑے سیسہ کے کروں کو چھوٹے کروں کے قریب لایا گیا۔ بڑے کرے نزدیکی چھوٹے کروں کو مساوی اور مخالف قوت کے ساتھ اپنی جانب کھینچتے ہیں۔ سلاخ پر کوئی قوت نہیں بلکہ صرف گردشی قوت کام کر رہی ہے۔ جو سلاخ کی لمبائی اور قوت (F) کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ جہاں بڑے کرے اور چھوٹے کرے درمیان قوت کشش ہے۔ گردشہ کی وجہ سے لٹکا ہوا تار گھومنے لگتا ہے جب تک کہ تار کا گردشہ تجاذبی کشش کے برابر نہ ہو جائے۔ اگر...... لٹکے ہوئے تار کا روڈ ہے تو......قوت گردشہ...... کے متناسب اور...... کے برابر ہوگا۔

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{d^2} \qquad (8.5)$$

کروں کے درمیان لگ رہی تجاذبی قوت کشش اتنی ہے جتنی ان کی کمیتیں ان کے مرکز پر ہیں اس لئے اگر d بڑے اور چھوٹے کرے کے مراکز کے درمیان کی دوری ہے اور PQ ان کی کمیتیں ہیں تو بڑے اور چھوٹے کروں کے درمیانی تجاذبی قوت (F) ہوگی۔

اگر L سلاخ کی لمبائی ہے تو F کے ذریعہ پیدا شدہ گردشہ L اور F کا حاصل ضرب ہوگا۔

$$\text{گردشہ Restoring torque} = L \times F = G\frac{Mm}{d^2}L \qquad (8.6)\ (8.6)$$

متوازن حالت میں یہ بحالی گردشہ کے برابر ہوتا ہے۔

$$PQ=TQ \quad (8.7)$$

مساوات (6-8) اور (7-8) کے ذریعہ

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\theta \qquad (8.8)$$

کی پیمائش کر کے ہم G کی قدر اس مساوات کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں۔ کیونڈش کے تجربہ کے بعد G کی پیمائش میں درستگی لائی گئی ہے ۔موجودہ دور میں اس کی قدر لی جاتی ہے۔

8.3 کشش ثقل کا میدان اور میدان کی طاقت

کشش ثقل کا میدان: ایک کمیت کے اطراف کا علاقہ جس میں دوسری کمیتیں تجاذبی قوت کشش کا مشاہدہ کرتی ہیں، کشش ثقل کا میدان کہلاتا ہے۔ کشش ثقل کے میدان کی طاقت $\vec{E}$ میدان میں ایک نقطہ پر مرکوز ہوتی ہے۔

اگر ایک نقطہ کمیت m مرکز سے r دوری پر واقع M کمیت پر جو قوت لگاتا ہے وہ مرکز پر مرکوز ہے۔

$$\bar{F} = -G\frac{mM}{\mathbf{r}^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (8.9)$$

جہاں $\hat{r}$ ایک سمتیہ ہے۔

تعریف کے مطابق کشش ثقل کے میدان کی طاقت E کمیت M کی وجہ سے نقطہ P پر واقع ہے۔

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{m} \qquad (8.10)$$

مساوات (8.9) اور (8.10) کی وجہ سے

$$\bar{E} = -G\frac{M}{\mathbf{r}^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (8.11)$$

منفی نشان یہ بتاتا ہے کہ میدان .EqnM کی کشش ثقل کے مرکز کی طرف کام کر رہا ہے۔ (8.11) کشش ثقل کے میدان کی طاقت یا شدت کے اظہار کی نمائندگی کرتا ہے۔

8.4 تجاذبی توانائی بالقوہ (Gravitational Potential Energy)

تجاذبی توانائی بالقوۃ وہ توانائی ہے جو جسم کے اندر اس کی حالت کی مناسبت سے محفوظ ہوتی ہے۔ اگر ذرہ کے مقام میں تبدیلی عامل قوت کے ذریعہ آتی ہے تو توانائی بالقوۃ میں تبدیلی قوت کے ذریعہ آتی ہے۔ تجاذبی قوت سے پیدا شدہ توانائی کو توانائی بالقوۃ کہتے ہیں۔ ایسی صورت میں تجاذبی کشش عملی طور پر مستقل ہوگی۔

فرض کریں کہ کام کی مقدار dW ہے ایک حرکت کرنے والے جسم کی کمیت M کی دوری پر ہے جس میں ایک جسم کی کمیت M کے ذریعہ کشش ثقل کا میدان بنایا گیا ہے۔ تب تجاذبی توانائی بالقوۃ اس طرح ہوگی۔

$$dU = dW = \text{Force} \times \text{displacement}$$

$$dU = -F \,.\, dr \tag{8.12}$$

اگر کمیت m کا ذرہ حرکت میں ہے تو وہ لامتناہی سے ایک نقطہ P سے r فاصلہ کے ذریعہ کمیت M اس طرح بنائے گا۔

$$U = -\int_{\infty}^{r} F.dr \tag{8.13}$$

لیکن یہاں جو قوت ہے وہ تجاذبی قوت ہے جو دو کمیتوں m اور M پر عمل کر رہی ہے تب مساوات (8.1) کے ذریعہ سے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$U = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$U = GMm\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$U = -G\frac{Mm}{r} \tag{8.14}$$

اوپر دی گئی مساوات (8.14) کی عبارت اس بات کا اظہار کرتی ہے کہ تجاذبی توانائی بالقوۃ کمیت m میں جگہ بناتی ہے۔ جب وہ کشش ثقل کے میدان کی کمیت M میں رکھی جاتی ہے۔

8.1 متن کے سوالات

1. زمین کے گرد چاند کی گردش کا وقفہ 27.3 دن ہے۔ یاد رہے یہ وقفہ بلحاظ متعین ستاروں کے ہے (زمین کی گردش کا وقفہ 29.5 دن کا ہوتا ہے یہ وہی وقفہ ہے جو کیلنڈر ایک ماہ میں بتاتا ہے) چاند کے مدار کا نصف قطر اگر 3.84×10^8 m (زمین کے نصف قطر کا 60

مرتبہ) ہوتو مرکز مائل قوت کا اسراع(Centripetal Acceleration) محسوب کیجئے اور بتائیے کہ یہ $9.8\ \text{ms}^{-2}$ کے قریب ترین قیمت ہے جب تقسیم کیا جائے 3600 سے، تاکہ یہ واضح ہو کہ کشش (g) میں تبدیلی $\frac{1}{r^2}$ ہوئی ہے۔

2. مساوات (8) سے آفاقی تجاذبی مستقل G کے اکائی اور ابعادی ضابطہ بیان کیجئے۔

3. مساوات (8.1) کو استعمال کرتے ہوئے دو کمیتیں جو 1kg کی ہیں 1m کے فاصلے پر علیحدہ رکھی گئی ہیں۔ ان دونوں کے درمیانی تجاذبی قوت دریافت کیجئے۔

4. طاقت کی شدت کیا ہوگی اگر دو کمیتیں ایک مخصوص فاصلہ F کی دوری پر ہوں۔ F میں کیا تبدیلی آئے گی اگر: (i) فاصلہ کو دوگنا کر دیا جائے اور کمیتوں میں کوئی تبدیلی نہ ہو۔ (ii) فاصلہ وہی رہے اور ہر کمیت دوگنی کر دی جائے۔ (iii) فاصلہ دوگنا کر دیا جائے اور ہر ایک کمیت بھی دوگنی کر دی جائے۔

5. دو کمیتیں 50kg اور 60kg، 1m کے فاصلے سے علیحدہ کی گئی ہیں۔ ان دونوں کے درمیان تجاذبی قوت دریافت کیجئے۔

8.5 اسراع بوجہ جاذبہ زمین (Acceleration due to Gravity)

نیوٹن کے دوسرے کلیہ حرکت کے ذریعہ سے ہم یہ جانتے ہیں کہ قوت F جب کسی m کمیت والے جسم پر زور ڈالتی ہے تو جسم میں اسراع a پیدا ہوتا ہے، اس کو یہ رشتہ ظاہر کرتا ہے۔

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{8.15}$$

زمین ہم مرکزی کروی قوتوں پر مشتمل ہے۔ اس میں سب سے چھوٹا قوٹ زمین کے مرکز پر اور سب سے بڑا قول زمین کی سطح پر ہوتا ہے۔ ہر قول اس نقطہ پر جو ان کے باہر ہے تجاذبی قوت ٹھیک اسی طرح لگاتا ہے کہ تمام کمیت مشترکہ مرکز پر مرکوز ہو۔ تجاذبی قوت کی وجہ سہ جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہی اسراع بوجہ جاذب زمین کہلاتا ہے۔ اس کو علامت g سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس لئے مساوات (8.15) زمین کی تجاذبی قوت جو m کمیت والے جسم پر عمل کرتی ہے اس طرح ہے:

$$\vec{F} = mg \tag{8.16}$$

مساوات (8.1) کے مطابق تجاذبی قوت کی کوشش کمیتوں M اور m کے درمیان اس طرح ہیں

$$\vec{F} = G\frac{mM}{R^2} \tag{8.17}$$

یہاں R زمین کا نصف قطر ہے۔ مساوات (8.16) اور (8.17) کے ذریعہ ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$mg = G\ \frac{mM}{R^2}$$

$$g = G\frac{M}{R^2} \tag{8.18}$$

یاد رہے کہ کسی بھی جسم پر قوت کشش زمین کی کل کمیت کے مرکز پر مرکوز ہوتی ہے۔ جیسا کہ شکل 8.5 میں بتایا گیا ہے۔

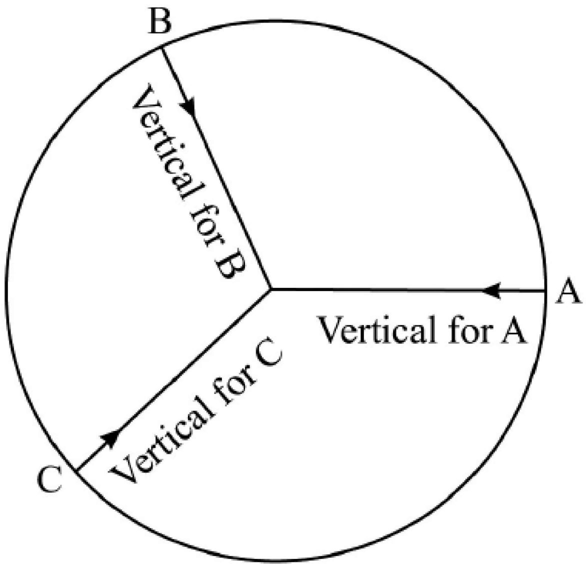


Fig. 8.5 : The vertical direction at any place is the direction towards the centre of earth at that point

ایک دفعہ جب ہم یہ جان لیں کہ زمین کی کمیت M اور نصف قطر R یا کوئی بھی فلکی جسم جیسے سیارے 'g' کی قیمت مساوات (8.18) کی مدد سے محسوب کی جاسکتی ہے۔ زمین کی سطح پر 'g' کی قیمت $9.8\ ms^{-2}$ پائی گئی۔

دیا گیا ہے کہ کسی بھی سیارہ یا سیارچہ کا نصف قطر اور کمیت معلوم ہو تو مساوات (8.18) کو استعمال کرتے ہوئے اسراع بوجہ زمین معلوم کیا جاسکتا ہے۔ آیئے آگے بڑھنے سے قبل ایک بار پھر مساوات (8.18) پر نظر ڈالتے ہیں۔

کسی بھی جسم میں جب اسراع بوجہ جاذبہ زمین پیدا ہوتا ہے تو اس کی کمیت پر آزادانہ منحصر ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ایک وزنی گینداور ہلکی گیند یکساں رفتار سے گرتے ہیں۔ اگر ان دو گیندوں کو ایک مناسب بلندی سے گرایا جائے تو دونوں ہی زمین پر ایک ساتھ پہنچتے ہیں۔

مشغلہ 8.1

ایک کاغذ کا ٹکڑا اور ایک چھوٹا کنکر لیں۔ ایک مناسب بلندی سے دونوں کو ایک ہی وقت میں گرائیں۔ دونوں اجسام نے جس راستہ کو اختیار کیا اس کا مشاہدہ کیا جائے اور زمین کو چھونے کا وقت نوٹ کیا جائے۔ اب دو کنکر لئے جائیں۔ ایک' دوسرے سے وزنی ہو۔ ایک بلندی سے دونوں کو ایک ساتھ چھوڑا جائے اور زمین کو چھونے کے وقت کا مشاہدہ کیا جائے۔

کشش کے زیر اثر اجسام عمودی طور پر زمین کی طرف آئیں گے۔ زمین کی سطح سے کم بلندی پر اسراع بوجہ جاذبہ زمین میں کوئی زیادہ تبدیلی نہیں ہوتی۔ چنانچہ حرکت کی مساوات ابتدائی رفتار اور انتہائی رفتار کے لئے طئے شدہ فاصلہ اور لئے گئے وقت کو ملحوظ رکھتے ہوئے کچھ اس طرح ہوں گی۔

$$v = u + gt \qquad (8.19\ [a])$$

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (8.19\ [b])$$

$$v^2 = u^2 + 2gs \qquad (8.19\ [c])$$

یہاں یہ یاد رکھنا اہم ہے کہ 'g' ہمیشہ عمودی طور پر نیچے کی سمت میں ہوتا ہے۔ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ جسم کی حرکت کس سمت میں ہے۔

اگر کوئی جسم جس اسراع کے ساتھ گرتا ہے وہ 'g' کے برابر ہو تو وہ آزادانہ گرنا (Free fall) کہلاتا ہے۔

مساوات (8.19 b) سے ثابت ہوتا ہے کہ جب کوئی جسم گرنا شروع کرتا ہے تو اس سے قبل وہ حالت سکون میں ہوتا ہے۔ جب وہ گرتا

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (8.19\ [d])$$

یہاں $u = 0$ جسم حالت سکون سے شروع ہوتا ہے۔

ایک سادہ تجربہ جس میں ایک وزنی سکہ کو بلندی سے گرا کر Stop watch کی مدد سے وقت کی پیمائش کرتے ہوئے 'g' کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔ اگر ہم ایک 5 روپے کے سکہ کو 1 میٹر کی بلندی سے گرا کر وقت کی پیمائش کرتے ہیں اور اس تجربہ کو کئی مرتبہ دہرانے کے بعد اوسط وقت 0.45 سکنڈس ہوتا ہے۔ ان اعداد و شمار کے ذریعہ 'g' مساوات (8.19 d) معلوم کیا جاتا ہے۔

البتہ تجربہ گاہ میں ہم سادہ رقاص کو استعمال کرتے ہوئے بالواسطہ طریقے سے 'g' کی قدر معلوم کرسکتے ہیں۔

آپ حیران رہ جائیں گے کہ ہم نے کیوں زمین کا نصف قطر' بطور جسم اور زمین کے درمیان فاصلہ کے لیا تاکہ قوت کشش معلوم کی جائے۔

جب ہم دو فرضی اجسام یا کمیت کے نقطہ کو ایک دوسرے سے الگ کرتے ہیں وہی ان کے درمیان کا فاصلہ ہوتا ہے۔ لیکن جب ہم دو پھیلے ہوئے اجسام کی درمیانی قوت کشش معلوم کریں گے تو کون سا فاصلہ لیں گے؟

اس مسئلہ کے حل کے لئے کشش کے مرکز کا تصور متعارف کروایا گیا۔ مرکز جاذبہ کشش ثقل کا مرکز کہلاتا ہے۔

اس نکتہ پر جہاں تک کشش کے اثر انداز ہونے کا تعلق ہے پورے جسم کو تبدیل کیا جاسکتا ہے پر اثر وہی رہتا ہے۔

ہندسی طریقہ میں با قاعدہ اجسام جن کی یکساں کثافت ہوتی ہے مثلاً کرہ' استوانہ' مستطیل میں ہندسی مرکز ہی مرکز جاذبہ ہوتا ہے۔

اسی لئے ہم نے زمین کے مرکز کو ہی دوسرے اجسام کے فاصلے کی پیمائش کے لئے منتخب کیا ہے۔

بے قاعدہ اجسام کے لئے کوئی آسان طریقہ نہیں ہے ان کا مرکز جاذبہ بتایا جائے۔

ایک دھاتی رنگ کا مرکز جاذبہ کہاں ہوتا ہے؟ اس کو مرکز میں بڑا ہونا چاہئے۔ لیکن یہ نقطہ جسم کی کمیت کے باہر ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ کشش ثقل کا مرکز جسم کے باہر ہوسکتا ہے۔ ہمارا اپنا مرکز ثقل کہاں ہے؟ ہماری ایک با قاعدہ شکل ہے یہ ہمارے جسم کے مرکز میں کہیں نیچے ہوگی۔

بعد میں اس کورس میں ہم اجسام کی کمیت کے مرکز کے بارے میں پڑھیں گے۔

یہ ایک ایسا نقطہ ہے جس میں جسم کی پوری کمیت کو مرتکز سمجھا جاسکتا ہے۔ ایک یکساں کشش ثقل کا میدان جو کہ زمین کے قریب ہے' کشش ثقل کا مرکز اس کے ساتھ ملتا ہے۔ کشش ثقل کا استعمال یا کمیت کا مرکز ہمارے حسابات کو انتہائی آسان کردیتا ہے۔

ذرا تصور کریں تو ہمیں کتنے حسابات کرنے پڑیں گے۔ انفرادی ذرات کے درمیان قوتیں جس سے ایک جسم بنتا ہے اور پھر ان تمام قوتوں کا نتیجہ تلاش کرنا ہوگا۔ ہم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ 'G' اور 'g' مختلف جسمانی مقداروں کی نمائندگی کرتے ہیں۔

'G' کشش ثقل کا عالمگیر مستقل جو ہر جگہ یکساں رہتا ہے۔ جب کہ 'g' جگہ جگہ تبدیل ہوسکتا ہے۔

8.2 متن کے سوالات

1. زمین کی کمیت 5.97×10^{24} kg اور اوسط نصف قطر 6.37×10^{6} m۔ زمین کی سطح پر 'g' کی قدر محسوب کیجئے۔

2. محتاط پیمائش سے پتہ چلتا ہے کہ خط استواء پر زمین کا نصف قطر 6398 کلومیٹر ہے جب کہ قطبوں پر یہ 6357 کلومیٹر ہے۔ خط استوا اور قطبوں پر 'g' کی قیمت کا موازنہ کیجئے۔
3. ایک ذرہ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ 'g' کی سمت کیا ہوگی۔ (i) جب ذرہ اوپر جا رہا ہو۔ (ii) جب وہ اپنے سفر میں سب سے اوپر ہو۔ (iii) جب وہ نیچے آ رہا ہو۔ (iv) جب وہ زمین پر واپس آ جائے۔
4. چاند کی کمیت 7.3×10^{22} kg کلوگرام اور اس کا نصف قطر 1.74×10^{6} m ہے۔ اسراع بوجہ کشش ثقل اس کی سطح پر محسوب کیجئے۔

8.6 'g' کی قدر میں تبدیلی 'g' کی قدر میں تبدیلی کی وجہ سے

مساوات (8.18) کے ذریعہ اسراع بوجہ جاذبہ زمین معکوس تناسب میں ہوتا ہے فاصلہ کے مربع کے، جو یہ بتاتا ہے کہ 'g' کی قدر گھٹتی جب فاصلہ کا مربع بڑھتا ہے زمین کے مرکز سے۔

تب سطح سے ایک فاصلہ پر جو کہ 2R ہے زمین کے مرکز سے، تب 'g' کی قدر 1/4th ہو جاتی ہے۔ سطح زمین کی 'g' کی قدر کے مقابلہ میں جب کہ فاصلہ 'h' جو زمین کی سطح کے اوپر ہے جو بلندی یا ارتفاع کہلاتا ہے (زمین کے نصف قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہے) تو 'g' کی قدر جو علامت 'g_h' سے ظاہر کی گئی ہے اس طرح ہوگی۔

$$g_h = G \frac{M}{(h+R)^2}$$

$$g_h = G \frac{M}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$g_h = G \frac{M}{R^2} \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

مساوات (8.18) کی رو سے اسراع بوجہ جاذب زمین، زمین کی سطح پر $g = G\frac{M}{R^2}$ تبدیل ہوتا ہے۔

$$g_h = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\frac{g}{g_h} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$$

$$\frac{g}{g_h} = 1 + \frac{2h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2$$

چونکہ $\frac{h}{R}$ ایک کم تر مقدار ہے $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ اس سے بھی کم تر قدر ہے، تب وہ $\frac{h}{R}$ کے مقابلے میں قابل نظر انداز ہو سکتی ہے۔ تب

$$\frac{g}{g_h} = 1 + \frac{2h}{R}$$

$$g_h = \frac{g}{\left(1 + \frac{2h}{R}\right)} \qquad (8.20)$$

$$g_h = g\left(1 + \frac{2h}{R}\right)^{-1}$$

اوپری مساوات کے RHS کو پھیلانے سے مساوات کی قوت قابل نظر انداز ہوتی ہے اور یہ کافی کم قیمت کی ہوتی ہیں اس لئے۔

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) \qquad (8.21)$$

مساوات 8.21 سے پتہ چلتا ہے کہ زمین کے اوپر تمام کم بلندوں 'h' پر اسراع بوجہ جاذبہ $\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ کے عنصر سے کم ہوتی ہے اور ایک بلندی پر زمین کے نصف قطر کا نصف رہ جاتی ہے جو کہ $\frac{R}{2}$ ہے۔

مثال 8.2:

جدید طیارے 10 کلومیٹر کی بلندی پر پرواز کرتے ہیں۔ 10 کلومیٹر کی بلندی پر 'g' کی قدر معلوم کرتے ہیں۔ زمین کا نصف قطر 6400 کلومیٹر اور g کی قدر......سطح زمین پر۔

حل:

مساوات (8.20) کے ذریعہ ہمارے پاس

$$g_h = \frac{g}{\left(1 + \frac{2h}{R}\right)}$$

$$g_h = \frac{9.8\,ms^{-2}}{\left(1+\frac{2(10\,km)}{(6400\,km)}\right)} = \frac{9.8\,ms^{-2}}{1.003} = 9.77\,ms^{-2}$$

8.6.2 'g' میں تبدیلی گہرائی کی وجہ سے

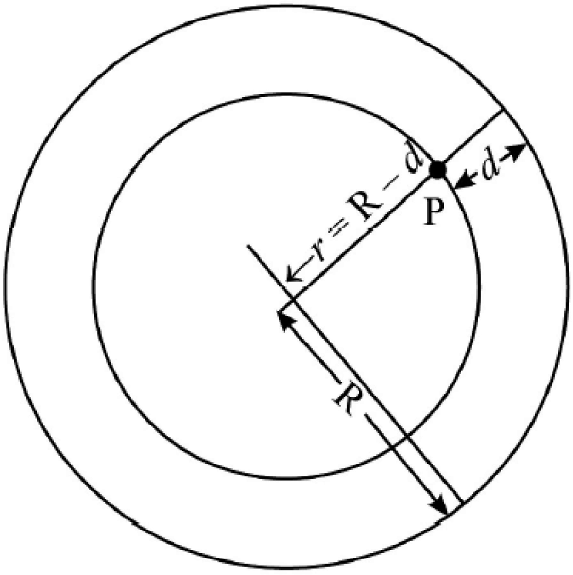


Fig. 8.6 : A point at depth d is at a distance r = (R – d) from the centre of the earth

فرض کریں کہ ایک گہرائی d پر ایک نقطہ p موجود ہے جیسا کہ شکل 8.6 میں بتایا گیا ہے۔ مان لیتے ہے ں کہ زمین ایک کرہ ہے یکساں کثافت p کا۔ زمین کے مرکز سے p کا فاصلہ r=(R-d) ہے۔نصف R-d کا ایک دائرہ کھینچیں۔نقطہ کمیت p پر رکھے جانے سے کشش ثقل کا تجربہ دوطریقوں سے ہوگا۔

1. موٹائی'd' میں خول کے ذرات اور
2. نصف قطر'r' کے دائرے کے ذرات

شکل (8.6) سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ نقطہ p کرہ کی بیرونی سطح پر اور کرہ کی اندرونی سطح پر'r' اور موٹائی 'd' پائی جاتی ہے۔ خول میں موجود تمام ذرات کی وجہ سے p پر موجود نقطہ کمیت ایک دوسرے کو منسوخ کر دیتی ہے۔یعنی خول میں مادے کی وجہ سے p پر کمیت خالص صفر ہے۔لہٰذا نقطہ p پر کشش ثقل کی وجہ سے اسراع بوجہ جاذبہ کا حساب لگانے کے لئے کرہ کی کمیت جس کا نصف قطر r=(R-d) ہے پر غور کرنا چاہئے۔

کرہ کی کمیت جس کا نصف r=(R-d) ہے۔

کرہ کی کمیت جس کا نصف'r' ہے= کثافت x حجم (Volume x density)

$$M' = \left(\frac{4}{3}\pi\,(R-d)^3\right)\rho \qquad (8.22)$$

اسراع بوجہ جاذبہ ایک نقطہ کمیت'p' پر ہے لہٰذا

$$g_d = G\frac{M'}{(R-d)^2} \qquad (8.23)$$

مساوات (8.22) اور (8.23) کے ذریعہ

$$g_d = G\frac{1}{(R-d)^2}\left(\frac{4}{3}\pi(R-d)^3\right)\rho$$

$$g_d = \frac{4\pi G}{3}(R-d)\rho \qquad (8.24)$$

نوٹ کریں کہ جیسے جیسے 'd' بڑھتا ہے (R-d) گھٹتا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ جیسے جسے ہم زمین کے نیچے جاتے ہیں 'g' کی قدر کم ہوجاتی ہے۔ d=R پر جو کہ زمین کا مرکز ہے کشش ثقل ختم ہوجائے گی۔ یہ بھی نوٹ کیا جائے کہ (R-d)=r زمین کے مرکز سے فاصلہ ہے۔ لہٰذا اسراع بوجہ جاذبہ 'r' سے لکیری طور پر تناسب ہے۔ زمین کے مرکز سے کافی فاصلہ پر زمین کی سطح 'g' میں تبدیلی دیکھی گئی جیسا کہ شکل (8.7) میں دکھایا گیا ہے۔

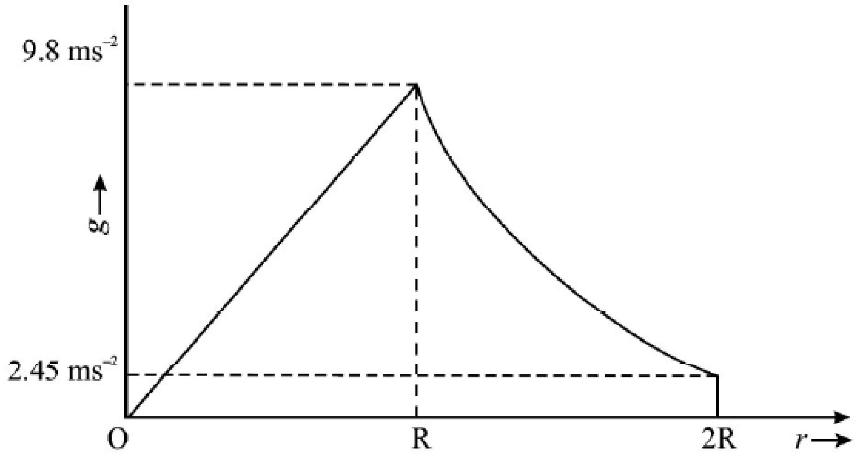


Fig. 8.7 : Variation of g with distance from the centre of the earth.

$$g = \frac{4\pi G}{3}\rho R \qquad (8.25)$$

مساوات (8.24) سے ہم اظہار کرسکتے ہیں 'gd' کی قدر سطح پر d=0 تب ہم کو سطح کی قیمت ملتی ہے۔

$$g_d = g\frac{(R-d)}{R} = g\left(1-\frac{d}{R}\right),\ 0 \le d \le R \qquad (8.26)$$

مساوات (8.24) اور (8.25) کی بنیاد پر ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ 'g' بلندی اور گہرائی دونوں ہی کے ساتھ گھٹتا ہے جیسا کہ شکل (8.7) میں دکھایا گیا ہے۔

8.6.3 عرض البلد کے ساتھ 'g' میں تبدیلی (Variation of 'g' with Latitude)

ہم جانتے ہیں کہ زمین اپنے محور کے گرد گھومتی ہے اس کی وجہ سے زمین کا ہر ذرہ زمین کی سطح پر دائروی حرکت کرتا ہے۔ کشش ثقل کی غیر موجودگی میں یہ تمام ذرات مدار کی طرف اڑنے لگتے ہیں۔ ان تمام ذرات کو زمین کی سطح سے باندھے رکھنے کے لئے کشش ثقل ایک اہم کردار ادا کرتی ہے۔

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ کسی ذرہ کو گردشی حرکت میں رکھنا ہو تو اس کو مرکز مائل قوت (Centripetal Force) فراہم کی جائے۔ نتیجہ کے طور پر اجسام پر زمین کی کشش سطح پر کچھ کم ہوجاتی ہے اور زمین کی گردش کا زیادہ اثر خط استواء پر پڑتا ہے۔ قطبوں پر یہ اثر مکمل طور پر ختم ہوجاتا ہے۔ اب ہم ضابطہ کا حوالہ دے سکتے ہیں۔ جہاں عرض البلد کے ساتھ 'g' میں تبدیلی ہوتی ہے۔ اگر 'g' اسراع کی قدر کو ظاہر کرتا ہے تو کشش 'g' عرض البلد کے زاویہ λ اور 'g' کی قدر خط استواء پر کچھ اس طرح ہوتی ہے۔

$$g_\lambda = g - R\omega^2\cos^2\lambda \qquad (8.27)$$

جہاں w زاویائی رفتار ہے اور R اس کا نصف قطر ہے۔ ہم یہ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ قطبوں پر λ=90 اور اس وجہ سے

مثال(8.3):

چلئے قطبوں پر 'g' کی قیمت محسوب کرتے ہیں۔

حل:

قطبوں پر زمین کا نصف قطر $= 6357\ \text{km} = 6.357 \times 10^6\ \text{m}$

زمین کی کمیت $= 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$

ہم ان کے درمیان تعلق کو جانتے ہیں $g = G\dfrac{M}{R^2}$

$$g_{\text{Poles}} = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}\right) \times \left(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}\right)}{\left(6.357 \times 10^6\ \text{m}\right)^2} = 9.853\,\text{ms}^{-2}$$

مثال8.4:

اب معلوم کرتے ہیں 'g' کی قیمت $\lambda = 60^{\circ}$ ‘جہاں زمین نصف قطر 6371km ہے۔

حل:

زمین کا گردشی حصہ $T = 24\ \text{hours} = 24 \times 60 \times \text{seconds}$

زمین کی گردش کی تعداد $= 1/T$

زمین کا زاویائی تعدد $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2 \times 3.14}{24 \times 60 \times 60} = 7.27 \times 10^{-5}\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}$

g_λ (جب ارتفاع 60° پر ہو) $= 9.853 - (6.37 \times 10^6)\,(7.27 \times 10{-5})^2 \cos^2 60$

g_λ (جب ارتفاع 60° پر ہو) $9.853 - 0.008 = 9.844\ \text{ms}^{-2}$

زمین کی اندرونی ساخت

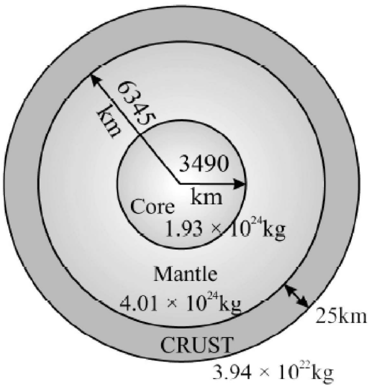


Fig. 8.8: Structure of the earth (not to scale). Three prominent layers of the earth are shown along with their estimated masses.

شکل(8.8) کی روسے ہم یہ معلوم کریں گے کہ زمین کی کافی کمیت مرکز پر مرتکز یا مرکوز ہوتی ہے۔اوپری سطح کی تہہ کافی ہلکی ہوتی ہے۔کم گہرائی میں کمیت میں بڑی مشکل سے کمی ہوتی ہے۔اس کی اہمیت اس وقت ہوتی ہے جب 'g' محسوب کیا جائے اور نصف قطر میں کمی واقع ہو۔اس لئے 'g' کی قیمت ایک قابل لحاظ گہرائی تک بڑھتی ہے پھر گھٹنا شروع ہوتی ہے۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ ”زمین ایک یکساں کرہ ہے“ کا مفروضہ صحیح نہیں ہے۔

8.3 مشق کے سوالات:

1. ہمیں کس بلندی تک جانا چاہئے کہ 'g' کی قیمت سطح زمین کے مقابلے میں نصف رہ جائے۔
2. کس گہرائی پر 'g' کی قیمت سطح زمین کی قیمت کا %80 ہوجاتی ہے۔
3. دہلی کا عرض البلد تقریباً 30 درجہ شمال میں ہے۔ دہلی میں 'g' کی قیمت اور قطبوں پر 'g' کی قیمت کا فرق محسوب کیجئے۔
4. ایک سیارچہ زمین کے مدار کے اطراف 1000km بلندی پر گردش کرتا ہے۔ سیارچہ پر اثر انداز ہونے والے اسراع بوجہ جاذبہ معلوم کیجئے۔

(i) مساوات (8.21) کو استعمال کرتے ہوئے۔

(ii) اس تعلق کو استعمال کیجئے جس میں 'g' $1/r^2$ سے تناسب میں ہے، جہاں 'r' زمین کے مرکز تک کا فاصلہ ہے۔ اس معمہ کو حل کرنے کے لئے آپ کونسا طریقہ بہتر سمجھتے ہیں اور کیوں؟

8.7 وزن اور کمیت (Weight and Mass)

وہ قوت جو جسم کو زمین کی جانب کھینچتی ہے وزن کہلاتی ہے۔ اگر 'm' جسم کی کمیت ہو تب اس کا وزن 'W' اس طرح دیا گیا ہے

$$W = mg \qquad (8.28)$$

چونکہ وزن ایک قوت ہے جس کی اکائی Newton (N) ہے اگر آپ کی کمیت 50kg ہے تو آپ کا وزن

50 kg × 9.8 ms–2 = 490 N

کیوں کہ 'g' ایک جگہ سے دوسری جگہ پر تبدیل ہوجاتا ہے اسی لئے جسم کا وزن بھی ایک جگہ سے دوسری جگہ پر تبدیل ہوجاتا ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ زمین کا نصف قطر قطبوں پر کم ہوتا ہے اور خط استوا پر زیادہ ہوتا ہے۔ وزن گھٹنا جب ہم زیادہ بلندی پر جاتے ہیں یا پھر زمین کے اندر جاتے ہیں البتہ جسم کی کمیت تبدیل نہیں ہوتی۔

کمیت جسم کی اندرونی خصوصیت ہوتی ہے لہٰذا جسم کی کمیت مستقل ہوتی ہے جب کہ جسم کہیں بھی پایا جائے۔

نوٹ: ہماری روزمرہ کی زندگی میں ہم اکثر وزن اور کمیت کو تبدیل کرتے رہتے ہیں وزن اور کمیت تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔ ترازو وزن کی پیمائش کرتے ہیں لیکن ذرا سوچئے وہ کلوگرام (kg) سے نشان زد ہوتے ہیں۔ (N سے نہیں)

مشغلہ 8.2:

ایک جسم کا وزن معلوم کیجئے جس کی کمیت 50kg ہے اور جو زمین کے مرکز سے 2R، 3R، 4R، 5R اور 6R کے فاصلے پر ہے۔ وزن بمقابلہ فاصلہ کا گراف تیار کیجئے۔ اسی گراف پر بتایئے کہ کمیت فاصلہ ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ ذیل میں دئے گئے سوالات کو حل کرنے کی کوشش کیجئے جو کمیت اور وزن کے تعلق سے آپ کی رائے کو مضبوطی فراہم کرسکے۔

8.4 متن کے سوالات:

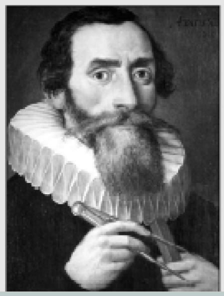
1. فرض کیجئے کہ آپ نے چاند پر قدم رکھ دیا ہے۔ آپ کے وزن اور کمیت پر کیا اثر پڑے گا؟
2. زمین پر اپنے وزن کا مریخ پر اپنے وزن سے موازنہ کیجئے۔ آپ کی کمیت کا کیا حال ہوگا؟ مریخ کی کمیت 6×10^{23} = لیجئے اور اس کا نصف قطر 4.3×10^6 m ہے۔

3. اجسام کے وزن کرنے کے لئے آپ نے دوقسم کے ترازو دیکھے ہوں گے۔ پہلے میں دو پلڑے (Pan) ہوتے ہیں جس میں ہم ایک میں جس کا وزن معلوم کرنا ہو‘وہ اجسام اور دوسرے میں اوزان رکھتے ہیں۔ دوسری قسم کا ترازو اسپرنگ بیالنس کہلاتا ہے اس میں جس جسم کا وزن معلوم کرنا ہو وہ ہک سے لٹکا دیا جاتا ہے۔اس کے اختتام پر ایک نشان زدہ پٹی (Scale) ہوتی ہے۔فرض کیجئے کہ آپ آلو کا ایک بیگ دونوں ترازوؤں سے تولتے ہیں اور وہ دونوں ہی یکساں قدر بتاتے ہیں۔اب آپ ان کو چاند پر لے جاتے ہیں ان دو ترازو میں کیا پیائش میں کوئی تبدیلی ہوتی ہے؟

8.8 کیپلر کے سیاروں کی حرکت کے کلیات

قدیم زمانے میں ابتدا ہی سے سیاروں اور ستاروں کی حرکت ایک اہم موضوع رہا ہے۔اس کے مطابق سبھی فلکیاتی اشیاء سورج‘ تارے‘ سیارے‘ زمین کے گرد گھومتے ہیں۔ جسے ارض مرکزی ماڈل کہا گیا تھا۔ پولینڈ کے ایک خلاورد کوپرنکس نے 15 ویں صدی میں یہ بتایا کہ سورج اپنی جگہ قائم رہتا ہے اور تمام سیارے سورج کے گرد حرکت کرتے ہیں۔ان کا مرکز سورج ہوتا ہے۔سولہویں صدی میں گیلیلیو نے کوپرنکس کی تائید کی۔ایک اور یورپی خلانورد ٹائیکو برا (Tycho Brah) نے اپنے مشاہدات کو جمع کیا۔ان مشاہدات کی بنیاد پر اس کے معاون کیپلر نے ’’سیاروں کی حرکت کے کلیات‘‘ کے نام سے تین کلیے اخذ کئے۔

جوہانس کیپلر



جوہانس کیپلر جرمن نژاد تھے انہوں نے علم فلکیات میں اپنا کیریر شروع کیا اور ٹائیکو برا کے معاون بنے۔20 سال تک ٹائیکو نے سیاروں کی حرکت کا مطالعہ کیا۔ان کی وفات کے بعد تحقیق کا مواد کیپلر کے پاس آ گیا جس نے 16 سال تک اس کا تجزیہ کیا۔اپنے تجزیہ کے بعد وہ سیاروں کی حرکات کے تین کلیات تک پہنچے۔کیپلر کو ہندسی بصریات کا بانی مانا جاتا ہے۔یہ پہلے سائنسداں تھے جنہوں نے بتایا کہ دوربین کیسے کام کرتی ہے۔کوپرنکس کے اس نظریہ کو کہ سورج اپنی جگہ قائم ہے اور سیارے اس کے گرد دائروں میں حرکت کرتے ہیں‘ چرچ نے رد کر دیا کیونکہ ان کے نظریہ کے مطابق زمین کائنات کا محور ہے۔وہ خاموشی سے اپنے مشاہدات ریکارڈ کرتے رہے جو ان کی وفات کے بعد منظر عام پر آئے۔دلچسپ بات یہ ہے کہ گیلیلیو کو موجودہ پوپ نے الزامات سے باعزت بری کر دیا۔

1. مداروں کا کلیہ (Law of Orbits):

تمام سیارے ناقصی مداروں (Elliptical Orbits) میں حرکت کرتے ہیں اور سورج کے ناقصی مداروں کے دونوں ماسکوں (Foci) میں سے کسی ایک پر نقطہ واقع ہوتا ہے۔Ellipse ایک بند منحنی ہوتا ہے۔یہ ایک خصوصیت ہے کہ Ellipse‘ سیاروں کے فاصلہ کے مربع کے جو دو ماسکوں (Foci) کے ساتھ مستقل ہوتا ہے۔

سیارے کی حرکت کے دوران بیضوی مدار میں جب وہ سورج کے قریب ہوتا ہے‘ قریب آفتاب (Perihelion) کہلاتا ہے اور جب سورج سے دور ہوتا ہے تو اوج شمس (Aphelion) کہلاتا ہے۔

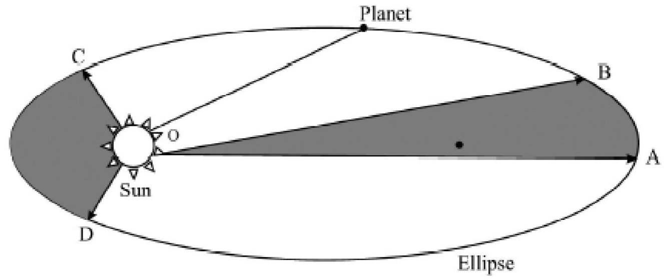


Fig. 8.9: The path of a planet is an ellipse with the Sun at one of its foci. If the time taken by the planet to move from point A to B is the same as from point C to D, then according to the second law of Kepler, the areas AOB and COD are equal.

2. رقبوں کا کلیہ (Law of Areas) :

سورج سے کسی بھی سیارے کو ملانے والا خط مساوی وقفہ سے مساوی رقبہ طے کرتا ہے۔

اس کلیہ کے مطابق سیارے جب سورج کے نسبتاً قریب ہوتے ہیں تو وہ نسبتاً تیز چلتے ہوئے معلوم ہوتے ہیں اور جب سورج سے ان کا فاصلہ زیادہ ہوتا ہے وہ نسبتاً آہستہ چلتے ہوئے معلوم ہوتے ہیں۔

3. **دوری وقفوں کا کلیہ (Law of Periods):** ایک سیارہ کے وقت دوران کا مربع سیارہ کے ناقصی مدار کے نصف اعظم محور کے مکعب کے متناسب ہوتا ہے۔

اگر وقت دور T ہے اور اوسط فاصلہ سورج سے 'r' ہو تو دوری وقفوں کا کلیہ ریاضیاتی مساوات میں $T^2 \propto r^3$ ہوگا۔

سورج کے اطراف سیارہ کا مدار جتنا چھوٹا ہوگا اتنا ہی کم وقت گردش کے لئے درکار ہوگا۔

تیسرے کلیہ کو کچھ اور احتیاط سے دیکھتے ہیں۔ نیوٹن نے اس کلیہ سورج اور سیاروں کے درمیان عمل درآمد قوت کو بیان کرنے کے لئے استعمال کیا تھا جیسے $1/r^2$۔ اس کے علاوہ T_1 اور T_2 دو سیاروں کے دوسری وقفے ہیں اور r_1 اور r_2 ان کا اوسط فاصلہ ہے سورج سے۔ تب تیسرا کلیہ دلالت کرتا ہے

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad (8.29)$$

تناسب کا مستقل معطل ہو کر رہ جاتا ہے تب ایک سیارے کا تعلق دوسرے سیارے سے تقسیم ہوتا ہے۔ یہ ایک اہم تعلق ہے مثلاً اگر ہم کو T_2 معلوم کرنا ہو تو ہمیں T_1 اور r_1 r_2 معلوم ہونا چاہئے۔

مثال 8.5:

مریخ کا دوری وقفہ معلوم کیجئے اگر سورج سے اس کا فاصلہ 57.9×10^9 m دیا گیا ہے کہ زمین کا سورج سے فاصلہ 1.5×10^{11} m ہے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ زمین کا دوری وقفہ 365.25 دن کا ہوتا ہے۔ یہاں $T_1 = 365.25$ ہے اور $r_1 = 1.5 \times 10^{11}$ m ہے۔ ہمیں بتایا گیا ہے کہ $r_2 = 57.9 \times 10^9$ m مریخ کے لئے ہے۔ لہٰذا مریخ کا دوری وقفہ دیا گیا ہے کہ T2 ہے۔

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}$$

مساوات میں قیمتیں درج کرنے کے بعد

$$T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2 r_2^3}{r_1^3}} = \sqrt{\frac{(365.25)^2 \times (57.9 \times 10^9)^3}{(1.5 \times 10^{11})^3}} = 87.6 \text{ days}$$

بالکل اسی طریقہ سے ہم دوسرے سیاروں کا دوری وقفہ بھی معلوم کر سکتے ہیں اور اپنے نتائج اس جدول سے جانچ سکتے ہیں۔

Table - 8.1: Some data about the planets of solar system

Name of the planet	**Mean distance from the Sun (In terms of the distance of earth)**	**Radius ($\times 10^3$ km)**	**Mass (Earth Masses)**
Mercury	0.387	2.44	0.53
Venus	0.72	6.05	0.815
Earth	1.0	6.38	1.00
Mars	1.52	3.39	0.107
Jupiter	5.2	71.4	317.8
Saturn	9.54	60.00	95.16
Uranus	19.2	25.4	14.50
Neptune	30.1	24.3	17.20

کیپلر کے کلیات کسی بھی طریقہ پر لاگو کئے جاسکتے ہیں۔ جہاں قوت اجاذب کی پابند ہو۔مثال کے طور پر مشتری اور اسکے سیارچہ اور زمین اور سیارچہ جیسے چاند اور مصنوعی سیارچے۔

مثال 8.6:

ایک سیارچہ جس کا دوری وقفہ ایک دن کے برابر ہے۔زمین کی سطح سے اس کی بلندی معلوم کیجئے' دیا گیا ہے کہ چاند کا زمین سے فاصلہ $60R_E$ ہے۔(R_E زمین کا نصف قطر ہے) اور اس کا دوری وقفہ 27.3days ہے (چاند کا یہ دوری وقفہ ساکن ستاروں کے لحاظ سے ہے۔ زمین کے لحاظ جو سورج کے اطراف گردش کرتا ہے تب چاند کا دوری وقفہ تقریباً 29.5 days ہوتا ہے)

حل:

ایک مقیم زمینی سیارچے کا وقفہ T_2 ایک دن کے برابر ہے۔چاند کے لئے $T_1 = 27.3$ اور $T_2 = 1$, $r_1 = 60\ R_E$ دی گئی مساوات کو استعمال کرتے ہوئے ہم حاصل کر سکتے ہیں۔

$$r_2 = \left[\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}\right]^{1/3} = \left[\frac{(60 R_E)^3 (1\text{day})^2}{(27.3 \text{ day})^2}\right]^{1/3} = 6.6 R_E.$$

یاد رہے کہ سیارچہ کا فاصلہ زمین کے مرکز سے لیا گیا ہے اس کی بلندی کو معلوم کرنے کے لئے (سطح زمین سے) ہم کو R_E کو $6.6R_E$

سے تفریق کرنا ہوگا۔ زمین کی سطح سے مطلوبہ فاصلہ $5.6R_E$ ہے اگر آپ کو یہ فاصلہ کلومیٹر میں چاہئے تو 5.6 کو زمین کے نصف قطر سے کلومیٹر میں ضرب دیجئے۔

8.9 سیاروں کی مداری رفتار (Orbital Velocity of Planets):

ہم نے اب تک سیاروں کے دوری وقفوں کے بارے میں بات کی ہے۔ اگر کسی سیارے کا دوری وقفہ T اور سورج سے اس کا فاصلہ r ہو تو وہ وقت T میں $2\pi r$ فاصلہ طے کرے گا لہٰذا اس کی مداری رفتار ہوگی

$$v_o = \frac{2\pi r}{T} \qquad (8.30)$$

ایک سیارے کی اوسط رفتار جب کہ وہ سورج کے گرد مدار میں ہو مداری رفتار کہلاتی ہے۔ مدار میں گردش کے دوران سیارہ مرکز مائل قوت کے اثر سے گذرتا ہے جو $\frac{mv_0^2}{r}$ ہے، جہاں m سیارہ کی کمیت اور v مدار کا نصف قطر ہے (یا سورج اور سیارے کے درمیان کا اوسط فاصلہ) اس قوت کو سورج اور سیارے کے درمیان تجاذبہ کی قوت فراہم کی جائے۔ اگر M سورج کی کمیت ہو تو سیارہ پر تجاذبی قوت $G\frac{mM}{r^2}$ ہوگی۔

دونوں قوتوں کو مساوات میں ظاہر کیا جائے تو

$$\frac{mv_o^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

$$v_o^2 = G\frac{M}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (8.31)$$

مشاہدہ کیجئے کہ سیارہ کی کمیت نے سیارے کی مداری رفتار پر کوئی اثر نہیں ڈالا۔

8.5 متن کے سوالات

1. ہماری کہکشاں کے سیاروں کی حرکت میں کئی نظام دریافت کئے گئے۔ کیا کیپلر کے کلیات کا ان پر اطلاق ہوتا ہے؟
2. دو مصنوعی سیارچے زمین کی سطح سے 1000 کلومیٹر اور 2000 کلومیٹر کے فاصلے پر زمین کے گرد گردش کر رہے ہیں۔ ان میں کس کا وقفہ طویل ہوگا۔ اگر پہلے کا وقتی وقفہ 90 منٹ ہو تو دوسرے کا وقتی وقفہ کیا ہوگا؟
3. نظام شمسی میں حال ہی میں ایک نیا سیارہ SEDNA دریافت کیا گیا۔ وہ سورج کے اطراف 86AU کے فاصلے سے گردش کرتا ہے۔ ایک AU سورج اور زمین کے درمیان کا فاصلہ ہے۔ یہ 1.5×10^{11} m کے مساوی ہے۔ مداری وقتی وقفہ سال میں معلوم کیجئے۔

4. ''ایک سیارچہ کی مداری رفتار جو زمین کے گرد گردش کر رہا ہے'' عبارت کی وضاحت کیجئے۔
5. مساوات (8.30) اور (8.31) کو استعمال کرتے ہوئے کیپلر کے تیسرے کلیہ کو اخذ کیجئے۔

8.10 فراری چال (Escape Velocity)

اگر ایک پتھر کو پھینکا جائے تو ہمیشہ یہ زمین پر واپس آجاتاہ۔قوت لگا کر اور اگر بہت زیادہ قوت لگا کر بھی اگر کوئی شئے اوپر کی جانب پھینکی جائے تو بالآخر وہ واپس زمین پر ہی آئے گی قوت کشش کی وجہ سے۔ یہ اس طرح بیان کی جائے گی کہ ''وہ کم سے کم رفتار جو درکار رہوتی ہے کسی جسم کو کہ زمین کے جاذبہ سے کھینچ کر باہر نکلنے کے لئے۔''

مان لیجئے کہ شئے لامتناہی فاصلے تک پہنچ گئی ہے اور اس کی فراری چال m '(V_e) اس کی کل بالقوہ اور حرکی توانائی کا حاصل جمع ہوگا۔ کسی شئے کا لاانتہا پر تجاذبی توانائی بالقوۃ لاانتہا پر وجیکٹائل کی کل توانائی ہوگی۔ جسم کی حرکی توانائی $\frac{1}{2}mv_e^2$ اور توانائی بالقوہ $G\frac{Mm}{R}$ زمین کی۔ تب

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{R}$$

$$v_e^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (8.32)$$

یہاں M زمین کی کمیت اور R اس کا نصف قطر ہے۔ کسی بھی اور سیارہ یا فلکی جسم کی فراری چال کو معلوم کرنے کے لئے کمیت اور نصف قطر کو اوپر دی گئی مساوات میں متبادل کے طور پر رکھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی جسم کی قوت اور رفتار کشش کے زیر اثر گھٹتی ہے جب کہ جسم اوپر کی جانب بڑھتا ہے۔ یہ اس وقت ممکن ہے جب وہ رفتار کے آگے قوت بھی 0 ہو جائے۔

لہٰذا جسم کی فراری چال بوجہ کشش ہے۔ 'G' اور 'g' کے درمیان تعلق جیسا کہ ہم جانتے ہیں g = GM/R2
GM = gR2 کو مساوات (8.32) میں رکھنے سے

$$v_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} \qquad (8.33)$$

مساوات 8.33 فراری چال کا اظہار ہے۔ اسراع بوجہ زمین $g = 9.8\ ms^{-2}$ اور نصف قطر $R = 6.4 \times 10^6\ m$ کو مساوات میں رکھا جائے تو ہمیں فراری چال کی قیمت $v_e = 11.2\ km\ s^{-1}$ حاصل ہوگی۔

8.6 متن کے سوالات

1. زمین کی کمیت $5.97 \times 10^{24}\ kg$ اور نصف قطر 6371km ہے۔ زمین سے فراری چال معلوم کیجئے۔
2. فرض کیجئے کہ زمین اچانک اپنے نصف قطر سے سکڑ گئی ہے کمیت میں کسی تبدیلی کے بغیر۔ تب فراری چال کیا ہوگی؟
3. ایک تصوراتی سیارہ x جس کی کمیت زمین کی کمیت سے 8 گنا اور نصف قطر زمین کے نصف قطر کا دوگنا ہے۔ اس سیارہ سے فراری چال کیا ہوگی زمین کی فراری چال کے لحاظ سے؟

8.11 مصنوعی سیارچے (Artificial Satellites)

ایک کرکٹ میچ سڈنی میں آسٹریلیا میں کھیلا جاتا ہے اور ہم ہندوستان میں اس کا راست نظارہ کر سکتے ہیں اور ایک ٹینس کا میچ امریکہ میں کھیلا جاتا ہے اور ہندوستان میں ہم اس کے راست نظارے سے محظوظ ہوتے ہیں۔ کیا آپ کبھی اس تعلق سے حیران ہوئے؟ یہ کیسے ممکن ہوا؟ یہ سب کچھ مصنوعی سیاروں سے ممکن ہوا جو زمین کے گرد گردش کرتے ہیں۔

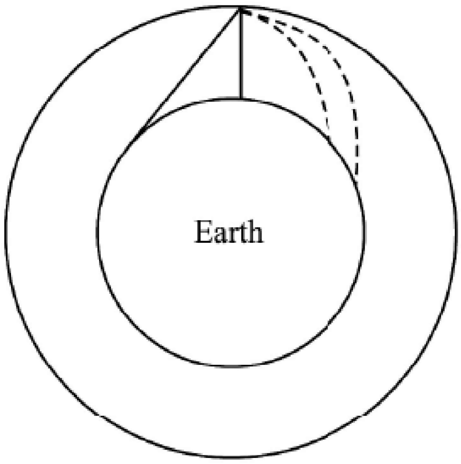


Fig. 8.10: A projectile to orbit the earth.

اب آپ یہ پوچھیں گے کہ مصنوی سیارہ کیسے مدار میں چھوڑا گیا؟

ہم یہ مطالعہ کر چکے ہیں کہ جب کوئی جسم ایک زاویہ پر عمودی سمت میں آگے بڑھایا جاتا ہے تو Parabolic راستہ کو مانتا ہے۔ تصور کیجئے کہ اجسام کو اضافی قوت کے ساتھ چھوڑا جاتا ہے جیسا کہ شکل (8.10) میں دکھایا گیا ہے۔ پروجیکٹائل بڑے سے بڑا فاصلہ طے کر سکتے ہیں' زمین پر گرنے سے قبل۔ پروجیکٹائل جسم مناسب قوت کے ساتھ چھوڑا جائے تو وہ زمین کے گرد گردش کرتا رہتا ہے۔ یہ اجسام جو زمین کے گرد گردش کرتے ہیں سیارچے کہلاتے ہیں۔ چاند زمین کا قدرتی سیارچہ ہے۔ انسان کے بنائے ہوئے سیارچے مصنوعی سیارچے کہلاتے ہیں' رفتار جس سے سیارچے زمین کے گرد گردش کرتے ہیں مداری رفتار کہلاتی ہے V_o سیارچے کی۔

مداری رفتار کے اظہار کو اخذ کرنے کے لئے فرض کریں کہ ایک سیارچہ جو دائروی گردش میں ہے کا نصف قطر (R + h) ہے جہاں R زمین کا نصف قطر ہے اور h مدار کی بلندی ہے سطح زمین سے۔ اگر m سیارچہ کی کمیت ہے اور V_o رفتار ہے جو مداری رفتار کہلاتی ہے تو درکار مرکز مائل قوت اس مدار کے لئے ہوگی:

$$\vec{F}_{centripetal} = \frac{mv_o^2}{(R+h)} \qquad (8.34)$$

جوکہ زمین کے مرکز کی طرف توجہ مبذول کرواتی ہے۔قوت کشش مرکز مائل قوت فراہم کرتی ہے جس سے

$$\vec{F}_{gravitational} = \frac{GmM}{(R+h)^2} \qquad (8.35)$$

جہاں M زمین کی کمیت ہے۔تب مساوات (8.34) اور (8.35) کو مساوی کرنے پر

$$\frac{m v_o^2}{(R+h)} = \frac{GmM}{(R+h)^2}$$

$$v_o^2 = \frac{GM}{(R+h)} \qquad (8.36)$$

G اور g کے تعلق کی بنیاد پر ہم یہ جانتے ہیں کہ $GM = gR^2$ اوپری مساوات میں اس کو رکھنے پر ہم حاصل کریں گے

$$v_o^2 = \frac{gR^2}{(R+h)}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)}} \qquad (8.37)$$

اگر سیارچہ زمین سے بہت قریب ہو تو $(R + h) \approx R$

$$v_o = \sqrt{gR} \qquad (8.38)$$

تب $g = 9.8\ ms^{-2}$ اسراع بوجہ جاذبہ $R = 6.4 \times 10^6\ m$ اور زمین کے نصف قطر' کو مساوات میں رکھنے سے مداری رفتار $v_o = 8\ km\ s^{-1}$ حاصل ہوتی ہے۔

ایک سیارچہ کو مدار میں ترتیب دینے کے لئے سب سے پہلے اس کو تقریباً 200 کلومیٹر کی بلندی تک اٹھایا جاتا ہے تاکہ رگڑ کی وجہ سے پیدا ہونے والی توانائی کو کم سے کم کیا جا سکے فضا میں' تب اس کو عمودی سمت ایک $8\ km\ s^{-1}$ کی رفتار سے دھکیلا جاتا ہے۔

زمین اور سیارچہ کے درمیان عمل درآمد قوت کشش کی وجہ سے مصنوعی سیارچہ کا مدار بھی کیپلر کے کلیہ کے تابع ہوتا ہے۔قدرتی طور پر مدار بیضوی ہوتا ہے اور اس کا میدان ہمیشہ زمین کے مرکز سے گذرتا ہے۔یاد رہے کہ سیارچے کی مداری رفتار فراری چال سے کم ہونی چاہئے' ورنہ مصنوعی سیارچہ کششی میدان سے آزاد ہوجائے گا اور زمین کے اطراف مدار میں گردش نہیں کرے گا۔مداری رفتار کی مساوات (8.38) کے ذریعہ سیارچہ زمین سے قریب ہوتا ہے اور فراری چال مساوات (8.33) کی رو سے اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$$v_e = \sqrt{2}v_o \qquad (or) \qquad v_o = \frac{v_e}{\sqrt{2}} \qquad (8.39)$$

مصنوعی سیارے کے عام طور پر دو طرح کے مدار ہوتے ہیں شکل (8.11) یہ اس پر منحصر ہوتا ہے کہ سیارچہ کس مقصد کے لئے بھیجا گیا ہے۔سیارچے جو ریموٹ سنسنگ کی مہم پر ہوتے ہیں قطبی مدار استعمال کرتے ہیں۔ان مداروں کی بلندی تقریباً 800 کلومیٹر ہے۔اگر مدار کی

بلندی 300km سے کم ہوتی تو سیارچہ اپنی توانائی کھو دیتا کیونکہ فضا میں موجود ذرات میں رگڑ پیدا ہوتی۔ نتیجہ میں یہ کم بلندی کی طرف حرکت کرنے لگتا ہے جہاں دباؤ زیادہ ہوتا ہے۔

قطبی سیارچوں کا وقتی وقفہ تقریباً 100 منٹ کا ہوتا ہے۔ یہ ممکن ہے کہ قطبی سیارچوں کو سورج مطابقت پذیر (Sun-Synchronous) بنایا جائے تاکہ وہ ہر دن ہر وقت یکساں بلندی پر پہنچتا رہے۔ اپنے محور پر گھومتے ہوئے سیارچہ بار بار چکر لگاتے ہوئے زمین کی مکمل تصویر لے سکتا ہے۔ اس طرح کے سیارچے موسم کی پیشن گوئی، سیلاب کی نگرانی اور جنگل کی آگ کے بارے میں اطلاعات کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔

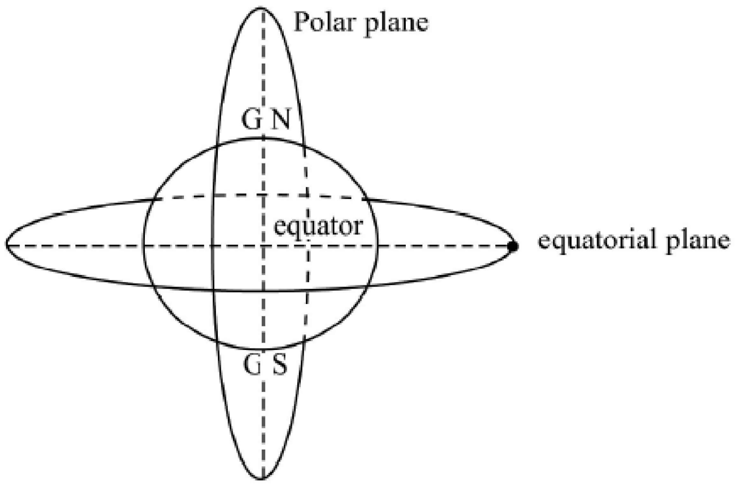


Fig. 8.11 : Equatorial and Polar orbits

سیارچے مواصلات کے لئے جو استعمال کرتے ہیں وہ استوائی مدار پر اس کی بلندی پر رکھے جاتے ہیں۔ اکثر سیارچے زمین مطابقت پذیر ہوتے ہیں۔ ایک جو مساوی مداری وقفہ رکھتا ہے گردشکے وقفہ سے جو 24 گھنٹے کا ہوتا ہے۔ ان کی بلندی 36000 کلومیٹر پر طے شدہ ہوتی ہے۔ سیارچوں کا اس طرح مجموعہ جو تمام کرہ ارضکا احاطہ کرتا ہے اور اشاروں کو کرۂ ارض کے ایک جگہ سے دوسری جگہ پہنچا سکتا ہے لہٰذا زمین مطابقت پذیر سیارچے کسی بھی مخصوص حالات جو بہتر ہونے میں وقت لیتے ہیں کی نگرانی کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ مثلاً طوفان بادوباراں یا پھر سمندری طوفان۔

8.12 مصنوعی سیارچے کے استعمالات

مصنوعی سیارچے بنی نوع انسان کے لئے بہت مفید ہیں۔ ذیل میں ان کے کچھ استعمالات دیے جا رہے ہیں۔

1. **موسم کی پیشن گوئی:** سیارچے ہر قسم کی معلومات جو طویل مدتی اور قلیل مدتی موسم کی پیشن گوئی ہوتی ہے، دیتے ہیں۔ ہم جو موسم کے بارے میں چارٹ ٹیلی ویژن پر دیکھتے ہیں یا اخبار میں پڑھتے ہیں یہ سیارچے کی دی ہوئی معلومات پر مبنی ہوتا ہے۔ ہندوستان جیسے ملک میں جہاں بہت کچھ وقت پر ہونے والی بارش پر منحصر ہوتا ہے وہاں سیارچہ کی دی گئی معلومات سے مانسون کی آمد کا پتہ چلایا جاتا ہے۔ موسم کے علاوہ سیارچے بڑے علاقوں میں فصلوں کے غیر صحت مند رجحانات دیکھ سکتے ہیں اور ممکنہ سیلاب اور جنگل کی آگ کے پھیلاؤ سے خبردار کر سکتے ہیں۔
2. **سمت شناسی:** چند سیارچے مل کر کسی جگہ کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ راستہ بھولنے اور بھٹکنے پر سیارچہ ہمیں اپنی پوزیشن کا پتہ لگانے میں مددگار ہوتے ہیں۔ زمین کے بڑے حصوں کے نقشے تیار کرنے میں مددگار رہوتے ہیں بصورت دیگر یہ کافی وقت اور توانائی لیتے ہیں۔
3. **مواصلات:** ہم پہلے ہی ٹیلی ویژن کی نشریات کا ذکر کر چکے ہیں۔ دنیا کے کسی بھی حصہ سے ہر جگہ کے پروگرام سیٹلائیٹ کے ذریعہ ممکن ہوتے ہیں۔ ٹی وی سگنل کے علاوہ ٹیلی فون اور ریڈیو سگنل بھی نشر کیے جاتے ہیں۔ مواصلاتی انقلاب کی دنیا میں مصنوعی سیارچوں نے

جو رول ادا کیا ہے اس سے دنیا کافی چھوٹی ہوگئی ہے اور اب یہ گلوبل ولیج کہلاتی ہے۔

4. **سائنسی تحقیق:** سیارچے سائنسی اوزار خلاء میں بھیج کر زمین، چاند، سیارے، ستارے، سورج اور کہکشاں کا مشاہدہ کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ آپ نے ہابل خلائی دوربین اور چندرا X-rays کے بارے میں سنا ہوگا۔ ہابل خلائی دوربین کے ذریعہ لی گئی تصاویر دوسری دوربینوں کے مقابلہ کافی واضح ہوتی ہیں۔ حال ہی میں یورپی سائنسدانوں کی ایک ٹیم نے یہ مشاہدہ کیا کہ زمین نظام شمسی سے 20 نوری سال کے فاصلے پر ہے۔

5. **فوجی سرگرمیوں کی نگرانی:** مصنوعی سیارچے دشمن کی فوجوں کی حرکات پر نظر رکھنے کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ دنیا کے تمام ممالک اس مقصد کے لئے سیارچوں پر رقم خرچ کرتے ہیں۔

وکرم امبالال سارابھائی

احمد آباد گجرات ہندوستان میں صنعت کاروں کے خاندان میں پیدا ہوئے۔ انہوں نے سائنسدانوں کی پوری نسل کو متاثر کیا۔ ہندوستان میں کائناتی شعاعوں کے وقت کے تغیر پر ان کے ابتدائی کام کو لایا گیا جس سے سائنسی برادری میں ان کی تعریف ہوتی ہے۔ طبعی تحقیق کی لیباریٹری احمد آباد کے بانی اور ہندوستان میں خلائی تحقیق کے علمبردار یہ وہ پہلے شخص تھے۔ انہوں نے خلائی تحقیق سے ہونے والے فوائد جو مواصلات، تعلیم، میٹرولوجی اور ریموٹ سنسنگ شعبوں تک پھیلائے۔)

8.13 ہندوستان کا خلائی تحقیق کا ادارہ

ہندوستان ایک بہت بڑا اور گنجان آبادی والا ملک ہے جہاں زیادہ تر آبادی دیہاتوں میں رہتی ہے اور بارش پر بہت زیادہ انحصار کرتی ہے۔ خاص طور پر مانسون کا۔ لہٰذا موسم کی پیشن گوئی ایک اہم کام ہے جو حکومت کو کرنا پڑتا ہے۔ اسے ایک وسیع آبادی کی ضروریات کو مواصلات کے ذریعہ پورا کرتا ہے۔ ان علاقوں کو زیادہ تر حصہ معدنیات اور تیل گیس کے لئے غیر دریافت ہے۔ سیٹلائیٹ ٹکنالوجی ان تمام مسائل کا ایک موثر حل پیش کرتی ہے۔ اس کے پیش نظر حکومت ہند نے 1969ء میں انڈین اسپیس ریسرچ آرگنائزیشن (ISRO) وکرم سارابھائی کی متحرک قیادت میں قائم کی۔ سارابھائی کے پاس سیٹلائیٹ کے استعمال سے قوم کو تعلیم دینے کا منصوبہ تھا۔ اسرو نے ترقی کے اس پروگرام پر بھرپور عمل کیا۔ مواصلات، ٹیلی ویژن نشیرات، موسمیاتی خدمات اور دور دراز کے خلائی نظام پر بھرپور عمل کیا۔ سائنسی تحقیق کے معاملے میں گاڑیاں تیار کیں اور لانچ کیں مثلاً پولار سیٹلائیٹ (PSLV) شکل (8.12)۔ اور جیو سنکرونس سٹیلائٹ (GSLV) شکل (8.13)۔ یہ ایک حقیقت ہے کہ اس نے دوسرے ممالک جیسے جرمنی، بیلجیم اور کوریا کے لئے بھی سٹیلائٹ لانچ کئے اور پانچ ممالک کے خصوصی کلب میں شامل ہوگیا۔ ان کے سائنسی پروگرام میں جو مطالعات شامل ہیں۔

(a) آب و ہوا، ماحولیات اور عالمی تبدیلی

(b) اوپری کرہ ہوائی

(c) علم فلکیات

(d) بحرہند۔

حال ہی میں (ISRO) نے اپنی نوعیت کا دنیا کا پہلا خصوصی تعلیمی سیٹلائیٹ Edusat لانچ کیا ہے۔ اسے دوردراز رہنے والے نوجوانوں اور بالغ طلبا دونوں کو تعلیم دینے کے لئے استعمال کیا جارہا ہے۔ یہ اب چاند پرمشن کی تیاری کررہا ہے۔

Fig. 8.12 : PSLV

Fig. 8.13 : GSLV

8.7 متن کے سوالات:

1. کچھ سائنسی مصنفین کا خیال ہے کہ کسی دن انسان مریخ پر کالونیاں قائم کرے گا۔ فرض کریں کہ جو لوگ مریخ پر کمند ڈالنے کی خواہش رکھتے ہیں، مریخ مطابقتی سیارچہ مدار میں بھیجنا چاہتے ہیں۔ مریخ کی گردش کا دورانہ 24.6 گھنٹے، مریخ کی کمیت اور نصف قطر بالترتیب 6.4×10^{23} kg اور 3400km ہے۔ مریخ کی سطح سے سیٹلائیٹ کی بلندی کتنی ہوگی؟

2. خلاء میں دوربین رکھنے کے فوائد کی فہرست مرتب کریں۔

آپ نے کیا سیکھا؟

- کائنات میں کسی بھی دو ذرات کے درمیان کشش ثقل کی قوت موجود ہے۔ یہ مختلف ہوتا ہے۔
- کشش ثقل مستقل 'G' ایک عالمگیری مستقل ہے۔
- زمین کی کشش ثقل تمام اجسام کو اپنی جانب کھینچتی ہے۔
- ایک قطہ میں جب کمیتیں ایک دوسرے سے کشش ثقل کا تجربہ کرتی ہیں اس کو کشش ثقل کا میدان کہا جاتا ہے۔
- کشش ثقل کے میدان میں ایک نقطہ پر یونٹ ماس کے ذریعہ تجربہ کرنے والی قوت اس مقام پر کشش ثقل کی طاقت رکھتی ہے۔
- کام کی وہ مقدار جو ایک کمیت کو لامحدودیت سے خاص نقطہ پر مستقل کرنے میں خرچ ہوتی ہے کشش ثقل کی توانائی کہلاتی ہے۔

- زمین کی سطح کے قریب کشش ثقل کی وجہ سے اسراع بوجہ جاذبہ...... ہوتا ہے۔ یہ مختلف ہوتا ہے کیونکہ زمین کی بالکل کروی نہیں ہے۔
- اسراع بوجہ جاذبہ بلندی' گہرائی اور عرض البلد کے ساتھ مختلف ہوتی ہے۔
- کسی جسم کا وزن کشش ثقل کی قوت ہے جو اس پر کام کرتی ہے۔
- کیپلر کا پہلا قانون کہتا ہے کہ سیارے کا مدار بیضوی ہے اور اس پر سورج ایک Foci مرکز اصلی ہے۔
- کیپلر کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ سورج کے ساتھ سیارے کو جوڑنے والی لائن برابر مساوی وقتوں میں مساوی وقفوں کے ساتھ مساوی علاقوں میں ہوتی ہے۔
- کیپلر کا تیسرا قانون کہتا ہے کہ سیارے کا دوری وقفہ کا مربع متناسب ہوتا ہے سورج سے اس کے اوسط مکعب فاصلہ کے۔
- وہ رفتار جس کے ساتھ کوئی سیارہ سورج کے گرد مدار میں گھومتا ہے وہ سیارے کی مداری رفتار کہلاتی ہے اور مداری رفتار سورج سے فاصلے پر منحصر ہوتی ہے اور سیارے کی کمیت پر انحصار نہیں کرتی۔
- ایک جسم زمین کے کشش ثقل سے بچ سکتا ہے اگر وہ فراری رفتار کے بابر یا اس سے زیادہ رفتار حاصل کر لیتا ہے۔
- سٹیلائٹ کو زمین کے گرد گھومنے کے لئے مطلوبہ رفتار مداری رفتار کہلاتی ہے جو زمین سے اس کے فاصلہ پر منحصر ہے۔

Terminal Exercise

1. آپ نے سیکھا ہے کہ کشش ثقل باہمی ہے۔ اگر ایسا ہے تو سیب زمین کو اپنی طرف متوجہ کرتا ہے۔ اگر ہاں تو جواب میں زمین کیوں حرکت نہیں کرتی؟
2. ہم نے دو ذرات کے درمیان کشش ثقل کی پیائش کے لئے زمین پر ایک تجربہ کیا ہے۔ ذرات کو ایک خاص فاصلے پر رکھا گیا۔ فرض کریں کہ قوت کی شدت 'F' ہے' اسی...... چاند پر لے جائیں اور دوبارہ تجربہ کریں تو ذرات کے درمیان قوت کی شدت کیا ہوگی؟
3. فرض کریں کہ زمین اپنی کمیت میں بغیر کسی تبدیلی کے اپنے سائز سے دوگنا پھیلتی ہے آپ کا وزن کیا ہوگا جب کہ آپ کا موجودہ وزن 500N ہوتا؟
4. فرض کریں کہ زمین اچانک اپنی کشش ثقل کھو دیتی ہے' اس پر زندگی کا کیا بنے گا؟
5. شکل 8.8 کے حوالہ سے جو زمین کی ساخت کو ظاہر کرتا ہے' کی قدروں کا حساب لگائیں۔ پرت کے نچلے حصے میں گہرائی 25km اور اندرونی پرت کے نچلے حصے میں گہرائی 2855km ہے۔
6. زمین کی کمیت کے لئے ایک مساوات کو اخذ کریں جس میں چاند کا مداری وقفہ اور مدار کا نصف قطر دیا گیا ہے۔
7. فرض کریں آپ کا وزن زمین پر 500N ہے۔ چاند پر آپ کا وزن کیا ہوگا؟ چاند پر آپ کی کمیت کیا ہوگی؟
8. ایک قطبی سٹیلائیٹ زمین کی سطح سے 800 کلومیٹر کی بلندی پر رکھا گیا ہے۔ اس کی مداری مدت اور مداری رفتار معلوم کیجئے۔

.9 کشش ثقل قانون کو بیان کیجئے۔ کیونڈش کے تجربہ کے ذریعہ کس طرح کشش ثقل مستقل 'G' کو محسوب کیا جا سکتا ہے؟

.10 کشش ثقل کے میدان کی وضاحت کیجئے اور کشش ثقل کے میدان کی قوت کے لئے ایک مساوات اخذ کیجئے۔

.11 تجاذبی توانائی بالقوۃ کے حصول کے لئے مساوات اخذ کیجئے۔

.12 سیاروں کی حرکت کے کیپلر کے کلیے یا قوانین بیان کیجئے۔

متن کے سوالات کے جوابات

8.1

.1 چاند کا وقتی وقفہ $T = 27.3 \text{ days} = 27.3 \times 24 \times 3600 \text{ seconds}$

چاند کے مدار کا نصف قطر $R = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$

چاند کی مداری رفتار $v = \dfrac{2\pi R}{T}$

مرکز مائل قوت $F = m\dfrac{v^2}{R}$

اوپری مساوات کو $F = ma$ سے موازنہ کرنے پر

مرکز مائل قوت $a = \dfrac{v^2}{R}$

$$= \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times 3.84 \times 10^8}{(27.3 \times 24 \times 3600)^2} = 0.00272 \text{ms}^{-2}$$

اگر مرکز مائل اسراع کو محسوب کریں 'g' کو 3600 سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{9.8}{3600} \text{ms}^{-2} = 0.0027222 \text{ms}^{-2}$$

لہٰذا مرکز مائل اسراع (چاند کا) دی گئی قیمت 9.8 ms^{-2} کے کافی قریب ہوگا۔

2. مساوات (8.1) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

'G' کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} = \frac{(\text{Force}) \times (\text{distance})^2}{(\text{mass}) \times (\text{mass})} = \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

6. $$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

اگر If $m_1 = m_2 = 1$ kg and $r = 1$m, then

$$F = G$$

اور r=1m تب F=G تب جاذبہ مستقل 'G' برابر ہوتا ہے دو کمیتوں کے درمیان کی قیمت 1kg کے جب کہ وہ 1m کے فاصلے پر ہوں۔

7. (i) $F \,\alpha \frac{1}{r^2}$، کے طور پر اگر r کو دوگنا کر دیا جائے تو طاقت......ہو جاتی ہے۔

(ii) $F \,\alpha\, m_1 m_2$ ، کے طور پر اگر کمیتیں دوگنی کر دی جائیں تو طاقت 4 گنا بڑھ جاتی ہے۔

(iii) $F \,\alpha \frac{m_1 m_2}{r^2}$ اگر فاصلہ دوگنا ہو اور ہر ایک کمیت بھی دوگنی ہو تو طاقت بدستور غیر تبدیل شدہ ہوتی ہے۔

8. $$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$m_1 = 50$ kg, $m_2 = 60$ kg, $r = 1$ m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

$$F = \left(6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\right)\frac{(50\text{kg})\times(60\text{kg})}{(1)^2} = 2\times10^{-7}\text{N}$$

8.2

1. $$g = \frac{GM}{R^2}$$

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $R = 6.371 \times 10^6$ m

$$g = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\right)\times(5.97\times10^{24}\mathrm{kg})}{\left(6.371\times10^{6}\mathrm{m}\right)^2} = 9.81\mathrm{ms^{-2}}$$

.2 $g = \frac{GM}{R^2}$

$$g_{equator} = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\right)\times(5.97\times10^{24}\mathrm{kg})}{\left(6.378\times10^{6}\mathrm{m}\right)^2} = 9.79\mathrm{ms^{-2}}$$

$$g_{pole} = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\right)\times(5.97\times10^{24}\mathrm{kg})}{\left(6.357\times10^{6}\mathrm{m}\right)^2} = 9.81\mathrm{ms^{-2}}$$

.3 g کی قیمت ہمیشہ عمودی طور پر نیچے کی جانب ہوتی ہے۔

.4 $$g_{moon} = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\right)\times(7.3\times10^{22}\mathrm{kg})}{\left(1.74\times10^{6}\mathrm{m}\right)^2} = 1.61\mathrm{ms^{-2}}$$

8.3

$g_{surface} = \frac{GM}{R^2}$ جہاں R زمین کا نصف قطر ہے

$g_{hieght} = \frac{GM}{r^2}$, جہاں 'r' بلندی ہے زمین کے مرکز سے

$$\frac{g_{surface}}{g_{height}} = \frac{r^2}{R^2}$$

when $g_{height} = \frac{g_{surface}}{2}$, we have $\frac{g_{surface}}{g_{height}} = 2$

ت

$$\frac{r^2}{R^2} = 2$$

لہٰذا

$$r = \sqrt{2}R = 1.414R$$

لیکن سطح سے بلندی جہاں 'g' کی قیمت سطح سے نصف ہو جاتی ہے

$$h = r - R = 1.414\ R - R = 0.414R$$

2. زمین کے اندر 'g' تبدیل ہوتا ہے۔

$$g_d = g\frac{(R-d)}{R}$$

$$\frac{g_d}{g} = \frac{(R-d)}{R}$$

$$\text{If} g_d = 80\% \text{ of } g, \quad \text{then} \frac{g_d}{g} = 80\% \ (\text{or}) \ \frac{g_d}{g} = \frac{80}{100} = 0.80$$

$$\text{then,} \ \frac{(R-d)}{R} = 0.80$$

$$d = 0.2R$$

3. 'g' میں تبدیلی عرض البلد کی وجہ سے $g\lambda = g - R\omega^2\cos^2\lambda$

$g_{poles} = 9.853$ ms–2

زمین کا نصف قطر $R = 6.37 \times 10^6$ m

زمین کی زاویائی رفتار $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}

$$g_{Delhi} = 9.853\ ms^{-2} - (6.37 \times 10^6\ m) \times (7.27 \times 10^{-5}\ rad\ s^{-1})^2\ \cos^2 30$$

$$g_{Delhi} = 9.853\ ms^{-2} - 0.025\ ms^{-2}$$

$$g_{Delhi} = 9.828\ ms^{-2}$$

4. مساوات (8.21) کے ذریعہ، $g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$

$$g_h = 9.81ms^{-2}\left(1 - \frac{2 \times 1000km}{6371km}\right) = 7.47\ ms^{-2}$$

اس تعلق کے ذریعہ، $g = \frac{GM}{(R+h)^2}$

$$g = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}\right)(5.97 \times 10^{24} kg)}{(6371 \times 10^3 m + 1000 \times 10^3 m)^2} = 7.33\ ms^{-2}$$

8.4

.1 چاند پر 'g' کی قدر زمین کے 1/6th کے برابر ہوتی ہے۔تو چاند پر آپ کا وزن زمین پر آپ کے وزن کے 1/6th کے برابر ہوتا ہے۔ مگر کمیت بدستور مستقل ہوتی ہے۔

.2 Mass of Mars = 6×10^{23} kg, Radius as 4.3×10^{6} m.

$$g_{Mars} = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6.67\times10^{-11}Nm^2kg^{-2})(6\times10^{23}kg)}{(4.3\times10^6m)^2} = 2.16ms^{-2}$$

$$\frac{\text{Weight on Mars}}{\text{Weight on Earth}} = \frac{\text{Mass} \times g_{Mars}}{\text{Mass} \times g_{Earth}} = \frac{g_{Mars}}{g_{Earth}} = \frac{2.16}{9.81} = 0.22$$

اس لئے آپ کا وزن تقریباً 1/4 ہوگا۔زمین پر کے وزن کے اور کمیت بدستور مستقل رہے گی۔

.3 ترازو کے دو پلڑے اصل میں کمیتوں کا موازنہ ہوتا ہے کیونکہ 'g' دونوں پلڑوں پر عمل کرتا ہے اور منسوخ ہو جاتا ہے۔دوسری قسم کا ترازو اسپرنگ بیلنس وزن کی پیائش کرتا ہے۔دو پلڑوں کا ترازو چاند پر بھی وہی ریڈنگ بتائے گا جو زمین پر ہوگی لیکن اسپرنگ بیلنس زمین کی قیمت کا 1/6th ہی بتائے گا کیونکہ چاند پر 'g' زمین کا صرف 1/6th ہوتا ہے۔

8.5

.1 ہاں! جہاں کہیں اجسام کے درمیان طاقت بوجہ جاذبہ ہے' کیپلر کے کلیا ت کا اطلاق ہوسکتا ہے۔

.2 کیپلر کے تیسرے کلیہ کے مطابق

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

$$r_1 = R + h_1 = 6371 \text{ km} + 1000 \text{ km} = 7371 \text{ km}$$

$$r_2 = R + h_2 = 6371 \text{ km} + 2000 \text{ km} = 8371 \text{ km}$$

$$T_1 = 90 \text{ min}$$

$$T_2^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 T_1^2$$

$$T_2^2 = \left(\frac{8371}{7371}\right)^3 (90)^2 = 108.9 \text{ min}$$

3. کیپلر کے تیسرے کلیہ کے مطابق

$$\frac{T_{earth}^2}{T_{sedna}^2}=\frac{r_{earth}^3}{r_{sedna}^3}$$

$$T_{earth} = 1 \text{ yr}, \quad r_{earth} = 1 \text{ AU and } r_{sedna} = 86 \text{ AU}$$

$$T_{sedna}^2=\left(\frac{r_{sedna}}{r_{earth}}\right)^3 T_{earth}^2$$

$$T_{sedna}=\left(\frac{r_{sedna}}{r_{earth}}\right)^{\frac{3}{2}} T_{earth}=\left(\frac{86\text{AU}}{1\text{AU}}\right)^{\frac{3}{2}} 1\text{yr} = 797.5\text{yr}$$

4. ایک سیٹلائیٹ کو زمین کے اطراف مدار میں درکار مرکز مائل قوت ہے۔

$$F_{centripetal}=\frac{mv_o^2}{r}$$

قوت جاذبہ ہی مرکز مائل قوت فراہم کرتی ہے جو

$$F_{gravitational}=\frac{GmM}{r^2}$$

جہاں M زمین کی کمیت ہے

سیٹلائیٹ کے زمین کے اطراف گردش کے وقت اوپر بتائی گئی قوتیں توازن میں ہوتی ہیں لہٰذا g اور G کے درمیان تعلق کی بنا پر ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{mv_o^2}{r}=\frac{GmM}{r^2}$$

$$v_o^2=\frac{GM}{r}$$

کو اوپر کی مساوات میں رکھنے سے ہم حاصل کریں گے

$$v_o^2=\frac{gR^2}{r}$$

$$v_o=\sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)}}$$

یہاں سیٹلائیٹ کے مدار کا نصف قطر v=(R+h) ہے۔

یہاں R زمین کا نصف قطر ہے اور 'h' سیٹلائیٹ کی بلندی ہے سطح زمین سے۔ اگر سیٹلائیٹ زمین سے بہت قریب ہو تو R=(R+h)
تب

$$v_o = \sqrt{gR}$$

5. مساوات (8.30) کے ذریعہ سیارے کی رفتار جب وہ مدار میں گردش کرتا ہے جس کا نصف قطر r ہے۔

$$v_o = \frac{2\pi r}{T}$$

مساوات (8.31) کے ذریعہ سیارے کی مداری رفتار ہے
اوپر کی دو مساواتوں سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

چونکہ براکٹ کے اندر کے تمام شرائط RHS کے مستقل ہیں اس لئے

$$T^2 \ \alpha \ r^3$$

8.6

.1

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\left(6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\right)(5.97\times10^{24}\,\text{kg})}{(6.371\times10^{6}\,\text{m})}} = 11.3\times10^{3}\,\text{ms}^{-1}$$

$$v_e = 11.3\ \text{km s}^{-1}$$

.2

$$v_e \,\alpha \sqrt{\frac{1}{R}}$$

اگر 1/4th ہو جائے تب

$$v_e \,\alpha \sqrt{\frac{1}{R/4}} \Rightarrow v_e \,\alpha \sqrt{\frac{4}{R}} \Rightarrow v_e \,\alpha\, 2\sqrt{\frac{1}{R}}$$

فراری چال دوگنی ہو جائے گی۔

.3 فراری چال زمین پر $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$

فراری چال سیارے x پر $v_X = \sqrt{\frac{2GM_X}{R_X}}$

$$\frac{v_X}{v_e} = \sqrt{\frac{M_X R_e}{M_e R_X}}$$

یہاں $M_X = 8\ M_e$ and $R_X = 2R_e$

$$\frac{v_X}{v_e} = \sqrt{\frac{(8M_e)R_e}{M_e(2R_e)}} = \sqrt{4} = 2$$

$$v_X = 2v_e$$

تصوراتی سیارے پر فراری چال دوگنی ہو جائے گی زمین کے مقابلے میں۔

8.7

(1) r نصف قطر والے سیٹلائیٹ کی رفتار جب کہ وہ مدار میں گردش کر رہا ہے۔ $v_o = \frac{2\pi r}{T}$

سیٹلائیٹ کی مداری رفتار $v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

اوپری مساوات کی رو سے

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$$

$$r^3 = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)T^2$$

$$r^3 = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\right)\times\left(6.4\times10^{23}\,kg\right)\times(24.6\times60\times60s)^2}{4\times(3.14)^2}$$

$$r^3 = 8370 \times 10^{18}\ m^3$$

$$r = 20300\ km$$

لیکن 'r' سیارے کے مرکز سے فاصلہ ہے۔لہٰذا v=R+h جہاں 'R' نصف قطر اور 'h' بلندی ہے سطح سے۔

$$R + h = 20300\ km$$

$$3400\ km + h = 20300\ km$$

$$h = 20300\ km - 3400\ km = 16{,}900\ km$$

(2) (a) تصاویر صاف ہیں۔

(b) X-ray دوربین بھی کام کرتی ہے۔

Answers to Terminal Exercises

(3) 125N

(5) $g = 5.5\ ms^{-2}$

(7) $Weight = \frac{500}{6}N,$ کمیت چاند پر 50 کلوگرام ساتھ ساتھ زمین پر بھی

(8) $T = 1\frac{1}{2}\,hours, \quad v = 7.47kms^{-1}$