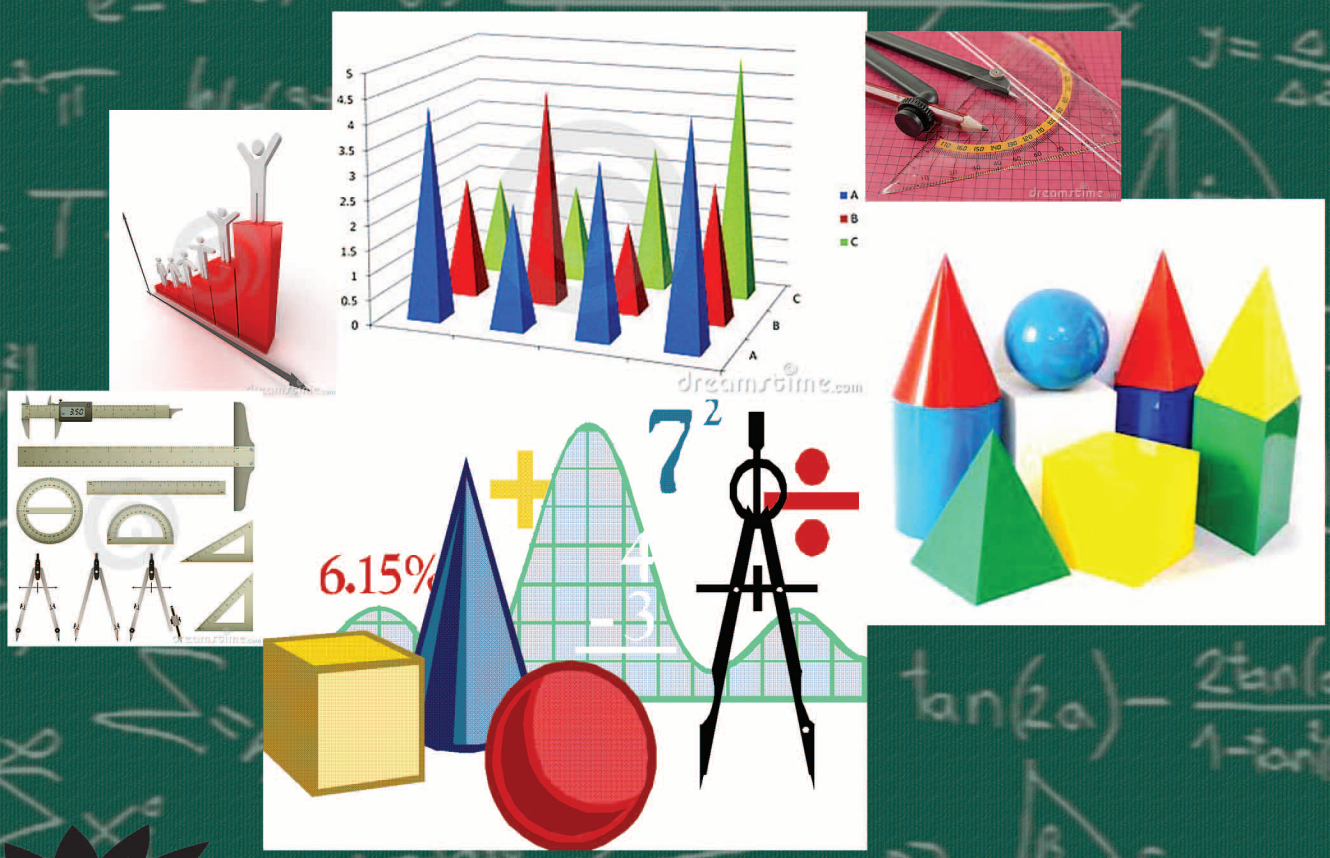
311

సీనియర్ సెకండరీ స్థాయి కోర్సు

(ఇంటర్మీడియట్ (APOSS) కోర్సు)

గణితశాస్త్రం

స్టడీ మెటీరియల్



ఆంధ్రప్రదేశ్
ప్రభుత్వంవారిచే
ఉచిత పంపిణీ

ఎ.పి. స్టేట్ ఓపెన్ స్కూల్
(APSOS) హైదరాబాద్

311

సీనియర్ సెకండరీ స్థాయి కోర్సు
(ఇంటర్మీడియట్ (APOSS) కోర్సు)

గణిత శాస్త్రము
స్టడీ మెటీరియల్

ఎ.పి. స్టేట్ ఓపెన్ స్కూల్ (APSOS), హైదరాబాద్

ఏ.పి.ఓపెన్ స్కూల్ సొసైటి, యస్.సి.ఇ.ఆర్.టి. క్యాంపస్, ఎల్.బి.స్టేడియం ఎదుట, బషీర్‌బాగ్, హైదరాబాద్ - 500001

ఫోన్: 040-23299568, వెబ్‌సైట్ : www.apopenschool.org; E-mail : diraposshyd@yahoo.in

© **Andhra Pradesh Open School Society**
Government of Andhra Pradesh, Hyderabad

First Published - 2012

All Rights Reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means without the prior permission, in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover.

This Study material is prepared on the basis of Original Mathematics (311) Telugu version of APOSS, Hyderabad

---

Printed in India
Laser Typeset at **M/s New Hitech Graphics,** Hyderabad
Printed at
Andhra Pradesh

ముందుమాట

ఆంధ్రప్రదేశ్ స్టేట్ ఓపెన్ స్కూల్, హైదరాబాద్, 2010-11 విద్యా సంవత్సరము నుండి దూరవిద్యలో ఇంటర్మీడియట్ కోర్సును ప్రభుత్వ ఉత్తర్వు G.O.Ms.No.170 Higher Education (I.E-II), Dt.04-9-2010 ప్రకారము ప్రారంభించిందని తెలుపుటకు సంతోషిస్తున్నాము. ఈ కోర్సులో ప్రవేశము పొందిన అభ్యాసకులందరికీ నా అభినందనలు. దూరవిద్యలో ప్రారంభించబడిన ఈ కోర్సు రెగ్యులర్ ఇంటర్మీడియట్ (బోర్డు ఆఫ్ ఇంటర్మీడియట్, హైదరాబాద్, ఆంధ్రప్రదేశ్) కోర్సుకు సమానమైనది. ఏదో ఒక కారణముచే ఇంటర్మీడియట్ కోర్సు చేయని లేక పూర్తిచేయని అభ్యాసకులకు ఈ కోర్సు ఒక సువర్ణ అవకాశం.

ఈ అధ్యయన సామగ్రి (Study material) APOSS వారి సిలబస్ ప్రకారము వ్రాయడం జరిగింది. సంబంధిత విషయాలలో నిష్ణాతులైన మరియు అనుభవజ్ఞులైన ఆచార్యులు, అధ్యాపకులచే రూపొందించబడినది. ఈ స్టడీమెటీరియల్‌లోని ప్రశ్నలన్నీ అభ్యాసకుల సౌకర్యార్థం వ్రాయడమైనది. అవసరమైనచోట అవగాహన కొరకు ఆంగ్ల పదాలను కూడా ఇవ్వడం జరిగింది.

అభ్యాసకులకు సులభంగా అర్థమయ్యే విధంగా సరళమైన, వ్యావహారిక భాషలో వాడబడినది.

ఈ స్టడీమెటీరియల్‌లో భాషలోగాని, అభివృద్ధి దిశలోగాని ఏవైనా మార్పులు, చేర్పులు తత్సంబంధ సూచనలున్నచో తెలుపవలసినదిగా సంబంధితులందరినీ కోరుతున్నాను.

అభ్యాసకులకు మంచి భవిష్యత్తును కాంక్షిస్తూ...

(ఎ.సత్యనారాయణ రెడ్డి)
సంచాలకులు
ఆంధ్రప్రదేశ్ స్టేట్ ఓపెన్ స్కూల్, హైదరాబాద్.

హైదరాబాద్
తేది : 31-1-2012

గణితశాస్త్రం - స్టడీ మెటీరియల్

ముఖ్య సంపాదకులు

శ్రీ ఎ.సత్యనారాయణరెడ్డి MSc., M.Ed.
సంచాలకులు
ఆంధ్రప్రదేశ్ స్టేట్ ఓపెన్ స్కూల్ సొసైటీ
హైదరాబాదు.

సంపాదకులు

డా॥ కావలి రంగస్వామి MSc., M.Phil., M.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్ ఇన్ మ్యాథమెటిక్స్
ఎ.పి.సోషల్ వెల్ఫేర్ రెసిడెన్షియల్ జూనియర్ కాలేజ్
మదనాపురం,
మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా.

రచయితలు

శ్రీ కావలి రంగస్వామి MSc., M.Phil., M.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్ ఇన్ మ్యాథమెటిక్స్
ఎ.పి.సోషల్ వెల్ఫేర్ రెసిడెన్షియల్ జూనియర్ కాలేజ్
మదనాపురం,
మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా.

శ్రీ బి.రాంచంద్రారెడ్డి MSc., B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్ ఇన్ మ్యాథమెటిక్స్
ఎ.పి.సోషల్ వెల్ఫేర్ రెసిడెన్షియల్ జూనియర్ కాలేజ్
బిక్నూర్,
నిజామాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ కె.నరేందర్‌రెడ్డి MSc., M.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్ ఇన్ మ్యాథమెటిక్స్
ఎ.పి.సోషల్ వెల్ఫేర్ రెసిడెన్షియల్ జూనియర్ కాలేజ్
జయప్రకాష్‌నగర్, కల్వకుర్తి,
మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా.

శ్రీమతి బి.సురేఖ MSc., B.Ed.
జూనియర్ లెక్చరర్ ఇన్ మ్యాథమెటిక్స్
ఎ.పి.సోషల్ వెల్ఫేర్ రెసిడెన్షియల్ జూనియర్ కాలేజ్
(బాలికలు)
కమ్మదానం,
మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా.

సమన్వయకర్త

శ్రీ డి. నరశింహమూర్తి M.Sc., B.Ed
ఆంధ్రప్రదేశ్ సార్వత్రిక విద్యా పీఠం
హైదరాబాద్

విషయసూచిక

మాడ్యుల్స్	పాఠం సంఖ్య	పాఠం పేరు	పుటసంఖ్య
మాడ్యుల్ - I		**బీజగణితము**	
	1.	సంకీర్ణ సంఖ్యలు	1
	2.	వర్గ సమీకరణాలు	21
	3.	మాత్రికలు	43
	4.	నిర్ధారకాలు మరియు వాటి అనువర్తనాలు	70
	5.	మాత్రికా విలోమము మరియు వాటి అనువర్తనాలు	97
	6.	ఏకఘాత సమీకరణాలు మరియు వాటి అనువర్తనాలు	132
	7.	ప్రస్తారాలు మరియు సంయోగాలు	157
	8.	ద్విపద సిద్ధాంతము	172
మాడ్యుల్ - II		**నిరూపక జ్యామితి**	
	9.	కార్టీసియన్ వ్యవస్థలో నిరూపకాలు	192
	10.	సరళరేఖలు	215
	11.	వృత్తాలు	239
	12.	శాంకవాలు	249
మాడ్యుల్ - III		**అనుక్రమాలు మరియు శ్రేణులు**	
	13.	అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢి	257
	14.	ప్రత్యేక పద్ధతులలో శ్రేణులు	288
మాడ్యుల్ - IV		**ప్రమేయాలు**	
	15.	సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయాలు	301
	16.	త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు – I	335
	17.	త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు – II	354
	18.	విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు	386
	19.	త్రిభుజంలోని భుజాలకు, కోణాలకు మధ్యగల సంబంధాలు	398
మాడ్యుల్ - V		**కలన గణితము**	
	20.	అవధులు మరియు అవిచ్ఛిన్నాలు	409
	21.	అవకలనాలు	436
	22.	త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనాలు	464

	23.	ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాల అవకలనాలు	490
	24.	స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు	511
	25.	మహిష్ఠము మరియు అల్పిష్ఠము	522
	26.	సమాకలనము	549
	27.	నిశ్చిత సమాకలనము	578
	28.	అవకలన సమీకరణాలు	593
మాడ్యుల్ - VI		**సాంఖ్యక శాస్త్రము**	
	29.	విస్తరణ కొలతలు	615
	30.	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు – ఘటనలు	636
	31.	సంభావ్యత	642
		ఆప్షనల్ - 1	
		సదిశలు మరియు త్రిపరిమాణ జ్యామితి	
	32A.	సదిశలు	670
	33A.	త్రిపరిమాణ జ్యామితి పరిచయము	690
	34A.	తలము	707
	35A.	సరళరేఖ	723
	36A.	గోళము	731
		ఆప్షనల్ - 2	
		వాణిజ్య , అర్థ మరియు వ్యాపార శాస్త్రాల కొరకు గణితము	
	32B.	వాటాలు మరియు అప్పు పత్రాలు	
	33B.	సూచిసంఖ్యలు	745
	34B.	భీమా	761
	35B.	పరోక్ష పన్నులు	769
	36B.	వాణిజ్యశాస్త్రములో కలనగణిత అనువర్తనాలు మరియు అర్థశాస్త్రము	777
మోడల్ పేపర్			**786**

మాడ్యూల్ - I

1

సంకీర్ణ సంఖ్యలు

మనము సహజ సంఖ్యా సమితిని నిర్వచించడం ద్వారా సంఖ్యా వ్యవస్థలను చదవడం ప్రారంభించాము. తరువాత '0' అనే సంఖ్యను చేర్చి, పూర్ణాంకముల సమితిని నిర్వచించాం. తరువాత దశలో ఋణసంఖ్యలను నిర్వచించాం. ఈ విధముగా సంఖ్యావ్యవస్థను పూర్ణాంకములు మరియు పూర్ణ సంఖ్యల వరకు విస్తరించాం.

$p \div q$ రూపంలో గల సమస్యలను సాధించటం కోసం పూర్ణసంఖ్యా వ్యవస్థలో అకరణీయ సంఖ్యలను చేర్చాము. తరువాత అన్నింటి యొక్క పొడవులకు సంబంధించిన కొలతలను అకరణీయ సంఖ్యావ్యవస్థలోనే తెలుపలేము కావున ఈ అకరణీయ సంఖ్యా వ్యవస్థను మరలా కరణీయ సంఖ్యా వ్యవస్థ వరకు విస్తరించితిమి. అకరణీయ, మరియు కరణీయ సంఖ్యలను కలిపి వాస్తవ సంఖ్యలు అంటారు. $x^2 + 1 = 0$ లేదా $x^2 = -1$ అనే సమీకరణమును తృప్తిపరిచే వాస్తవ సంఖ్యలు లేవు కావున, ఇటువంటి సమీకరణానికి సాధనలను మదింపు చేయడానికి వీలుగా వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థను మరలా సంకీర్ణ సంఖ్యా వ్యవస్థ అనే క్రొత్త వ్యవస్థకు విస్తరించాము. ఈ పాఠము నందు అభ్యాసకులు, సంకీర్ణ సంఖ్యల గురించి మరియు సంకీర్ణ సంఖ్యలపై, బీజీయ పరిక్రియలను గురించి క్షుణ్ణంగా తెలుసుకొంటారు.

లక్ష్యాలు :

పాఠ్యపఠనం వలన మీరు ఈ క్రింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థను, సంకీర్ణ సంఖ్యా వ్యవస్థకు విస్తరింప చేయవలసిన అవసరమును వివరింపగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యను నిర్వచించి, దానికి తగు ఉదాహరణలు ఇచ్చెదరు.
- రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సమానత్వమునకు నియమాన్ని తెలుపగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క సంయుగ్మాన్ని తెలుపగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క మాపము మరియు అయామములను నిర్వచించగలరు.
- సంకీర్ణ సంఖ్యను ధృవరూపంలో తెల్పగలరు.
- సమస్యలను సాధించుట కొరకు క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల ధర్మాలను ఉపయోగిస్తారు.

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ మరియు $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

(ii) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(iv) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

(v) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0).$

(vi) $i^2 = -1$ & $i = \sqrt{-1}$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

- $a+ib$ రూపంలో వ్రాయగల సంఖ్యలను సంకీర్ణ సంఖ్యలు అంటారు. a,b లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $i=\sqrt{-1}$.

1. ఈ క్రింది వాటిని i ని ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి.

$i)$ $\sqrt{-36}$ $ii)$ $\sqrt{25},\sqrt{-4}$ $iii)$ $\sqrt{-27}$ $iv)$ $\sqrt{-13}$

సాధన :

$i)$ $\sqrt{-36}=\sqrt{36}\times\sqrt{-1}=6i$

$ii)$ $\sqrt{25}\times\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=5\times2\times i=10i$

$iii)$ $\sqrt{-27}=\sqrt{27}\times\sqrt{-1}=\sqrt{9\times3}i=3\sqrt{3}\ i$

$iv)$ $\sqrt{-13}=\sqrt{13}\times\sqrt{-1}=\sqrt{13}\ i$

2. క్రింది వాటిని $a+ib$ రూపంలో వ్రాయండి.

$i)$ 5 2) $-3i$ 3) 0

సాధన :

$i)$ $5=5+0(i)$

$ii)$ $-3i=0+(-3)i$

$iii)$ $0=0+0(i)$

3. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల సంయుగ్మం కనుక్కోండి.

$i)$ $3-4i$ $ii)$ $2i$ $iii)$ $(2+i)^2$ $iv)$ $\frac{i+1}{2}$

సాధన :

$i)$ $z=3-4i$ అయితే z యొక్క సంయుగ్మం $\bar{z}=3+4i$

$ii)$ $z=2i$ కావున సంయుగ్మం $\bar{z}=-2i$

$iii)$ $z=(2+i)^2=4+i^2+4i=4-1+4i=3+4i$

$z=3+4i$ కావున $\bar{z}=3-4i$ $\left(i^2=-1\right)$

$iv)$ $z=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\Rightarrow\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{-i+1}{2}$

4. క్రింది వాటి మాపంలను కనుక్కొండి.

$i)\ 1+i \quad ii)\ 2\pi \quad iii)\ 0 \quad iv)\ \frac{1}{2}i$

సాధన :

సూచన : $z = x + iy$ అయితే z యొక్క మాపం $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ అగును.

$i)$ $z = 1 + \bar{i}$ కావున $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$ii)$ $z = 2\pi = 2\pi + (0)i \Rightarrow z$ మాపం

$|z| = \sqrt{2(\pi)^2 + 0} = 2\pi$

$iii)$ $0 \quad z = 0 = 0 + 0i \Rightarrow |z| = \sqrt{0+0} = 0$

$iv)$ $z = \frac{1}{2i} \Rightarrow z = 0 + \frac{1}{2i} \Rightarrow |z| = \sqrt{0 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

5. క్రింది వాటి సంయుగ్మాలు కనుక్కోండి.

$i)\ -2i \quad ii)\ -5-3i \quad iii)\ -\sqrt{2} \quad iv)\ (-2+i)^2$

సాధన :

$i)$ $z = -2i \Rightarrow \bar{z} = +2i$

$ii)$ $z = -5-3i \Rightarrow |z| = -5+3i$

$iii)$ $z = -\sqrt{2} \Rightarrow z = -\sqrt{2} + 0.i \Rightarrow \bar{z} = -\sqrt{2}$

$iv)$ $z - (-2+i)^2 = 4 + i^2 - 4i = 4 - 1 - 4i = 3 - 4i$

$\therefore \bar{z} = 3 + 4i$

6. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపం కనుక్కోండి.

$i)\ 3 \quad ii)\ (i+1)(2-i) \quad iii)\ 2-3i \quad iv)\ 4+\sqrt{5i}$

సాధన :

$i)$ 3

$z = 3 \ or \ z = 3 + 0i$

$z = a + bi$ అయినచో $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow z = 3 + 0i, |z| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

కావున $|z| = 3$

ii) $(i+1)(2-i)$

$z = (i+1)(2-i) = 2i + 1 + 2 - i = 3 + i$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

కావున $|z| = \sqrt{10}$

iii) $2 - 3i$

$z = 2 - 3i$ అనుకొనిన

$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

కావున $|z| = \sqrt{13}$

iv) $4 + \sqrt{5}\ i$

$z = 4 + \sqrt{5}\ i$ అనుకొనిన

$|z| = \sqrt{(4)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{16+5} = \sqrt{21}$

కావున, $|z| = \sqrt{21}$

7. సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}i\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}i\right)$ *ii)* $\frac{2+i}{3} + \frac{2-i}{6}$ *iii)* $(1+i) - (1-6i)$

iv) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}i\right) - (-2 - 7i)$

సాధన :

i) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}i\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}i\right) = \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)i$

ii) $\frac{2+i}{3} + \frac{2-i}{6} = \frac{4+2i+2-i}{6} = \frac{6+i}{6} = 1 + \frac{1}{6i}$ (or) = $\frac{1}{6}(6+i)$

iii) $(1+i) - (1-6i) = 1 + i - 1 + 6i = 7i$

iv) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3i}\right)-(-2-7i)=\sqrt{2}-\sqrt{3i}+2+7i=\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(7-\sqrt{3}\right)i$

8. $z_1=5+i$ **మరియు** $z_2=6+2i$ **అయిన**

i) z_1+z_2 *ii)* z_2+z_1 *iii)* z_1-z_2 *iv)* z_2-z_1

v) $z_2+z_2=z_2+z_1$ అగునా? *vi)* $z_1-z_2=z_2-z_1$ అగునా?

సాధన :

i) $z_1+z_2=5+i+6+2i=11+3i$

ii) $z_2+z_1=(6+2i)+(5+1)=(6+5)+(2i+i)=11+3i$

iii) $z_1-z_2=(5+i)-(6+2i)=(5-6)+(i-2i)=-1-i=-1+(-1)i$

iv) $z_2-z_1=(6+2i)-(5+i)=(6-5)+(2-1)i=1+i$

v) (1) మరియు, (2) నుండి $z_1+z_2=z_2+z_1$ అగును.

vi) (3), (4)ల నుండి $z_1-z_2\neq z_2-z_1$ అగును.

9. క్రింది వాటికి సంకలన విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

i) $12-7i$ *ii)* $4-3i$

సాధన :

i) $12-7i$ సంకలన విలోమం $(12-7i)=-12+7i$

ii) $4-3i$ సంకలన విలోమం $-(4-3i)=-4+3i$

10. $3-2i$ **వచ్చుటకు** $-15+4i$ **కి ఏమీ కలపాలి?**

సాధన : $-15+4i$ కి $x+iy$ కలపాలి అనుకొనిన

$(x+iy)+(-15+4i)=3-2i$

$(x-15)+(y+4)i=3+(-2)i$

ఇరువైపులా పోల్చగా,

$x-15=3\Rightarrow x=18$ & $y+4=-2\Rightarrow y=-6$

$\therefore x+iy=18+(-6)i$ కలపాలి.

11. క్రింది వాటికి వాస్తవ, కల్పిత భాగాలను కనుక్కోండి.

i) $2+7i$ *ii)* $3+0i$ *iii)* $-\frac{1}{2}$ *iv)* $5i$ *v)* $\frac{1}{2+3i}$

సాధన :

i) $2+7i$ లో వా.బా $=2$, కల్పిత భాగం $=7$

ii) $3+0i$ లో వా.బా $=3$ కల్పిత భాగం $=0$

iii) $-\frac{1}{2}$ లో వా.బా $=\frac{-1}{2}$, క.బా $=0$

iv) $5i$ లో వా.బా $=0$, క.బా $=5$

v) $\frac{1}{2+3i}=\frac{1}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{2-3i}{4-\left(9i^2\right)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2-3i}{13}$

$\frac{2}{13}+\left(\frac{3}{13}\right)i$ లో వా.బా $=\frac{2}{13}$,మరియు క.భా $=\frac{3}{13}$

12. సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\sqrt{-3}.\sqrt{-27}$ *ii)* $\sqrt{-3},\sqrt{-4}.\sqrt{-72}$ *iii)* $3i^{15}-5i^8+1$

సాధన :

i) $\sqrt{-3}.\sqrt{-27}=\sqrt{3i}\times\sqrt{27i}\Rightarrow\sqrt{3i}\times3\sqrt{3i}\Rightarrow 9i^2=-9$

ii) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}\times\sqrt{36\times-2}$

$\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}\times\sqrt{6\times6\times-2}$

$\Rightarrow\sqrt{3}i\times2i\times6\sqrt{2}i$

$\Rightarrow 12\sqrt{6}i^2.i\rightarrow\Rightarrow-12\sqrt{6}.i \qquad \therefore i^2=-1$

iii) $3i^{15}-5i^8+1 \quad =3\left(i^2\right)^7(i)-5\left(i^2\right)^4+1$

$=3(-1)^7 i-5(-1)^4+1$

$=3(-1)i-5(1)+1=-3i-4$

$=-4+(-3)i$

13. వాస్తవ, కల్పిత భాగాలను క్రమ యుగ్మాలుగా ఇచ్చిన క్రింది వాటిని సంకీర్ణ సంఖ్యలుగా వ్రాయుము.

i) $z(3,-5)$ *ii)* $z(0,-4)$ *iii)* $z(8,\pi)$

సాధన :

$i)$ $z(3,-5) \Rightarrow z = 3 - 5i$

$ii)$ $z(0,-4) \Rightarrow z = -4i$

$iii)$ $z(8,\pi) \Rightarrow z = 8 + \pi i$

14. క్రింది వాటి సంయుగ్మాలు కనుక్కోండి.

$i)$ $1-2i$ $ii)$ $-1-2i$ $iii)$ $6-\sqrt{2i}$ $iv)$ $4i$

సాధన :

$i)$ $z = 1-2i \Rightarrow \bar{z} = 1+2i$

$ii)$ $z = -1-2i \Rightarrow \bar{z} = -1+2i$

$iii)$ $z = 6-\sqrt{2i} \Rightarrow \bar{z} = 6+\sqrt{2i}$

$iv)$ $z = 4i \Rightarrow \bar{z} = -4i$

15. క్రింది వాటి మాపంలను కనుక్కోండి.

$i)$ $1-i$ $ii)$ $3+\pi i$ $iii)$ $-\frac{3}{2}i$ $iv)$ $-2+\sqrt{3i}$

సాధన :

$i)$ $z = 1-i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$ii)$ $z = 3+\pi i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+\pi^2} = \sqrt{9+\pi^2}$

$iii)$ $z = \frac{-3}{2}i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2+\left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$

$iv)$ $z = -2+\sqrt{3i} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $10i^3 + 6i^3 - 12i^{10}$ **సూక్ష్మీకరింపుము.**

సాధన : ఇక్కడ $\boxed{i^2 = -1}$

$$10(i)^2.i + 6\left(i^2\right)^6.i - 12\left(i^2\right)^5$$

$$10(-1).i + 6(-1)^6.i - 12(-1)^5$$

$$-10i + 6.1.i - 12(-1)$$

$$-10i + 6i + 12 \Rightarrow 12 - 4i$$

2. $\forall m \in \mathrm{N} / m$ **యొక్క అన్ని సహజ విలువలకు** $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$ **అని చూపండి.**

సాధన :

$$i^m + i^m.i + i^m.i^2 + i^m.i^3 \qquad \boxed{a^{m+n} = a^m.a^n}$$

$$i^m\left(1 + i + i^2 + .i^3\right)$$

$$i^m\left(1 + i + (-1) + i^2.i\right) \qquad \boxed{i^2 = -1}$$

$$i^m(1 + i - 1 - i) = i^m(0) = 0$$

3. **క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఆర్గాండ్ తలంలో గుర్తించండి.**

a) *i)* $2 + oi$ *ii)* $-3 + oi$, *iii)* $0 - 0i$ *iv)* $3 - oi$

b) *i)* $0 + 2i$ *ii)* $0 - 3i$, *iii)* $4i$ *iv)* $-5i$

c) *i)* $2 + 5i$ మరియు $2 - 7i$ *ii)* $3 - 4i$ మరియు $-4 + 3i$

iii) $-7 + 2i$ మరియు $2 - 7i$ *iv)* $-2 - 9i$ మరియు $-4 + i$

d) *i)* $1 + i$ మరియు $-1 - i$ *ii)* $6 + 5i$ మరియు $-6 - 5i$

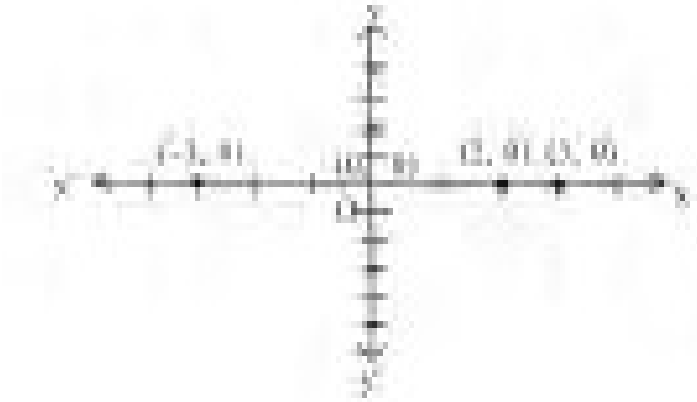
iii) $-3 + 4i$ మరియు $1 - i$ *iv)* $-3 + 4i$ మరియు $-3 - 4i$

e) *i)* $1 + i$ మరియు $1 - i$ *ii)* $-3 + 4i$ మరియు $-3 - 4i$

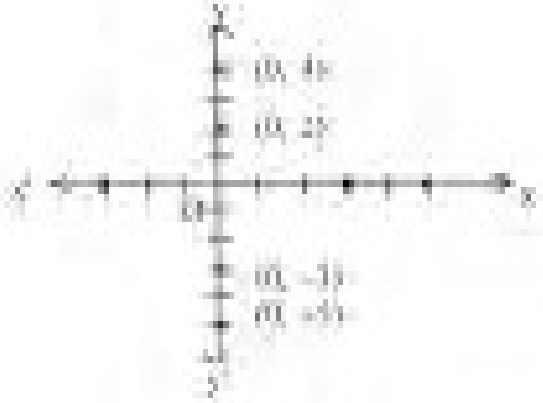
iii) $6 - 7i$ మరియు $6 + 7i$ *iv)* $-5 - i$ మరియు $-5 + i$

సాధన :

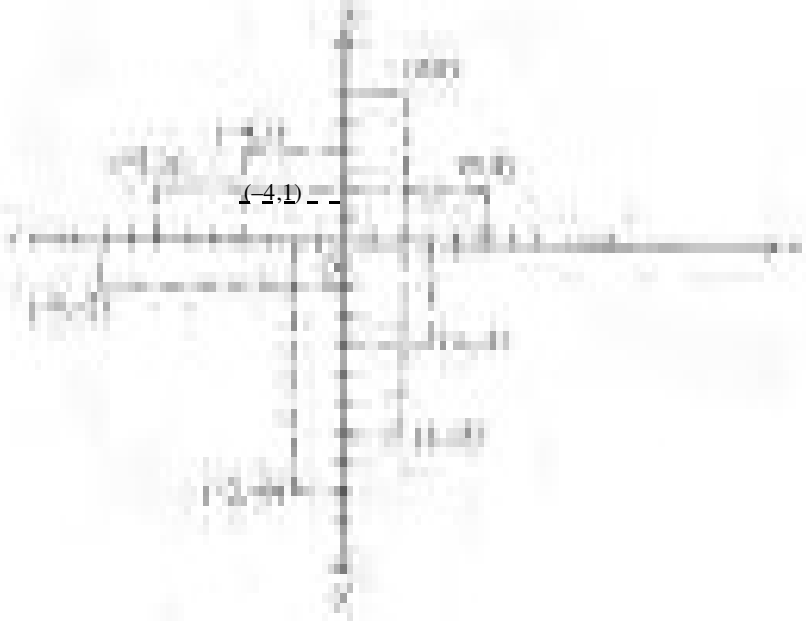
(a)



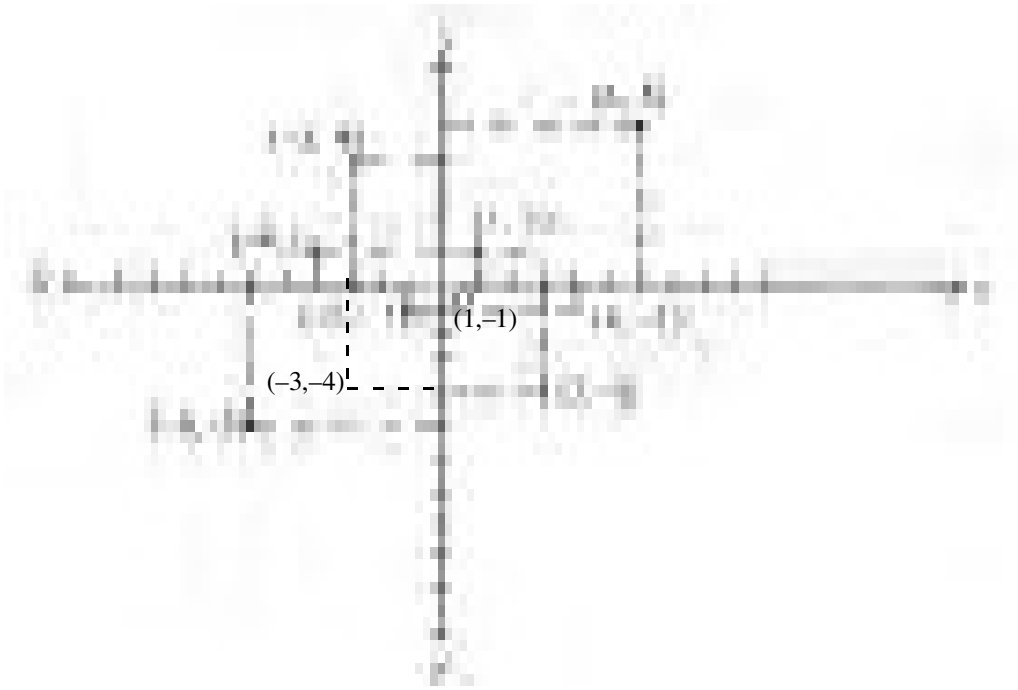
(b)



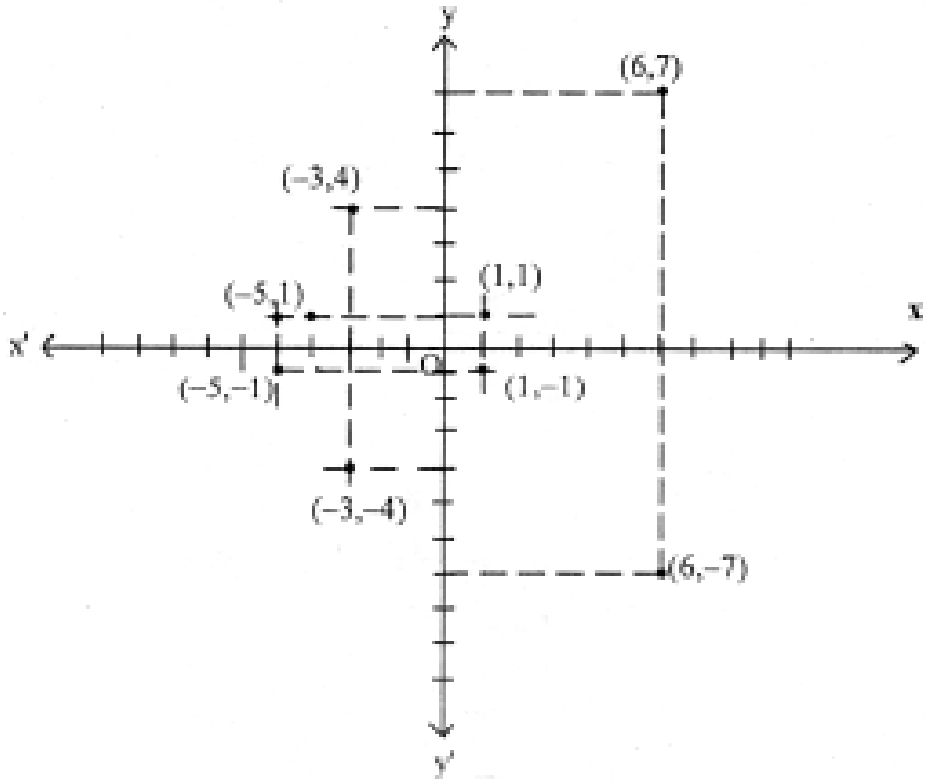
(c)



(d)



(e)



4. **క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z| = |\bar{z}|$ ను సరిచూడండి.**

$i)\ -6+8i \qquad ii)\ -3-7i$

సాధన :

$i)\quad z = -6+8i \Rightarrow \bar{z} = -6-8i$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{(-6)^2 + \left(-8^2\right)} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore |z| = |\bar{z}|$$

$ii)\quad z = -3-7i \Rightarrow \bar{z} = -3+7i$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-7^2\right)} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{(-3)^2 + \left(7^2\right)} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

$$\therefore |z| = |\bar{z}|$$

5. **క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z| = |-z|$ ను సరిచూడండి.**

$i)\ 14+i \qquad ii)\ 11-2i$

సాధన :

$i)\quad 14+i \Rightarrow -z = -(14+i) = -14-i$

$$\therefore |z| = \sqrt{14^2 + 1^2} = \sqrt{196+1} = \sqrt{197}$$

$$|-z| = \sqrt{\left(-14^2\right) + \left(-1^2\right)} = \sqrt{196+1} = \sqrt{197}$$

$$\therefore |z| = |-z|$$

$ii)\quad 11-2i$ పై సమస్య మాదిరి.

6. **క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z| = |-z| = |-\bar{z}|$ ను సరిచూడండి.**

$i)\ 2-3i \qquad ii)\ -6-i \qquad iii)\ 7-2i$

సాధన : పై సమస్యల మాదిరి చేస్తే $|z| = |-z| = |-\bar{z}|$ అగును.

7. $\left\{\overline{(3+7i)-(5+2i)}\right\}=\overline{(3+7i)}-\overline{(5+7i)}$ **అని చూపుము.**

సాధన :

$$\left\{\overline{(3+7i)-(5+2i)}\right\}=\left\{\overline{3+7i-5-2i}\right\}=\left\{\overline{-2+5i}\right\}=-2-5i \qquad \ldots (1)$$

$$\overline{(3+7i)}-\overline{(5+2i)}=(3-7i)-(5-2i)$$

$$=3-7i-5+2i=-2-5i \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

1, 2 ల నుండి నిరూపితం.

8. **సంకీర్ణ సంఖ్య** $(1+i)(4-3i)$ **మాపమును కనుక్కోండి.**

సాధన :

$$z=(1+i)(4-3i)=\left(4-3i+4i-3i^2\right)=4+i-3(-1)$$

$$z=4+i+3 \Rightarrow z=7+i$$

$\therefore$ మాపం $|z|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

నోట్: రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల భాగాహారం.

$z_1=a+bi,\ z_2=c+di$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

9. $3+i$ **ను** $4-2i$ **చే భాగించుము.**

సాధన : $\dfrac{3+2i}{4-2i}=\dfrac{(3\times4)+(1\times-2)}{4^2+(-2)^2}+\dfrac{(1\times4)-(3\times-2)}{4^2+(-2)^2}$

$$=\frac{12-2}{16+4}+\frac{4+6}{16+4}i=\frac{10}{20}+\frac{10i}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

10. $z=\dfrac{2+i}{3-i}$ **అయితే** $|z|$ **విలువ ఎంత?**

సాధన : $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\left|\dfrac{2+i}{3-i}\right|=\dfrac{|2+i|}{|3-i|}=\dfrac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

నోట్ : $z = a + bi$ కి గుణాకార విలోమం $z^{-1} = x + iy$ అయితే

$$z^{-1} = x + iy = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

11. $z = 2 - 4i$ **కి గుణకార విలోమం కనుక్కోండి.**

సాధన : $z = 2 - 4i$ కి గుణకార విలోమం

$$z^{-1} = \frac{2}{2^2 + (-4)^2} + \frac{-(-4)}{2^2 + (-4)^2} = \frac{2}{4+16} = \frac{4}{4+16} i = \frac{2}{20} + \frac{4}{20} i$$

$$\therefore z^{-1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} i$$

12. **క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.**

i) $(1+2i)\left(\sqrt{2} - i\right)$ *ii)* $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ *iii)* $(3+i)(1-i)(-1+i)$

iv) $(2+3i) \div (1-2i)$ *v)* $(1+2i) \div 1 + i$ *iv)* $(1+0i) \div (3+7i)$

సాధన :

i) $(1+2i)\left(\sqrt{2} - i\right) = \left(\sqrt{2} - i + 2\sqrt{2i} - 2i^2\right)$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} + \left(2\sqrt{2} - 1\right) i - 2(-1) = \sqrt{2} + \left(2\sqrt{2} - 1\right) i + 2$$

$$\therefore z = \left(2 + \sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2} - 1\right) i$$

ii) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + i^2 + 2\sqrt{2i} = 2 - 1 + 2\sqrt{2i} = 1 + 2\sqrt{2i}$

iii) $(3+i)(1-i)(-1+i)$

$$z = (3+i)\left[-1 + i + i - i^2\right] = (3+i)[-1 + 2i + 1] = (3+i)(2i)$$

$$\therefore z = 6i + 2i^2 \Rightarrow z = 6i + 2(-1) = -2 + 6i$$

$iv)\quad z=\dfrac{2+3i}{1-2i}=\left[\dfrac{(2\times1)+(3(-2))}{1^2+(-2)^2}+\dfrac{(3\times1)-(2\times-2)}{1^2+(-2)^2}i\right]$

$\therefore z=\left(\dfrac{2-6}{1+4}+\dfrac{3+4}{1+4}i\right)=\left(\dfrac{-4}{5}+\dfrac{7}{5}i\right)$

$\therefore z=\dfrac{1}{5}(-4+7i)$

నోట్: $\left(\because \dfrac{a+bi}{c+di}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right)\right)$

$v)\quad z=\dfrac{1+2i}{1+i}=\dfrac{(1\times1)+(2\times1)}{1^2+1^2}+\dfrac{(2\times1)-(1\times1)}{1^2+1^2}i$

$\Rightarrow \dfrac{1+2}{2}+\dfrac{2-1}{2}i\Rightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\Rightarrow z=\dfrac{1}{2}[3+i]$

$vi)\quad z=\dfrac{1+0i}{3+7i}\Rightarrow z=\dfrac{(1\times3)+(0\times7)}{3^2+(7)^2}+\dfrac{(0\times3)-(1\times7)}{3^2+7^2}i$

$z=\dfrac{3+0}{9+49}+\dfrac{0-7}{9+49}i\Rightarrow z=\dfrac{3}{58}-\dfrac{7}{58}i$

$\therefore z=\dfrac{1}{58}[3-7i]$

13. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క గుణకార విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

$i)\quad 3-4i \qquad ii)\quad \sqrt{3}+7i \qquad iii)\quad \dfrac{3+5i}{2-3i}$

సూచన: $z=a+ib$ కి గుణకార విలోమము $z^{-1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}.i$

సాధన :

$i)\quad z=3-4i\Rightarrow z^{-1}=\dfrac{3}{3^2+(-4)^2}+\dfrac{-(-4)}{3^2+(-4)^2}i\Rightarrow z^{-1}=\dfrac{3}{9+16}+\dfrac{4}{9+16}i$

$\therefore z^{-1}=\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i\ \ (or)\ z^{-1}=\dfrac{1}{25}(3+4i)$

$ii)\quad z=\sqrt{3}+7i \Rightarrow z^{-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+7^2}+\dfrac{(-7)}{\left(\sqrt{3}\right)^2+7^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3+49}+\dfrac{-7}{3+49}i$

$\therefore z^{-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{52}+\dfrac{-7}{52}i \ \ (or)\ z^{-1}=\dfrac{1}{52}\left(\sqrt{3}-7i\right)$

$iii)\quad z=\dfrac{3+5i}{2-3i} \Rightarrow z=\dfrac{(3\times 2)+(5\times -3)}{2^2+(-3)^2}+\dfrac{(5\times 2)-(3\times -3)}{2^2+(-3)^2}i$

$z=\dfrac{6-15}{4+9}+\dfrac{10+9}{4+9}i \Rightarrow z=\dfrac{-9}{13}+\dfrac{19}{13}i$

$\therefore$ గుణకార విలోమం $z^{-1}=\dfrac{\dfrac{-9}{13}}{\left(\dfrac{81}{169}\right)+\left(\dfrac{361}{169}\right)}+\dfrac{-\left(\dfrac{+19}{13}\right)}{\dfrac{81}{169}+\dfrac{361}{169}}i$

$z^{-1}=\dfrac{\dfrac{-9}{13}}{\dfrac{81+361}{169}}+\dfrac{-\dfrac{19}{13}}{\dfrac{81+361}{169}}i \Rightarrow z^{-1}=\dfrac{-9}{13}\times\dfrac{169}{442}+\dfrac{-19}{13}\times\dfrac{169}{442}i=\dfrac{-117}{442}+\dfrac{(-247)}{442}i$

$=\dfrac{1}{34}(-9-19i)$

14. $7i^{17}-6i^6+3i^3-2i^2+1$ **ను** $a+ib$ **రూపంలో వ్రాయుము.**

సాధన : $z=7\left(i^2\right)^8.i-6\left(i^2\right)^3+3i^2.i-2i^2+1$

$z=7(-1)^8.i-6(-1)^3+3(-i)-2(-1)+1$

$z=7(1)i-6(-1)+3(-i)+2+1$

$z=7i+6-3i+3; z=9+4i$

15. **క్రింది వాటికి** x, y **విలువలను కనుక్కోండి.**

$i)\ x-iy+7-2i=9-i \qquad ii)\ 2x+3yi=4-9i \qquad iii)\ x-3yi=7+9i$

సాధన :

$i)\quad x-iy+7-2i=9-i$

$x - iy = 9 - i - 7 + 2i \Rightarrow x - iy = 2 + i$

$x - iy = 2 + i \Rightarrow x = 2,\ y = -1$

$ii)$ $2x + 3yi = 4 - 9i$

$2x = 4 \Rightarrow x = 2; 3y = -9 \Rightarrow y = -3$

$iii)$ $x - 3yi = 7 + 9i$

$x = 7; -3y = 9 \Rightarrow x = 7.y = -3$

16. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

$i)$ $(3+i)-(1-i)+(-1+i)$ $\quad ii)$ $\left(\frac{1}{7}+i\right)-\left(\frac{2}{7}-i\right)+\left(\frac{3}{7}-2i\right)$

సాధన :

$i)$ $z = 3 + i - 1 + i - 1 + i$, $z = 3 - 2 + i + i + i \Rightarrow z = 1 + 3i$

$ii)$ $z = \frac{1}{7} + i - \frac{2}{7} + i + \frac{3}{7} - 2i \Rightarrow z = \left(\frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7}\right) + (1 + 1 - 2)i$

$\therefore z = \frac{2}{7} + 0i \Rightarrow z = \frac{2}{7}$

17. క్రింది వాటికి సంకలన, గుణన విలోమాలు కనుక్కోండి.

$i)$ $3 - 7i$ $\quad ii)$ $11 - 2i$ $\quad iii)$ $\sqrt{3} + 2i$ $\quad iv)$ $\frac{1+5i}{1-i}$

సాధన :

$i)$ $3 - 7i$ - z అయితే z కు సంకలన విలోమం $-z = -3 + 7i$, z కు గుణన విలోమం

$z^{-1} = \frac{3}{3^2 + (-7)^2} + \frac{-(-7)}{3^2 + (-7)^2 i} \Rightarrow \frac{3}{58} + \frac{7}{58} i$

$ii)$ $z = 11 - 2i \Rightarrow z$ కు సంకలన విలోమం $-z = -11 + 2i$, z కు గుణన విలోమం

$z^{-1} = \frac{11}{11^2 + (-2)^2} + \frac{-(-2)}{11^2 + (-2)^2} i \Rightarrow z^{-1} = \frac{11}{125} + \frac{2}{125} i$

$iii)$ $z = \sqrt{3} + 2i$ అయితే z కు సంకలన విలోమం $-z = -\sqrt{3} - 2i$, z కు గుణకార విలోమం

$z^{-1} = \frac{+\sqrt{3}}{3+4} + \frac{-(+2)}{3+4} i = \frac{+\sqrt{3}}{7} + \frac{-2}{7} i$

$iv)$ $z=\frac{1+5i}{1-i}\Rightarrow z=\frac{1+5i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}\Rightarrow z=\frac{1+i+5i+5i^2}{1+1}$

$z=\frac{1+6i-5}{2}\Rightarrow z=\frac{-4}{2}+\frac{6i}{2}\Rightarrow z=-2+3i$

$\therefore z$ కు సంకలన విలోమం $-z=-(-2+3i)=+2-3i$

గుణకార విలోమం $z^{-1}=\frac{-2}{4+9}+\frac{-(+3)}{4+9}i\Rightarrow z^{-1}=\frac{-2}{13}+\frac{-3}{13}i$

18. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపములను కనుక్కోండి.

$i)$ $\frac{1+i}{3-i}$ $ii)$ $\frac{5+2i}{\sqrt{2}+\sqrt{3i}}$

$iii)$ $(3+2i)(1-i)$ $iv)$ $(1-3i)\left(-2i^3+i^2+3\right)$

సాధన :

$i)$ $z=\frac{1+i}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}\Rightarrow z=\frac{i+3+3i+i^2}{9+1}$

$z=\frac{4i+3-1}{10}=\frac{2}{10}+\frac{4}{10}i=z$

$\therefore$ మాపం $|z|=\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2+\left(\frac{4}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{100}+\frac{16}{100}}=\sqrt{\frac{20}{100}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$ii)$ పై మాదిరి

$iii)$ $z=(3+2i)(1-i)\Rightarrow z=3-3i+2i-2i^2$

$\therefore z=3-i+2\Rightarrow z=5-i$

$\therefore$ మాపం $|z|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$iv)$ $z=(1-3i)\left(-2i^3+i^2+3\right)\Rightarrow z=-2i^3+i^2+3+6i^4-3i^3-9i$

$z=6i^4-5i^3+i^2-9i+3$

$z=6\left(i^2\right)^2-5i^2(i)-1-9i+3$

$z = 6(-1)^2 - 5(-1)i - 1 - 9i + 3$

$z = 6 + 5i - 9i + 2$

$z = 8 - 4i$

$\therefore$ మాపం $|z| = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

19. క్రింద ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్యలక $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$ ను సరిచూడుము.

i) $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 - 5i$ *ii)* $z_1 = 3 - \sqrt{7}i, z_2 = \sqrt{3} - i$

సాధన :

i) $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 - 5i$

$z_1.z_2 = (3-2i)(1-5i) = 3 - 15i - 2i + 10i^2$

$z_1.z_2 = 3 - 17i + 10(-1) = 3 - 17i - 10 = -7 - 17i$ $\left(i^2 = -1\right)$

$\therefore |z_1 z_2| = \sqrt{(-7)^2 + (-17)^2} = \sqrt{49+289} = \sqrt{338}$ ....(1)

$\therefore |z_2| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$\therefore |z_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\therefore |z_2||z_1| = \sqrt{26} \times \sqrt{13} = \sqrt{26 \times 13} = \sqrt{338}$ ....(2)

$\therefore$ (1), (2) ల నుండి $|z_1 z_2| = |z_2||z_1|$ నిరూపితం.

ii) పై లెక్క మాదిరి.

20. క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ని సరిచూడండి.

i) $z_1 = 1 + 3i, z_2 = 2 + 5i$ *ii)* $z_1 = -2 + 5i, z_2 = 3 - 4i$

సాధన :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3i}{2+5i}\times\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{2-5i+6i-15i^2}{4-25i^2}=\frac{2+i-15(-1)}{4+25}$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{17+i}{29}\Rightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{17}{29}\right)^2+\left(\frac{1}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{289+1}{89+1}}=\sqrt{\frac{290}{841}}=\sqrt{\frac{10}{29}}\ ..\ (1)$$

$$|z_1|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10},|z_2|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}}=\sqrt{\frac{10}{29}}\qquad ....\ (2)$$

(1), (2) ల నుండి $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ నిరూపితం.

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $z_1=4+3i;\ z_2=3-2i$ **మరియు** $z_3=i+5$ **అయినచో** $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ **ని సరిచూడుము.**

సాధన :

$$z_2+z_3=(3-2i)+(i+5)=8-i$$

$$\therefore z_z(z_2+z_3)=(4+3i)(8-i)=32-4i+24i-3i^2\quad(\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow z_1(z_2+z_3)=32+20i+3=35+20i$$

$$\therefore z_1(z_2+z_3)=35+20i....\qquad(1)$$

$$z_1z_2=(4+3i)(3-2i)=12-8i+9i-6i^2$$

$$z_1z_2=12+i+6=18+i$$

$$z_1z_3=(4+3i)(5+i)=20+4i+15i+3i^2$$

$$z_1z_3=20+19i-3\Rightarrow z_1z_3=17+19i$$

$\therefore z_1z_2 + z_1z_3 = 18 + i + 17 + 19i \Rightarrow z_1z_2 + z_1z_3 = 35 + 20i \qquad \ldots (2)$

(1), (2) ల నుండి $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_2z_3$ నిరూపితం.

2. $z_1 = 2 + i, z_2 = -2 + i$ **మరియు** $z_3 = 2 - i$ **అయినచో** $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ **ని సరిచూడండి.**

సాధన :

$z_1z_2 = (2+i)(-2+i) = -4 + 2i - 2i + i^2$

$z_1z_2 = -4 - 1 = -5$

$\therefore (z_1z_2)z_3 = -5(2-i) = -10 + 5i \qquad .. (1)$

$z_2.z_3 = (-2+i)(2-i) = -4 + 2i + 2i - i^2$

$z_2.z_3 = -4 + 4i + 1 \Rightarrow z_2z_3 = -3 + 4i$

$z_1(z_2z_3) = (2+i)(-3+4i) = -6 + 8i - 3i + 4i^2$

$z_1(z_2z_3) = -6 + 5i + 4(-1)$

$z_1(z_2z_3) = -10 + 5i \qquad \ldots (2)$

1, 2 ల నుండి

$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ నిరూపితం.

2

వర్గ సమీకరణములు

రెండవ పరిమాణ బీజీయ సమీకరణము యొక్క సాధారణ రూపమును $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ గా వ్రాస్తామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. దీనిని 'x' లో వర్గ సమీకరణము అంటారు. గుణకము 'a' ను మొదటి లేదా ప్రధాన గుణకమనియు, 'b' ని రెండవ లేదా మధ్య గుణకమనియు, 'c' ని స్థిరపదము లేదా మూడవ గుణకమనియు అంటారు.

ఉదాహరణకు : $7x^2 + 2x + 5 = 0,\ \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0.\ 3x^2 - x = 0,\ x^2 + \frac{1}{2} = 0,\ \sqrt{2}x^2 + 7x = 0$ లు వర్గ సమీకరణములు

ఈ పాఠము నందు వాస్తవ మరియు సంకీర్ణ గుణకాలతో కూడిన వర్గ సమీకరణాలను ఎలా సాధించవలెనో చర్చిస్తాము. వర్గ సమీకరణము, మూలాలు, గుణకాల మధ్య సంబంధమును రాబడతాము. ఇంకనూ '1' యొక్క ఘన మూలాలను కనుగొని, వీటి ద్వారా సమస్యలను సాధిస్తాము.

లక్ష్యాలు:

- రెండవ పరిమాణాబిజీయ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపం $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
- దీనిని 'x' లో వర్గ సమీకరణం అంటారు.

  గుణకం 'a' ను మొదట లేదా ప్రధాన గుణకం అనియు, 'b' ని రెండవ లేదా మధ్య గుణకం అని, 'c' ని స్థిరపదం లేదా మూడవ గుణకం అని అంటారు.
- α, β లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం. $(x - \alpha).(x - \beta) = 0$
- కారణాంక పద్ధతిన వర్గ సమీకరణ సాధన
- సూత్ర సహాయంతో వర్గ సమీకరణ సాధన .
- $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క సమీకరణానికి α, β లు మూలాలు అయితే $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ లేదా $\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$
- ఇచ్చట $D = b^2 - 4ac$ ని వర్గ సమీకరణ విచక్షిణి అంటారు.

- $D > 0$ అయితే వర్గ సమీకరణానికి వాస్తవ మరియు అసమాన మూలాలు వుంటాయి.
- $D = 0$ అయితే సమీకరణానికి మూలాలు సమానం.
- $D < 0$ అయితే సమీకరణానికి సంయుగ్మ సంకీర్ణ (కల్పిత) మూలాలు వుంటాయి.
- వర్గ సమీకరణ మూలాలు మరియు గుణకాల మధ్య సంబంధం.

$ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం మూలాలు, α, β అవుతూ $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ కావున

1) మూలాల మొత్తం $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} =$ x గుణకం / x^2 గుణకం.

2) మూలాల లబ్ధం $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} =$ స్థిరపదం / x^2 గుణకం.

- 1 యొక్క ఘన మూలాలు
- 1 యొక్క ఘన మూలాలను 1, w, w^2 గా గుర్తిస్తాం.

ఇక్కడ $w = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}.i}{2}$ (or) $\dfrac{-1 + \sqrt{3}.i}{2}$

$w^2 = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}.i}{2}$ (or) $\dfrac{-1 - \sqrt{3}.i}{2}$

$\therefore$ ఇక్కడ $1 + w + w^2 = 0$ మరియు $w^3 = 1$

- సంకీర్ణ మూలాలైన w, w^2 లు ఒకదానికొకటి సంయుగ్మాలు.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా $6x^2+5x-6=0$ ను సాధించుము.

సాధన :

$6x^2+5x-6=0 \Rightarrow 6x^2+9x-4x-6=0$ గా వ్రాయవచ్చు.

$3x(2x+3)-2(2x+3)=0$

$(2x+3)(3x-2)=0$ లేదా

$2x+3=0$ లేదా $3x-2=0$

$2x=-3$ లేదా $3x=2$

$\therefore x=\frac{-3}{2}$ లేదా $x=\frac{2}{3}$

$\therefore$ మూలాలు $\frac{-3}{2},\frac{2}{3}$

2. క్రింది వర్గ సమీకరణాలను కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

i) $\sqrt{3}x^2+10x+8\sqrt{3}=0$ *ii)* $x^2-2ax+a^2-b=0$

iii) $x^2+\frac{ab}{c}-\frac{c}{ab}x-1=0$ *iv)* $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

సాధన :

i) $\sqrt{3}x^2+10x+8\sqrt{3}=0$

$\sqrt{3}x^2+6x+4x+8\sqrt{3}=0$

$\sqrt{3}x\left(x+2\sqrt{3}\right)+4\left(x+2\sqrt{3}\right)=0$

$\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3x}+4\right)=0$

$\left(x+2\sqrt{3}\right)=0$ లేదా $\left(\sqrt{3x}+4\right)=0$

$\therefore x=-2\sqrt{3}$ లేదా $\sqrt{3x}=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ మూలాలు $-2\sqrt{3},\ \frac{-4}{\sqrt{3}}$

ii) $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$

$x^2 - \left(a+\sqrt{b}\right)x - \left(a-\sqrt{b}\right)x + a^2 - b = 0$

$x\left(x - \left(a+\sqrt{b}\right)\right) - \left(a-\sqrt{b}\right)\left(x - \left(a+\sqrt{b}\right)\right) = 0$

$\left(x - \left(a+\sqrt{b}\right)\right)\left(x - \left(a-\sqrt{b}\right)\right) = 0$

$x - \left(a+\sqrt{b}\right) = 0$ లేదా $x - \left(a-\sqrt{b}\right) = 0$

$\therefore x = \left(a+\sqrt{b}\right)$ లేదా $x = a - \sqrt{b}$

$\therefore$ మూలాలు $a+\sqrt{b}, a-\sqrt{b}$

iii) $x^2 + \left(\frac{ab}{c} - \frac{c}{ab}\right)x - 1 = 0$

$x^2 + \frac{ab}{c}x - \frac{c}{ab}x - 1 = 0$

$x\left(x + \frac{ab}{c}\right) - \frac{c}{ab}\left(x + \frac{ab}{c}\right) = 0$

$\left(x - \frac{c}{ab}\right)\left(x + \frac{ab}{c}\right) = 0$

$\therefore x = \frac{c}{ab} (or) x = -\frac{ab}{c}$

$\therefore$ మూలాలు $\frac{c}{ab}, -\frac{ab}{c}$

iv) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$

$x^2 - 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x + 6 = 0$

$x\left(x - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(x - 3\sqrt{2}\right) = 0$

$\left(x - 3\sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) = 0$

$x-3\sqrt{2}=0 \ (or) \ x-\sqrt{2}=0$

$x=3\sqrt{2} \ (or) \ x=\sqrt{2}$

$\therefore$ మూలాలు $3\sqrt{2}, \sqrt{2}$

3. క్రింది సమీకరణాలను సూత్రం ఉపయోగించి సాధించండి.

i) $2x^2-3x+3=0$ *ii)* $-x^2+\sqrt{2x}-1=0$

iii) $-4x^2+\sqrt{5x}-3=0$ *iv)* $3x^2+\sqrt{2x}+5=0$

సాధన :

i) $2x^2-3x+3=0$ యొక్క మూలాలు

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ఇక్కడ $a=2,\ b=-3, c=3$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(3)^2-4\times2\times3}}{2\times2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{4}\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{4}\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{4}$$

ii) $-x^2+\sqrt{2}.x-1=0$ ఇక్కడ $a=-1,\ b=\sqrt{2},\ c=-1$

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times-1\times-1}}{2\times-1}$$

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{-2}$$

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{-2}$$

$$\therefore x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{-2} \qquad x=\frac{-\sqrt{2}(1\pm i)}{-2}, \quad x=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$$

iii) $-4x^2+\sqrt{5x}-3=0$ ఇక్కడ $a=-4, b=\sqrt{5}, c=-3$

మూలాలు $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4 \times -4 \times -3}}{2 \times -4}$$

$$x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5 - 48}}{-8} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{-43}}{-8}$$

$$x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{43}.i}{-8} (or) \frac{+\sqrt{5} \pm \sqrt{43}.i}{8}$$

iv) $3x^2 + \sqrt{2}.x + 5 = 0$ ఇక్కడ $a = 3,\ b = \sqrt{2},\ c = 5$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 3 \times 5}}{2 \times 3} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 60}}{6}$$

$$\therefore x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-58}}{6} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{58i}}{6}$$

4. K **యొక్క ఏ విలువకు** $y^2 - 2(1 + 2K)y + 3 + 2K = 0$ **సమీకరణం సమాన మూలాలు కల్గి ఉంటుంది.**

సాధన :

ఇక్కడ $a = 1,\ b = -2(1 + 2K),\ c = (3 + 2K)$

సమీకరణ మూలాలు సమానమైతే $b^2 - 4ac = 0$ కావున

$$\left[-2(1 + 2K)\right]^2 - 4(1)(3 + 2K) = 0$$

$$4\left(1 + 4K^2 + 4K\right) - 4(3 + 2K) = 0$$

$$1 + 4K^2 + 4K - 3 - 2K = 0$$

$$4K^2 + 2K - 2 = 0$$

$2K^2 + K - 1 = 0$

$2K^2 + 2K - K - 1 = 0$

$2K(K+1) - 1(K+1) = 0$

$(K+1)(2K-1) = 0 \Rightarrow K = -1, K = \frac{1}{2}$

5. $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ **సమీకరణం మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవాలు అని, మరియు** $a=b=c$ **అయిన సందర్భంలో తప్ప, మూలాలు సమానం కావని చూపండి.**

సాధన :

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

$x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca=0$

$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

$\therefore$ విచక్షిణి $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow \Delta = \left[-2(a+b+c)\right]^2 - 4\times 3(ab+bc+ca)$

$4\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)-12(ab+bc+ca)$

$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8(ab+bc+ca)-12(ab+bc+ca)$

$4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4(ab+bc+ca)$

6. $3x^2-5x+9=0$ **సమీకరణ మూలాలు** α,β **అయిన**

i) $\alpha^2+\beta^2$ *ii)* $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన :

$3x^2-5x+9=0$ మూలాలు α,β కావున మూలాల మొత్తం $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-5)}{3}=\frac{5}{3}$

మూలాల లబ్ధం $\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{9}{3}(or)3$

$i)$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2.\frac{9}{3}\Rightarrow\frac{25}{9}-\frac{18}{3}=\frac{25-54}{9}$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=\frac{-29}{9}$$

$ii)$ $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}$

$$=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{-\frac{29}{9}}{\left(\frac{9}{3}\right)^2}=\frac{-29}{9}\times\frac{9}{81}=\frac{-29}{81}$$

7. $3y^2+4y+1=0$ **సమీకరణం మూలాలు** α,β **అయిన** α^2,β^2 **లు మూలాలుగా కలిగిన వర్గ సమీకరణం నిర్మించండి.**

సాధన :

దత్త సమీకరణానికి α,β లు మూలాలు కావున

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-4}{3} \text{ మరియు } \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$$

సూచన : α,β లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$\therefore \alpha^2,\beta^2$ మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం

$$x^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)x+\alpha^2\beta^2=0$$

$$x^2-\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]x+(\alpha\beta)^2=0$$

$$x^2-\left[\left(\frac{-4}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)\right]x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=0$$

$$x^2-\left[\frac{16}{9}-\frac{2}{3}\right]x+\frac{1}{9}=0$$

$$x^2-\left[\frac{16-6}{9}\right]x+\frac{1}{9}=0$$

$$x^2-\frac{10}{9}x+\frac{1}{9}=0$$

$\therefore$ సమీకరణం $9x^2-10x+1=0$

8. $ay^2+by+c=0$ **మూలాలు** α,β **అయితే క్రింది విలువలు కనుక్కోండి.**

$i)$ $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ $ii)$ $\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}$

సాధన :

దత్త సమీకరణ మూలాలు α,β కావున $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ & $\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

$i)$ $$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}$$

$$\therefore\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

$ii)$ $$\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}=\frac{\beta^4+\alpha^4}{\alpha^4\beta^4}=\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta)^4}$$

$$\frac{\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]^2-2(\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}\right]^2 - 2\frac{c^2}{a^2}}{\frac{c^4}{a^4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\frac{b^2 - 2ca}{a^2}\right]^2 - \frac{2c^2}{a^2}}{\frac{c^4}{a^4}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\left(b^2 - 2ac\right)^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}\right] \times \frac{a^4}{c^4}$$

$$\left[\frac{\left(b^2 - 2ac\right)^2 - 2a^2c^2}{c^4}\right]$$

9. $5x^2 - 6x + 3 = 0$ **మూలాలు** α, β **అయినా క్రింద ఇచ్చిన మూలాలు కల్గిన వర్గ సమీకరణం నిర్మించండి.**

i) α^2, β^2 *ii)* $\alpha^3\beta, \alpha\beta^3$

సాధన :

దత్త సమీకరణానికి α, βలు మూలాలైతే $\alpha + \beta = \frac{6}{5}$, $\alpha\beta = \frac{3}{5}$

i) α^2, β^2లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

$$x^2 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)x + \alpha^2\beta^2 = 0$$

$$x^2 - \left((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\right)x + (\alpha\beta)^2 = 0$$

$$x^2 - \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)\right)x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0$$

$$x^2-\left[\frac{36}{25}-\frac{6}{25}\right]x+\frac{9}{25}=0$$

$$x^2-\left[\frac{36-30}{25}\right]x+\frac{9}{25}=0$$

$25x^2-6x+9=0$ కావలసిన సమీకరణం.

ii) $\alpha^3\beta, \alpha\beta^3$ మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

$$x^2-\left[\alpha^3\beta+\alpha\beta^3\right]x+\alpha^3\beta.\alpha\beta^3=0$$

$$x^2-\left[\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]x+\alpha^4\beta^4=0$$

$$x^2-\left[\frac{3}{5}\left(\frac{6}{25}\right)\right]x+\left(\frac{3}{5}\right)^4=0 \qquad \ldots (1) \text{ నుండి}$$

$$x^2-\left[\frac{18}{125}\right]x+\frac{81}{625}=0$$

$$625x^2-90x+81=0$$

10. $ay^2+by+c=0$ **మూలాలు 3:4 నిష్పత్తిలో వున్నచో** $12b^2=49ac$ **అని చూపుము.**

సాధన :

మూలాలు $3K, 4K$ అయిన

మూలాల మొత్తం : $3K+4K=\frac{-b}{a}\Rightarrow 7K=\frac{-b}{a}\Rightarrow K^2=\frac{b^2}{49a^2}$

మూలాల లబ్ధం : $3K\times 4K=\frac{c}{a}\Rightarrow 12K^2=\frac{c}{a}$ .. (1)

$$K^2=\frac{c}{12a}\ldots\ldots \quad (2)$$

1, 2 ల నుండి $\frac{b^2}{49a^2}=\frac{c}{12a}\Rightarrow 12b^2=49ac$

11. $px^2 - qx + p = 0$ సమీకరణం ఒక మూలం K అయిన రెండో మూలం $K+1$ అగును.

సాధన :

$\therefore$ మూలాల మొత్తం $K + K + 1 = \frac{q}{p} \Rightarrow 2K = \frac{q}{p} - 1 \Rightarrow \frac{q-p}{p}$ .. (1)

$$\Rightarrow K^2 = \frac{(q-p)^2}{4p^2} \ldots (2)$$

మూలాల లబ్ధం $K(K+1) = \frac{p}{p} = 1$

$$K^2 + K = 1$$

$$\frac{(q-p)^2}{4p^2} + \frac{(q-p)}{2p} = 1$$

$$\frac{(q-p)^2 + (q-p)2p}{4p^2} = 1$$

$$q^2 + p^2 - 2pq + 2pq - 2p^2 = 4p^2$$

$$\therefore q^2 - 5p^2 = 0$$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

12. క్రింది ఘన సమీకరణాలను సాధించండి.

i) $x^3 = 27$ *ii)* $x^3 = -27$ *iii)* $x^3 = 64$ *iv)* $x^3 = -64$

సాధన :

i) $x^3 = 27 \Rightarrow x^3 = 27 = 0 \Rightarrow x^3 - 3^3 = 0$

$$(x-3)\left(x^2 + 3x + 3^2\right) = 0$$

$$(x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right) = 0$$

$\therefore x - 3 = 0$ మరియు $x^2 + 3x + 9 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ మరియు $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 9}}{2 \times 1}$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$

$\therefore x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 \times 3i}}{2} \Rightarrow \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}.i}{2}$

$\therefore$ మూలాలు $x = 3.\ \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}.i}{2} \Rightarrow x = 3, 3w, 3w^2$

ii) $x^3 = -27 \Rightarrow x^3 + 27 = 0 \Rightarrow x^3 + 3^3 = 0$

$(x+3)\left(x^2 - 3x + 9\right) = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0$ మరియు $x^2 - 3x + 9 = 0$

$x = -3$ మరియు $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}.i}{2}$

$\therefore$ మూలాలు $-3, -3w, -3w^2$

iii) $x^3 = 64$

$x^3 - 64 = 0$, $\quad x^3 - 4^3 = 0$

$(x-4)\left(x^2 + 4x + 4^2\right) = 0$

$(x-4)\left(x^2 + 4x + 16\right) = 0$

$\therefore x - 4 = 0$ మరియు $x^2 + 4x + 16 = 0$

$\therefore x = 4$ మరియు $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}.i}{2} \Rightarrow x = 4w, 4w^2$$

$\therefore$ మూలాలు $4w, 4w^2$

iv) $x^3 = -64$

$$x^3 + 64 = 0 \Rightarrow x^3 + 4^3 = 0$$

$$(x+4)\left(x^2 - 4x + 16\right) = 0$$

$x + 4 = 0$ మరియు $x^2 - 4x + 16 = 0$

$$\therefore x = -4 \quad x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{16-64}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}.i}{2}$$

$\therefore$ మూలాలు $-4, -4w, -4w^2$

13. $1, w, w^2$ **లు 1 యొక్క ఘన మూలాలు అయినా..**

i) $(1+w)\left(1+w^2\right)\left(1+w^4\right)\left(1+w^8\right) = 1$

ii) $(1-w)\left(1-w^2\right)\left(1-w^4\right)\left(1-w^8\right) = 9$

iii) $(1-w)^4 + \left(1-w^2\right)^4 = -1$

iv) $\left(1-w^3\right)^3 = 8$

v) $\left(1-w+w^2\right)^6 + w = \left(1+w-w^2\right)^6 = 64$

vi) $(1+w)^{16} + w = \left(1+w^2\right)^{16} + w^2 = -1$ అని చూపండి.

సాధన :

$i)$ $(1+w)\left(1+w^2\right)\left(1+w^4\right)\left(1+w^8\right)$

$\left(-w^2\right)(-w)\left(1+w^3.w\right)\left[1+\left(w^3\right)^2.w^2\right]$

$\left(w^3\right)(1+w)\left(1+(1)^2.w^2\right)$

$(1)\left(-w^2\right)\left(1+w^2\right)$

$\Rightarrow -w^2-w^4$

$-w^2-w^3.w$ $\qquad 1+w+w^2=0,\quad w^3=1$ లను ఉపయోగించి

$-w^2-w=1$

$ii)$ $(1-w)\left(1-w^2\right)\left(1-w^4\right)\left(1-w^8\right)=9$

$LHS=\quad (1-w)\left(1-w^2\right)\left(1-w^3.w\right)\left(1-\left(w^3\right)^2.w^2\right)$

$(1-w)\left(1-w^2\right)(1-w)\left(1-w^2\right)$ $\qquad \because \left(w^3=1\right)$

$(1-w)^2\left(1-w^2\right)^2$

$\left(1+w^2-2w\right)\left(1+w^4-2w^2\right)$

$\left(1+w+w^2-3w\right)\left(1+w^3.w-2w^2\right)$

$(0-3w)\left(1+w+w^2-3w^2\right)$ $\qquad \because 1+w+w^2=0$

$(-3w)\left(0-3w^2\right)\Rightarrow 9w^3=9.1=9$ $\qquad RHS$

$iii)$ $(1-w)^4+\left(1-w^2\right)^4=-1$

సాధన : $\quad LHS=(1+w)^4+\left(1+w^2\right)^4$

$$\Rightarrow \left(1+w+w^2-w^2\right)^4+\left(1+w+w^2-w\right)^4$$

$$\Rightarrow \left(0-w^2\right)^4+(0-w)^4$$

$$\Rightarrow w^8+w^4$$

$$\Rightarrow \left(w^3\right)^2.w^2+w^3.w \Rightarrow (1)^2.w^2+1.w \qquad \because w^3=1$$

$$\Rightarrow w^2+w+1-1 \Rightarrow 0-1=-1=RHS$$

$iv)$ $\left(1+w^3\right)^3=8$

సాధన : $(1+1)^3=2^3=8$

$v)$ $\left(1-w+w^2\right)^6+w=\left(1+w-w^2\right)^6=64$

$$\left(1-w+w^2\right)^6=\left(1+w+w^2-2w\right)^6$$

$$\Rightarrow (0-2w)^6 \Rightarrow 64.w^6=64\left(w^3\right)^2$$

$$\Rightarrow 64(1)^2 \Rightarrow 64$$

$$\therefore \left(1-w+w^2\right)^6=64$$

ఇదే విధంగా $\left(1+w-w^2\right)^6=64$ వచ్చును.

$vi)$ $(1+w)^{16}+w=\left(1+w^2\right)^{16}+w^2=-1$

$$(1+w)^{16}+w=\left(1+w+w^2-w^2\right)^{16}+w^2=-1$$

$$\Rightarrow \left(0-w^2\right)^{16}+w=w^{32}+w=\left(w^3\right)^{10}.w^2+w$$

$\Rightarrow (1)^{10}.w^2 + w = w^2 + w + 1 - 1 \Rightarrow 0 - 1 = -1$

ఇదే విధంగా $\left(1+w^2\right)^{16} + w^2 = -1$ అని చూపవచ్చు.

14. $2\left(a^2+b^2\right)x^2 + 2(a+b)x + 1 = 0$ **వర్గ సమీకరణ మూలాలు** $a \neq 0$ **అయిన కల్పితాలు అనిచూపండి.**

సాధన : దత్త సమీకరణ విచక్షిణి $\Delta = b^2 - 4ac$

$\left[2(a+b)\right]^2 - 4\left[2\left(a^2+b^2\right)\right](1)$

$4\left[(a+b)^2 - 2\left(a^2+b^2\right)\right]$

$4\left[a^2 + b^2 + 2ab - 2a^2 - 2b^2\right]$

$4\left[-a^2 - b^2 + 2ab\right]$

$-4\left[a^2 + b^2 - 2ab\right]$

$-4(a-b)^2$

$< o$ కావున $a \neq b$ అయితే దత్త సమీకరణం మూలాలు కల్పితాలు.

15. $ax^2 + b(2x+1) = 0$ **యొక్క మూలాలు కల్పితాలు అయినప్పుడు** $bx^2 + (b-c)x = c + a - b$ **యొక్క మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవాలు అని చూపండి.**

సాధన : $ax^2 + b(2x+1) = 0 \Rightarrow ax^2 + 2bx + b = 0$

మూలాలు కల్పితాలు కావున $\Delta < 0$ కావున $b^2 - 4ac < 0$

$4b^2 - 4ab < 0$

$4ab - 4b^2 > 0$ .. (1)

ఇప్పుడు $bx^2 + (b-c)x + (b-c-a) = 0$ యొక్క విలుక్షిణి $(b-c)^2 - 4b(b-c-a)$

$b^2 + c^2 - 2bc - 4b^2 + 4bc + 4ab$

$b^2+c^2+2bc-4b^2+4ab$

$(b+c)^2+\left(4ab-4b^2\right) \quad >0 \quad$ (1) నుండి.

$\because$ విచక్షిణి >0 కావున $bx^2+(b-c)x+(b-c-a)=0$

యొక్క మూలాలు వాస్తవాలు అగును.

16. $2x^2-6x+5=0$ **మూలాలు** α,β **లు అయినా క్రింద ఇవ్వబడిన మూలాలుగా గలిగిన వర్గ సమీకరణాలను కనుగొనుము.**

i) $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$ *ii)* $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$ *iii)* $\alpha^2+\beta^2,\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

సాధన : $2x^2-6x+5=0$ మూలాలు α,β కావున

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-6)}{2}=3$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{2} \qquad \ldots (1)$$

i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{6}{2}\right)^2-2\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{\frac{36}{4}-\frac{10}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{36-20}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{16}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5} \qquad \ldots (1)$$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$ మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

x^2- (మూలముల మొత్తం) $x+$ మూలాల లబ్ధం $=0$

$$x^2-\left(\frac{8}{5}\right)x+1=0$$

$\Rightarrow 5x^2-8x+5=0$ కావలసిన సమీకరణం.

ii) $\alpha+\frac{1}{\beta}\ +\ \beta+\frac{1}{\alpha}\Rightarrow(\alpha+\beta)+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$$(\alpha+\beta)+\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{6}{2}+\frac{\frac{6}{2}}{\frac{5}{2}}=3+\frac{6}{5}=\frac{21}{5}\quad\ldots\ (1)$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{5}{2}+20+\frac{2}{5}=\frac{25+20+4}{10}$$

$$\therefore\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{49}{10}\quad\ldots\ (2)$$

$\therefore\alpha+\frac{1}{\beta},\beta+\frac{1}{\alpha}$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

$$x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}\right)x+\left[\alpha+\frac{1}{\beta}\right]\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=0$$

$$x^2-\left(\frac{21}{5}\right)x+\frac{49}{10}=0\Rightarrow 10x^2-42x+49=0$$

iii) $\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]+\left[\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\right]$

$$=\left[\left(\frac{6}{2}\right)^2-2\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}\right]=\left(\frac{36}{4}-\frac{10}{2}\right)+\left(\frac{36}{4}-\frac{2.\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}}\right)$$

$$[9-5]+\left[\frac{36-20}{4}\right]\times\frac{4}{25}\Rightarrow\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{20}{25}-\frac{116}{25}\quad ..\ (1)$$

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+1=2+\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2\beta^2}$$

$$\Rightarrow 2+\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=2+\left[\frac{\left((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right)^2-2\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta)^2}\right]$$

$$\Rightarrow 2+\frac{\left(\frac{36}{4}-\frac{10}{2}\right)^2-2\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}}=2+\left[\frac{\left(\frac{16}{4}\right)^2-\frac{50}{4}}{\frac{25}{4}}\right]$$

$$\Rightarrow 2+\frac{\left(\frac{256}{16}-\frac{50}{4}\right)}{\frac{25}{4}}=2+\left[\frac{\frac{256-200}{16}}{\frac{25}{4}}\right]$$

$$\Rightarrow 2+\frac{56}{16}\times\frac{4}{25}=2+\frac{14}{25}=\frac{64}{25} \qquad \ldots (2)$$

$\therefore \left(\alpha^2+\beta^2\right),\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$ లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణం.

$$x^2-\left[\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right]x+\left[\left(\alpha^2+\beta^2\right).\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{116}{25}\right)x+\frac{64}{25}=0$$

$$25x^2-116x+64=0$$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం : $25x^2-116x+64=0$

17. $1, w, w^2$ **లు 1 యొక్క ఘన మూలాలైన క్రింద వాటిని రుజువు చేయుము.**

$i)$ $(2-w)\left(2-w^2\right)\left(2-w^{10}\right)\left(2-w^{11}\right)=49$

$ii)$ $(x-y)(xw-y)\left(xw^2-y\right)=x^3-y^3$

నోట్ : $1+w+w^2=0$ మరియు $w^3=1$

సాధన :

$i)$ $(2-w)\left(2-w^2\right)\left(2-w^{10}\right)\left(2-w^{11}\right)$

$$(2-w)\left(2-w^2\right)\left[2-\left(w^3\right)^3.w\right]\left[2-\left(w^3\right)^3.w^2\right]$$

$$\left[4-2w^2-2w+w^3\right][2-w]\left[2-w^2\right]$$

$$\left[4-2w^2-2w+1\right]\left[4-2w^2-2w+w^3\right]$$

$$\left[5-2\left(w^2+w\right)\right]\left[5-2\left(w^2+w\right)\right]$$

$$\left[5-2\left(w^2+w+1-1\right)\right]\left[5-2\left(w^2+w+1-1\right)\right]$$

$$\left[5-2(-1)\right]\left[5-2(-1)\right]$$

$$[5+2][5+2]$$

$$7.7=49$$

$ii)$ $(x-y)(xw-y)\left(xw^2-y\right)=x^3-y^3$

సాధన: $LHS=$

$$(x-y)\left[x^2w^3-xyw-xyw^2+y^2\right]$$

$$(x-y)\left[x^2(1)-xy\left(w+w^2\right)+y^2\right]$$

$$(x-y)\left[x^2-xy\left(w+w^2+1-1\right)+y^2\right]$$

$$(x-y)\left[x^2-xy(-1)+y^2\right]$$

$$(x-y)\left[x^2+xy+y^2\right]=x^3-y^3 \quad =RHS$$

18. $x=a+b, y=aw+bw^2$ మరియు $z=aw^2+bw$ అయినచో క్రింది వాటిని రుజువు చేయండి.

$i)$ $x^2+y^2+z^2=6ab$ $\qquad$ $ii)$ $xyz=a^3+b^3$

సాధన :

$i)$ $x^2+y^2+z^2$

$$=(a+b)^2+\left(aw+bw^2\right)^2+\left(aw^2+bw\right)^2$$

$$\Rightarrow(a+b)^2+\left(a^2w^2+b^2w^4+2abw^3\right)+a^2w^4+b^2w^2+2abw^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + \left(a^2w^2 + b^2w^3.w + 2abw^3\right) + \left(a^2w^3.w + b^2w^2 + 2abw^3\right)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + \left(a^2w^2 + b^2w + 2ab\right) + \left(a^2w + b^2w^2 + 2ab\right)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2w^2 + b^2w + 2ab + a^2w + b^2w^2 + 2ab$$

$$\Rightarrow a^2\left(1 + w + w^2\right) + b^2\left(1 + w + w^2\right) + 6ab$$

$$\Rightarrow a^2(0) + b^2(0) + 6ab$$

$$\Rightarrow 6ab \quad = RHS$$

$ii)$ $LHS = xyz$

$$(a+b)\left(aw + bw^2\right)\left(aw^2 + bw\right)$$

$$(a+b)\left(a^2w^3 + abw^2 + abw^4 + b^2w^3\right)$$

$$(a+b)\left(a^2(1) + abw^2 + abw^3.w + b^2w^3\right)$$

$$(a+b)\left(a^2 + abw^2 + abw + b^2\right)$$

$$(a+b)\left(a^2 + ab\left(w^2 + w\right) + b^2\right)$$

$$(a+b)\left(a^2 + ab\left(w^2 + w + 1 - 1\right) + b^2\right)$$

$$(a+b)\left[a^2 + ab(0-1) + b^2\right]$$

$$(a+b)\left(a^2 - ab - b^2\right) = a^3 + b^3 \quad = RHS$$

3

మాత్రికలు

ఆర్దర్ కేలే అను బ్రిటిష్ గణిత శాస్త్రవేత్త 19వ శతాబ్ది (1821–1895) మధ్య కాలంలో 'మాత్రికలు' అనే ఒక క్రొత్త విభాగాన్ని సృష్టించాడు. ఇతడు సమకాలిక సమీకరణాల వ్యవస్థను మాత్రికా రూపంలో సూచించాడు. అప్పటి నుంచీ, ఇప్పటి వరకు గణిత శాస్త్రంలో 'మాత్రికావాదం' ఒక ముఖ్యమైన విభాగంగా స్థిరపడినది. మాత్రికలను, గేమ్‌థియరీ, ఖర్చులకు సంబంధించిన ద్రవ్యము, ఉప–ఫలములకు సంబంధించిన బడ్జెట్ ... మొదలగు వానిలో వాడుతున్నారు. ఆర్థిక శాస్త్రవేత్తలు, మాత్రికలను సాంఘిక గణాంకాలలో, ఇన్‌పుట్ – అవుట్‌పుట్ పట్టికలలో మరియు అంతర – పరిశ్రమ అర్థశాస్త్రంలోనూ వాడుతున్నారు.

సమకాలిక సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించుటకు, మాత్రికలను విస్తారంగా వాడుతున్నారు. రేఖీయ కార్యక్రమ విధానము యొక్క ఆధారము, మాత్రికా బీజగణితంలో ఉన్నది. మాత్రికల యొక్క వినియోగము గణితశాస్త్రంలోనే గాక, ఇతర సబ్జక్టులైన భౌతిక శాస్త్రం, రసాయన శాస్త్రం, ఇంజనీరింగ్, రేఖీయ ప్రోగ్రామింగ్ విధానము మొదలగు వానిలో కలదు.

ఈ పాఠము నందు, మనము వివిధ రకాలైన మాత్రికలను మరియు మాత్రికలపై బీజగణిత పరిక్రియలను గురించి చర్చిస్తాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్య పఠనము వలన మీరు క్రింది విషయాలను అర్థం చేసుకోగలరు.

- మాత్రికను నిర్వచించుట, మాత్రిక తరగతి మరియు వాటికి ఉదాహరణలు ఇవ్వగలరు.
- వివిధ రకాలైన మాత్రికలను నిర్వచించి, వాటికి ఉదాహరణలు ఇచ్చుట, (చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్ర, యూనిట్ (తత్సమ) శూన్య, ప్రధాన వికర్ణ, అడ్డువరుస, నిలువు వరుస మాత్రికలు).
- రెండు మాత్రికల సమానత్వమునకు నియమాలను తెలుపగలరు.
- మాత్రికా వ్యత్యయమును నిర్వచిస్తారు.
- సౌష్ఠవ మరియు అసౌష్ఠవ మాత్రికలను నిర్వచించి, ఉదాహరణలు ఇస్తారు.
- ఒకే తరగతికి చెందిన రెండు మాత్రికల సంకలన మరియు వ్యవకలనములను కనుగొంటారు.
- మాత్రికను ఒక అదిశచే గుణించగలరు.
- రెండు మాత్రికల లబ్ధమునకు నియామన్ని తెలుపగలరు.
- సాధ్యమయిన సందర్భాలలో రెండు మాత్రికలను గుణిస్తారు.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. A మరియు B అను ఇద్దరు విద్యార్థులు మూడు పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులను క్రింది పట్టికలో ఇచ్చారు. దీనిని రెండు విధాలుగా మాత్రికా రూపంలో తెల్పుము.

	పరీక్ష 1	పరీక్ష 2	పరీక్ష 3
A	56	65	71
B	29	37	57

జవాబు: $\begin{bmatrix} 56 & 65 & 71 \\ 29 & 37 & 57 \end{bmatrix}_{2\times3}, \begin{bmatrix} 56 & 29 \\ 65 & 37 \\ 71 & 57 \end{bmatrix}_{3\times2}$

2. x, y మరియు z అను మూడు సంస్థలు వరుసగా **40, 35, 25** ట్రక్కుల రాళ్ళలోడ్లను మరియు **10, 5, 8** ట్రక్కుల ఇసుక లోడ్లను ఒక కాంట్రాక్టరుకు పంపినవి. దీనిని మాత్రి రూపంలో, రెండు విధాలుగా తెల్పుము.

జవాబు : $\begin{bmatrix} 40 & 35 & 25 \\ 10 & 05 & 08 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 35 & 05 \\ 25 & 08 \end{bmatrix}_{3\times2}$

3. P అను కుటుంబంలో **4**గురు పురుషులు, **6**గురు స్త్రీలు మరియు **3** మంది పిల్లలు వున్నారు. Q అనే కుటుంబంలో **4**గురు పురుషులు, **3** మంది స్త్రీలు మరియు **5** మంది పిల్లులు వున్నారు. ఈ దత్తాంశాన్ని 2×3 తరగతి మాత్రికలుగా తెల్పండి.

జవాబు: $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$

4. క్రింది మాత్రికలో ఎన్ని మూలకాలు కలవు.

i) 2×3 *ii)* 3×4 మాత్రిక *iii)* 4×2 మాత్రిక *iv)* 6×2 మాత్రిక

v) $a\times b$ మాత్రిక *vi)* $m\times n$ మాత్రిక

జవాబులు :

i) $2\times3=6$ మూలకాలు *ii)* $3\times4=12$ మూలకాలు

iii) $4\times2=8$ మూలకాలు *iv)* $6\times2=12$ మూలకాలు

v) $a\times b=ab$ మూలకాలు *vi)* $m\times n=mn$ మూలకాలు

5. **క్రింది మూలకాల సంఖ్యను కలిగిన మాత్రికలను ఎన్ని రకాల తరగతులు గల మాత్రికలుగా వ్రాయవచ్చు.**

1) 8 మూలకాలు 2) 5 మూలకాలు 3) 12 మూలకాలు 4) 16 మూలకాలు

జవాబులు :

1) $1\times8;\ 2\times4;\ 4\times2;\ 8\times1$ 2) $1\times5;\ 5\times1;$

3) $1\times12;\ 2\times6; 3\times4;\ 4\times3;\ 6\times2;\ 12\times1$ 4) $1\times16;\ 2\times8;\ 4\times4;\ 8\times2;\ 16\times1$

6. $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 8 & 0 & 5\\ 7 & 6 & 7 & 4 & 6\\ 3 & 9 & 3 & -3 & 9\\ 4 & 4 & 8 & 1 & 1\end{bmatrix}$ **అయినా**

ఎ) అడ్డువరుసల సంఖ్య $=4$ బి) నిలువు వరుసల సంఖ్య $=5$

సి) మాత్రిక A తరగతి $=4\times5$ డి) A లో మాత్రికల సంఖ్య $=20$

ఇ) మూలకం $a_{14}=0;\ a_{23}=7;\ a_{34}=-3;\ a_{45}=1;\ a_{33}=3$

7. **$i-$వ అడ్డువరుస, $j-$వ నిలువు వరుసలోని మూలకాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి సందర్భంలో 3×3 తరగతి మాత్రికను నిర్మించండి.**

$a)\ i-j$ $b)\ \dfrac{i^2}{j}$ $c)\ \dfrac{(i+2j)^2}{2}$ $d)\ 3j-2i$

జవాబులు: $a)\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}.\\ 4 & 2 & \frac{4}{3}\\ 9 & \frac{9}{2} & 3\end{bmatrix}$

$c)\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2}\\ 8 & 18 & 32\\ \frac{25}{2} & \frac{49}{2} & \frac{81}{2}\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ -1 & 2 & 5\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}$

8. $i-$వ అడ్డువరుస, $j-$వ నిలువు వరుసలోని మూలకాలు క్రింద ఇచ్చాము. ప్రతి సందర్భంలో 3×2 తరగతి మాత్రికను నిర్మించండి.

$a)\ i+3j \qquad b)\ 5.i.j \qquad c)\ i^j \qquad d)\ i+j-2$

జవాబులు :

$a)\ \begin{bmatrix}4 & 7\\5 & 8\\6 & 9\end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix}5 & 10\\10 & 20\\15 & 30\end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 4\\3 & 9\end{bmatrix} \qquad d)\ \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$

9. $A=\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$ అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

$a)\ 4A \qquad b)\ -A \qquad c)\ \frac{1}{2}A \qquad d)\ \frac{3}{2}A$

జవాబులు :

$a)\ 4A=4\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28 & 8\\8 & 11\end{bmatrix} \qquad b)\ -A=-\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -2\\-2 & -3\end{bmatrix}$

$c)\ \frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & 1\\1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix} \qquad d)\ \frac{3}{2}A=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{2} & 3\\3 & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$

10. $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ అయితే క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

$a)\ 5A \qquad b)\ -3A \qquad c)\ \frac{1}{3}A \qquad d)\ -\frac{1}{2}A$

జవాబులు :

$a)\ 5A=5\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -5 & 10\\15 & 5 & 20\end{bmatrix}$

$b)\ -3A = -3\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -9 & -3 & -12 \end{bmatrix}$

$c)\ \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

$d)\ -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$

11. A యొక్క వ్యత్యాసం A' ను కనుక్కోండి.

$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad b)\ A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

జవాబులు :

$a)\ A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad b)\ A^1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

$c)\ A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad d)\ A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. ఏదేని మాత్రిక A కు $\left(A^1\right)^1 = A$ అని నిరూపించుము.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ అయినా $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(A^1\right)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$

13. క్రింది మాత్రికలు అన్నియు సౌష్టవ మాత్రికలు అని చూపుము.

$a)\ \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad c)\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

$d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

నోట్ : $A^1 = A$ అయితే A ను సౌష్టవ మాత్రిక అందురు.

జవాబులు :

$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = A \therefore$ A సౌష్టవం

$b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = A \therefore$ A సౌష్టవం

$c)\ A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = A \therefore$ A సౌష్టవం

$d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A \therefore$ A సౌష్టవం

14. క్రింది మాత్రికలన్నియు, ప్రతి సౌష్టవ మాత్రికలు అని చూపుము.

$a)\ \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad b)\ \begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$ $\quad c)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

$d)\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

నోట్ : A ఒక చతురస్ర మాత్రిక అవుతూ $A^1 = -A$ అయితే A ను ప్రతిసౌష్టవ మాత్రిక అందురు.

జవాబులు :

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\therefore A^1 = -A$ కావున A ప్రతి సౌష్టవ మాంత్రిక అగును.

$b)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 0 & -i & -4 \\ i & 0 & -2+i \\ 4 & 2-i & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^1 = -\begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ 4 & 2-i & 0 \end{bmatrix} = -A$ కావున A ప్రతి సౌష్టవ మాంత్రిక

$c)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$A^1 = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A, \therefore A$ ప్రతి సౌష్టవ మాంత్రిక

$d)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & -5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^1 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -A, \ \therefore A$ ప్రతి సౌష్టవ మాత్రిక

15. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **మరియు** $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **అయితే క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.**

$a)$ $A+B$ $b)$ $2A+B$ $c)$ $A+3B$ $d)$ $2A+3B$

జవాబులు :

a) $A+B=\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+0 & -1-1\\5+3 & 2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\8 & 4\end{bmatrix}$

b) $2A+B=2\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\10 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3\\13 & 6\end{bmatrix}$

c) $A+3B=\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -3\\9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\14 & 8\end{bmatrix}$

d)

$2A+3B=2\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\10 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -3\\9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -5\\19 & 10\end{bmatrix}$

16. $P=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}$ **మరియు** $Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 1 & -5\end{bmatrix}$ **అయిన క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.**

a) $P-Q$ b) $Q-P$ c) $P-2Q$ d) $2Q-3P$

జవాబులు :

a) $P-Q=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 5-2 & 3+3\\-1-4 & 4-1 & 0+5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\-5 & 3 & 5\end{bmatrix}$

b) $Q-p=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 1 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -5 & 3\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 2+5 & -3+3\\4+1 & 1-4 & -5-0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1 & 7 & -6\\5 & -3 & -5\end{bmatrix}$

c) $P-2Q=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 1 & -5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\8 & 2 & -10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P-2Q=\begin{bmatrix}2-2 & 5-4 & 3+6\\-1-8 & 4-2 & 0+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 9\\-9 & 2 & 10\end{bmatrix}$$

$d)$ $$2Q-3P=2\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 1 & -5\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\8 & 2 & -10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 15 & 9\\-3 & 12 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2Q-3P=\begin{bmatrix}2-6 & 4-15 & -6-9\\8+3 & 2-12 & -10-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -11 & -15\\11 & -10 & -10\end{bmatrix}$$

17. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ **అయిన,** $A+0=A$ **ని సంతృప్తి పరిచేవిధంగా శూన్య మాత్రిక 0ను కనుక్కోండి.**

జవాబు : $$=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=0$$

18. $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\1 & 2 & 3\\-4 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **అయితే**

$a)$ $-A$ $b)$ $A+(-A)$ $c)$ $(-A)+A$ విలువలు కనుక్కోండి.

జవాబులు :

$a)$ $$-A=-\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\1 & 2 & 3\\-4 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & -2 & -3\\4 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$b)$ $$A+(-A)=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$c)$ $$-A+A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

19. $A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ **అయితే క్రింది మాత్రికలు కనుక్కోండి.**

$a)$ $2A$ $b)$ $3B$ $c)$ $2A+3B$ $d)$ $2A+3B+5=0$ అయితే $X=?$

జవాబులు :

$a)$ $$2A=2\begin{bmatrix}1 & 9\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 18\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

$b)$ $$3B=3\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 3\\ 21 & 27\end{bmatrix}$$

$c)$ $$2A+3B=\begin{bmatrix}2 & 18\\ 6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 3\\ 21 & 27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 21\\ 27 & 31\end{bmatrix}$$

$d)$ $2A+3B+5X=0$ కావున

$$\begin{bmatrix}17 & 21\\ 27 & 31\end{bmatrix}+5x=0\Rightarrow 5x=-\begin{bmatrix}17 & 31\\ 27 & 31\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-17 & -21\\ -27 & -31\end{bmatrix}$$

$$\therefore x=\begin{bmatrix}\frac{-17}{5} & \frac{-21}{5}\\ \frac{-27}{5} & \frac{-31}{5}\end{bmatrix}$$

20. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ అయితే క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

$a)$ A^1 $b)$ B^1 $c)$ $A+B$ $d)$ $(A+B)^1$ $e)$ A^1+B^1

సమాధానాలు :

$a)$ $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A^1=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$b)$ $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow B^1=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$c)$ $A+B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 0+0 & -1+1\\ 4+2 & 3-4 & 2+0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & -1 & 2\end{bmatrix}$

$d)$ $A+B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & -1 & 2\end{bmatrix}=(A+B)^1=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$e)$ $A^1+B^1=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 4+2\\ 0+0 & 3-4\\ -1+1 & 2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

21. $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ మరియు $C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ అయితే క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

$a)$ $A-B$ $b)$ $B-C$ $c)$ $A-C$ $d)$ $3B-2C$ $e)$ $A-B-C$

$f)$ $2A-B-3C$

జవాబులు :

a) $A-B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & 4-2\\ -2-3 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

b) $B-C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 2+1\\ 3-3 & -1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

c) $A-C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 4+1\\ -2-3 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -5 & -1\end{bmatrix}$

d) $3B-2C=3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 3 & -7\end{bmatrix}$

e) $A-B-C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1-1-2 & 4-2+1\\ -2-3-3 & 1+1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -8 & 0\end{bmatrix}$

f) $2A-B-3C=2\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & -3\\ 9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1-6 & 8-2+3\\ -4-3-9 & 2+1-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 9\\ -16 & -3\end{bmatrix}$

22. క్రింది తరగతులు గల మాత్రికలలోని మూలకాల సంఖ్య ఎంత?

a) 2×1 b) 3×2 c) 3×3 d) 3×4

సమాధానాలు :

a) 2 b) 6 c) 9 d) 12

23. క్రింద ఇవ్వబడిన aij మూలకాలకు 3×2 తరగతి మాత్రికను నిర్మించండి.

a) $aij=i-2j$ b) $aij=3i-j$ c) $aij=i+\frac{3}{2}j$

సమాధానాలు :

$a)\ \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ $c)\ \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{9}{2} & 6 \end{bmatrix}$

24. క్రింది మాత్రికల తరగతులు ఏవి?

$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $c)\ C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$d)\ D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

జవాబులు :

$a)\ 3\times 1$ $b)\ 1\times 3$ $c)\ 3\times 2$ $d)\ 2\times 3$

25. క్రింది సందర్భాలలో x, y మరియు z విలువలు కనుక్కోండి.

$a)\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $b)\ \begin{bmatrix} x+y & z \\ 6 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$c)\ \begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & y+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ y+z & 2 \end{bmatrix}$ $d)\ \begin{bmatrix} x+y & y-z \\ z-2x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

జవాబులు :

$a)\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1.\ y = 2, z = 3$

$b)\ \begin{bmatrix} x+y & z \\ 6 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=4 \\ 2x=10 \\ x=5 \end{array} \therefore \begin{array}{l} x+y=6 \\ 5+y=6 \\ y=1 \end{array}$

$\therefore x=5,\ y=1,\ z=5$

c) $\begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & y+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ y+z & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3,$

$\Rightarrow y+5=2 \Rightarrow y=-3, \quad z=3$

d) $\begin{bmatrix} x+y & y-z \\ z-2x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$x+y=3,\ y-z=-4, \quad z-2x=1, \quad y-x=-1$

$x+y=3$	$y-z=-4$	
$y-x=-1$	$1-z=-4$	$x+y=3$
$2y=2$	$-z=-5$	$x+1=3$
$y=1$	$z=5$	$x=2$

$\therefore x=2.\ y=1, z=5$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

Note : $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$; $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ అయితే $AB=m\times p$.

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ అయినా AB మరియు BA లను కనుగొనుము.

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left[2\times 0+3\times(-2)+0\times 1\right]$$

$$AB=\left[0-6+0\right]=\left[-6\right]_{1\times 1}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0\times 2 & 0\times 3 & 0\times 0 \\ -2\times 2 & -2\times 3 & -2\times 0 \\ 1\times 2 & 1\times 3 & 1\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$\therefore AB \neq BA$

2. $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ అయిన AB మరియు BA లను కనుక్కోండి.

$AB = BA$ అవుతుందా?

సమాధానం :

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times2+2\times1+(-2)\times0 & 0\times3+2\times-1+(-2)(-2)\\ -1\times2+3\times1+0\times0 & -1\times3+3\times-1+0\times-2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}0+2+0 & 0-2+4\\ -2+3+0 & -3-3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & -6\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}_{3\times2}\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times0+3\times-1 & 2\times2+3\times3 & 2\times-2+3\times0\\ 1\times0+(-1)\times(-1) & 1\times2+(-1)\times3 & 1\times-2+(-1)\times0\\ 0\times0+(-2)\times(-1) & 0\times2+(-2)\times3 & 0\times-2+(-2)\times0\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}0-3 & 4+9 & -4+0\\ 0+1 & 2-3 & -2+0\\ 0+2 & 0-6 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 13 & -4\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & -6 & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$\therefore AB \neq BA$

3. $A=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ **అయిన** AB **మరియు** BA **లలో ఏది వ్యవస్థితమో దానిని కనుక్కోండి.**

సమాధానం :

$$A=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{1\times 3} \quad AB \text{ వ్యవస్థితం.}$$

నోట్: $A,\ m\times n,\ B, n\times p$ అయితే AB సాధ్యం. అపుడు AB తరగతి $m\times p$ అగును.

$$AB=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$BA=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{1\times 3}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2\times 1}$$ ఇక్కడ BA వ్యవస్థితం కాదు.

4. $A=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ **అయిన** BA **ని కనుక్కోండి.** AB **వ్యవస్థితమా?**

సమాధానం :

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix} -2+0 \\ -1+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$AB=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ $1\neq 2$ కావున AB వ్యవస్థితం కాదు.

5. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **అయినా**

$a)$ AB వ్యవస్థితమా? ఎందువల్ల $\qquad b)$ BA వ్యవస్థితమ్యా ఎందువల్ల

సమాధానాలు :

$a)$ A తరగతి 2×2. B తరగతి 3×1

A లోని నిలువు వరుసలు, B లోని అడ్డు వరుసలు సమానమైతే AB సాధ్యం. ఇక్కడ AB సాధ్యం కాదు.

$b)$ $B = 3\times1, A = 2\times2$ ఇక్కడ కూడా B లోని నిలువు వరసలు 1, A లోని అడ్డువరుసలు 2 సమానం కావు. కావున BA కూడా సాధ్యం కాదు.

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **మరియు** $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **అయిన** AB **మరియు** BA **లను కనుక్కోండి.**

$AB = BA$ **అవుతుందా?**

సమాధానం : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & 0+5 \\ 0+6 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & -1+0 \\ 4+0 & 2+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **అయిన** AB **మరియు** BA **లను కనుక్కోండి.**

$AB = BA$ **అవుతుందా?**

సమాధానం :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ఇక్కడ $AB = BA$ అవుతుంది.

8. **క్రింది వాటికి** x **మరియు** y **విలువలు కనుక్కోండి.**

$a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

సమాధానం :

$a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y \\ 4x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$4\times x+y=2 \qquad 4x+4y=8 \qquad x+y=2$$
$$4x+5y=7 \qquad 4x+5y=7 \qquad x-1=2$$
$$-y=1\Rightarrow y=-1$$

$$\therefore x=3,\ y=-1$$

9. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ **లకు** $AB=0$ **ని సరిచూడండి.**

సమాధానం :

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0 & 0+0\\ 0+0 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB=0$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ **అయిన** AB **మరియు** BA **లను కనుక్కోండి.** $AB=BA$ **అవుతుందా?**

సమాధానం :

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2+2+0 & -3+0+0 & 1+6+0\\ -6+5+4 & 9+0+8 & -3+15+12\\ 10+3+1 & -15+0+2 & 5+9+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 7\\ 3 & 17 & 24\\ 14 & -13 & 17\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+9+5 & 4-15+3 & 0-12+1\\ 1+0+15 & 2+0+9 & 0+0+3\\ 1-6+15 & 2+10+9 & 0+8+3\end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -11 \\ 16 & 11 & 3 \\ 10 & 21 & 11 \end{bmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ కు $A^2 - 5A + I = 0$ ని సరిచూడండి. ఇక్కడ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+5 & 10+15 \\ 2+3 & 5+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 5A + I = \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-10+1 & 25-25+0 \\ 5-5+0 & 14-15+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - 5A + I = 0$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ అయినా క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

a) $A(BC)$ *b)* $(AB)C$ *c)* $(A+B)C$ *d)* $AC + BC$

e) $A^2 - B^2$ *d)* $AC + BC$ *e)* $A^2 - B^2$ *f)* $(A-B)(A+B)$

సమాధానాలు :

a) $$BC = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-4 & -6+6 \\ -4-2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-18 & 0+18 \\ 8-6 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

b) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 2+3 \\ 4-1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4-10 & 3+15\\ 12-10 & -9+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14 & 18\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

c) $$(A+B)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A+B)C=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12-10 & -9+15\\ 4-4 & -3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

d) $$AC=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-6 & -3+9\\ 8-2 & -6+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 6 & -3\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-4 & -6+6\\ -4-2 & 3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -6 & 6\end{bmatrix}$$

$$AC+BC=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 6 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ -6 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

e) $$A^2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 3+3\\ 2+2 & 6+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-2 & 4+2\\ -2-1 & -2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 6\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 7 & 6\end{bmatrix}$$

f) $$(A-B)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A-B)(A+B)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+1 & -5+2\\ 9+0 & 15+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 9 & 15\end{bmatrix}$$

4. $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 2\end{bmatrix}$ **మరియు** $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$ **అయినా..**

$a)$ AC $b)$ BC లను కనుగొనుము. $AC=BC$ అగునా?

$a)$ $AC=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 4-2\\3+1 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{bmatrix}$

$b)$ $BC=\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2 & 6-4\\2+2 & 4+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{bmatrix}$

$\therefore AC=BC$ అగును.

5. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}$ **మరియు** $C=\begin{bmatrix}3 & 8\\7 & -1\end{bmatrix}$ **అయితే క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.**

$a)$ $B+C$ $b)$ $A(B+C)$ $c)$ AB $d)$ AC $e)$ $AB+AC$

సమాధానం :

$a)$ $B+C=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 8\\7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & +7\\9 & -1\end{bmatrix}$

$b)$ $A(B+C)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 7\\9 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+0 & -7+0\\4-18 & 7+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -7\\-14 & 9\end{bmatrix}$

$c)$ $AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+0 & 1+0\\1-4 & -1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}$

$d)$ $AC=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 8\\7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+0 & -8+0\\3-14 & 8+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -8\\-11 & 10\end{bmatrix}$

$e)$ $AB+BC=\begin{bmatrix}-1 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -8\\-11 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -7\\-14 & 9\end{bmatrix}$

6. $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ **లకు** $(AB)^1=B^1A^1$ **ని సరిచూడుము.**

సమాధానం :

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+1 & -6+0\\ 6-4 & -9+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 2 & -9\end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)^1=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -6 & -9\end{bmatrix} \quad .. \ (1)$$

$$B^1=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{bmatrix},\ A^1=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore B^1A^1=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+1 & 6-4\\ -6+0 & -9+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -6 & -9\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 1, 2 ల నుండి $(AB)^1=B^1A^1$ అగును.

7. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$ **అయినచో** $AX=B$ **అగునట్లు** X **ను కనుక్కోండి.**

సమాధానం :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{AdjA}{\det A}=\frac{1}{1-4}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$ అగును.

$$X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3+6\\ 6+3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}9\\ 9\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}9\\ 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$$

8. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **మరియు** $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **అయినచో** $A^2-(a+d)A=(bc-ad)I$ **అని చూపుము.**

సమాధానం :

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

$$(a+d)A=(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (a+d)A=\begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2-(a+d)A=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-(a+d)A=\begin{bmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{bmatrix}=(bc-ad)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-(a+d)A=(bc-ad)I$$

9. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **మరియు** $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **అయినచో క్రిందివి సత్యమా?**

a) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ *b)* $(A-B)^2=A^2+B^2-2AB$

c) $(A+B)(A+B)=A^2-B^2$

సమాధానం :

a) $A+B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0+6 & 0+4 \\ 0+6 & 6+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2 & 0+1\\0+1 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+1 & 0+1\\0+1 & 1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$2AB=2\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0+1 & 0+1\\0+1 & 1+1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2+B^2+2AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\5 & 9\end{bmatrix} \quad .. \ (2)$$

$\therefore$ 1, 2ల నుండి $(A+B)^2 \neq A^2+B^2+2AB$ (కాదు).

b) $$A-B=\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore (A-B)^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+0 & 0+0\\0+0 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \quad .. \ (3)$$

$$A^2+B^2-2AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} \quad ...(4)$$

$\therefore$ 3, 4 ల నుండి $(A-B)^2 \neq A^2+B^2-2AB$ (కాదు.)

c) $$(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2 & 0+0\\0+2 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\2 & 0\end{bmatrix} \quad ..(5)$$

$$A^2-B^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} \quad .. \ (6)$$

$\therefore$ 5,6ల నుండి $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$ (కాదు)

10. $A.B$ మరియు C మాత్రికలకు..

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\\5 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\\3 & 7\end{bmatrix} and\ C=\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}$$

$A+(B+C)=(A+B)+C$ సరిచూడుము.

సమాధానం :

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\\5 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\\3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 6\\8 & 14\end{bmatrix}$$

$$B+C=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\\3 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 7\\8 & 5\\7 & 8\end{bmatrix}$$

$$\therefore A+(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\\5 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 7\\8 & 5\\7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\8 & 7\\12 & 15\end{bmatrix} \quad .. (1)$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 6\\8 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\8 & 7\\12 & 15\end{bmatrix} \quad .. (2)$$

1, 2 ల నుండి $A+(B+C)=(A+B)+C$ అగును.

11. $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ **అయినా** A^2 **ను కనుక్కోండి.**

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3-4 & -3-9+12 & -4-12+16\\ -1-3+4 & 3+9-12 & 4+12-16\\ 1+3-4 & -3-9+12 & -4-12+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

12. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x & 1\\ y & -1\end{bmatrix}$ **మరియు** $(A+B)^2=A^2+B^2$ **అయినచో** x **మరియు** y **విలువలు కనుక్కోండి.**

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & 1\\ y & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+x & 0\\ 2+y & -2\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}1+x & 0\\ 2+y & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+x & 0\\ 2+y & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1+x)^2+0 & 0+0\\ (2+y)(1+x)-2(2+y) & 4\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & -1+1\\ 2-2 & -2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}x & 1\\ y & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 1\\ y & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+y & x-1\\ xy-y & y+1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2+B^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^2+y & x-1\\ xy-y & y+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+y-1 & x-1\\ xy-y & y\end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^2=A^2+B^2$$

$$\begin{bmatrix}(1+x)^2 & 0\\ (2+y)(1+x-(2+y)) & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y-1 & x-1\\ xy-y & y\end{bmatrix}$$

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

$$y=4\Rightarrow y=4$$

13. $A=\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ **మాత్రిక,** $A^2+4A-2I=0$ **సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తుందని చూపండి.**

సమాధానం :

$$A^2=\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64+10 & -40+20\\ -16+8 & 10+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}74 & -20\\ -8 & 26\end{bmatrix}$$

$$4A=4\begin{bmatrix}-8 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-32 & 20\\ 8 & 16\end{bmatrix}$$

$$2I=2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^2+4A-2I=\begin{bmatrix}74 & -20\\ -8 & 26\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-32 & 20\\ 8 & 16\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}40 & 0\\ 0 & 34\end{bmatrix}$ కావున తృప్తి పరచదు.

4

నిర్ధారకాలు, వాటి అనువర్తనాలు

ప్రతి చతురస్ర మాత్రికకి ఆమాత్రికా నిర్ధారకం అనే ఒక సంఖ్య జతపర్చగలం. ఈ నిర్ధారకాలకు చాలా అనువర్తనాలు ఉన్నాయి. వాటిలో ముఖ్యమైనది క్రేమర్ సూత్రం. దానిని 'n' చలరాశుల్లో 'n' రేఖీయసమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించడానికి వాడతాం. దానిని గాబ్రియెల్ క్రేమర్ (1704–1752) అనే గణితశాస్త్రజ్ఞుడి జ్ఞాపకార్థం నామకరణం చేశారు.

ఈ పాఠంలో నిర్ధారకాల వివిధ ధర్మాలను కనుగొనే పద్ధతులను తెలుసుకుంటాం. నిర్ధారకాలను వాడి క్రేమర్ సూత్రంలో రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధిస్తాం.

లక్ష్యాలు :

- ఒక చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారక నిర్వచనం.
- ఒక మాత్రికా మూలకపు లఘు నిర్ధారకం, సహగుణావయవాల్ని నిర్వచించండం.
- తరగతి 3 మాత్రికా నిర్ధారకాన్ని కనుక్కోవడం.
- రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు క్రేమర్ సూత్రాన్ని ప్రవచించి అనువర్థించడం.

నోట్:

- చతురస్ర మాత్రిక తరగతి 2 నిర్ధారకం.

  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ అయితే మాత్రిక A నిర్ధారకం.

  నిర్ధ $A = ad - bc$. దీనిని $|A|$ చే సూచిస్తారు.

- 3వ తరగతి మాత్రికా నిర్ధరకం.

  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ అయితే మాత్రిక A నిర్ధరకం.

  $|A| = a\left(bc - a^2\right) - b\left(b^2 - ac\right) + c\left(ab - c^2\right)$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. *క్రింది వాటికి A కనుక్కోండి.*

ఎ) $A=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ బి) $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

సి) $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{bmatrix}$ డి) $A=\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$

జ: ఎ) $|A|=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)-2\times5=4-3-10=-9$

బి) $|A|=(\cos\alpha)(\cos\alpha)-\left((-\sin\alpha)(\sin\alpha)\right)$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

సి) $|A|=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\beta+\cos\alpha)$

$|A|=\left(\sin^2\alpha-\sin^2\beta\right)-\left(\cos^2\beta-\cos^2\alpha\right)$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta+\cos^2\alpha$

$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)=1-1=0$

డి) $|A|=(a+bi)(a-bi)-(c-di)(c+di)$

$=\left(a^2-b^2i^2\right)-\left(c^2-d^2i^2\right)$

$=\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)\Rightarrow|A|=\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2-d^2\right)$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. *క్రింది వానిలో ఏవి అసాధారణ మాత్రికలు?*

నోట్: ఏదేని మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకం సున్నా అయితే దానిని అసాధారణ మాత్రిక అని కాకపోతే సాధారణ మాత్రి అందురు.

ఎ) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 5(1-7) - 5(-5-10) + 1(-35-10)$

$= 5(-6) - 5(-15) + 1(-45)$

$= -30 + 75 - 45$

$= 0$ ఇది అసాధారణ మాత్రిక.

బి) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = -2(2+8) + 3(3+1) + 1(-24+2)$

$= -2(10) + 3(4) + 1(-22)$

$= -20 + 12 - 22 = -30$

$\because |A| \neq 0.$ ఇది సాధారణ మాత్రిక.

సి) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 2(0-2) - 3(3-0) + 0(6-0)$

$= 2(-2) - 3(3) + 0$

$= -4 - 9 = -13 \neq 0$ ఇది సాధారణం.

డి) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = 1(-5-2) - 2(15-8) + 3(3+4)$

$= 1(-7) - 2(7) + 3(7)$

$= -7 - 14 + 21 = 0$. ఇది అసాధారణం.

2. మొదటి అడ్డువరుసను ఉపయోగించి క్రింది నిర్ధరకాలు కనుక్కోండి.

జ: ఎ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 2(2-6)-3(1-9)+1(2-6)$$

$$= 2(-4)-3(-8)+1(-4)$$

$$= -8+24-4 = 12$$

బి) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| = a\left(df-e^2\right)-b(bf-ec)+c(be-cd)$$

$$= adf-ae^2-b^2f+bce+bae-dc^2$$

$$= adf+2bce-ae^2-fb^2-dc^2$$

డి) $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= x(4-3)-y(2-2)+2(3-4)$$

$$= x(1)-y(0)+2(-1)$$

$$= x-z$$

లఘు నిర్ధారకం నిర్వచనం :

ఒక మూలకం వున్న అడ్డు వరుసను మరియు నిలువు వరుసను తొలగించగా మిగిలన నిర్ధారక విలువను ఆ మూలకం యొక్క లఘు నిర్ధారకం అందురు. దీనిని M_{ij} చే సూచిస్తారు.

ఉదా : నిర్ధారకం $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ నందు 3 యొక్క లఘు నిర్ధారకం '7'

సహగుణావయవము నిర్వచనం :

$|A|$లోని aij యొక్క సహగుణావయవం :

ఒక నిర్ధారకంలోని మూలకం aij యొక్క సహగుణావయవం అంటే, దాని లఘు నిర్ధారకాన్ని $(-1)^{i+j}$ తో గుణించగా వచ్చునది. దీనిని cij చే సూచిస్తాం.

మాత్రికా నిర్ధారకం నిర్వచనం :

ఒక మాత్రికలోని ఏదేని అడ్డ లేదా నిలువు వరుసలోని మూలకాలను వాటి సహగుణావయవంతో గుణిస్తే వచ్చు గుణ లబ్ధాల మొత్తం ఆ మాత్రికా నిర్ధారకం అందురు. దీనిని $|A|$ చే సూచిస్తారు.

3. క్రింది నిర్ధారకంలోని రెండవ అడ్డు వరుసలోని మూకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలను మరియు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

జ: 1) -4 యొక్క లఘు నిర్ధారకం $M_{21} = (2\times 9) - (-7\times 3) = 18 + 21 = 39$

2) -4 యొక్క సహగుణావయవం $C_{21} = (-1)^{2+1}(39) = -(39) = -39$

3) 3 యొక్క లఘునిర్ధారకం $M_{22} = 1\times 9 - 2\times 3 = 9 - 6 = 3$

4) 3 యొక్క సహగుణావయవం $C_{22} = (-1)^{2+2}(3) = +3$

5) 6 యొక్క లఘు నిర్ధారకం $M_{23} = (1\times -7) - 2(2\times 2) = -7 - 4 = -11$

6) 6 యొక్క సహగుణావయవం $= (-1)^{2+3}(-11) = -(-11) = 11$

4. క్రింది నిర్ధారకంలోని మూడవ నిలువు వరుసలోని మూలకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలను మరియు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

1) మూడో నిలువు వరుసలోని మొదటి మూలకం 2 యొక్క లఘునిర్ధారకం
$M_{13} = 1\times 1 - 3\times 2 = 1 - 6 = -5$

2) 2 యొక్క సహగుణావయవం $C_{13} = (-1)^{1+3}(-5) = 1(-5) = -5$

3) 1 యొక్క లఘు నిర్ధారకం $M_{23} = 2\times1 - 3\times3 = 2 - 9 = -7$

4) 1 యొక్క సహగుణావయవం $C_{23} = (-1)^{2+3}(-7) = -1(-7) = 7$

5) 2 యొక్క లఘు నిర్ధారకం $M_{33} = 2\times2 - 1\times3 = 4 - 3 = 1$

6) 2 యొక్క సహగుణావయవం $C_{33} = (-1)^{3+3}(1) = 1(1) = 1$

5. సహగుణావయవాలను ఉపయోగించి క్రింది నిర్ధారకాలను గణించుము.

ఎ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

1) 2 యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+1}(0+8) = 8$

2) 1 యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+2}(3-6) = 3$

3) 0 యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+3}(-4-0) = -4$

$\therefore$ మాత్రికా నిర్ధారకం $2(8) + 1(3) + 0(-4) = 16 + 3 = 19$

బి) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

1) -1 యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+1}(0-1) = -1$

2) 0 యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+2}(0+1) = -1$

3) 1 యొక్క సహగుణావయం $(-1)^{1+3}(0-1) = -1$

$\therefore$ నిర్ధారకం $|A| = -1(-1) + 0(-1) + 1(-1) = 1 - 1 = 0$

సి) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

1) 1 యొక్క సహగుణావయం $(-1)^{1+1}(14+3)=1(17)=17$

2) 4 యొక్క సహగుణావయం $(-1)^{1+2}(-42+24)=-1(-18)=18$

3) 5 యొక్క సహగుణావయం $(-1)^{1+3}(-6-16)=1(-32)=-22$

$\therefore$ మాత్రికా నిర్ధారకం $|A|=3(17)+4(18)+5(-22)=51+72-110=13$

డి) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

1) 1 యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+1}\left(ab^2-ac^2\right)=ab^2-ac^2$

2) a యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+2}(ab-ca)=ac-ab$

3) bc యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+3}(c-b)=c-b$

$\therefore$ మాత్రికా నిర్ధారకం $=1\left(ab^2-ac^2\right)+a(ac-ab)+bc(c-b)$

$\Rightarrow ab^2-ac^2+a^2c-a^2b+bc^2-b^2c$

$a(b-c)(b+c)-a^2(b-c)+bc(c-b)$

$a(b-c)(b+c)-a^2(b-c)-bc(b-c)$

$(b-c)\left[a(b+c)-a^2-bc\right]$

$(b-c)\left[ab+ac-a^2-bc\right]$

$(b-c)\left[(a-c)b+a(c-a)\right]$

$$(b-c)\left[-(c-a)b+a(c-a)\right]$$

$$(b-c)\left[(c-a)(a-b)\right]\Rightarrow(a-b)(b-c)(c-a).$$

ఇ) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

$(b+c)$ యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+1}\left[(c+a)(a+b)-bc\right]=\left[(a+b)(c+a)-bc\right]$

a యొక్క సహగుణావయవం $(-1)^{1+2}\left[b(a+b)-cd\right]=-\left[b(a+b)-bc\right]$

a యొక్క సహగుణావయం $(-1)^{1+3}\left[bc-c(c+a)\right]=+\left[bc-c^2-ac\right]$

$\therefore$ మాత్రికా నిర్ధారకం $|A|=$

$$(b+c)\left[(c+a)(a+b)-bc\right]-a\left(b(a+b)-bc\right)+a\left(bc-c^2-ac\right)$$

$$(b+c)\left[ac+bc+a^2+ab-bc\right]-a\left(ab+b^2-bc\right)+a\left(bc-c^2-a^2\right)$$

$$abc+a^2b+ab^2+ac^2+a^2c+abc-a^2b-ab^2+abc+abc-ac^2-a^2c=4abc$$

ఎఫ్) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}=1\left[ab+b^2-c^2-ca\right]-a(a+b-c-a)+(b+c)(c-b)$

$$\Rightarrow ab+b^2-c^2-ca-a^2-ab+ac+a^2+bc-b^2+c^2-bc$$

$$\Rightarrow|A|=0.$$

6. సర్కస్ చిత్రంను ఉపయోగించి క్రింది నిర్ధారకాలు గణించండి.

ఎ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$\therefore$ నిర్ధారకం విలువ

$$\left[(2)(1)(4)+(1)(-2)(2)+(-3)(1)(-2)\right]-\left[(2)(1)(-3)+(-2)(-2)(2)+(4)(1)(1)\right]$$

$$\Rightarrow\left[(8-4+6)\right]-\left[-6+8+4\right]$$

$$\Rightarrow[10]-[6]=4$$

బి) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$|A|=\left[(0)(2)(-1)+(2)(5)(-1)+(7)(1)(2)\right]-\left[(-1)(2)(7)+(2)(5)(0)+(-1)(1)(2)\right]$$

$$\Rightarrow|A|=[0-10+14]-[-14+0-2]=[4+16]=20$$

సి) $\begin{vmatrix} -1 & a & b \\ a & -1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a & b & -1 & -a \\ a & -1 & c & a & -1 \\ b & c & 1 & b & c \end{vmatrix}$

$$|A|=\left[(-1)(-1)(1)+(-a)(c)(b)+(b)(a)(c)\right]-\left[(b)(-1)(b)+(c)(c)(-1)+(1)(a)(-a)\right]$$

$$=\left[1-abc+abc\right]-\left[-b^2-c^2-a^2\right]$$

$$=a^2+b^2+c^2+1$$

7. సర్కస్ చిత్రంను ఉపయోగించి $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$ **అని చూపుము.**

$$\begin{vmatrix} a & h & g & a & h \\ h & b & f & h & b \\ g & f & c & g & f \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\left[abc+hgf+hgf\right]-\left[bg^2+af^2+ch^2\right]$$

$$\therefore abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

8. క్రింది సమీకరణాలను 'x' కొరకు సాధించుము.

ఎ) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(4-0)-0(2-3)+0(0-2)=0$

$4x = 0 \Rightarrow x = 0$

బి) $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(9-3x)-3(9-2x)+3(9-6)=0$

$9x - 3x^2 - 27 + 6x + 9 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 15x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2, 3$

సి) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

$\Rightarrow x^2(8-1) - x(0-3) + 1(0-6) = 28$

$7x^2 + 3x - 6 = 28$

$7x^2 + 3x - 34 = 0$

$7x^2 + 17x - 14x - 34 = 0$

$x(7x+17) - 2(7x+17) = 0$

$(x-2)(7x+17) = 0$

$\therefore x = 2,\ x = -\frac{17}{7}$

9. $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ ని గణించండి.

$$43(14-12)-1(70-68)+6(105-119)$$

$$43(2)-(2)+6(-14)$$

$$86-2-84=0$$

10. సర్కస్ పటం ద్వారా క్రింది మాత్రికలను గణించండి.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & [redacted] & -1 \\ 1 & [redacted] & 2 \\ 3 & [redacted] & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[(2)(2)(-4)+(-1)(-3)(3)+(2)(1)(-1)\right]-\left[(3)(2)(2)+(-1)(-3)(2)+(-4)(1)(-1)\right]$$

$$\Rightarrow \left[(-16+9-2)-(12+6+4)\right]$$

$$\Rightarrow \left[(-9)-(22)\right]=-31$$

11. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}=0$ అయిన 'x' కొరకు సాధించండి.

$$0(2x-3x)-1\left(x^2-x\right)+0(3x-2)=0 \Rightarrow x+x^2=0$$

$$x(1+x)=0 \Rightarrow x=0, x=-1$$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\begin{vmatrix} x+3 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix}=27(x+1)$ అని చూపుము.

$$(x+3)\left[(x+3)^2-x^2\right]-x\left[x(x+3)-x^2\right]+x\left[x^2-x(x+3)\right]$$

$$\Rightarrow (x+3)\left[x^2+9+6x-x^2\right]-x\left[x^2+3x-x^2\right]+x\left[x^2-x^2-3x\right]$$

$$\Rightarrow (x+3)(6x+9)-x^2(3x)+x(-3x)$$

$\Rightarrow 6x^2 + 9x + 18x + 27 - 3x^2 - 3x^2$

$\Rightarrow 27x + 27 \Rightarrow 27(x+1)$

2. మాత్రికా విలోమ పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింద సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనను రాబట్టుము.

ఎ) $2x - 4y = 3$, $3x + y = 5$ బి) $x + 2y = 1$, $2x + 5y = 3$

ఎ) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}; AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2+12}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}B = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3+20 \\ -9+10 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/14 \\ 1/14 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{23}{14}, y = \frac{1}{14}$$

3. కామర్స్ పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

$x + 2y = 1$

$2x + 5y = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D = 5 - 4 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D_1 = 5 - 6 = -1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow D_2 = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \therefore x = -1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \therefore y = 1$$

4. క్రింద సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించండి.

ఎ) $3x + 2y = 4$, $2x + y = 3$ బి) $6x - 3y = -1$, $2x + 2y = -3$

ఎ) $$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3-4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+6 \\ 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = X$$

$$\therefore x = 2, y = -1$$

బి) $$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow AX \neq B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12+6}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 2 & -18 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -11/18 \\ -16/18 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{-11}{18}, Y = \frac{-16}{18} = \frac{-8}{9}$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ అని చూపుము.

జ: $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow C \to C_1 - C_2 \ \& \ C_2 \to C_2 - C_3$$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & (a+b+c) & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (a+b+c+)^2\left[1\times(a+b+c)-(0\times-1)\right]$$

$$\Rightarrow (a+b+c+)^2(a+b+c) = (a+b+c)^3$$

2. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = bc+ca+ab+abc$ **అని చూపుము.**

$$(1+a)\left[(1+b)(1+c)-1\right]-1\left[(1+c)-1\right]+1\left[1-1-b\right]$$

$$(1+a)\left[1+b+c+bc-1\right]-\left[1+c-1\right]+1\left[-b\right]$$

$$(1+a)(b+c+bc)-c-b$$

$$b+c+bc+ab+ac+abc-c-b$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca+abc.$$

3. $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = ab^2(a+b)$ **అనిచూపండి.**

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\begin{vmatrix} 3a+3b & 3a+3b & 3a+3b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix}$$

$$(3a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_2$ & $C_2 \to C_2 - C_3$

$$3(a+b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2b & -b & a+b \\ -b & 2b & a \end{vmatrix}$$

$$3(a+b)\left[1\left(4b^2 - b^2\right)\right] \Rightarrow 3(a+b)3b^2 = 9b^2(a+b)$$

4. $\begin{vmatrix} (a+1)(a+2) & (a+2) & 1 \\ (a+2)(a+3) & (a+3) & 1 \\ (a+3)(a+4) & (a+4) & 1 \end{vmatrix} = -2$ **అని చూపుము.**

$R_1 \to R_1 - R_2$ & $R_2 \to R_2 - R_3$

$$\begin{vmatrix} (a+1)(a+2)-(a+2)(a+3) & (a+2)-(a+3) & 0 \\ (a+2)(a+3)-(a+3)(a+4) & (a+3)-(a+4) & 0 \\ (a+3)(a+4) & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (a+2) & (a+1-a-3) & a+2-a-3 & 0 \\ (a+3) & (a+2-a-4) & a+3-a-4 & 0 \\ (a+3) & (a+4) & (a+4) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2(a+2) & -1 & 0 \\ -2(a+3) & -1 & 0 \\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 1(+2a+4) - \left(2(a+3)\right) = 2a+4-2a-6 = -2$$

5. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ **అని చూపండి.**

$$LHS = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_2$ & $C_2 \to C_2 - C_3$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-a & c-a & (a+b) \\ c-b & a-c & (b+c) \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\left[1(b-a)(a-c)-(c-b)^2\right]$$

$$= 2(a+b+c)\left[ab-bc-a^2+ac-c^2-b^2+2bc\right]$$

$$= 2(a+b+c)\left[ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2\right]$$

$$\Rightarrow 2\left(3abc-a^3-b^3-c^2\right) \ \ldots \ (1)$$

$$RHS = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 2\left|a\left(bc-a^2\right)-b\left(b^2-ac\right)+c\left(ab-c^2\right)\right|$$

$$2\left[abc-a^3-b^3+abc+abc-c^3\right] \qquad \Rightarrow 2\left(3abc-a^3-b^3-c^3\right) \qquad \ldots \ (2)$$

$\therefore$ 1, 2 ల నుండి నిరూపితం.

7. X కొరకు సాధించండి.

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

జ: $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\begin{vmatrix} 3x-2 & 3x-2 & 3x-2 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x-2=0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$C_1 \to C_1 - C_2 \;\&\; C_2 \to C_2 - C_3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11-3x & 3x-11 & 3 \\ 0 & 11-3x & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x-11\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11-3x & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x-11=0 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

$$\therefore \left[(11-3x)(-1)-0\right] = 0 \Rightarrow 11-3x=0 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}$$

8. కామర్స్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధనను రాబట్టుము.

$a)$ $2x + y + 3z = 1$

$x + 4y + 6z = 9$

$4x + 3y + 9z = 5$

జ: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2(36-18) - 1(9-24) + 3(3-16)$$

$$= 2(18) - 1(-15) + 3(-13)$$

$$= 36 + 15 - 39 = 12$$

$$\therefore D = 12$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1(36-18) - 1(81-30) + 3(27-20)$$

$$= 18 - 51 + 21 = -12$$

$$\therefore D_1 = -12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2(81-30) - 1(9-24) + 3(5-36)$$

$$= 2(51) - 1(-15) + 3(-31)$$

$$= 102 + 15 - 93 = 24$$

$$\therefore D_2 = 24$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(20-27) - 1(5-36) + 1(3-16)$$

$$= 2(-7) - 1(-31) + 1(-13)$$

$$= -14 + 31 - 13 = 4$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-12}{12} = -1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{24}{12} = 2, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$b)$ $2x-3y+2z=1$

$x+3y-z=-2$

$x-y+3z=3$

జ: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(9-1)+3(3+1)+2(-1-3)$$

$$= 2(8)+3(4)+2(-4)$$

$$= 16+12-8 = 20$$

$$\therefore D = 20$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(9-1)+3(-6+3)+2(2-3)$$

$$= 8+3(-3)+2(-7) = 8-9-14 = -15$$

$$\therefore D_1 = -15$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(-6+3)-1(3+1)+2(3+2)$$

$$= 2(-3)-1(4)+2(5)$$

$$= -6-4+10 = 0$$

$$\therefore D_2 = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(9-2)+3(3+2)+1(-1-3)$$

$$= 2(7)+3(5)+1(-4) = 14+15-4 = 25$$

$$\therefore D_3 = 25$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-15}{20} = \frac{-3}{4}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{20} = 0, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

c) $3x-4y+5z=-6$

$x+y-2z=-1$

$2x+3y+z=5$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+6)+4(1+4)+5(3-2)$$

$$= 3(7)+4(5)-5(1) = 21+20+5 = 46$$

$$\therefore D = 46$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -6 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6(1+6)+4(-1+10)+5(-3-5)$$

$$= -6(7)+4(9)+5(-8) = -42+36-40 = -46$$

$$\therefore D_1 = -46$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1+10)+6(1+4)+5(5+2)$$

$$= 3(9)+6(5)+5(7) = 27+30+35 = 92$$

$$\therefore D_2 = 92$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3(5+3)+4(5+2)-6(3-2)$$

$$= 3(8)+4(7)-6(1) = 24+28-6 = 46$$

$$\therefore D_3 = 46$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-46}{46} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{92}{46} = 2, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{46}{46} = 1$$

9. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను సాధించండి.

$a)$ $2x+3y+4z=8$, $3x+y-z=-2$, $4x-y-5z=-9$

$b)$ $x+3y-z=4$, $3x-2y+5z=-4$, $5x-y-4z=-9$

జ: $a)$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} \qquad =2(-5-1)-3(-15+4)+4(-3-4)$$

$$=2(-6)-3(11)+4(-7)=-12+33-28 \Rightarrow D=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ -9 & -1 & -5 \end{vmatrix} \qquad =8(-5-1)-3(10-9)+4(2+9)$$

$$=8(-6)-3(1)+4(11)$$

$$=-48-3+44=-7 \Rightarrow D_1=-7$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -9 & -5 \end{vmatrix} \qquad =2(10-9)-8(-15+4)+4(-27+8)$$

$$=2(1)-8(-11)+4(-19)$$

$$\therefore D_2=2+88-76=17$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -9 \end{vmatrix} \qquad =2(-9-2)-3(-27+8)+8(-3-4)$$

$$=2(-11)-3(-19)+8(-7)=-22+57-56=-21$$

$$\therefore D_3=-21$$

$$\therefore x=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\ \ y=\frac{D_2}{D}=\frac{14}{-7}=-2,\ \ z=\frac{D_3}{D}=\frac{-21}{-7}=3$$

$\therefore x = 1, y = -2. z = 3$

$b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ $= 1(8+5) - 3(-12-25) - 1(-3+10)$

$= 13 - 3(-37) - 1(7) = 13 + 111 - 7 = 117$

$\therefore D = 117$

$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \\ -9 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ $= 4(8+5) - 3(16+45) - 1(4-18)$

$= 4(13) - 3(61) - 1(-14) = 52 - 183 + 14 = -117$

$\therefore D_1 = -117$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & -9 & -4 \end{vmatrix}$ $= 1(16+45) - 4(-12-25) - 1(-27+20)$

$= 61 - 4(-37) - 1(-7) = 61 + 148 + 7 = 216$

$\therefore D_2 = 216$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & -9 \end{vmatrix}$ $= 1(18-4) - 3(-27+20) + 4(-3+10)$

$= 14 - 3(-7) + 4(7) = 14 + 21 + 28 = 63$

$\therefore D_3 = 63$

$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-117}{117} = -1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{216}{117} = \frac{24}{13}, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{63}{117} = \frac{7}{13}$

$\therefore x = -1, y = \frac{24}{13}, z = \frac{7}{13}$

10. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలో దేనికి ఏకైక సాధన ఉంటుంది? ఏకైక సాధన ఉన్న సందర్భంలో అ సాధననుకనుక్కొండి.

సూచన : $D \neq 0, D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0$ అయితే ఆ సమీకరణ వ్యవస్థకు ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

$a)$ $x - 2y = 4$, $-3x + 5y = -7$

$b)$ $2x - y + z = 0$, $x + y - 2z = 0$, $3x + 2y - z = 0$

జ: $a)$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 12 = 5$$

$\because D \neq 0, D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ కావున ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

$\therefore$ సాధన : $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{6}{-1} = -6;$ $\quad y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{5}{-1} = -5$

$b)$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1+4) + 1(-1+6) + 1(2-3)$$

$$= 2(3) + 1(5) + 1(-1) = 6 + 5 - 1 = 10$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ ఇలాగే $D_2 = 0.\ D_3 = 0$

కావున ఏకైక సాధన ఉండదు. కాని సాధన : $x = 0, y = 0, z = 0$ అగును.

11. నిర్ధారకాల ధర్మాలను ఉపయోగించి క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

$a)$ $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ & $R_2 \to R_2 - R_3$

$$\begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 0 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & (a+b) \\ 0 & 1 & (b+c) \\ 0 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)\left[(b+c-a-b)\right]$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$b)$ $$\begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+z^2 \\ 1 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

$R_1 \to R_1 - R_2$ & $R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (x-z)(y-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix}$$

$$(z-x)(x-y)\left[1(y+x-x-z)\right] = (x-y)(y-z)(z-x)$$

12. క్రింది వాటిని గణించుము.

$a)$ $$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$$ $b)$ $$\begin{vmatrix} 1 & w^3 & w^5 \\ w^3 & 1 & w^2 \\ w^5 & w^5 & 1 \end{vmatrix}$$ (w అనునది 1కి ఘనమూలం)

జవాబులు:

$a)$ $$1^2\left[3^2 5^2 - 4^2 4^2\right] - 2^2\left[2^2 5^2 - 3^2 4^2\right] + 3^2\left[2^2 4^2 - 3^2 3^2\right]$$

$$\Rightarrow [9\times 25-16.16]-4[4.25-9.16]+3^2[4.16-9.9]$$

$$\Rightarrow [225-256]-4[100-144]+9[64-81]$$

$$\Rightarrow [-31]-4[-44]+9[-17]$$

$$-31+176-153=-8\Rightarrow -8$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & w^3 & w^5 \\ w^3 & 1 & w^4 \\ w^5 & w^5 & 1 \end{vmatrix} = 1\left[1-w^9\right]-w^3\left[w^3-w^9\right]+w^5\left[w^3-w^5\right]$$

$$1-w^9-w^6+w^{12}+w^{13}-w^{10}$$

$$\Rightarrow 1-\left(w^3\right)^3-\left(w^3\right)^2+\left(w^3\right)^4+\left(w^3\right)^4 w-\left(w^3\right)^3.w$$

$$\Rightarrow 1-1-1+1+1.w-1w$$

$$\Rightarrow 0 \qquad \because w^3=1$$

13. క్రింది సమీకరణాలను కామర్స్ పద్ధతినుపయోగించి సాధించుము.

$$2x+y+3z=8\Rightarrow 2x+y+3z=8$$

$$3x+2y+3=z\Rightarrow 3x+2y-z=-3$$

$$x+3z=1+2y\Rightarrow x-2y+3z=1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad =2(6-2)-1(9+1)+3(-6-2)$$

$$=2(4)-1(10)+3(-8)=8-10-24=-26$$

$$D=-26$$

$$D_1=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad =8(6-2)-1(-9+1)+3(6-2)$$

$$=8(4)-1(-8)+3(4)=32+8+12=52$$

$$D_1=52$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad = 2(-9+1) - 8(9+1) + 3(3+3)$$

$$= 2(-8) - 8(10) + 3(6) = -16 - 80 + 18 = -78$$

$$D_2 = -78$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad = 2(2-6) - 1(3+3) + 8(-6-2)$$

$$= 2(-4) - 1(6) + 8(-8) = -8 - 6 - 64 = -78$$

$$D_3 = -78$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{52}{-26} = -2,\ \ y = \frac{D_2}{D} = \frac{-78}{-26} = 3,\ \ z = \frac{D_3}{D} = \frac{-78}{-26} = 3,$$

$$x = -2, y = 3, z = 3$$

14. క్రింది వాటిలో ఏ సమీకరణ వ్యవస్థలకు ఏకైక సాధన వుంటుంది.

a) $2x - 6y = -1$

$x - 3y = -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$$

ఇక్కడ $D = 0$ మరియు $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ కావున ఇది అసంగతం. దీనికి సాధన లేదు.

b) $2x - 3y = 5,\ \ x - 2y = 6$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 18 = 8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 5 = 7$$

ఇక్కడ $D \neq 0$ & $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0$ కావున దీనికి ఏకైక సాధన వుంటుంది.

సాధన : $x = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{1} = 8,\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{1} = 7,,$

$\therefore x = 8,\ y = 7$

c) $2x + 3y + z = 1$
$4x - 6y + z = 3$
$6x - 3y + 2z = 5$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-12+3) - 3(8-6) + 1(-12+36)$$

$$= 2(-9) - 3(2) + 1(24) = -18 - 6 + 24 = 0$$

$\because D = 0$ కావున ఏకైక సాధన వుండదు.

d) $3x + y + 2z = -1$
$x + 2y - z = 2$
$2x - y + 3z = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3(6-1) - 1(3+2) + 2(-1-4)$$

$$= 3(5) - 1(5) + 2(-5) = 15 - 5 - 10 = 0$$

$\therefore D = 0$

$\therefore$ దత్త వ్యవస్థకు ఏకైక సాధన ఉండదు.

5

మాత్రికల విలోమాలు అనువర్తనాలు

అభినవ్ 2 కలములు 5 నోటు పుస్తకములను రూ॥120॥లకు, శంతను 4 కలములు, 3 నోటు పుస్తకములను రూ॥100లకు కొంటే, ఒక కలము ధర, ఒక నోటు పుస్తకము ధర కనుగొనుటకు మాత్రికలు ఎలా ఉపయోగపడతాయో తెలుసుకుందాం.

కలము ధర ఒక్కింటికి రూ॥ x అని, నోటు పుస్తకము ధర ఒక్కింటికి రూ॥ y అని అనుకుందాం. ఇపుడు పై సమాచారాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

దీనినే మరో విధంగా $AX = B$ అని వ్రాయవచ్చు.

ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$.

$$X = A^{-1}B$$

కావున మనకు కావలసిన $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ కనుగొనుటకు A^{-1} కనుగొనవలసి వుంటుంది. A^{-1}ను A యొక్క మాత్రికా విలోమమంటారు. ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం మాత్రికా విలోమాల వ్యవస్థితము మరియు ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించడమెలాగో నేర్చుకుందాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠం చదివాక, మీరు క్రిందివి చెయ్యగలుగుతారు.

- ఒక మాత్రికలోని మూలకం యొక్క లఘు నిర్ధారకం, సహగుణావయవములను నిర్వచిస్తారు.
- ఒక మాత్రిక అనుబంధ మాత్రికని నిర్వచించగలుగుతారు.
- సాధారణ, అసాధారణ మాత్రికలని నిర్వచించి, గుర్తిస్తారు.
- మాత్రికావిలోమము ఉంటే, కనుక్కుంటారు.
- మాత్రికారూపం $AX = B$ లో సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను సూచిస్తారు.
- మాత్రికా పద్ధతిలో సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థని సాధిస్తారు.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. క్రింది మాత్రికల నిర్ధారకాలు కనుక్కోండి.

$a)\quad A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}\quad b)\quad B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ -0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

సమాధానం :

$a)\quad |A|=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}=0-12=-12$

$b)\quad |B|=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}=4(-1)-5(-2-2)+(-1-0)$

$=4(-1)-5(-4)+6(-1)$

$=-4+20-6=10$

2. క్రింది మాత్రికలు సాధారణ మాత్రికలా, అసాధారణ మాత్రికలా కనుక్కోండి.

$a)\quad A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -9 & 6\end{bmatrix}\quad b)\quad B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & -1\end{bmatrix}$

సమాధానం:

$a)\quad |A|=18+18=0$ ఇది అసాధారణ మాత్రిక

$b)\quad |B|=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow 1(-3-5)+1(-2-4)+2(10-12)$

$-8-6-4=-18\neq 0$

$\therefore B$ సాధారణ మాత్రిక.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

3. క్రింది మాత్రికలకు లఘు నిర్ధారకాలు కనుక్కోండి.

$a)\quad A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 4\end{bmatrix}$ $\qquad b)\quad B=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

సమాధానం:

$a)$ 3కు లఘు నిర్ధారకం 4, −1కి లఘు నిర్ధారకం 7, 7కి లఘునిర్ధారకం −1, 4కు లఘు నిర్ధారకం 3.

$b)\quad B=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & 5\end{bmatrix}$; 0 కు లఘు నిర్ధారకం 5, 6కు లఘు నిర్ధారకం 2.

2కు లఘు నిర్ధారకం 6, 5కు లఘు నిర్ధారకం 0.

4. క్రింది మాత్రికలోని రెండవ అడ్డు వరుస మూలకాలకు లఘు నిర్ధారకాలను కనుక్కోండి.

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}$ రెండో అడ్డువరుసలోని మూలకాలు

1) (−1) కి లఘు నిర్ధారకం $(2\times1)-(-3)(3)=2+9=11=M_{21}$

2) 0కు లఘు నిర్ధారకం $(1\times1)-(-2)(3)=1+6=7=M_{22}$

3) 4కు లఘు నిర్ధారకం $(1\times-3)-(-2\times2)=-3+4=1=M_{23}$

5. క్రింది మాత్రికలో మూడో అడ్డువరుసలోని మూలకాలకు లఘు నిర్ధారకాలు కనుక్కోండి.

$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$

సాధన: 1) −2కు లఘు నిర్ధారకాలు $M_{31}=(-1)(-1)-4\times3=-1-12=-13$

2) 0కు లఘు నిర్ధారకం $M_{32}=(2\times1)-(5\times3)=2-15=-13$

3) 3కు లఘు నిర్ధారకం $M_{33}=(2\times4)-(5\times-1)=8+5=13$

6. క్రింది మాత్రికలోని మూలకాలకు సహగుణావయవములు కనుక్కోండి.

$a)\quad A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 9 & 7\end{bmatrix}$ $\quad b)\quad B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -5 & 6\end{bmatrix}$

సాధన: $a)$ 1) 3కు సహ గుణావయవం $C_{11} = (-1)^{1+1}(7) = 7$

2) −2కు సహ గుణావయవం $C_{12} = (-1)^{1+2}(9) = -9$

3) 9 కు సహ గుణావయవం $C_{21} = (-1)^{2+1}(-2) = 2$

4) 7కు సహ గుణావయవం $C_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 3$

$b)$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

1) 0కు సహ గుణావయవం $C_{11} = (-1)^{1+1}(6) = 6$

2) 4కు సహ గుణావయవం $C_{12} = (-1)^{1+2}(-5) = 5$

3) −5కు సహ గుణావయవం $C_{21} = (-1)^{1+2}(4) = -4$

4) 6కు సహ గుణావయవం $C_{22} = (-1)^{2+2}(0) = 0$

7. క్రింది మాత్రికలో రెండో అడ్డువరుస మూలకాలకు సహగుణవయవాలు కనుక్కోండి.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ **రెండో అడ్డువరుస మూలకాలు**

1) −1 యొక్క సహగుణావయవం $C_{21} = (-1)^{2+2}(0+1) = -1$

2) 3యొక్క సహగుణావయవం $C_{22} = (-1)^{2+2}(-4-4) = -8$

3) 0యొక్క సహగుణావయవం $C_{23} = (-1)^{2+3}(-2-0) = 2$

$b)$ క్రింది మాత్రికలోని మొదటి అడ్డువరుస మూలకాలకు సహగుణావయవాలను కనుక్కోండి.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

1) 2యొక్క సహగుణావయవం $C_{11} = (-1)^{1+1}(0+6) = 6$

2) -1యొక్క సహగుణావయవం $C_{12} = (-1)^{1+2}(0-10) = 10$

3) 5యొక్క సహగుణావయవం $C_{13} = (-1)^{1+3}(18+20) = 38$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **మరియు** $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **అయితే క్రింది వాటిని సరిచూడండి.**

$a)$ $|A| = |A^1|$ మరియు $|B| = |B^1|$

$b)$ $|AB| = |A||B| = |BA|$

సాధన: $a)$ $|A| = 10 - 12 = -2,$ $\quad |B| = -8 - 21 = -29$

$$\therefore A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^1| = 10 - 12 = -2$$

$$\therefore |A| = |A^1| = -2$$

$$|B| = -8 - 21 = -29, \qquad |B^1| = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B^1| = -8 - 21 = -29$$

$b)$ $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+21 & 6+12 \\ -8+35 & 12+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ 27 & 32 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+12 & -6+15 \\ 14+16 & 21+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 30 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |AB| = \begin{vmatrix} 17 & 18 \\ 27 & 32 \end{vmatrix} = 17 \times 32 - 18 \times 27 = 544 - 486 = 58$$

$$|A||B| = -2 \times -29 = 58$$

$$|BA| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 30 & 41 \end{vmatrix} = 8 \times 41 - 30 \times 9 = 328 - 270 = 58$$

$$\therefore |AB| = |A||B| = |BA|$$

అనుబంధ మాత్రిక : $Adj.A$

దత్త మాత్రికలోని మూలకాల సహగుణావయవాలతో ఏర్పడ్డ మాత్రిక యొక్క వ్యత్యాయ మాత్రికను అనుబంధ మాత్రిక అందుకు. దీనిని $Adj.A$ చే సూచిస్తారు. ఇందుకు

1) A లోని మూలకాల స్థానంలో వాటి సహగుణావయవాల మాత్రికను కనుగొనుము.

2) పైన కనుగొన్న మాత్రికకు వ్యత్యయ మాత్రికను కనుగొనండి.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ కి అనుబంధ మాత్రికను కనుక్కోండి.

A లోని మూలకాల స్థానంలో వాటి సహగుణవయవాలను వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \ldots.(1)$$

(1) యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక $Adj.A$ అవుతుంది.

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

9. క్రింది మాత్రికలను అనుబంధ మాత్రికలను కనుక్కోండి.

$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad b)\ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad c)\ C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

సాధన:

$a)$ A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore Adj.A$ (అనుబంధ మాత్రిక) $= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$b)$ B కు సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$\therefore B$ కు సహగుణావయవ మాత్రిక $Adj.B$ $= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$c)$ $C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore C$ కు సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore C$ కు అనుబంధ మాత్రిక $Adj.C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

10. క్రింది మాత్రికలకు అనుబంధ మాత్రికను కనుక్కోండి.

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ $b)$ $B = \begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$

సాధన: A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A$ కు అనుబంధ మాత్రిక $Adj.A$ $Adj.A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

$b)$ B కు సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$

$\therefore B$ కు అనుబంధ మాత్రిక $Adj.B = \begin{bmatrix} i & +i \\ -i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & +i \\ -i & i \end{bmatrix}$

$c)$ పై మాత్రికలకు $A(Adj.A) = (Adj.A)A = |A| I_2$ ను పరిశీలించండి.

సాధన: $A(Adj.A) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$(Adj.A)A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & \sqrt{2}-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+\sqrt{2} & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$

$$\therefore |A| I_2 = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(Adj.A) = (Adj\,A)A = |A| I_2$$

సూచన: $AB = BA = I$ అయితే A, B లను ఒకదానికొకటి విలోమ మాత్రికలందురు.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{అయితే } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj.A$$

11. క్రింది మాత్రికలకు విలోమాన్ని కనుక్కోండి.

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $b)$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ $c)$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

సాధన: $a)$ $|A| = 5 - 6 = -1$ విలోమం ఉంటుంది.

$$Adj.A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & +3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$b)$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 + 6 = 10 \neq 0$ $\therefore$ విలోమం ఉంటుంది.

సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj.B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix}$$

$c)$ $|C| = 0 + 1 = 1 \neq 0$ కావున విలోమం ఉంటుంది.

$\therefore C$ కి సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore Adj.C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore C^{-1} = \frac{1}{|C|} AdjC = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. **క్రింది మాత్రికలకు $A(AdjA) = (AdjA)A = |A| I_3$ ని సరిచూడండి.**

$a)$ $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

$c)$ $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $d)$ $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

సాధన: $a)$ $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A లోని మూలకాల సహగుణావయవాలు :

6కు $C_{11} = (-1)^{1+1}[0-8] = -8$; 8కి $C_{12} = (-1)^{1+2}[0+12] = -12$

−1కి $C_{13} = (-1)^{1+3}[0+15] = -15$; 0కి $C_{21} = (-1)^{1+2}[0+2] = -2$

5కి $C_{22} = (-1)^{2+2}[0-3] = -3$; 4కి $C_{23} = (-1)^{2+3}[12+24] = -36$

−3కి $C_{31} = (-1)^{3+1}[32+5] = 37$; 2కి $C_{32} = (-1)^{3+2}[24+0] = -24$

0కి $C_{33} = (-1)^{3+3}[30-0] = 30$

సహగుణావయవ మాత్రిక $\begin{bmatrix} -8 & -12 & 15 \\ -2 & -3 & -36 \\ 37 & -24 & 30 \end{bmatrix}$ $\therefore AdjA = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 37 \\ -12 & -3 & -24 \\ 15 & -36 & 30 \end{bmatrix}$

$$\therefore A(AdjA) = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 37 \\ -12 & -3 & -24 \\ 15 & -36 & 30 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -48-96-15 & -12-24+36 & 222-192-30 \\ 0-60+60 & 0-15-144 & 0-120+120 \\ 24-24+0 & 6-6+0 & -111-48+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -159 & 0 & 0 \\ 0 & -159 & 0 \\ 0 & 0 & -159 \end{bmatrix} = -159\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3$$

$$\therefore A(AdjA) = |A| I_3$$

ఇదేవిధంగా $A(AdjA) = -159\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A| I_3$ అగును.

$b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

$C_{11} = (-1)^{1+1}[-4+14] = 10;$ $\quad C_{12} = (-1)^{1+2}[0-6] = 6$

$C_{13} = (-1)^{1+3}[0+3] = 3;$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}[28+63] = -91$

$C_{22} = (-1)^{1+1}[8-27] = -19;$ $\quad C_{23} = -[-14-21] = 35$

$C_{31} = (-1)^{3+1}[14+9] = 23;$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2}[4-0] = -4;$

$C_{33} = (-1)^{3+3}[-2-0] = -2$

$\therefore$ సహగుణావయవ మాత్రిక $\begin{bmatrix} 10 & 6 & 3 \\ -91 & -19 & 35 \\ 23 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $\therefore AdjA = \begin{bmatrix} 10 & -91 & 23 \\ 6 & -19 & -4 \\ 3 & 35 & -2 \end{bmatrix}$

$$\therefore A(AdjA) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & -91 & 23 \\ 6 & -19 & -4 \\ 3 & 35 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20+42+27 & -182-133+315 & 46-28-18 \\ 0-6+6 & 0+19+70 & 0+4-4 \\ 30-42+12 & -273+133+140 & 69+28-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 & 0 & 0 \\ 0 & 89 & 0 \\ 0 & 0 & 89 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(AdjA) = 89\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 89I_3 = |A|I_3$$

ఇక్కడ $|A| = 2(10)+7(6)+9(3) = 20+42+27 = 89$.

c) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \cos\alpha(\cos\alpha) + \sin\alpha(\sin\alpha)$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

ఇక్కడ

$C_{11} = (-1)^{1+1}[\cos\alpha - 0] = \cos\alpha;\ C_{12} = -[\sin\alpha - 0] = -\sin\alpha; C_{13} = [0-0] = 0$

$C_{21} = -[-\sin\alpha - 0] = \sin\alpha;\ C_{22} = [\cos\alpha - 0] = \cos\alpha; C_{23} = -[0-0] = 0$

$C_{31} = -[0-0] = 0;\ C_{32} = [0-0] = 0; C_{33} = \left[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right] = 1$

$\therefore$ సహగుణావయవ మాత్రిక $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} cos\,\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(Adj.A) = \begin{bmatrix} cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0 & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + 0 & 0+0+0 \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3 \quad \text{ఇక్కడ} = |A| = 1$$

ఇదేవిధంగా $(AdjA)A = |A| I_3$ అగును.

2. క్రింది మాత్రికలకు వీలైనచో విలోమము కనుగొనుము.

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad b)$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

సాధన :

$a)$ A లోని మూలకాల సహగుణావయవాలు

$C_{11} = [2-3] = -1;\ C_{12} = -[4-12] = 8;\ C_{13} = [2-4] = -2;\ C_{21} = -[0-2] = -2$

$C_{22} = [2-8] = -6;\ C_{23} = -[1-00] = -1;\ C_{31} = [0-2] = -2$

$C_{32} = -[3-4] = 1;\ C_{33} = [1-0] = 1$

$\therefore$ సహ గుణావయమ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ అనుబంధ మాత్రిక $Adj.A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 8 & -6 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A =$ నిర్ధారకం $A = |A| = 1(-1) + 0(8) + 2(-2) = -1 - 4 = -5$

$$\therefore \text{విలోమం } A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj.A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 8 & -6 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} == \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

b) సాధన : $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

$C_{11} = [-4 + 12] = 8;\ C_{12} = -[-10 - 4] = 14;$

$C_{21} = -[2 + 6] = -8;\ C_{22} = [-6 - 2] = -8;\ C_{23} = -[-9 + 1] = 8;$

$C_{31} = [-4 - 4] = -8;\ C_{32} = -[12 - 10] = -2;\ C_{33} = [6 + 5] = 11$

$$\therefore \text{సహ గుణావయవ మాత్రిక } = \begin{bmatrix} 8 & 14 & -17 \\ -8 & -8 & 8 \\ -8 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ అనుబంధ మాత్రిక } Adj.A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 \\ 14 & -8 & -2 \\ -17 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ నిర్ధారకం $A = \det A = |A| = 3(8) - 1(14) + 2(-17) = 24 - 14 - 34 = -24$

$\therefore$ విలోమం $A^{-1} = \dfrac{Adj.A}{\det.A} = \dfrac{1}{-24}\begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 \\ 14 & -8 & -2 \\ -17 & 8 & 11 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-8}{24} & \frac{-8}{24} & \frac{-8}{-24} \\ \frac{14}{-24} & \frac{-8}{-24} & \frac{-2}{-24} \\ \frac{-17}{-24} & \frac{-8}{24} & \frac{-11}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{17}{24} & \frac{-1}{3} & \frac{-11}{24} \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $\left(A^1\right)^{-1}$ ను కనుక్కోండి.

సాధన: $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ఇక్కడ $C_{11} = [-1-8] = -9;$ $C_{12} = -[-2-6] = 8;$ $C_{13} = [-8+3] = -5$

$C_{21} = [0-2] = -2;$ $C_{22} = [1+6] = 7;$ $C_{23} = -[4-0] = -4$

$C_{31} = [0-2] = -2;$ $C_{32} = -[2-4] = 2;$ $C_{33} = [-1-0] = -1$

$\therefore$ సహ గుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore Adj.A^1 = A^1$ కు అనుబంధ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

$\left|A^1\right| = 1(-9) + 0(8) - 2(-5) = -9 + 10 = 1$

$$\left(A^1\right)^{-1} = \frac{1}{\left|A^1\right|} Adj.A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

4. $\phi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $\left(\phi(x)\right)^{-1} = \phi(-x)$ అని చూపండి.

$C_{11} = [\cos x - 0] = \cos x;$ $\quad C_{12} = -[\sin x - 0] = -\sin x;$ $\quad C_{13} = [0-0] = 0$

$C_{21} = -[-\sin x - 0] = \sin x;$ $\quad C_{22} = [\cos x - 0] = \cos x;$ $\quad C_{23} = [0-0] = 0$

$C_{31} = -[0-0] = 0;$ $\quad C_{32} = -[0-0] = 0;$ $\quad C_{33} = \left[\cos^2 x + \sin^2 x\right] = C_{33} = 1$

$\therefore$ సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \phi(x)$ అనుబంధ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \left[\phi(x)\right]$ నిర్ధారకం $= \cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x) + 0 = 1$

$$\therefore \left[\phi(x)\right]^{-1} = \frac{Adj\,\phi(x)}{Det\,\phi(x)} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots. \ (1)$$

$$\therefore \left[\phi(-x)\right] = \begin{bmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) & 0 \\ \sin(-x) & cox(-x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .. \ (2)$$

$\therefore$ 1, 2 ల నుండి $\left(\phi(x)\right)^{-1} = \phi(-x)$ అని తెలుసు.

5. $A=\begin{bmatrix}1 & Tanx\\ -Tanx & 1\end{bmatrix}$ అయితే $A^1A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{bmatrix}$ అని చూపండి.

సాధన : $A^1=\begin{bmatrix}1 & -Tanx\\ Tanx & 1\end{bmatrix}$; $A^{-1}=\dfrac{1}{1+Tan^2x}\begin{bmatrix}1 & -Tanx\\ Tanx & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore A^1A^{-1}=\frac{1}{1+Tan^2x}\begin{bmatrix}1 & -Tanx\\ Tanx & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -Tanx\\ Tanx & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+Tan^2x}\begin{bmatrix}1-Tan^2x & -Tanx-Tanx\\ Tanx+Tanx & -Tan^2x+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dfrac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x} & \dfrac{-2Tanx}{1+Tan^2x}\\ \dfrac{2Tanx}{1+Tan^2x} & \dfrac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{bmatrix}$$

ఇక్కడ $\cos 2x=\dfrac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}$; $\sin 2x=\dfrac{2Tanx}{1+Tan^2x}$

6. $A=\begin{bmatrix}a & b\\ C & \dfrac{1+bc}{a}\end{bmatrix}$ అయితే $aA^{-1}=\left(a^2+bc+1\right)I-aA$ అని చూపండి.

సాధన : $|A|=1+bc-bc=1$ $\quad Adj\ A=\begin{bmatrix}\dfrac{1+bc}{a} & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1}=\frac{Adj.A}{\det.A}=\begin{bmatrix}\dfrac{1+bc}{a} & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\therefore aA^{-1}=a\begin{bmatrix}\dfrac{1+bc}{a} & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+bc & -ab\\ -ca & a^2\end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

$$\left(a^2+bc+1\right)I=\left(a^2+bc+1\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc+1 & 0\\ 0 & a^2+bc+1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\left(a^2+bc+1\right)I-aA=\begin{bmatrix}a^2+bc+1 & 0\\ 0 & a^2+bc+1\end{bmatrix}-a\begin{bmatrix}a & b\\ c & \dfrac{1+bc}{a}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a^2+bc+1 & 0\\ 0 & a^2+bc+1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a^2 & ab\\ ca & 1+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}bc+1 & -ab\\ -ca & a^2\end{bmatrix}\quad\ldots(2)$$

$\therefore$ 1, 2, ల నుండి $aA^{-1}=\left(a^2+bc+1\right)I-aA$ అగును.

7. క్రింది సమీకరణాలను మాత్రికా పద్ధతిలో సాధించండి.

a) $2x+3y=4$, $x-2y=5$

b) $x+y=7$, $3x-7y=11$

c) $3x+4y=5$, $x-2y+6=0$

d) $2x-3y+6=0$, $6x+y-8=0$

సాధన: a) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}\ AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-4-3}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-8-15\\ -4+10\end{bmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-23\\ 6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{23}{6}\\ \dfrac{-6}{7}\end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{23}{7},y=\frac{-6}{7}$$

b) $x + y = 7$

$3x - 7y = 11$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}\ AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7-3}\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -49-11 \\ -21+11 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -60 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-60}{-10} \\ \frac{-10}{-10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow x = 6, y = 1$$

c) $3x + 4y = 5$

$x - 2y + 6 = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6-4}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -10+24 \\ -5-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{10} \\ \frac{-23}{-10} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-7}{5} \\ \frac{23}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{-7}{5}, y = \frac{23}{10}$$

$d)$ పై లెక్క మాదిరి.

8. క్రింది మాత్రికలకు A^{-1} కనుగొని $\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$ ను పరిశీలించండి.

$a)$ $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ $b)$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $c)$ $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

సాధన :

$a)$ $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6-42}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-36}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-36} & \frac{-6}{-36} \\ \frac{-7}{-36} & \frac{3}{-36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{36} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{18} & \frac{7}{36} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix} \quad .. (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(A^{1}\right)^{-1} = \frac{1}{6-42}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-36}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^{1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-36} & \frac{-7}{-36} \\ \frac{-6}{-36} & \frac{3}{-36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{18} & \frac{7}{36} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix} \quad .. (2)$$

$\therefore$ 1, 2,ల నుండి $\left(A^1\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^1$ నిరూపితమైనది.

ఇదేవిధంగా b & c కూడా నిరూపించవచ్చును.

9. క్రింది వాటికి విలోమ మాత్రికలను కనుక్కోండి.

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $b)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

సాధన :

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$C_{11} = [-3-0] = -3;$ $C_{12} = -[-3-0] = 3;$ $C_{13} = [6-15] = -9$

$C_{21} = [0-0] = 0;$ $C_{22} = -[-1-0] = +1;$ $C_{23} = [2-0] = -2$

$C_{31} = [0-0] = 0;$ $C_{32} = -[0-0] = 0;$ $C_{33} = [3-0] = 3$

సహగుణావయవాల మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

అనుబంధ మాత్రిక $Adj.A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ +3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$|A| = 1(-3) = -3$

$\therefore$ విలోమం $A^{-1} = \dfrac{Adj.A}{des.A} = \dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$

$b)$ పైలెక్క మాదిరి.

10. మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను సాధించండి.

$a)$ $x+2y=4$ $\quad$ $b)$ $6x+4y=2$

$2x+5y=9$ $\quad$ $9x+6y=3$

సాధన: $a)$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$

$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$A^{-1}=\frac{1}{5-4}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1}B=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20-18 \\ -8+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore x=2,\ y=1$

$b)$ $6x+4y=2$

$9x+6y=3$

$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ఇక్కడ $|A|=36-36=0$

ఇక్కడ $\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ కావున అనంత సాధనలు వుంటాయి.

$x=k$ అనుకుంటే $6K+4y=2 \Rightarrow y=\frac{2-6K}{4}=\frac{1-3K}{2}$

x, y విలువలను $9x+6y=3$ (రెండో సమీకరణ)లో వ్రాయగా

$9K+6\left(\frac{1-3K}{2}\right)=3$

$9K+3(1-3K)=3$

$9K+3-9K=3$

$3=3$ ఇది వాస్తవము.

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థకు అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

అవి $x=K,\ y=\dfrac{1-3K}{2}, K$ ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$ అయితే $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ అనిచూపండి.

సాధన: $AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2+2+9 & -1+8+0 & 0+6-6\\ 0-1+12 & 0-4+0 & 0-3-8\\ 6+1+15 & -3+4+0 & 0+3-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 7 & 0\\ 11 & -4 & -11\\ 22 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

AB లో

$C_{11}=(28+11)=39,\quad C_{12}=-(-77+242)=-165$

$C_{13}=(11+88)=99,\quad C_{21}=-(-49-0)=49,\qquad C_{22}=[-91-0]=-91$

$C_{23}=-(13-154)=+141,\qquad C_{31}=(-77-0)=-77, C_{32}=-[-143-0]=143$

$C_{33}=(-52-77)=-129,$

సహగుణావయవ మాత్రిక $=\begin{bmatrix}39 & -165 & 99\\ 49 & -91 & 141\\ -77 & 143 & -129\end{bmatrix}\Rightarrow Adj.AB=\begin{bmatrix}39 & 49 & -77\\ -165 & -91 & 143\\ 99 & 148 & -129\end{bmatrix}$

$|AB|=13(39)+7(-165)+0(99)\qquad \therefore Adj\ AB=\begin{bmatrix}39 & 49 & -77\\ -165 & -91 & 143\\ 99 & 148 & -129\end{bmatrix}$

$= 507 - 1155 = -648$

$$(AB)^{-1} = \frac{Adj(AB)}{|AB|} = \frac{1}{-648}\begin{bmatrix} 39 & 49 & -77 \\ -165 & -91 & 143 \\ 99 & 148 & -129 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{సహగుణావయవ మాత్రిక} = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \\ 11 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} -9 & -7 & 11 \\ 12 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(-9) + 2(12) + 3(3) = -9 + 24 + 9 = 24$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} -9 & -7 & 11 \\ 12 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{సహగుణావయవ మాత్రిక} = \begin{bmatrix} -8 & 11 & -12 \\ -2 & -4 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$Adj.B = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 11 & -4 & -6 \\ -12 & -3 & 9 \end{bmatrix}; |B| = 2(-8) - 1(11) + 0(-12) = -16 - 11 = -27$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 11 & -4 & -6 \\ -12 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-27 \times 24}\begin{bmatrix} -8 & -2 & -3 \\ 11 & -4 & -6 \\ -12 & -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & -7 & 11 \\ 12 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-648}\begin{bmatrix} 72-24-9 & 56+8-15 & -88+8+3 \\ -99-48-18 & -77+16-30 & 121+16+6 \\ 108-36+27 & 84+12+45 & -132+12-9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-648}\begin{bmatrix} 39 & 49 & -77 \\ -165 & -91 & 143 \\ 99 & 141 & -129 \end{bmatrix} \ldots (2)$$

$\therefore 1, 2$ ల నుండి

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ అని నిరూపించడమైనది.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & c+a & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{bmatrix}$ అయితే

ABA^{-1} వికర్ణ మాత్రిక అనిచూపండి.

A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0(-1) + 1(1) + 1(1) = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj.A}{\det.A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & c+a & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0+c-b+b-c & 0+c+a+a-c & 0+a-b+a+b\\ b+c+0+b-c & c-a+0+a-c & b-a+0+a+b\\ b+c+c-b+0 & c-a+c+a+0 & b-a+a-b+0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2a & 2a\\ 2b & 0 & 2b\\ 2c & 2c & 0\end{bmatrix}=\frac{2}{2}\begin{bmatrix}0 & a & a\\ b & 0 & b\\ c & c & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & a & a\\ b & 0 & b\\ c & c & 0\end{bmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0+a+a & 0-a+a & 0+a-a\\ -b+0+b & b+0+b & b+0+b\\ -c+c+0 & c-c+0 & c+c+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a & 0 & 0\\ 0 & 2b & 0\\ 0 & 0 & 2c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)A^{-1}=\frac{2}{2}\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$ ఇది వికీర్ణ మాత్రిక.

3. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ అయితే $A^{-1}=A^2$ అనిచూపండి.

$$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2+0 & -2+2+0 & 0+2+0\\ 1-1+0 & -2+1+1 & 0+1+0\\ 0-1+0 & 0+1+0 & 0+1+0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad .. (1)$$

A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-1)(-1) + 2(0) + 0(-1) = 1$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .. \ (2)$$

1,2.ల నుండి $A^{-1} = A^2$ అని నిరూపించడమైనది.

4. క్రింది సమీకరణాలను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిన సాధించండి.

$a)$
$$x + 2y + z = 3$$
$$2x - y + 3z = 5$$
$$x + y - z = 7$$

సాధన:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

ఇక్కడ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

A కు సహగుణావయమ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$\therefore A$ కు అనుబంధ మాత్రిక $Adj.A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1(-2) + 2(5) + 1(3) = -2 + 10 + 3 = 11$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -6+15+49 \\ 15-10-7 \\ 9+5-35 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 58 \\ -2 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{11} \\ \frac{-2}{11} \\ \frac{-21}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{58}{11}, y = \frac{-2}{11}, z = \frac{-21}{11}$$

5. మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించండి.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

దీని నుండి. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ఇక్కడ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\because |A| = 1(-3+2) - 1(6-1) + 1(-4+1) = -1 - 5 - 3 = -9 \neq 0$$

$$|A| \neq 0, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

కావున $(Adj.A)(B) = 0$ కావున $x = 0, y = 0, z = 0$ –

నోట్ : మిగతావి ఇదే మాదిరి.

6. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలు సంగతమో, అసంగతమో కనుక్కోండి, సంగతమైతే సాధనలు కనుక్కోండి.

$a)$ $2x-3y=5$, $x-y=7$

$b)$ $2x-3y=5$, $4x-6y=10$

$c)$ $3x+y+2z=3$, $-2y-z=7$, $x+15y+3z=11$

$d)$ $x+2y-3z=0$, $4x-y+2z=0$, $3x+5y-4z=0$

సాధన: $a)$ $\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix};X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}$$

$|A|=2+3=5$ $\quad\because |A|\neq 0$ సంగతం మరియు ఏకైక సాధన వుంటుంది.

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+21\\-1+14\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\begin{bmatrix}26\\9\end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{26}{5}, y=\frac{9}{5}$$

$b)$ $\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{bmatrix};X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$$

$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$

$|A|=-12+12=0$ ఇక్కడ $|A|=0$

$$Adj.A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (Adj.A)B = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (Adj.A)B = \begin{bmatrix} -30+30 \\ -20+20 \end{bmatrix} = 0$$

$\because |A| = 0$ మరియు $(Adj.A)B = 0$ అయింది కావున పై వ్యవస్థకు అనంత సాధనలు వుంటాయి కావున ఇది సంగతం మరియు అసంగత సాధనలు కలవు.

c) $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

A కు నిర్ధారకం $|A| = 3(-6+15) - 1(0+1) + 2(0+2) = 27 - 1 + 4 \Rightarrow |A| = 30$

A కు సహగుణావయమ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 27 & 7 & -44 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} 9 & 27 & 3 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & -44 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 9 & 27 & 3 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & -44 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}B = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 9 & 27 & 3 \\ -1 & 7 & 3 \\ 2 & -44 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 27+189+33 \\ -3+49+33 \\ 6-308-66 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 249 \\ 79 \\ -368 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{249}{30}, y = \frac{79}{30}, z = \frac{-368}{30}$$

$d)$ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(4-10) - 2(16-6) - 3(20+3) = -6 + 44 - 69 = -31 \neq 0$$

A కు సహగుణవయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -6 & 22 & 23 \\ -7 & 5 & 1 \\ 1 & -14 & -9 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 22 & 5 & 1 \\ 1 & -14 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{1}{-31}\begin{bmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 22 & 5 & 1 \\ 1 & -14 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{-31}\begin{bmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 22 & 5 & 1 \\ 1 & -14 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ఇక్కడ వ్యవస్థకు శూన్య సాధనలు $\therefore x = y = z = 0$

$\rightarrow$ మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో క్రింది వ్యవస్థను సాధించండి.

7. $a)$ $2x + y + z = 1$

$x - 2y - z = \frac{3}{2}$

$3y - 5z = 9$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $=\begin{bmatrix}13 & 5 & 3\\ 8 & -10 & -6\\ 1 & 3 & -5\end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A=\begin{bmatrix}13 & 8 & 1\\ 5 & -10 & 3\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix};$$

$$|A|=2(13)+1(5)+1(3)=26+5+3=34$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{Adj.A}{\det.A}=\frac{1}{34}\begin{bmatrix}13 & 8 & 1\\ 5 & -10 & 3\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B=\frac{1}{34}\begin{bmatrix}13 & 8 & 1\\ 5 & -10 & 3\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{3}{2}\\ 9\end{bmatrix}=\frac{1}{34}\begin{bmatrix}13+12+9\\ 5-15+27\\ 3-9-45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{34}{34}\\ \frac{17}{34}\\ \frac{-51}{34}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-3}{2}\end{bmatrix}=x=1.y=\frac{1}{2},z=\frac{-3}{2}$$

b) $\begin{aligned}x-y+z&=4\\ 2x+y-3z&=0\\ x+y+z&=2\end{aligned}$ $\quad\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix};X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}4\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(4) + (-1)(-5) + 1(1) = 4 + 5 + 1 = 10$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{10} \\ \frac{-10}{10} \\ \frac{10}{10} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 1$$

8. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4, \frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1, \frac{8}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 3$ ను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో సాధించండి.

సాధన: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 8 & 9 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

A కు సహగుణావయవ మాత్రిక $=\begin{bmatrix} 75 & 120 & 84 \\ 150 & -120 & 6 \\ 75 & 30 & -24 \end{bmatrix}$

$$Adj.A=\begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 120 & -120 & 30 \\ 84 & 6 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\det.A=|A|=2(120-45)-3(-80-40)+10(36+48)$$

$$=2(75)-3(-120)+10(84)=150+360+840$$

$$|A|=1350$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{Adj.A}{|A|}=\frac{1}{1350}\begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 120 & -120 & 30 \\ 84 & 6 & -24 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B=\frac{1}{1350}\begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 120 & -120 & 30 \\ 84 & 6 & -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1350}\begin{bmatrix} 300+150+225 \\ 480-120+90 \\ 336+6-72 \end{bmatrix}=\frac{1}{1350}\begin{bmatrix} 675 \\ 450 \\ 270 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{675}{1350} \\ \frac{450}{1350} \\ \frac{270}{1350} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2,\ \frac{1}{y}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3,\ \frac{1}{z}=\frac{1}{5}\Rightarrow z=5$$

9. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థకు అశూన్య సాధన కనుక్కోండి.

$$3x+2y+7z=0$$
$$4x-3y-2z=0$$
$$5x+9y+23z=0$$

సాధన : $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & -2 \\ 5 & 9 & 23 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$$|A|=3(-69+18)-2(92+10)+7(36+15)$$

$$=3(-51)-2(102)+7(51)=-153-204+357=0$$

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -3 & -2 \\ 5 & 9 & 23 \end{bmatrix} \Rightarrow A$ కు సహగుణావయమ మాత్రిక $=\begin{bmatrix} -51 & -102 & 51 \\ 17 & 79 & -17 \\ 13 & 34 & -17 \end{bmatrix}$

$$\therefore Adj.A=\begin{bmatrix} -51 & 17 & 17 \\ -102 & 79 & 34 \\ 51 & -17 & -17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (Adj.A)B=\begin{bmatrix} -51 & 17 & 17 \\ -102 & 79 & 34 \\ 51 & -17 & -17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0$$

$\because |A|=0$ మరియు $Adj.A=0$ కావున అనంత సాధనలు వుంటాయి.

మొదటి రెండు సమీకరణాలను

$3x+2y=-7z \quad ..(1)$

$4x-3y=2z \quad ..(2)$

$1\times 3+2\times 2 \quad -- \quad$
$$\begin{array}{l} 9x+6y=-21z \\ 8x-6y=4z \\ \hline 17x \quad =-17z \end{array}$$

$$\therefore x=-z$$

$3x+2y=-7z$

$3(-z)+2y=-7z$

$-3z+2y=-7z$

$2y=-4z \quad = y=-2z$

$\therefore x=-z; y=-2z, z=K$ (K ఏదేని సంఖ్య) వస్తుంది.

కావున $x=-K, y=-2K, z=K$ సాధనలు అగును.

10. క్రింది సమఘాత సమీకరణాలను సాధించండి.

$x+y-z=0$
$x-2y+z=0$
$3x+6y-5z=0$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad AX=B$$

$|A|=1(10-6)-1(-5-3)-1(6+6)=4+8-12$

$|A|=0$

$\therefore |A|=0, (Adj.A)B=0$ కావున అనంత సాధనలుంటాయి.

మొదటి రెండు సమీకరణాలను తీసుకుంటే

$$\begin{array}{l} x+y=z \\ x-2y=-z \\ \underline{-\quad +\quad +} \\ \quad 3y=2z \end{array} \qquad \Rightarrow y=\frac{2}{3}z$$

$x+y=z$

$x+\frac{2}{3}z=z \qquad = x=z-\frac{2}{3}z=\frac{z}{3}$

$\therefore x=\frac{z}{3}, y=\frac{2}{3}z$ వచ్చును మరియు $z=K$ అనుకొనిన

$x=\frac{K}{3}, y=\frac{2}{3}K$ మరియు. $z=K$ సాధనలగును.

6

రేఖీయ అసమీకరణాలు, అనువర్తనాలు

రెండు లేదా మూడు చలరాశులతో కూడిన రేఖీయ, వర్గ సమీకరణాలను గురించి యింతకు ముందే చదివివున్నారు. అంతే గాక దైనందిన జీవితములో ఎదురయ్యే సమస్యలను రేఖీయ, వర్గసమీకరణ పద్ధతులనుపయోగించి ఎలా సాధించవచ్చో కూడ తెలుసుకొని వున్నారు.

కాని కొన్ని సందర్భాలలో యిచ్చిన సమన్యను సమీకరణ రూపంలో వ్రాయడం సాధ్యం కాదు. ఉదాహరణకు, అశోక్ అనే వ్యక్తి పెన్సిళ్ళను కొనడానికి రూ. 30 తీసుకొని బజారుకు వెళ్ళాడనుకుందాం. ఒక పెన్సిల్ ధర రూ. 2.60 అయితే అతను x పెన్సిళ్ళను కొనడానికి రూ. $2.60 \times x$ ఖర్చు పెడతాడు. కాని ఈ మొత్తం రూ. 30 కు సమానము కాదు. ఎందుకనగా ఇచ్చట x సహజ సంఖ్య. కావున

$$2.60\ x < 30 \qquad \ldots(i)$$

మరొక ఉదాహరణని పరిశీలిద్దాం. ఒక వ్యక్తి తన వద్ద నున్న రూ. 50,000తో కుర్చీలు, టేబుళ్ళు కొనాలనుకున్నాడు. కుర్చీ ధర ఒక్కటికి రూ. 450 మరియు టేబుల్ ధర ఒక్కటికి రూ. 550. అతను x కుర్చీలను, y టేబుళ్ళను కొంటే, అపుడు మొత్తం ధర రూ. $(450\ x + 550\ y)$ అవుతుంది.

ఈ సందర్భంలో దీనిని

$$450\ x + 550\ y \leq 50{,}000 \text{ లేదా}$$

$$9x + 11y \leq 1000 \qquad \ldots(ii)$$

గా వ్రాయగలం.

ప్రవచనం (i) లో $<$ అనే అసమానమనే గుర్తు, (ii) లో $9x + 11y < 1000$ లేక $9x + 11y < 100$ అనే రెండు ప్రవచనాలున్నాయి. ఇందులో మొదటిది సమీకరణము కాదు. యిలాంటి ప్రవచనాలను అసమీకరణాలంటారు.

ఈ పాఠములో, మనము రేఖీయ అసమీకరణాలు మరియు అహార, వ్యాపార మరియు రవాణా సమస్యలకు సంబంధించిన సమస్యలను రేఖా చిత్ర (Graphical) పద్ధతిలో సాధించడాన్ని గురించి చర్చిద్దాం.

లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత మీరు

- రేఖీయ సమీకరణాలు, రేఖీయ అసమీకరణాల మధ్య వ్యత్యాసము
- రేఖీయ సమీకరణ సాధన తలంలో వుంటుందని చెప్పడం
- రెండు చలరాశులతో కూడిన రేఖీయ అసమీకరణాన్ని రేఖాచిత్రం (graph) ద్వారా చూపుటను
- అసమీకరణసాధనను తగిన విధంగా గీతలు గీచిన ప్రదేశముతో చూపుట
- రెండు చలరాశులతో కూడిన రెండు లేదా మూడు అసమీకరణాలను గ్రాఫికల్ పద్ధతిలో సాధించుటను
- మూల్య ప్రమేయాలు, నిర్బంధాలు, ఆచరణీయ ప్రదేశము, ఉత్కృష్టతలను గురించి
- ఆహార, వ్యాపార, రవాణా సమస్యలను సూత్రీకరించుటను
- పై సమస్యలను గ్రాఫికల్ పద్ధతిలో సాధించుట గురించి తెలుసుకుంటారు.

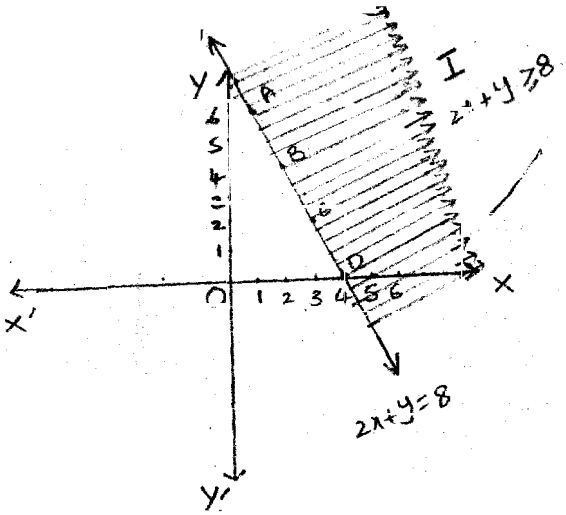
I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

రెండు అసమీకరణాల సాధనలను ద్విపరిమాణతలంతో గ్రాఫుల ద్వారా గుర్తించండి.

1. $2x + y \geq 8$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణము $2x + y \geq 8$. మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణానికి సంబంధించిన సమీకరణము $2x + y = 8$ ను తీసుకొని, క్రింది పట్టిక సహాయముతో గ్రాఫును గీద్దాం.

x:	1	2	3	4
y:	6	4	2	0



మూలబిందువు $(0,0)$ AB రేఖపై లేదు కావున ఆ బిందువును తీసుకుందాం. అనగా $(0,0)$ను $2x + y \geq 8$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే $2(0) + 0 \geq 8$

$\Rightarrow 0 + 0 \geq 8$

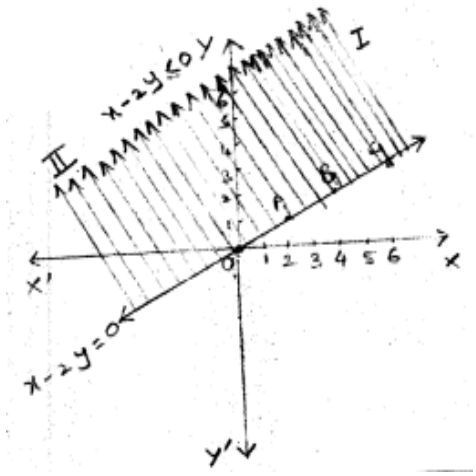
$\Rightarrow 0 \geq 8$ కాదు. కాబట్టి కావలసిన అర్థతలము I గీతలతో చూపబడిన ప్రదేశము అవుతుంది.

2. $x - 2y \leq 0$

సాధన: ఇచ్చిన అ సమీకరణము $x - 2y \leq 0$.

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణానికి సంబంధించిన సమీకరణము $x - 2v = 0$ ను తీసుకొని క్రింది పటిక సహాయముతో గ్రాఫును గీద్దాం.

x:	0	2	4	6
y:	0	1	2	3



మూలబిందువు $(0,0)$ AB రేఖపై ఉన్నది. అనగా $(0,0)$ $x-2y \le 0$ అసమీకరణాన్ని తృప్తిపరుచును. కావున కావలసిన అర్ధ తలము I, II గీతలతో చూపబడిన ప్రదేశము ఉంటుంది.

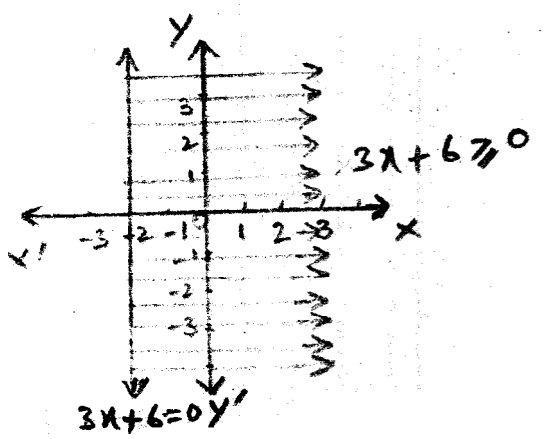
3. $3x+6 \ge 0$

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $3x+6 \ge 0$

$\Rightarrow 3x \ge -6$

$\Rightarrow x \ge \frac{-6}{3} \qquad \Rightarrow x \ge -2$

అనగా x విలువ -2కు సమానము లేదా -2 కంటే ఎక్కువ అని తెలుస్తుంది. కావున $x \ge -2$ను ఈ క్రింది విధంగా గ్రాఫును గీద్దాం.



$x \ge -2$ అసమీకరణము $x=-2, x>-2$ లను సూచిస్తుంది. కావున పైన గీచిన గ్రాఫు, A గుండా పోయే సరళరేఖతో పాటు, సరళరేఖకు కుడివైపున గీచిన బాణము గుర్తు గీతలతో గీయడము జరిగింది.

4. $8-2y \ge 2$

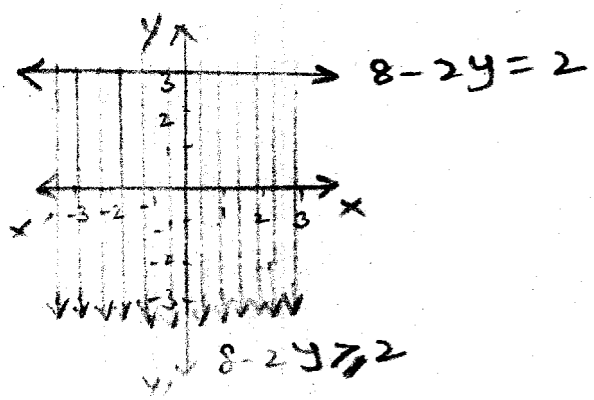
సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణము $8-2y \ge 2$

$\Rightarrow -2y \ge 2-8$

$\Rightarrow -2y \ge -6$

$\Rightarrow -y \ge -3 \Rightarrow y \le 3$

అనగా y విలువ 3కు సమానము లేదా 3 కంటే తక్కువ అని తెలుస్తుంది. కావున $y \le 3$ను ఈ క్రింది విధంగా గ్రాఫును గీద్దాం.



$y \le 3$ అసమీకరణము $y = 3, y < 3$ లను సూచించును. కావున పైన గీచిన గ్రాఫు, A గుండాపోయే సరళరేఖతో పాటు, సరళరేఖకు క్రింది భాగాన గీచిన బాణము గుర్తు గీతలతో గీయడం జరిగింది.

5. $3y \ge 6 - 2x$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణము $3y \ge 6 - 2x \Rightarrow 2x + 3y \ge 6$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $2x + 3y = 6$ ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x = 0$ తీసుకొనగా $2(0) + 3y = 6$

$\Rightarrow 3y = 6$

$\Rightarrow y = 2$

$x = 1$ తీసుకొనగా $2(1) + 3y = 6$

$3y = 6 - 2$

$3y = 4$

$y = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$

$x = 2$ తీసుకొనగా $2(2) + 3y = 6$

$4 + 3y = 6$

$3y = 2$

$y = \frac{2}{6} = 0.\bar{6}$

$x = 3$ తీసుకొనగా $2(3) + 3y = 6$

$6 + 3y = 6$

$\Rightarrow y = 0$

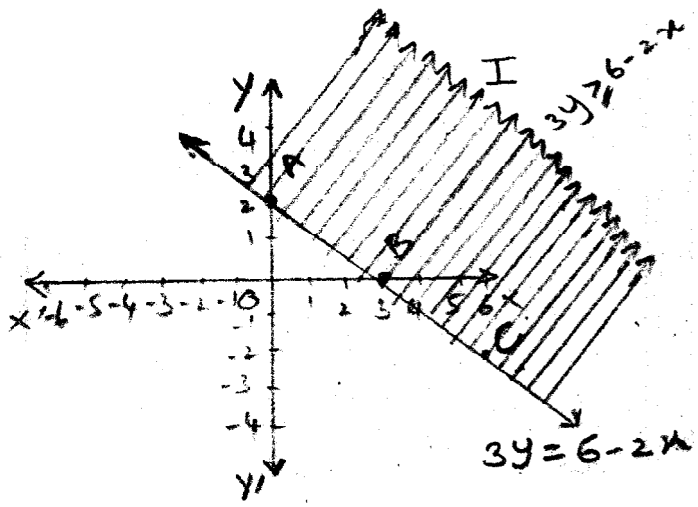
$x = 6$ తీసుకొనగా $2(6) + 3y = 6$

$12 + 3y = 6$

$3y = -6$

$y = -2$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను తీసుకొని క్రింది విధంగా గీద్దాం.



మూలబిందు $(0,0)$ AB రేఖపై లేదు కావున ఆ బిందువును తీసుకుందాం. అనగా $(0,0)$ను $2x+3y \geq 6$ లో ప్రతిపక్షేపిస్తే $2(0)+3(0) \geq 6$

$\Rightarrow 0+0 \geq 6 \Rightarrow 0 \geq 6$

ఇది అసంభవం. కావున కావలసిన అర్థతలము I గీతలతో చూపబడిన ప్రదేశము అవుతుంది.

6. $y > 2x - 8$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణము $y > 2x - 8$

$\Rightarrow 2x - y - 8 < 0$

$\Rightarrow 2x - y < 8$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $2x - y = 8$ ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x = 0$ తీసుకొనగా , $2x - y = 8$

$2(0) - y = 8$

$0 - y = 8 \Rightarrow y = -8$

$x = 1$ తీసుకొనగా $2(1) - y = 8$

$2 - y = 8$

$-y = 8 - 2$

$-y = 6 \Rightarrow y = -6$

$x = 2$ తీసుకొనగా $\quad 2(2) - y = 8$

$4 - y = 8$

$-y = 4 \Rightarrow y = -4$

$x = 3$ తీసుకొనగా $\quad 2(3) - y = 8 \Rightarrow 6 - y = 8$

$\Rightarrow -y = +2 \Rightarrow y = -2$

$x = 4$ తీసుకొనగా $\quad 2(4) - y = 8$

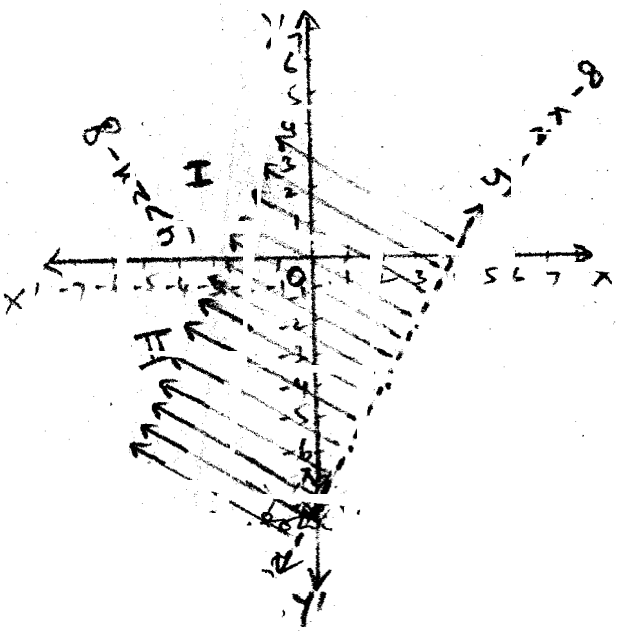
$\Rightarrow 8 - y = 8 \Rightarrow -y = 0$

$\Rightarrow y = 0$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

x :	0	1	2	3	4
y :	–8	–6	–4	–2	0

పై పట్టికకు అనుగుణ [illegible] సూత్రాలను ఉపయోగించి క్రింది విధంగా గ్రాఫును గీద్దాం.



మూల బిందువు $(0,0)$ AB రేఖపై లేదు కావున ఆ బిందువును తీసుకుందాం. అనగా $(0,0)$ను $2x-y<8$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే $2(0)-0<8$

$$\Rightarrow 0-0<8 \Rightarrow 0<8$$

ఇది సంభవమే కావున కావలసిన అర్ధతలము I, II గీతలతో చూపబడిన ప్రదేశము అవుతుంది. $2x-y<8$ అసమీకరణము $2x-y=8$ సమీకరణాన్ని సూచించదు. కావున $2x-y=8$ కావున సరళరేఖను చుక్కలతోటి గీతగా చూపించడము జరిగింది. కావున దత్త అసమీకరణము గ్రాఫ్ గీతలు గీయబడిన అర్ధ తలం I లో నుండి AB రేఖను తొలగించగా ఏర్పడే ప్రదేశము అవుతుంది.

7. $-y<x-5$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణము $-y<x-5$

$$\Rightarrow x+y-5>0$$

$$\Rightarrow x+y>5$$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $x+y=5$ ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x+y=8$

$x=0$ ను తీసుకొనగా $0+y=8 \Rightarrow y=8$

$x=1$ ను తీసుకొనగా $1+y=8 \Rightarrow y=7$

$x=2$ ను తీసుకొనగా $2+y=8 \Rightarrow y=6$

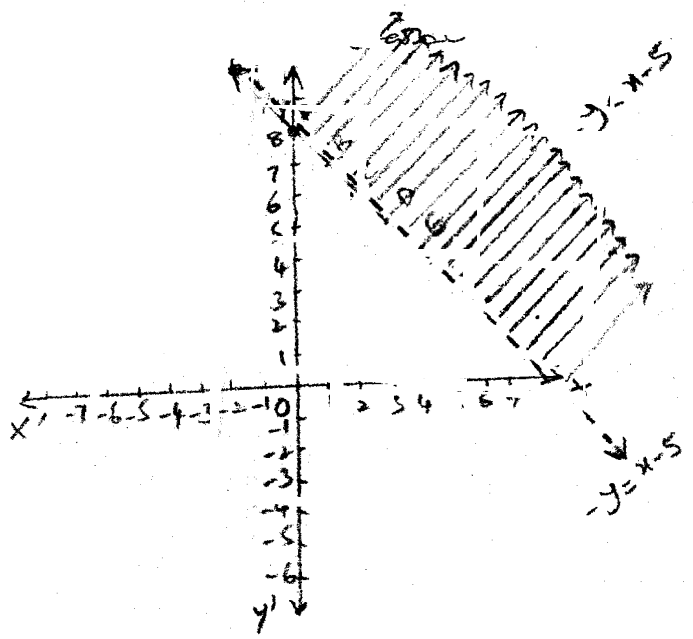
$x=3$ ను తీసుకొనగా $3+y=8 \Rightarrow y=5$

$x=4$ ను తీసుకొనగా $4+y=8 \Rightarrow y=4$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

$x:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x:$	8	7	6	5	4	3	2	1	0

పై పట్టికకు అనుగుణముగా క్రమయుగ్మాలను ఉపయోగించి ఈ క్రింది విధంగా గ్రాఫును గీద్దాం.



మూల బిందువు $(0,0)$, AB రేఖపై లేదు కావున ఆ బిందువును తీసుకుందాం. అనగా $(0,0)$ను $x+y>5$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే, $0+0>5 \Rightarrow 0>5$. ఇది అసంభవం. కావున కావలసిన అర్థతలము I గీతలతో చూపబడిన ప్రదేశము అవుతుంది. $x+y>5$ అసమీకరణము $x+y=8$ సమీకరణాన్ని సూచించదు. కావున దత్త అసమీకరణము గ్రాఫు గీతలు గీయబడిన అర్థతలము I లో నుండి AB రేఖను తొలగించగా ఏర్పడే ప్రదేశము అవుతుంది.

8. $2y \le 8-4x$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణము $2y \le 8-4x$

$\Rightarrow 4x+2y \le 8$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $4x+2y=8$ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను. $4x+2y=8$

$x=0$ తీసుకొనగా $4(0)+2y=8 \Rightarrow 0+2y=8 \Rightarrow y=4$

$x=1$ తీసుకొనగా $4(1)+2y=8 \Rightarrow 4+2y=8 \Rightarrow y=2$

$x=2$ తీసుకొనగా $4(2)+2y=8 \Rightarrow 8+2y=8 \Rightarrow y=0$

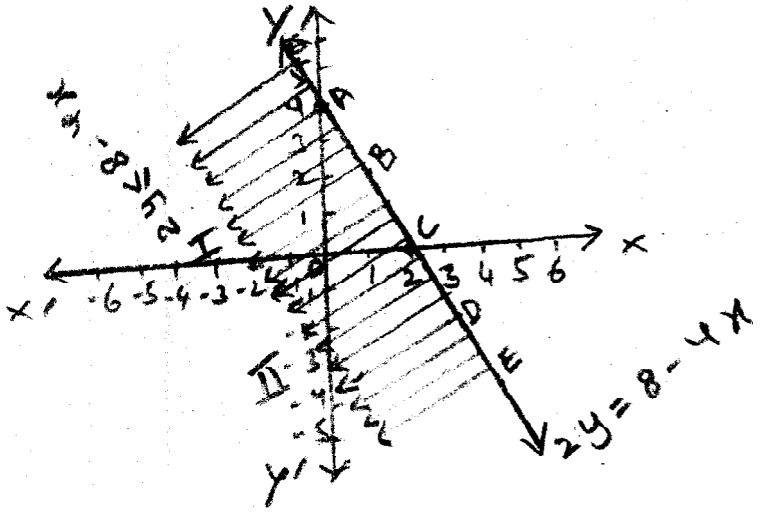
$x=3$ తీసుకొనగా $4(3)+2y=8 \Rightarrow 12+2y=8 \Rightarrow y=-2$

$x=4$ తీసుకొనగా $4(4)+2y=8 \Rightarrow 16+2y=8 \Rightarrow y=-4$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

$x:$	0	1	2	3	4
$y:$	4	2	0	–2	–4

పై పట్టికకు అనుగుణంగా క్రమయుగ్మాలను ఉపయోగించి ఈ క్రింది విధంగా గ్రాఫును గీద్దాం.



మూల బిందువు (0,0) AB రేఖపై లేదు కావున ఆ బిందువును తీసుకుందాం.. అనగా (0,0)ను $4x+2y \le 8$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే $4(0)2(0) \le 8$

$$\Rightarrow 0+0 \le 8 \Rightarrow 0 \le 8$$

ఇది సంభవమే. కావున కావలసిన అర్ధ తలము I గీతలతో చూపబడిన ప్రదేశము అవుతుంది. $4x+2y \le 8$ అసమీకరణము $4x+2y=8$ సమీకరణాన్ని సూచించును. కావున $4x+2y=8$ సరళరేఖను ఒకే గీతగా చూపించబడము జరిగింది. కావున దత్త అసమీకరణము గ్రాఫు గీతలు గీయబడిన అర్ధతలం I, II, AB రేఖను కలుపుతూ ఏర్పడిన ప్రదేశము అవుతుంది.

9. $3x \ge 0$

సాధన: 3వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

10. $y \le 4$

సాధన: 4వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $x \geq -2$ **రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.**

సాధన: 3వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

2. $y \leq 2$

సాధన: 4వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

3. $x < 3$

సాధన: 3వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

4. $y \geq -3$

సాధన: 4వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

5. $5 - 3y \geq -4$

సాధన: 4వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

6. $2x - 5 \leq 3$

సాధన: 3వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

7. $3x - 2y \leq 12$

సాధన: 8వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

8. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1$

సాధన: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1 \Rightarrow \frac{5x + 3y}{15} \geq 1$

$\Rightarrow 5x + 3y \geq 15$

7వ సమస్య వలే ప్రయత్నించుము.

9. $2x - 3y \geq 0$

సాధన: 7వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

10. $x + 2y \leq 0$

సాధన: 2వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

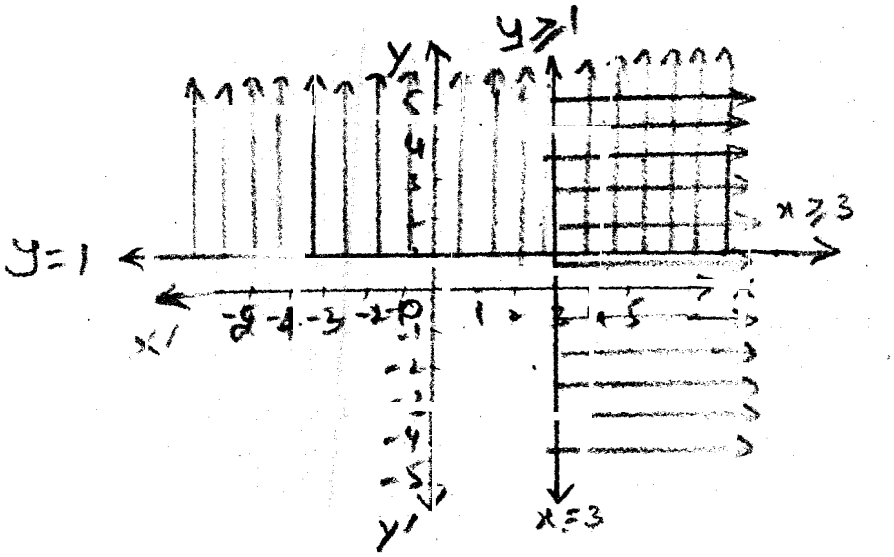
క్రింది ద్విచలరాశి అసమీకరణ వ్యవస్థలను గ్రాఫికల్ పద్ధతిలో సాధింపుము.

1. $x \geq 3, y \geq 1$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణములు $x \geq 3, y \geq 1$ లు.

$x \geq 3$ అనగా x విలువ 3 లేదా x విలువ 3కంటే ఎక్కువగా ఉండును. $y \geq 1$ అనగా y విలువ 1 లేదా y విలు 1 కంటే ఎక్కువగా ఉండును.

మొదట $x \geq 3$ ను తృప్తిపరిచే x విలువలు $3, 4, 5....$ లను ఉపయోగించి గ్రాఫును గీద్దాం. అదేవిధంగా $y \geq 1$ ను తృప్తి పరిచే y విలువలు $1, 2, 3, 4....$ లను ఉపయోగించి గ్రాఫును గీద్దాం.



పైన గ్రాఫులో చూపిన విధంగా నిలువు, అడ్డు గీతలతో కలిపి చూపబడిన ప్రదేశము ఇచ్చిన రేఖీయ అసమీకరణముల సాధనను సూచిస్తుంది.

2. $y \geq 2x, y \leq 2$

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $y \geq 2x, y \leq 2$

$$\Rightarrow 2x - y \leq 0, \Rightarrow y \leq 2$$

మొదట $2x - y \leq 0$ అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $2x - y = 0$ ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలయును. $2x - y = 0$.

$x = 0$ ను తీసుకొనగా $2(0) - y = 0$

$\Rightarrow 0 - y = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 1$ ను తీసుకొనగా $\quad 2(1) - y = 0$

$2 - y = 0 \Rightarrow y = 4$

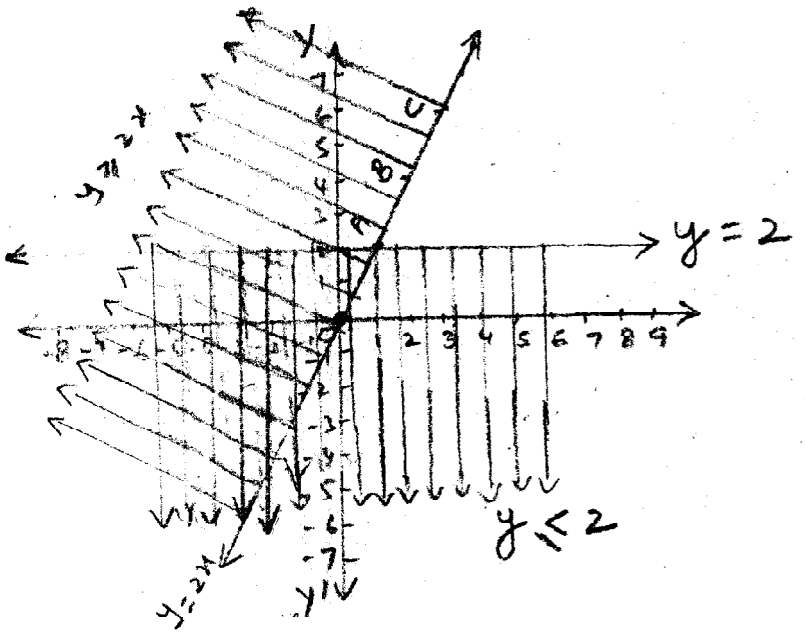
$x = 2$ ను తీసుకొనగా $\quad 2(2) - y = 0 \quad \Rightarrow y = 4$

$x = 3$ ను తీసుకొనగా $\quad 2(3) - y = 0 \Rightarrow y = 6$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

x:	0	1	2	3
y:	0	2	4	6

పై పట్టికకు అనుగుణంగా క్రమయుగ్మాలను ఉపయోగించి క్రిందివిధంగా గ్రాఫును గీద్దాం. అదే విధంగా $y \le 2$ అసమీకరణమును తృప్తిపరిచే y విలువలు $2, 1, 0, -1$.....లను ఉపయోగించి కూడా గ్రాఫును గీద్దాం.



$2x - y = 0$ సరళరేఖకు ఎడమ వైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $2x - y \le 0$ ను సూచిస్తుంది. $y = 2$ సరళరేఖకు క్రిందనున్న ప్రదేశాన్ని అసమీకరణము $y \le 2$ ను సూచిస్తుంది.

పైన చూపిన విధంగా నిలువు, అడ్డు గీతలతో (ఉమ్మడి) చూపబడిన ప్రదేశము ఇచ్చిన రేఖీయ అసమీకరణముల సాధనను సూచిస్తుంది.

3. $2x+y-3\geq 0, x-2y+1\leq 0$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణములు $2x+y-3>0, x-2y+1\leq 0$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $2x+y-3=0$ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$2x+y-3=0$

$x=0$ను తీసుకొనగా, $2(0)+y-3=0 \Rightarrow y=3$

$x=1$ను తీసుకొనగా, $2(1)+y-3=0 \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$

$x=2$ను తీసుకొనగా, $2(2)+y-3=0 \Rightarrow y+1=0 \Rightarrow y=-1$

$x=3$ను తీసుకొనగా, $2(3)+y-3=0 \Rightarrow y+3=0 \Rightarrow y=-3$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

$x:$	0	1	2	3
$y:$	3	1	-1	-3

అదే విధంగా, $x-2y+1\leq 0$ అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $x-2y+1=0$ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x-2y+1=0$

$x=0$ను తీసుకొనగా, $0-2y+1=0 \Rightarrow y=0.5$

$x=1$ను తీసుకొనగా, $1-2y+1=0 \Rightarrow y=1$

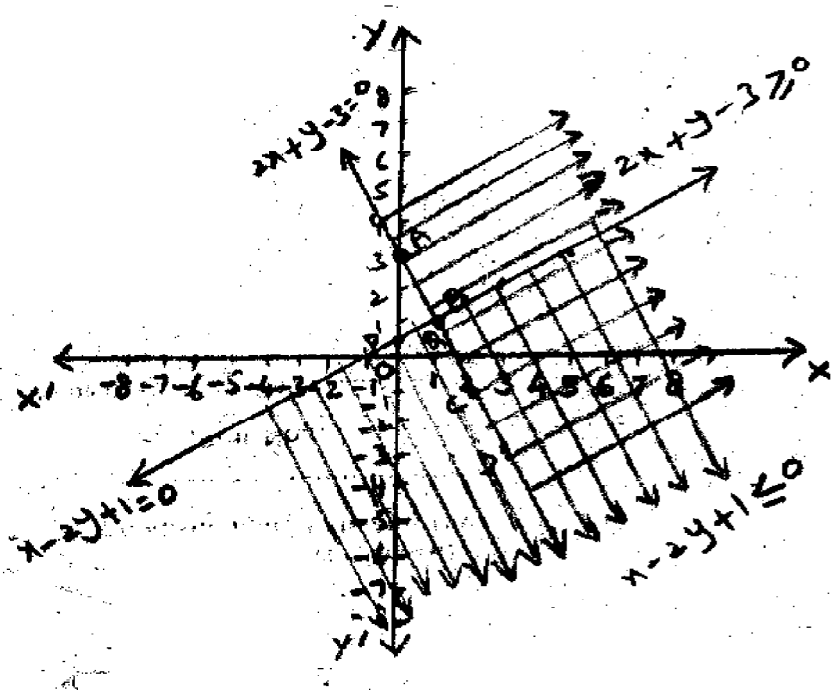
$x=3$ను తీసుకొనగా, $3-2y+1=0 \Rightarrow y=2$

$x=5$ను తీసుకొనగా, $5-2y+1=0 \Rightarrow y=3$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా

$x:$	0	1	3	5
$y:$	0.5	1	2	3

పైన వ్రాసిన రెండు పట్టికలలోని క్రమయుగ్మాలనుపయోగించి గ్రాఫులను గీద్దాం.



$2x+y-3=0$ సరళరేఖకు కుడివైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $2x+y-3\geq 0$ను సూచిస్తుంది. అదేవిధంగా $x-2y+1=0$ సరళరేఖకు క్రింది భాగాన ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $x-2y+1\leq 0$ను సూచిస్తుంది.

గ్రాఫులో పైన చూపిన విధంగా నిలువు, అడ్డు గీతలతో (ఉమ్మడు) చూపబడిన ప్రదేశము ఇచ్చిన రేఖీయ అసమీకరణములు $2x+y-3\geq 0, x-2y+1\leq 0$ల సాధనను సూచిస్తుంది.

4. $3x+4y\leq 12, 4x+3y\leq 12, x\geq 0, y\leq 0$

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణములు $3x+4y\leq 12, 4x+3y\leq 12, x\geq 0, y\leq 0$.

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణము $3x+4y\leq 12$నకు సంబంధించిన సమీకరణము $3x+4y=12$ను తీసుకొని, సమీకరణమును తృప్తి పరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$3x+4y=12$

$x=0$ను తీసుకొనగా, $3(0)+4y=12\Rightarrow y=3$

$x=2$ను తీసుకొనగా, $3(2)+4y=12\Rightarrow y=0.66$

$x=4$ను తీసుకొనగా, $3(4)+4y=12\Rightarrow y=0$

$x=8$ను తీసుకొనగా, $3(8)+4y=12\Rightarrow y=-3$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

$x:$	0	4	8
$y:$	3	0	-3

అదే విధంగా $4x+3y \le 12$ అసమీకరణమునకు సంబంధించిన సమీకరణము $4x+3y=12$ ను తీసుకొని సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$4x+3y=12$

$x=0$ ను తీసుకొనగా, $4(0)+3y=12 \Rightarrow y=4$

$x=3$ ను తీసుకొనగా, $4(3)+3y=12 \Rightarrow y=0$

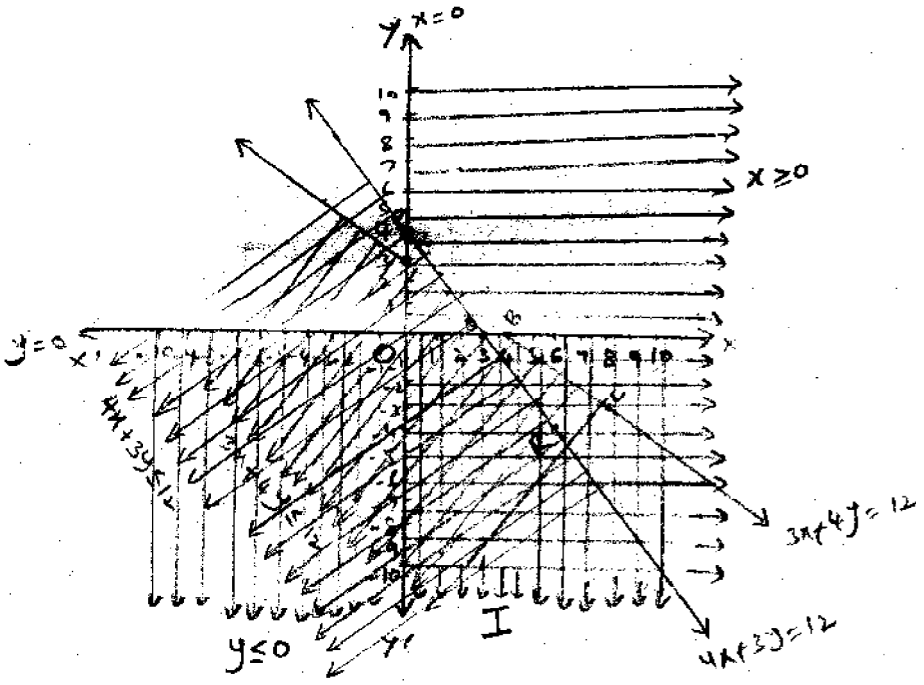
$x=6$ ను తీసుకొనగా, $4(6)+3y=12 \Rightarrow y=-4$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా,

$x:$	0	3	6
$y:$	4	0	-4

ఇప్పుడు $x \ge 0$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే x విలువ 0 లేదా 0 కన్నా ఎక్కువ ఉండాలి. దీనిని గ్రాఫులో $x=0$ రేఖకు కుడివైపున సూచిస్తారు. $y \le 0$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే y విలువ 0 లేదా 0 కన్నా తక్కువ ఉండాలి. దీనిని గ్రాఫులో $y=0$ రేఖకు క్రింది భాగాన సూచిస్తారు.

పైన పేర్కొన్న పట్టికలనుపయోగించి ఇచ్చిన అన్ని అసమీకరణములను సూచించే గ్రాఫును గీద్దాం.



$3x+4y=12$ సరళరేఖకు ఎడమవైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $3x+4y\le 12$ను సూచిస్తుంది. $4x+3y=12$ సరళరేఖకు ఎడమవైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $4x+3y\le 12$ను సూచిస్తుంది. $x=0$ సరళరేఖకు కుడివైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $x\ge 0$ను సూచిస్తుంది. $y=0$ సరళరేఖకు క్రింది భాగాన ఉన్న ప్రదేశము $y\le 0$ అనే అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

గ్రాఫులో పైన చూపిన విధంగా నాలుగు రకాల బాణము గుర్తు గీతలు కలిసి ఉన్న ప్రదేశము (I) ఇచ్చిన అసమీకరణములు $3x+4y\le 12, 4x+3y\le 12, x\ge 0, y\le 0$ సాధనను సూచిస్తుంది.

5. $2x+3y\ge 3,\ 3x+4y\le 18,\ 7x-4y+14>0,\ x-6y\le 3, x>0,\ y\ge 0$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణములు $2x+3y\ge 3, 3x+4y\le 18, 7x-4y+14>0, x-6y\le 3, x>0, y\ge 0$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణము $2x+3y\ge 3$ నకు సంబంధించిన సమీకరణము $2x+3y=3$ ను తీసుకొని సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$2x+3y=3$

$x=0$ ను తీసుకొనగా, $2(0)+3y=3\Rightarrow y=1$

$x=3$ ను తీసుకొనగా, $2(3)+3y=3\Rightarrow y=-1$

$x=6$ ను తీసుకొనగా, $2(6)+3y=3\Rightarrow y=-3$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా,

$x:$	0	3	6
$y:$	1	-1	-3

ఇప్పుడు, $3x+4y\le 18$ నకు సంబంధించిన సమీకరణము $3x+4y=18$ ను తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$3x+4y=18$

$x=2$ ను తీసుకొనగా, $3(2)+4y=18\Rightarrow y=3$

$x=-2$ ను తీసుకొనగా, $3(-2)+4y=18\Rightarrow y=6$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా,

$x:$	2	-2
$y:$	3	6

ఇప్పుడు $7x-4+14>0$ నకు సంబంధించిన సమీకరణము $7x-4+14=0$ ను తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$7x-4y+14=0$

$x=2$ ను తీసుకొనగా, $7(2)-4y+14=0 \Rightarrow y=7$

$x=-2$ ను తీసుకొనగా, $7(-2)-4y+14=0 \Rightarrow y=0$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా

$x:$	2	-2
$y:$	7	0

ఇప్పుడు $x-6y \le 3$ నకు సంబంధించిన సమీకరణము $x-6y=3$ ను తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x-6y=3$

$x=3$ ను తీసుకొనగా, $3-6y=3 \Rightarrow y=0$

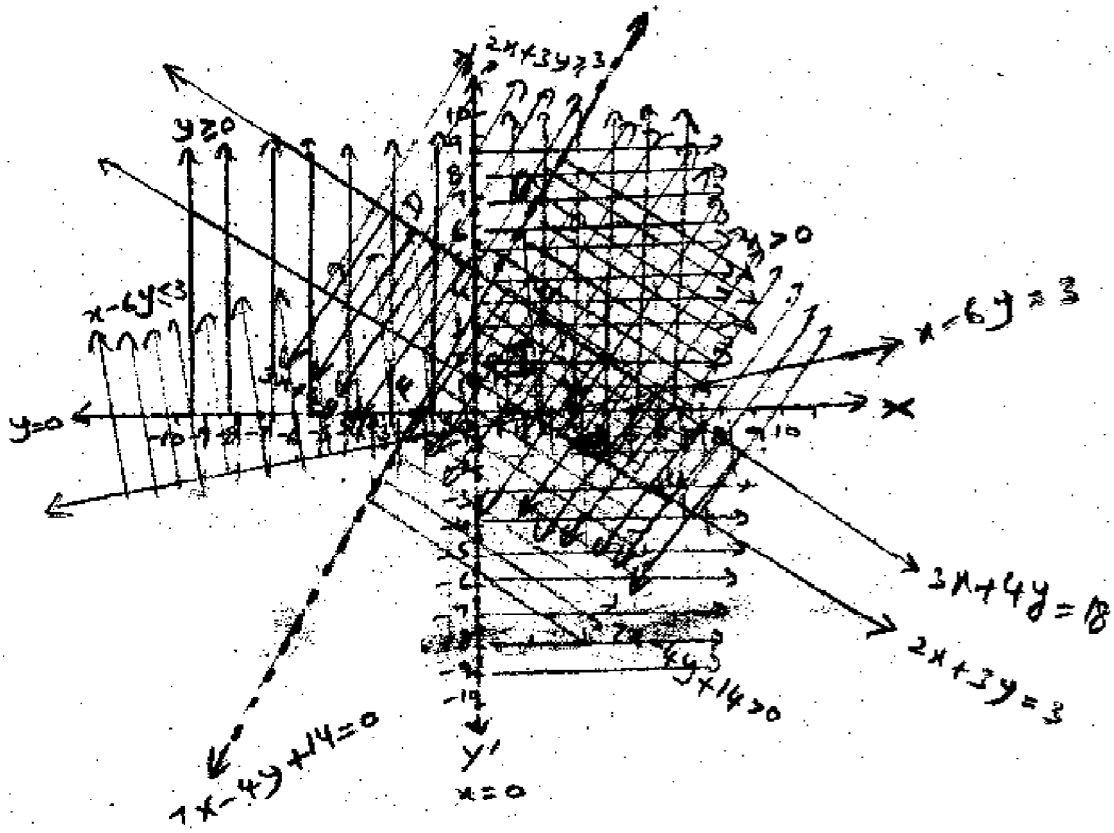
$x=-3$ ను తీసుకొనగా, $-3-6y=3 \Rightarrow y=-1$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

$x:$	3	-3
$y:$	0	-1

ఇప్పుడు $x>0$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే x విలువ 0 కన్నా ఎక్కువ అని తెలుస్తుంది. దీనిని గ్రాఫులో $x=0$ రేఖ తప్ప, $x=0$ రేఖ తప్ప, $x=0$ రేఖకు కుడి వైపున సూచిస్తారు. $y \ge 0$ అ సమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే y విలువ 0 లేదా 0 కన్నా ఎక్కువ ఉండాలి. దీనిని గ్రాఫులే $y=0$ రేఖకు పై భాగాన సూచిస్తారు.

పైన పేర్కొన్న పట్టికలను ఉపయోగించి ఇచ్చిన అన్ని అసమీకరణములను సూచించే గ్రాఫును గీద్దాం.



$2x+3y=3$ సరళరేఖకు కుడివైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $2x+3y \geq 3$ను సూచిస్తుంది. $3x+4y=18$ సరళరేఖకు ఎడమవైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $3x+4y \leq 18$ను సూచిస్తుంది. $7x-4y+14=0$ సరళ రేఖకు కుడివైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $7x-4y+14>0$ను సూచిస్తుంది. $x-6y=3$ సరళరేఖకు పై భాగాన ఉన్న ప్రదేశము $x-6y \leq 3$ అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది. $x=0$ రేఖ తప్ప $x=0$ రేఖకు కుడి భాగాన $x>0$ అసమీకరణాన్ని సూచించే ప్రదేశముంది. $y=0$ రేఖకు పైభాగాన ఉన్న ప్రదేశము $y \geq 0$ అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

గ్రాఫులో పైన చూపిన విధంగా ఆరు రకాల బాణము గుర్తు గీతలు కలిసి ఉన్న ప్రదేశము (I) ఇచ్చిన అ సమీకరణములు $2x+3y \geq 3, 3x+4y \leq 18, 7x-4y+14>0, x-6y \leq 3, x>0, y \geq 0$ ల సాధనను సూచిస్తుంది.

6. $x+3y \geq 10;\ x+2y \leq 3;\ x-2y \leq 2; x \geq 0, y \geq 0$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణములు $x+3y \geq 10;\ x+2y \leq 3;\ x-2y \leq 2; x \geq 0, y \geq 0$

మొదట ఇచ్చిన అసమీకరణము $x+3y \geq 10$నకు సంబంధించిన సమీకరణము $x+3y=10$ సమీకరణమును తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x+3y=10$

$x=1$ ను తీసుకొనగా, $1+3y=10 \Rightarrow y=3$

$x=4$ ను తీసుకొనగా, $4+3y=10 \Rightarrow y=2$

$x=7$ ను తీసుకొనగా, $7+3y=10 \Rightarrow y=1$

పైన కనుగొన్న x, y విలువలను పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా,

$x:$	1	4	7
$y:$	3	2	1

ఇప్పుడు $x+2y \le 3$ నకు సంబంధించిన సమీకరణము $x+2y=3$ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x+2y=3$

$x=1$ ను తీసుకొనగా, $1+2y=3 \Rightarrow y=1$

$x=3$ ను తీసుకొనగా, $3+2y=3 \Rightarrow y=0$

$x=5$ ను తీసుకొనగా, $5+2y=3 \Rightarrow y=-1$

పై విలువలను పట్టిక రూపములో వ్రాయగా,

$x:$	1	3	5
$y:$	1	0	-1

ఇప్పుడు $x-2y \le 2$ నకు సంబంధించిన సమీకరణము $x-2y=2$ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే x, y విలువలను కనుగొనవలెను.

$x-2y=2$

$x=2$ ను తీసుకొనగా, $2-2y=2 \Rightarrow y=0$

$x=4$ ను తీసుకొనగా, $4-2y=2 \Rightarrow y=1$

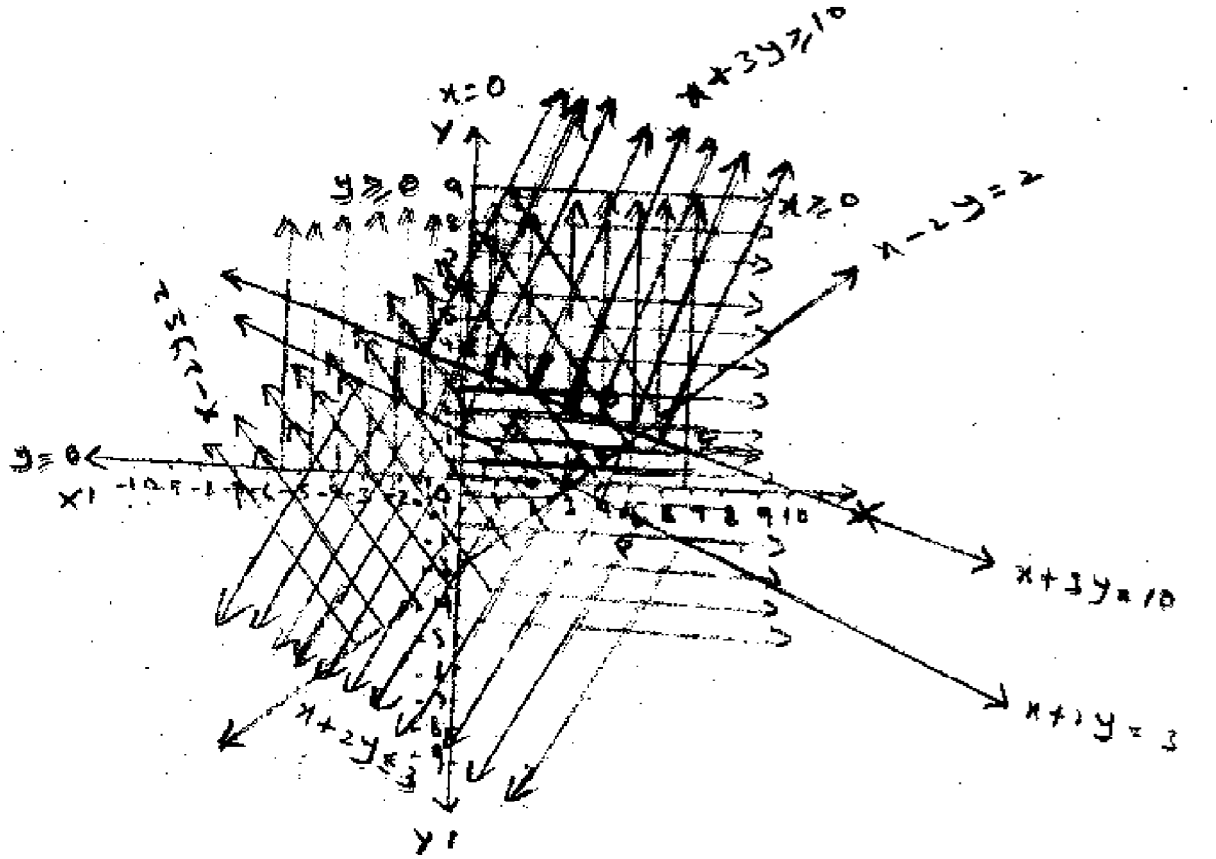
$x=6$ ను తీసుకొనగా, $6-2y=2 \Rightarrow y=2$

పై విలువలను పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా,

$x:$	2	4	6
$y:$	0	1	2

ఇప్పుడు $x \geq 0$ సమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే x విలువ 0 లేదా 0 కన్నా ఎక్కువ అని తెలుస్తుంది. దీనిని గ్రాఫులో $x = 0$ రేఖకు కుడివైపున సూచిస్తారు. $y \geq 0$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే y విలువ 0 లేదా 0 కన్నా ఎక్కువ అని తెలుస్తుంది. దీనిని గ్రాఫులో $y = 0$ రేఖకు పై భాగాన సూచిస్తారు.

పైన పేర్కొన్న పట్టికలనుపయోగించి అన్ని అసమీకరణములను సూచించే గ్రాఫును గీద్దాం.



$x + 3y = 10$ సరళరేఖకు పై భాగాన ఉన్న ప్రదేశము $x + 3y \geq 10$ అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది. $x + 2y = 3$ సరళరేఖకు క్రింది భాగాన ఉన్న ప్రదేశము $x + 2y \leq 3$ అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది. $x - 2y = 2$ సరళరేఖకు ఎడమవైపున ఉన్న ప్రదేశము $x - 2y \leq 2$ ను సూచిస్తుంది. $x = 0$ రేఖకు కుడివైపున ఉన్న ప్రదేశము $x \geq 0$ అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది. $y = 0$ రేఖకు పై భాగాన ఉన్న ప్రదేశము $y \geq 0$ అసమీకరణాన్ని సూచిస్తుంది.

గ్రాఫులో పైన చూపిన విధంగా ఐదు రకాల బాణము గుర్తు గీతలు కలిసి ఉన్న ప్రదేశము అసలు లేదు. కావున ఇచ్చిన అసమీకరణములు $x + 3y \geq 10;\ x + 2y \leq 3;\ x - 2y \leq 2; x \geq 0, y \geq 0$ లకు సాధన లేదు.

7. $x + y \geq 1, 2x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$

సాధన: 13వ సమస్య మాదిరి వలె ప్రయత్నించుము.

8. $x+y \geq 9, 3x+y \geq 12, x \geq 0, y \geq 0$

సాధన: 16వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

9. $2x+3y \leq 6, 3x+2y \leq 6$

సాధన: 14వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

10. $6x+5y \leq 150; x+5y \leq 80, x \leq 15, x \geq 0, y \geq 0$

సాధన: 14వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

11. $3x+2y \leq 24; x+2y \leq 16, x+y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$

సాధన: 14వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

12. $x+y \geq 3; 7x+6y \leq 42; x \leq 5, y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

సాధన: 15వ సమస్య మాదిరి వలే ప్రయత్నించుము.

13. $-1 \leq x \leq 3;\ 1 \leq y \leq 4$

సాధన: ఇచ్చిన అసమీకరణములు $-1 \leq x \leq 3;\ 1 \leq y \leq 4$ ఈ అసమీకరణములను ఈ విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$x \geq -1; x \leq 3; y \geq 1; y \leq 4$

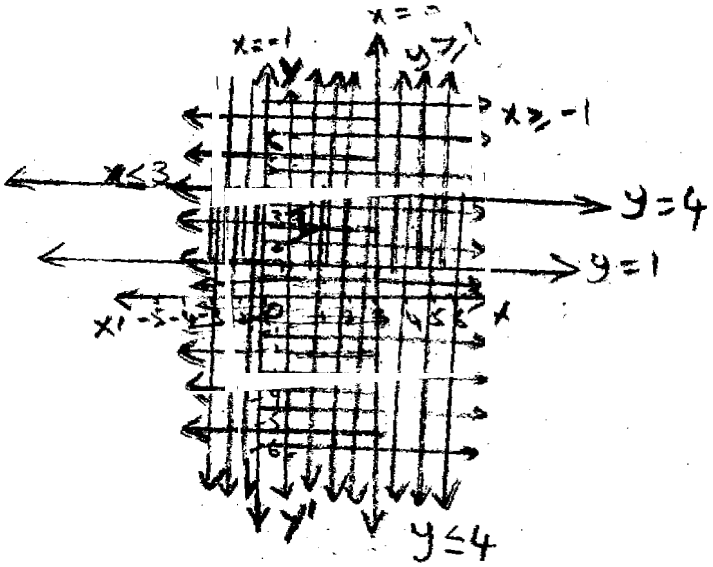
మొదట $x \geq -1$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే x విలువ -1 లేదా -1 కన్నా ఎక్కువ ఉండాలి.

$x \leq 3$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే x విలువ 3 లేదా 3 కన్నా తక్కువ ఉండాలి.

$y \geq 1$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే y విలువ 1 లేదా 1 కన్నా ఎక్కువ ఉండాలి.

$y \leq 4$ అసమీకరణాన్ని పరిశీలిస్తే y విలువ 4 లేదా 4 కన్నా తక్కువ ఉండాలి.

పైన పేర్కొన్న విధంగా అసమీకరణాలను సూచించే గ్రాఫును గీద్దాం.



$x=-1$ సరళరేఖకు కుడివైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $x \geq -1$ ను సూచిస్తుంది. $x=3$ సరళరేఖకు ఎడమవైపున ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $x \leq 3$ ను సూచిస్తుంది. $y=1$ సరళరేఖకు పై భాగాన ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $y \geq 1$ ను సూచిస్తుంది. $y=4$ సరళరేఖకు క్రింది భాగాన ఉన్న ప్రదేశము అసమీకరణము $y \leq 4$ ను సూచిస్తుంది.

గ్రాఫులో పైన చూపిన విధంగా నాలుగు రకాల బాణము గుర్తు గీతలు కలిసి ఉన్న ప్రదేశం (I) ఇచ్చిన అసమీకరణములు $-1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4$ ల సాధనను సూచిస్తుంది.

PRACTICE QUESTIONS

1. ఒక కంపెనీ A, B రకముల ఉత్పత్తులను తయారు చేస్తుంది. దీని తయారికి G, H అనే రెండు యంత్రాలను ఉపయోగించాలి. A రకం ఉత్పత్తులకు, G యంత్రముపై 3 గం.లు H యంత్రంపై 4గం.లు అలాగే, B రకం ఉత్పత్తులను G యంత్రముపై 4గం.లు H యంత్రంపై 5గం..లు అవసరమవుతాయి. G యంత్రం 18గంటలు. H యంత్రం 21 గంటలు మాత్రమే లభ్యమవుతాయి. A, B రకాల ఉత్పత్తులు ఒక్కొక్కదానికి వరుసగా రూ. 3,8లు లాభం వస్తాయి. దీనిని ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యగా వ్రాయండి?

2. ఒక ఫర్నీచరు డీలరు టేబుల్లు, కుర్చీలను అమ్ముతాడు. అతను తన షాపులో 60 వస్తువుల వరకు పెట్టుకోగలడు మరియు అతని వద్ద 5000 రూ॥ పెట్టుబడి కోసం ఉన్నవి. టేబులు ధర 250 రూ॥ మరియు కుర్చీ ధర 50రూ॥, అతను ఒక టేబుల్‌ను 50 రూ॥, కుర్చీని 15రూ॥ లాబానికి అమ్మగలడు. అతను కొన్న వస్తువులన్నింటిని అమ్మగలడనే భావంతో తన వద్దనున్న ధనంతో గరిష్ట లాభార్జనకు ఏవిధంగా పెట్టుబడి పెట్టాలి. దీనికి ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యను వ్రాయండి.

3. ఒక డైరీకి P, Q అనే చోట ప్లాంట్లున్నాయి. వాటిలో A, B లనే రెండు రకాలు ఒక కిలో పరిమాణములో ఉత్పత్తులను తయారు చేస్తారు. ఒకరోజులో ఆ ప్లాంట్లు తయారు చేయగల పాకెట్ల సంఖ్య దిగువనీయబడిన విధంగా ఉన్నది.

ప్లాంట్లు	ఉత్పత్తులు		డిమాండు ఉన్న పాకేట్లు
	P	Q	
A	2000	1500	20000
B	4000	6000	16000

ఏప్రిల్ మాసంలో ఒక మార్కెట్ సర్వే A రకం పాకెట్లు 2000కు, B రకం పాకెట్లు 16000కు డిమాండు ఉన్నట్లు తెలుపుచున్నది. P, Q ప్లాంట్ల నిర్వహణ ఖర్చు ఒక రోజుకు రూ. 4000 మరియు రూ. 7500. మార్కెట్ డిమాండుకు అనుగుణంగా ఒక్కో ప్లాంటు ఎన్ని రోజులు పనిచేస్తే ఉత్పత్తి ఖర్చును తగ్గించుకోవచ్చునో తెలుసుకోవడానికి ఏకఘాత ప్రణాళిక వ్రాయండి.

4. ఒక పరిశ్రమ A, B అనే రకాల ఉత్పత్తులను తయారు చేస్తుంది. A రకం వస్తువు తయారు కావడానికి ఒక యంత్రంను 1గం. 30ని.లు వడ్రంగిచే 2గం.లను వినియోగించాలి. అలాగే B రకం వస్తువు తయారు కావడానికి

ఒక యంత్రమును 2గం.లు వడ్రంగించే 1గం.30ని.లు వినియోగించాలి. ఒక వారంలో యంత్రాలన్ని 80గం.లు వడ్రంగిని 70 గం.లు వరకు వినియోగించుకోవచ్చు. ఒక్కో A రకం వస్తువుపై 5 రూపాయల లాభం B రకం వస్తువుపై 4 రూపాయల లాభం వస్తుంది. తయారు చేసిన వస్తువులన్నింటిని అమ్మగలిగితే ఒక వారంలో ఏ రకం వస్తువులను ఎన్నింటిని తయారు చేస్తే గరిష్టంగా లాభం వస్తుంది. ఈ సమస్యకు ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యను వ్రాయండి.

5. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టికరించుము $z = 3x_1 + 4x_2$

$x_1 + x_2 \le 40$

$x_1 + 2x_2 \le 60$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ నిబంధనలకు లోబడి

6. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధించుము.

కనిష్టీకరించుము $Z = 60x_1 + 40x_2$

$3x_1 + x_2 \ge 24$

$x_1 + x_2 \ge 16$

$x_1 + 3x_2 \ge 24$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

7. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టికరించుము $Z = 2x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \le 400$

$2x_1 + x_2 \le 600$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

8. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టీకరించుము $Z = 20x_1 + 30x_2$

$x_1 + x_2 \le 12$

$5x_1 + 2x_2 \le 50$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

9. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టీకరించుము $Z = 50x_1 + 15x_2$

$5x_1 + x_2 \le 100$

$x_1 + x_2 \leq 60$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

10. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టీకరించుము $Z = 4000x_1 + 7500x_2$

$4x_1 + 3x_2 \geq 40$

$2x_1 + 3x_2 \geq 8$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

11. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టీకరించుము $Z = 25x_1 + 20x_2$

$3x_1 + 6x_2 \leq 50$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

12. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టీకరించుము $Z = 9x_1 + 10x_2$

$11x_1 + 9x_2 \leq 9900$

$7x_1 + 12x_2 \leq 8400$

$3x_1 + 8x_2 \leq 4800$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

13. క్రింది సమస్యను రేఖాపట పద్ధతిలో సాధింపుము.

గరిష్టీకరించుము $Z = 22x_1 + 18x_2$

$x_1 + x_2 \leq 20$

$3x_1 + 2x_2 \leq 48$ నిబంధనలకు లోబడి

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

14. బియ్యము, గోధుమలు కొనడానికి ఒక వ్యాపారి వద్ద రూ. 1500 మాత్రమే వున్నాయి. బస్తా బియ్యం ధర రూ. 150, బస్తా గోధుమ ధర రూ. 120. వ్యాపారి తన ఇంట్లో 10 బస్తాలను మాత్రమే వుంచుకోగలడు మరియు అతనికి ఒక్కొక్క బియ్యపు బస్తాపై రూ. 11 ఒక్కొక్క గోధుమ బస్తాపై రూ. 8లాభం వస్తుంది. గరిష్ట లాభాన్ని పొందడానికి ఈ సమస్యను ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యగా వ్రాయండి.

15. ఒక పశువుల వ్యాపారి తన వద్ద నున్న రూ. 6000లతో ఆవులను, బర్రెలను కొనదలిచాడు. ఆవు ధర రూ. 900, బర్రె ధర రూ. 1200. ఒక వారానికి 8 క్వింటాళ్ల పశుదాణాని మాత్రమే అతను నిలువ చేసుకోగలడు. ఒక రోజుకు

ఆవు 10 లీటర్లు, బర్రె 20 లీటర్లు పాలను ఇస్తాయి. లీటరు ఆవు పాలపై 50 పైసలు, లీటరు బర్రె పాలపై 90 పైసలు లాభం వస్తుంది. ఒక వారానికి ఆవు ఒక క్వింటాలు, బర్రె రెండు క్వింటాళ్ల దాణా తీసుకుంటాయి. ఆవులను, బర్రెలను ఎన్నింటిని కొంటే అతనికి గరిష్టంగా లాభం వస్తుందో తెలుసుకోవడానికి ఈ సమస్యకు ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళిక సమస్యను వ్రాయండి. (ఆవులు, బర్రెల నుండి పితికిన మొత్తం పాలను అమ్మకోగలడు.)

16. ఒక సబ్బుల ఫ్యాక్టరీలో AB అనే యంత్రాలనుపయోగించి రెండు రకాల సబ్బులను తయారు చేస్తారు. మొదటి రకం సబ్బు తయారికి A యంత్రాలన్ని 2 నిమిషాలు. B యంత్రాన్ని 3 నిమిషాలు ఉపయోగిస్తారు. అలాగే రెండవ రకం సబ్బు తయారీకి A యంత్రాన్ని 3 నిమిషాలు, B యంత్రాన్ని 5 నిమిషాలు ఉపయోగిస్తారు. ప్రతి యంత్రమును రోజుకు 8గంటలకు మించి ఉపయోగించలేరు. మొదటి, రెండవ రకం సబ్బులను అమ్మడం ద్వారా వచ్చే లాభం వరుసగా 25 పైసలు మరియు 50 పైసలు. గరిష్ట లాభార్జనకు ఫ్యాక్టరీలో ఏ రకం సబ్బులను ఎన్నింటిని తయారు చేయాలి (ఫ్యాక్టరీ యజమాని తయారు చేసిన సబ్బులనన్నింటిని అమ్ముకోగలడు.) ఈ సమస్యకు ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళిక సమస్యను వ్రాయండి.

17. రెండు సంఖ్యల భేదము 4 కన్న ఎక్కువగాను, మొదటి సంఖ్యకు 3 రెట్లు మరియు రెండవ సంఖ్యను కూడగా వచ్చే మొత్తము 9కి మించకుండా వుండేటువంటి రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలను వాటి మొత్తం గరిష్టమయ్యేటట్లు కనుక్కోండి.

18. E,F లనే ఆహార పదార్థాలలో A,B లనే విటమిన్లు ఉన్నాయి. ఒక యూనిట్ E ఆహారంలో 2యూనిట్లు, A విటమిన్, 3యూనిట్ల B విటమిన్ వుంటుంది. అలాగే ఒక యూనిట్ F ఆహారంలో 4 యూనిట్ల A విటమిన్. 2 యూనిట్ల విటమిన్ B వుంటుంది. ఒక యూనిట్ E,F ఆహార పదార్థాల ధరలు వరుసగా రూ. 5 మరియు రూ. 2.50 ఒక వ్యక్తికి ఒక రోజుకు కనీసం A,B విటమిన్లు వరుసగా 40 మరియు 50 యూనిట్లు అవసరమవుతాయి. ఒక రోజుకు తీసుకొన్న A,B విటమిన్లు కనీసం మించినా ఎట్టి హాని వుండదనుకుని, E,F ఆహారాల మిశ్రమాన్ని కనీస ఖర్చుతో కనీస A,B విటమిన్లు వుండేటట్లు ఎలా తీసుకోవాలి. ఈ సమస్యకు ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యను వ్రాయండి.

19. బియ్యము గోధుమలు కొనడానికి ఒక వ్యాపారి వద్ద రూ. 15000 ఉన్నవి. బస్తా బియ్యం ధర రూ. 1800, బస్తా గోధుమలు ధర రూ. 1200. వ్యాపారి తన కోట్లో 10 బస్తాల వరకు నిలువ చేయగలడు. మరియు ఒక్కొక్క బియ్యం బస్తాపై రూ. 110, గోధుమ బస్తాపై రూ. 80 లాభం వస్తుంది. వ్యాపారి తన వద్ద నున్న మొత్తాన్ని ఏవిధంగా ఖర్చు చేస్తే అత్యధిక లాభం వస్తుంది.

20. ఒక యంత్రం A లేదా B అనే వస్తువులను తయారు చేస్తుంది. A వస్తువు తయారీకి 2 యూనిట్ల రసాయనాలు, 1 యూనిట్ కాంపౌండు, B వస్తువు తయారీకి 1 యూనిట్ రసాయనం, 2 యూనిట్ల కాంపౌండు అవసరమవుతుంది. 800 యూనిట్ల రసాయనాలు 1000 యూనిట్ల కాంపౌండ్ మాత్రమే లభ్యమవుతుంది. A,B వస్తువులపై లాభాలు వరుసగా రూ. 30 మరియు రూ. 20 గరిష్ట లాభార్జనకు A,B లకు ఎన్నెన్ని యూనిట్ల కేటాయించాలి. గరిష్టలాభాన్ని గణించండి.

7

ప్రస్తారాలు, సంయోగాలు

నేను ఒక రోజు బెంగుళూరు నుండి అలహాబాదుకు రైలులో ప్రయాణించదలచాను. బెంగుళూరు నుండి అలహాబాదుకు నేరుగా రైలు లేదు గాని బెంగుళూరు నుండి ఇటార్సికి, ఇటార్సి నుండి అలహాబాదుకు రైలు వున్నదని రైల్వే టైం టేబుల్ ద్వారా తెలుసుకున్నాను. ఇపుడు నేను బెంగుళూరు నుండి అలహాబాదుకు ఎన్ని విధాలుగా ప్రయాణించ గలను? ఈ గణన సమస్య (Counting Problem) సంయోగాత్మక శాస్త్రం (Combinatries) అనే గణిత శాస్త్ర విభాగము క్రిందికి వస్తుంది.

నీవు మీ వంట గదిలోని ఐదు ఊరగాయ జాడీలను ఒక అల్మరాలో పెట్టదలచుకున్నావనుకుందాం. అందులో నీవు ఎక్కువగా వుపయోగించే మూడు జాడీలను బాగా అందుబాటులో వుండేటట్లు, మిగిలిన రెండింటిని కొద్దిగా లోపలికి పెట్టదలచుకుంటే, ఈ పనిని ఎన్ని రకాలు గా చేయగలవు.

మరొక సందర్భంలో మీ యింటికి రంగులు వేయదలచుకున్నావనుకుందాం. ఒకానొక రంగు దొరకనపుడు కొన్ని రకాల రంగులను కలిపి కావలసిన రంగును తెప్పించుకోవచ్చనుకుందాం. ఇలా కొత్త రంగును సృష్టించడానికి ఏ రంగులు కలిపామన్నది ముఖ్యము కాని వాటిని ఏవరుసలో కలిపామన్నది కాదు. ఇది నూతన రంగును తెప్పించడానికి చేసిన రంగులలో సంయోగము లేదా రంగుల ఎన్నిక.

ఇలాంటిదే మరొక ఉదాహరణ, నీవు ఎక్కడికైనా వెళ్ళదలచుకున్నప్పుడు నీకున్న దుస్తులన్నింటిని తీసుకెళ్ళ వలసిన అవసరముండక పోవచ్చు. నీకు 4 జతల ప్యాంట్లు, షర్టులలో 2 జతలు తీసుకెళ్ళవచ్చు. ఈ సందర్భంలో నీవు 4 జతల బట్టలలో 2 జతలను ఏ వరుస తీసుకున్నావన్నది ముఖ్యంకాదు ఈ ఉదాహరణలన్నింటిలోను యిచ్చిన పనిని ఎన్ని విధాలుగా చేయవచ్చునో మనం తెలుసుకోవలసివున్నది.

ఈ పాఠంలో మనం కొన్ని సరళమైన గణన పద్ధతులను, వాటిని ఉపయోగించి కొన్ని సులభమైన గణన సమస్యలను సాధిద్దాం.

లక్ష్యాలు

ఈ పాఠము చదివిన తర్వాత నీవు

- ఇచ్చిన వస్తువులను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చ గలము.
- ప్రాథమిక గణన సమస్యను ప్రవచించడము
- $n\,!$ ను నిర్వచించి, వివిధ n విలువలకు $n\,!$ ను గణించడము.
- ప్రస్తారమనగా అమరిక అని ప్రవచించి, ${}^{n}\mathrm{P}_{r}$ అర్థాన్ని వ్రాయగలగడం
- ${}^{n}\mathrm{P}_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ అని ప్రవచించి, దీనినుపయోగించి సమస్యలను సాధించడము

- (i) $(n+1)^nP_r = n+1\ P_n$ (ii) $^nP_{r+1} = (n-r)\ ^nP_r$ అని చూపడం
- సంయోగమనగా ఎన్నిక అని తెల్పి, ^nC_r కు అర్థాన్ని తెలియజేయడం
- ప్రస్తారానికి సంయోగానికి వ్యత్యాసాన్ని తెలుసుకోవడం
- $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ని ఉత్పాదించి, సమస్యల సాధనకు ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించడం
- $^nP_r = r!\ \ ^nC_r$ ను ఉత్పాదించడం
- $^nC_r = \ ^nC_{n-r}$ అని సరిచూడడం
- $^nC_r + {}^nC_{r-1} = n+1\ C_r$ ను ఉత్పాదించి, సమస్యల సాధనతో దీనినుపయోగించడం.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. ఒక నాణేమును మూడుసార్లు ఎగుర వేస్తే వచ్చే మొత్త ఘటనలెన్ని?

జ: $2^3 = 8$

2. నీకు 3 చొక్కాలు, 4 ప్యాంట్లు వుండి ఏ చొక్కాను, ఏ ప్యాంటుతోనైనా నీవు ధరించగలిగితే నీవు ఎన్ని రకాలుగా చొక్కా, ప్యాంటులను ఎన్నుకోగలవు.

జ: $3 \times 4 = 12$ విధాలుగా.

3. ఒక యాత్రికురాలు మరొక దేశానికి ఓడలో వెళ్ళి, విమానంలో తిరిగి రావాలనుకొంది. వెళ్ళడానికి ఆమెకు 5 ఓడలు, రావడానికి 4 విమానాలు అందుబాటులో వుంటే, ఆమె ఎన్ని రకాలుగా ప్రయాణం చేయగలదు.

జ: $5 \times 4 = 20$

4. 1) రెండు స్థానాలను ఒక దాన్ని పురుషునితోను, రెండవ దాన్ని స్త్రీతోను, 4గురు పురుషులు, 12 మంది స్త్రీల నుండి ఎన్ని రకాలుగా పూరించవచ్చు?

జ: $^4P_1 \times {}^{12}P_1 = 4 \times 12 = 48$

2) ఒక గదికి ఫ్లోరింగు, పెయింటింగ్ చేయవలసి వున్నది. ఫ్లోరింగుకు 3 రంగులతోను, గది గోడలను 12 రంగులతోను చేయవచ్చు. రంగుల ఎన్నికపై ఏ నిబంధన లేనిచో ఎన్ని రకాలుగా ఫ్లోరింగ్‌ను, గది గోడలకు వేయవచ్చు?

జ: $3 \times 12 = 36$

5. **ఒక బడిలో 5గురు ఆంగ్ల టీచర్లు, 7గురు హిందీ టీచర్లు, 3 గురు ఫ్రెంచి టీచర్లు ఉన్నారు. ఒక్కో భాషకు సంబంధించిన టీచరును ఒక్కొక్కరిని తీసుకొని ముగ్గురు సభ్యులు గల కమిటీలను ఎన్నింటిని ఏర్పరచవచ్చు.**

జ: $^5C_1 \times ^3C_1 \times ^7C_1 = 5\times7\times3 = 105$

6. **ఒక కళాశాలలోని యూనియన్ ఎన్నికలలో 4గురు విద్యార్థులు అధ్యక్షపదవికి, 5గురు ఉపాధ్యక్ష పదవికి, 3గురు కార్యదర్శి పదవికి పోటీపడుచున్నారు. రాగల ఫలితాల సంఖ్యను కనుక్కోండి.**

జ: $^4C_1 \times ^5C_1 \times ^3C_1 = 4\times5\times3 = 60$

7. ఎ) 1) $6!$ 2) $7!$ 3) $7!+3!$ 4) $6!\times4!$ 5) $\frac{5!}{3!2!}$ లను గణించండి.

జ: 1) $6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

2) $7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 7\times720 = 5040$

3) $7!+3! = 5040+6 = 5046$

4) $6!\times4! = 6\times5\times4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1 = 720\times24 = 17280$

5) $\frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = 10$

బి) క్రింది ప్రవచనాలలో ఏది నిజం?

1) $2!\times3! = 6!$ 2) $2!+4! = 6!$ 3) $3!:4!$ను భాగిస్తుంది. 4) $4!-2! = 2!$

జ: 1) $2!\times3! = 2\times1\times3\times2\times10 = 12$, కానీ $6! = 720$ కావున $2!\times3! \neq 6!$

2) $2!+4! = 2\times1+4\times3\times2\times1 = 2+24 = 26$ కానీ $6! = 720$

$\therefore 2!+4! \neq 6!$

3) $4! = 4\times3\times2\times1,\ 3! = 3\times2\times1,$ కావున $3!, 4!$ని బాగిస్తుంది.

4) $4!-2! = 4\times3\times2\times1-2\times1 = 22$, కానీ $2! = 2$

$\therefore 4!-2! \neq 2!$

8. **ఒక గదిలో 5గురు విద్యార్థులున్నారు, 5 పడకలను వారికి ఎన్ని రకాలుగా కేటాయించవచ్చును?**

జ: $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

9. *TRIANGLE* పదంలోని అక్షరాలను ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: $8! = 40320$

10. **1,2,3,4**ల నుండి ఎన్ని నాలుగంకెల విభిన్న సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చు?

జ: 4! లేదా $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

11. 1) ${}^4P_2$ 2) ${}^6P_3$ 3) $\dfrac{{}^4P_3}{{}^3P_2}$ 4) ${}^6P_3 \times {}^5P_2$ 5) ${}^nP_n$ విలువలు కనుగొనుము.

నోట్ : ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

జ: 1) $${}^4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

2) $${}^6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

3) $$\frac{{}^6P_3}{{}^3P_2} = \frac{\dfrac{4!}{(4-3)!}}{\dfrac{3!}{(3-2)!}} = \frac{\dfrac{4!}{1!}}{\dfrac{3!}{1!}} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

4) $${}^6P_3 \times {}^5P_2 = \frac{6!}{(6-3)!} \times \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{6!}{3!} \times \frac{5!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 2400$$

5) $${}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

12. క్రింది ప్రవచనాలు నిజమో కాదో తెలపండి.

1) $6 \times {}^5P_2 = {}^6P_3$ 2) $4 \times {}^7P_3 = {}^7P_4$ 3) ${}^4P_2 \times {}^4P_2 = {}^{12}P_4$ 4) ${}^3P_2 \times {}^4P_2 = {}^7P_4$

జ: 1) $6 \times 5P_2 = 6 \times \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120$ కానీ

$${}^{6}P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6\times5\times4 = 120$$

$\therefore 6\times{}^{5}P_2 = {}^{6}P_3$ నిజం

2) $$4\times{}^{7}P_3 = 4\times\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 840$$

కానీ $${}^{7}P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7\times6\times5\times4 = 840$$

$\therefore 4\times{}^{7}P_3 = {}^{7}P_4$

3) $${}^{4}P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4\times3 = 12$$ కావున

$${}^{4}P_2\times{}^{4}P_2 = 12\times12 = 144$$

కానీ $${}^{12}P_4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12\times11\times10\times9 = 11880$$

కావున $\therefore {}^{4}P_2\times{}^{4}P_2 \neq {}^{12}P_4$

4) ${}^{3}P_2\times{}^{4}P_2 = {}^{7}P_4$

$${}^{3}P_2\times{}^{4}P_2 = \frac{3!}{(3-2)!}\times\frac{4!}{(4-2)!} = 3\times2\times1\times4\times3 = 72$$

$${}^{7}P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7\times6\times5\times4 = 840$$

$\therefore {}^{3}P_2\times{}^{4}P_2 \neq {}^{7}P_4$

13. నీ వద్ద గల 7 దీపావళి గ్రీటింగులను నీ 4గురు మిత్రులకు ఎన్ని విధాలుగా పంపగలవు.

జ: $${}^{7}P_4\,(or)\,\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 840$$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. ఆంగ్ల భాషలో అచ్చులు లేని మూడక్షరాల పదాలు గరిష్టంగా ఎన్ని వుంటాయి?

జ: మొత్తం అక్షరాలు $=26$ అందులో అచ్చులు 5. మిగిలినవి $26-5=21$ నుండి 3 అక్షరాల పదాలు

$${}^{21}P_3\,(or)\frac{21!}{18!}=21\times20\times19=7980$$

2. ఆంగ్ల భాషలో a తప్ప మరే ఇతర అచ్చులు లేని మూడక్షరాల పదాలు గరిష్టంగా ఎన్ని వుంటాయి?

జ: ఆంగ్ల భాషలో మొత్తం అక్షరాలు $=26$. అందులో a తప్ప మిగిలిన అచ్చులు $4(e.i.o,u)$ పోను మిగిలినవి

$26-4=22$ వీటి నుండి ఏర్పరిచే 3 అక్షరాల పదాలు $={}^{22}P_3=\frac{22!}{19!}=22\times21\times20=9240$

3. ${}^{n}P_{n-1}={}^{n}P_n$ అని చూపుము.

జ: $${}^{n}P_{n-1}=\frac{n!}{(n-(n-1))!}=\frac{n!}{(n-n+1)!}=n!$$

కానీ $${}^{n}P_n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

$\therefore {}^{n}P_{n-1}={}^{n}P_n$ అగును.

సూచన : $0!=1!=1$

4. *UNBIASED* పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి ఏ రెండు అచ్చులు ప్రక్క ప్రక్కన ఎన్ని పదాలను ఏర్పరచగలవు?

జ: పై పదంలోని మొత్తం అక్షరాలు $=8$

ఇందులో అచ్చులు $4(AEIU)$

వీటిలో ఏ రెండు అచ్చులు ప్రక్కప్రక్కన లేకుండా ఉండుటకు ముందుగా 4 హల్లులను $4!$ రకాలుగా ఏర్పరచి వాటి మధ్యలో వున్న 5 ఖాళీలలో 4 అచ్చులను ${}^{5}P_4$ అమర్చవచ్చును. $\times V\times V\times V\times V\times$

$\therefore$ ఏ రెండు అచ్చులు ప్రక్క ప్రక్కన కాకుండా అమర్చు విధాలు

$$4!\times{}^{5}P_4\,(or)(4\times3\times2\times1)\times\frac{5!}{(5-4)!}=24\times5!$$

$$24\times5\times4\times3\times2\times1=24\times120=2880$$

5. 4 గణితం, 5 ఆంగ్లం, 6 సైన్స్ పుస్తకాలున్నవి, ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒక చోట కలిసి వుండేటట్లు గణిత పుస్తకాల తర్వాత, ఆంగ్ల పుస్తకాలు ఆంగ్ల పుస్తకాల తర్వాత, సైన్స్ పుస్తకాలు వుండేటట్లు ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు.

జ: 4 గణిత పుస్తకాలను $4!$ గాను, 5 ఆంగ్ల పుస్తకాలను $5!$ గాను, 6 సైన్స్ పుస్తకాలను $6!$ గాను ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్ని ఒకే చోట వుండేటట్లు అమర్చు విధాలు

$4!\times 5!\times 6!(or)24\times 120\times 720\times = 2073600$

6. 3 ఫిజిక్స్, 4 కెమిస్ట్రీ, 5 బాటనీ, 3 జువాలజీ పుస్తకాలను ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒకే చోట కలిసి వుండేటట్లు ఎన్నిరకాలుగా అమర్చవస్చు.

జ: 3 ఫిజిక్స్ పుస్తకాలను $3!$ గాను, 4 కెమిస్ట్రీ పుస్తకాలను $4!$ గాను, 5 బాటనీ పుస్తకాలను $5!$ గాను, 3 జువాలజీ పుస్తకాలను $3!$ గాను అమరుస్తూ ఒక శాస్త్రానికి సంబంధించిన పుస్తకాలన్నీ ఒకే చోట కల్పి వుండేటట్లు అమర్చు విధానాలు $3!\times 4!\times 5!\times 3!$ మరియు 4 రకాల పుస్తకాలను అంతర్గతంగా $4!$ రకాలుగా మొత్తం అమర్చే విధాలు

$3!\times 4!\times 5!\times 3!\times 4!(or)2488320$

7. 7 కుర్చీలలో 4గురు అబ్బాయిలు, 3గురు అమ్మాయిలను ఏ ఇద్దరు అబ్బాయిలు ప్రక్క ప్రక్కన రాకుండా వుండేటట్లు ఎన్ని రకాలుగా కూర్చోబెట్టవచ్చు.

జ: మొత్తం కుర్చీలు 7. అందులో ఏ ఇద్దరు బాలురు ప్రక్క, ప్రక్కన రాకుండా వుండడానికి ముందుగా సరి స్థానాలలో 3గురు అమ్మాయిలను 3!గా కూర్చోబెట్టి మిగిలిన 4 బేసి స్థానాలలో 4గురు అబ్బాయిలను 4!గా కూర్చోబెట్టవచ్చు.

$\therefore$ ఏ ఇద్దరు బాలురు ప్రక్క ప్రక్కన రాకుండా అమర్చే విధాలు : $3!4! = 3\times 2\times 4\times 3\times 2 = 144$

8. క్రింది వాటిని గణించుము.

1) ${}^{13}C_3$ 2) ${}^{8}C_2 + {}^{8}C_3$ 3) $\dfrac{{}^{9}C_3}{{}^{6}C_3}$ 4) ${}^{9}C_5$

జ: నోట్ : $${}^{n}C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1) $${}^{13}C_3 = \frac{13!}{3!(13-3)!} = \frac{13!}{3!10!}$$ లేదా

$$\Rightarrow \frac{13\times 12\times 11}{3\times 2\times 1} = 286$$

2) $^8C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$

$^8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

$\therefore {}^8C_2 + {}^8C_3 = 28 + 56 = 84$

3) $^9C_3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

$^6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

$\therefore \frac{^9C_3}{^6C_3} = \frac{84}{20} = \frac{21}{5}$

4) $^9C_5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times}{4\times3\times2\times1} = 126$

9. క్రింది ప్రవచనాలను సరిచూడండి.

1) ${}^4C_3 \times {}^3C_2 = {}^{12}C_6$ 2) ${}^4C_2 + {}^4C_3 = {}^8C_5$

3) ${}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 = {}^{11}C_3$

జ: 1) $^4C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

$^3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3$

$\therefore {}^4C_3 \times {}^3C_2 = 4\times3 = 12$ ..... (1)

$^{12}C_6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = \frac{12!}{6!6!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2}$

$^{12}C_6 = 924\ldots$ ఇది అసత్యం.

2) $^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

$^4C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

$\therefore {}^4C_2 + {}^4C_3 = 6+4 = 10$ ..... (1)

కానీ $^8C_5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$ ..... (2)

కావున $^4C_2 + {}^4C_3 \neq {}^8C_5$

3) $^{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$

$^{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2} = 120$

$\therefore {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 = 45+120 = 165$ .....(1)

$^{11}C_3 = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11\times10\times9}{3\times2} = 165$ ..... (2)

$\therefore$ 1, 2ల నుండి $^{10}C_2 + {}^{10}C_3 = {}^{11}C_3$

10. ఒక వృత్తంపై 14 బిందువులున్నవి. ఆ బిందువులను కలుపుతూ ఎన్ని పంచభుజాలను గీయవచ్చు.

జ: మొత్తం బిందువులు $n = 14$, కానీ ఈ బిందువులను కలుపుతూ పంచ భుజాలు గీయడానికి వీలయ్యే విధాలు $= {}^nC_r = {}^{14}C_5$ లేదా 2002.

11. $\{1,3,5,7,9,11.....23\}$ సమితికి 3 మూలకాలు కలిగిన ఉప సమితులు ఎన్ని వుంటాయి?

జ: సమితిలోని మొత్తం మూలకాలు $= 12$

వీటి నుండి 3 మూలకాలు కలిగిన ఉప సమితులు $= {}^{12}C_3\,(or)\,220$

12. ఒక పండ్ల బుట్టలో 5 ఆపిల్, 7 అనాస, 11 ఆరేంజ్ పళ్ళు ఉన్నాయి. ఆ బుట్ట నుండి రకానికి ఒకటి చొప్పున 3 పళ్ళను ఎన్ని రకాలుగా తీసుకొనవచ్చును.

జ: రకానికి ఒకటి చొప్పున 3 పళ్ళను తీసుకొనే విధాలు

$= 5C_1 \times 7C_1 \times 11C_1 = 5 \times 7 \times 11 = 385$

13. $^nC_{n-1}$ **విలువ కనుగొనుము.** $^nC_{n-1} = ^nC_n$ **అనగా**

జ: $^nC_{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = n$ కానీ $^nC_n = 1$

$^nC_{n-1} \neq ^nC_n$

14. $^nC_n = ^nC_0$ **అని చూపండి.**

జ: $^nC_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

$= ^nC_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

$\therefore ^nC_n = ^nC_0$

15. గణించుము.

1) $^9C_5$ 2) $^{14}C_{10}$ 3) $^{13}C_9$ 4) $^{15}C_{12}$

జ: 1) $^9C_5 = \dfrac{9!}{5!(9-5)!} = \dfrac{9!}{5!4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 126$

2) $^{14}C_{10} = \dfrac{14!}{10!(14-10)!} = \dfrac{14!}{10!4!} = \dfrac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2} = 1001$

3) $^{13}C_9 = \dfrac{13!}{9!(13-9)!} = \dfrac{13!}{9!4!} = \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 715$

4) $^{15}C_{12} = \dfrac{15!}{12!(15-12)!} = \dfrac{15!}{12!3!} = \dfrac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} = 455$

16. $^7C_5 + ^7C_2$ **గణించుము.**

జ: $^7C_5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\times6}{2} = 21$

$^7C_2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7\times6}{2} = 21$

$\therefore {}^7C_5 + {}^7C_2 = 21 + 21 = 42$

17. 1,2,3,4,5 మరియు 6 సంఖ్యలను ముఖంపై గుర్తించిన రెండు పాచికలను దొర్లించిరి. వాటిపై ముఖాలపై ఎన్ని రకాల ఫలితాలు వచ్చును?

జ: 6 ముఖాల పాచికను దొర్లించే ప్రయోగంలో మొత్తం ఫలితాలు $=6$, కావున రెండు పాచికలను దొర్లించిన ప్రయోగంలోని మొత్తం ఫలితాలు $=6^2 = 6\times6 = 36$

18. ఒక హోటల్ నందు 3 కాయగూరలు, 2 సలాడ్ల మరియు 2 రకాల రొట్టె ముక్కలు కలవు. ఒక కొనుగోలు దారుడు 1 కాయగూర, 1 సలాడు, 1 రొట్టెను ఎన్ని రకాలుగా కొనగలడు.

జ: మూడు కాయగూరల నుండి ఒక దానిని $^3C_1$ మిధాలుగాను, 2 సలాడ్ల నుండి 1 దానిని $^2C_1$ విధాలుగాను, 2 రొట్టెల నుండి ఒక దానిని $^2C_1$ విధాలుగాను కొనగలడు.

$\therefore$ ఈ మూడు రకాలను కొనే విధాలు : $^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^2C_1$

$= 3\times2\times2 = 12$

19. 7 మంది విద్యార్థులను ఒక వరుసలో 7 స్థానాలలో ఎన్ని రకాలుగా కూర్చో పెట్టవచ్చును?

జ: 7 గురు విద్యార్థులను వరుస క్రమంలో 7 స్థానాలలో కూర్చోపెట్టే విధాలు

$= {}^7C_{10} = 7!(or)5040$

20. $ALTRUISM$ పదంలోని అక్షరాలను ఉపయోగించి ఎన్ని 8 అక్షరాల పదాలు తయారు చేయవచ్చు?

జ: పై పదంలోని మొత్తం అక్షరాలు 8

8 అక్షరాల నుండి 8 అక్షరాల పదాలను 8!గా తయారు చేయవచ్చు. 8! లేదా $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40320$

21. 9 హల్లులు, 5 అచ్చులు కలవు. 7 అక్షరాల పదాలను వాటిలో 4 హల్లులు, 3 అచ్చులు వుండేలా ఎన్ని వ్రాయవచ్చు.

జ: 9 హల్లుల నుండి 4 హల్లులను $^9C_4$ విధాలుగాను, 5 అచ్చుల నుండి 3 అచ్చులను $^5C_3$ విధాలుగాను $^9C_4 \times {}^5C_3$

విధాలుగాను మరియు మొత్తం 7 అక్షరాలను 7! గాను అమర్చవచ్చును.

$\therefore$ మొత్తం విధాలు $^9C_4 \times {}^5C_3 \times 7! = 6350400$

22. $ATTAIN$ పదంలోని అక్షరాలను T అక్షరాలను ప్రక్క ప్రక్కనే వుండే విధంగా ఎన్ని రకాలుగా అమర్చవచ్చు?

జ: T లు ప్రక్క, ప్రక్కనే వుండేటట్లు అమర్చడానికి ముందుగా $2T$ లను ఒక యూనిట్‌గా తీసుకుంటే మొత్తం యూనిట్లు $1+4$ (మిగిలినవి) $= 5$ యూనిట్లు.

వీటిని 5! విధాలుగా వ్రాయవచ్చు. లేదా $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

23. 12 మంది స్నేహితులు ఒక కార్యక్రమంలో కలుసుకున్నారు. ప్రతి వ్యక్తి అందరితో ఒక్కొక్కసారి చేతిన కలుపుతారు? మొత్తం అందరూ ఎన్ని రకాలుగా చేతులు కలుపుతారు?

జ: మొత్తం 12 మంది చేతులు కలపడం ప్రతి ఇద్దరిలో వుంటుంది. కావున మొత్తం విధులు $= {}^{12}C_2$

$$= \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

24. 13 మంది గల బృందం నుంచి, 9 మంది గల కమిటీని ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరవచ్చు?

జ: 13 మంది నుండి 9మందిని ఎన్నుకునే విధాలు $= {}^{13}C_9$

లేదా $= \frac{13!}{9!4!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2} = 715$

25. 15 మంది పురుషులు మరియు 12మంది స్త్రీల నుంచి 3గురు పురుషులు, 2 స్త్రీలు గల కమిటీని ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు?

జ: 15మంది పురుషుల నుండి 3గురు పురుషులను $= {}^{15}C_3$ గాను, 12 మంది స్త్రీల నుండి 2 స్త్రీలను $= {}^{12}C_2$ గా మొత్తం కమిటీని $= {}^{15}C_3 \times {}^{12}C_2$ గాను ఎన్నుకోవచ్చు.

$\therefore$ మొత్తం విధాలు $= \frac{15!}{3!12!} \times \frac{12!}{2!10!} = 30030$

26. ఆంగ్ల భాష నందు 5 అచ్చులు మరియు 21 హల్లులు కలవు. 2 విభిన్న అచ్చువి, 2 విభిన్న హల్లులు ఉండే విధంగా ఎన్ని రకాల పదాలను వ్రాయవచ్చు.

జ: 5 అచ్చుల నుండి 2 అచ్చులను $^5C_2$ గాను, 21 హల్లుల నుండి 2 హల్లులను $^{21}C_2$ విధాలుగాను మరియు (2 అచ్చులు +2 హల్లులు) 4 అక్షరాలను 4! విధాలుగా వ్రాయవచ్చు.

$\therefore$ మొత్తం వ్రాసే విధాలు $={}^5C_2 \times {}^{21}C_2 \times 4!$ (లేదా)

$$\frac{5!}{2!3!} \times \frac{21!}{2!19!} \times 4! = 50400$$

27. 5 హల్లులు మరియు 5 అచ్చులు నుండి, 3 హల్లులు, 2 అచ్చులు గల పదాలను ఎన్ని వ్రాయవచ్చు.

జ: 5 హల్లుల నుండి 2 అచ్చులను ${}^5C_2$ గా ఎన్నుకోవచ్చు. 5 అచ్చుల నుండి 2 అచ్చులను ${}^5C_2$ గా ఎన్నుకోవచ్చు.

ఇప్పుడు ప్రతి ఎన్నిక నుంచి 5 అక్షరాలను అమర్చగలిగే అమరికల సంఖ్య ${}^5P_5$.

$\therefore$ మొత్తం పదాల సంఖ్య $={}^5C_5 \times {}^5C_2 \times 5!$

$$10 \times 10 \times 120 = 12000$$

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. ఒక ప్రశ్నా పత్రంలోని 12 ప్రశ్నలను A, B అనే రెండు పార్టులుగా విభజించారు. పార్టు A లో 5 ప్రశ్నలు, పార్టు B లో 7 ప్రశ్నలు ఇచ్చారు. విద్యార్థి ప్రతి పార్టు నుండి కనీసం రెండు ప్రశ్నలను ఎన్నుకొని మొత్తం 6 ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయాలి. ఎన్ని విధాలుగా ప్రశ్నలకు ఎన్నుకోగలరు.

జ: విద్యార్థి ప్రతి పార్టు నుండి కనీసం రెండు ప్రశ్నలను ఎన్నుకొని మొత్తం 6 ప్రశ్నలకు క్రింద తెలిపిన విధాలలో ఒక విధంగా ఎన్నుకోగలరు.

	పార్టు A	పార్టు B
1.	2	4
2.	3	3
3.	4	2

విద్యార్థి 1) ఎన్నుకుంటే, ఆ విధంగా ప్రశ్నలను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య $={}^5C_2 \times {}^7C_4 = 10 \times 35 = 350$.

ఇదే విధంగా 2) ఎన్నుకుంటే, ఆ విధాల సంఖ్య $={}^5C_3 \times {}^7C_3 = 10 \times 35 = 350$

మరియు 3) ఎన్నుకుంటే ఆ విధాల సంఖ్య $={}^5C_4 \times {}^7C_2 = 5 \times 21 = 105$

$\therefore$ విద్యార్థి ప్రశ్నలను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య $= 350 + 350 + 105 = 805$

మొత్తం విధాల సంఖ్య $= 805$

2. 5గురు పురుషులు, 3గురు స్త్రీల నుండి ముగ్గురు సభ్యులు గల కమిటీని ఏర్పాటు చేయాలి. ఆ కమిటీలో 1) ఒక్క స్త్రీ మాత్రమే వుండేటట్లు, 2) కనీసం ఒక స్త్రీ వుండేటట్లు ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పాటు చేయవచ్చు.

జ:

	5 మంది పురుషులు	3గురు స్త్రీలు
1.	2	1
2.	1	2
3.	0	3

1) ఒక స్త్రీ మాత్రమే వుండే కమిటీ ఎంపిక చేసే విధానం ${}^3C_1 \times {}^5C_2$ అగును. అనగా

$$\frac{3!}{1!2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 3 \times 10 = 30$$

2) కనీసం ఒక స్త్రీ ఉండే కమిటీలకు ${}^3C_1 \times {}^5C_2 + {}^3C_2 \times {}^5C_1 + {}^3C_3 \times {}^5C_0$ అగును.

$$\therefore \frac{3!}{1!2!} \times \frac{5!}{2!3!} + \frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{1!4!} + 1 \times 1$$

$$30 + 15 + 1 = 46$$

3. 17 మంది సభ్యులు గల క్రికెట్ టీంలో ఇద్దరు వికెట్ కీపర్లు 4గురు బౌలర్లు ఉన్నారు. ఒక వికెట్ కీపరు మరియు కనీసం 3 బౌలర్లు వున్నా 11మంది క్రికెట్ టీంను ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు.

	4 బౌలర్లు	2 వికెట్ కీపర్స్	11 మిగతావారు (బాట్స్‌మన్)
1.	4	1	6
2.	3	1	7

ఒక వికేట్ కీపరు, కనీసం 3గురు బౌలర్లు వుండే 11మంది గల క్రికెట్ టీంను పై రెండు విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. అవి ${}^4C_4 \times {}^2C_1 \times {}^{11}C_6$ లేదా ${}^4C_3 \times {}^2C_1 \times {}^{11}C_7$ అగును..

మొత్తం విధాలు $= {}^4C_4 \times {}^2C_1 \times {}^{11}C_6 + {}^4C_3 \times {}^2C_1 \times {}^{11}C_7 = 3564$

4. 6గురు అబ్బాయిలు మరియు 4గురు అమ్మాయిల నుంచి 5గురు సభ్యులున్న కమిటీని ఎన్నుకోవాలి.

ఎ) కచ్చితంగా ఇద్దరు అమ్మాయిలు.

బి) కనీసం ఇద్దరు అమ్మాయిలు ఉండే విధంగా ఎన్ని రకాలుగా కమిటీలను నిర్మించవచ్చు.

జ: 6 అబ్బాయిలు 4 అమ్మాయిలు

ఎ) 3 2

కచ్చితంగా ఇద్దరు అమ్మాయిలు వుండేలా ఏర్పడే కమిటీలు ${}^4C_2 \times {}^6C_3$ గా ఎన్నుకోవచ్చు.

$$\therefore \frac{4!}{2!2!} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{4\times3}{2} \times \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 6\times20 = 120$$

బి) 6 అబ్బాయిలు 4 అమ్మాయిలు

3 2

2 3

1 4

కనీసం ఇద్దరు అమ్మాయిలు ఉండేలా ఏర్పరచే కమిటీలు

${}^4C_2 \times {}^6C_3 + {}^4C_3 \times {}^6C_2 + {}^4C_4 \times {}^6C_1$

$120 + 4\times15 + 1\times6$

$120 + 60 + 6 = 186$

8

ద్విపద సిద్ధాంతము

నీవు పెట్టిన పెట్టుబడిపై సాలుకు 15 శాతం చక్రవడ్డి చొప్పున ఐదు సంవత్సరముల తర్వాత ఎంత మొత్తము వడ్డి వస్తుందో తెలుసుకోవలెనన్నా లేదా ఒక దేశము యొక్క సంవత్సర జనాభా వృద్ధిరేటు తెలిసినపుడు 10 సంవత్సరాల తర్వాత ఆ దేశ జనాభా ఎంతవుతుందో తెలుసుకోవాలన్నా మనకుపయోగపడేది 'ద్విపద సిద్ధాంతము'. ఈ సిద్ధాంతము ద్వారా ఏ అకరణీయ ఘాతానికైనా ద్విపద విస్తరణను కనుగొనవచ్చునని ఈ పాఠ్యాంశములోని ముందు భాగములో తెలుసుకుంటావు.

ఈ సిద్ధాంతము భారతీయ, గ్రీకు గణిత వేత్తలకు క్రీ.పూ. 3వ శతాబ్దములోనే తెలుసు. ఘాతము సహజ సంఖ్య అయినపుడు ఈ సిద్ధాంతమును కనుగొన్న ఖ్యాతి ప్రముఖ అరబ్బు కవి, గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన ఒమర్ ఖయ్యామ్ (A.D. 1048- 1122) కు దక్కుతుంది. దీనిని అకరణీయ ఘాతాలకు కనుకొన్న కీర్తి బ్రిటిష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు న్యూటన్ (A.D. 1642-1727) కు చెందుతుంది ప్రారంభములో చెప్పినటువంటి సమస్యల సాధన కోసమే గాక, ద్విపద సిద్ధాంతము సంభావ్యతా సిద్ధాంతాల్లోను, కలన గణితంలోను, (1.02) వంటి వాటికి ఉజ్జాయింపు విలువలు కనుగొనుటలోను విస్తారముగా ఉపయోగపడుతుంది. ఈ పాఠములో వీటిలో కొన్నింటిని చర్చిస్తాము. అంతకు ముందు ధన పూర్ణ ఘాతాంకానికి, ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించడానికి అవసరమయ్యే గణితాను గమన పద్ధతిని గురించి తెలుసుకుందాము.

లక్ష్యాలు

ఈ పాఠము చదివిన తర్వాత నీవు

- గణితానుగమన సూత్రాన్ని ప్రవచించగలవు
- $n = 1$ కు ప్రవచనము $P(n)$ యొక్క నిజానిజాలను పరీక్షించగలవు
- ప్రవచనము $P(K)$ వాస్తవమయినపుడు అది $P(K + 1)$ కు కూడా వాస్తవ మవుతుందో లేదో పరిశీలించగలవు.
- గణితాను గమన పద్ధతి ద్వారా గణిత ప్రవచనాల వాస్తవికతను పరీక్షించగలవు.
- ధన పూర్ణాంకానికి ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి దానిని గణితాను గమన పద్ధతిలో నిరూపించగలవు.
- ద్విపద సిద్ధాంతాన్నుపయోగించి, వివిధ విలువలు x, y లకు $(x + y)^n$ విస్తరణను వ్రాయగలవు.
- ద్విపద విస్తరణలో సాధారణ పదాన్ని, మధ్య పదాన్ని వ్రాయగలవు.
- ఋణ మరియు అకరణీయ విలువలకు ద్విపద విస్తరణను వ్రాయగలవు
- ద్విపద సిద్ధాంతాన్నుపయోగించి $\sqrt[3]{9}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ వంటి వాటికి ఉజ్జాయింపు విలువలు వ్రాయ గలవు.
- x విలువ మరీ చిన్నదయినపుడు, x^2 మరియు అంతకు పై ఘాతాల విలువలను తృణీకరించి, $\left(3 - \frac{5}{x}\right)^7$ వంటి బీజీయ విస్తరణలను వ్రాసి, x కు వాటి విలువలు కనుగొనగలవు.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. క్రింది వానిలో ఏవి ప్రవచనాలు?

$a)$ $1+2+4+.....+2^n > 20$ $b)$ $1+2+3+...+10=99$

$c)$ ముంబై కన్నా చెన్నై బావుంటుంది. $d)$ తాజ్‌మహాల్ ఎక్కడ వున్నది?

$e)$ $\frac{1}{1\times 2}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

సూచన : సత్యమని కాని, అసత్యమని కాని నిర్ధిష్టంగా చెప్పగల వాక్యమును "ప్రవచనం" అంటారు.

సమాధానాలు : $(b),(e)$ లు ప్రవచనాలు.

$a)$ నుండి n యొక్క విలువ నిర్దేశించలేము. కావున ఇది ప్రవచనం కాదు.

$c)$ గణిత ప్రవచనం కాదు.

$d)$ ప్రశ్నార్థకం కావు ప్రవచనం కాదు.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $p(n): n^3+5n$ కు 6 ఒక కారణాంకం, అయితే $P(1),P(2),P(K),P(K+1)$ (K సహజ సంఖ్య)లను కనుక్కోండి.

సమాధానం: $P(1)=1^3+5(1)=1+5=6$ కు 6 ఒక కారణం.

$P(2)=2^3+5(2)=8+10=18$ కి 6కారణాంకం

$P(K)=K^3+5(K)$ కు 6 ఒక కారణాంకం.

$P(K+1)=(K+1)^3+5(K+1)$ కు 6ఒక కారణాంకం.

2. క్రింది ప్రవచనాలు $P(n)$ లకు $P(1),P(K)$ మరియు $P(K+1)$ లను వ్రాయండి.

సమాధానాలు : $a)$ $2^n \geq n+1$

$P(1): 2^1 \geq 1+1$

$P(K): 2^K \geq K+1$

$$P(K+1): 2^{K+1} \geq K+1 \Rightarrow 2^{K+1} \geq K+2$$

b) $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$P(1): (1+x)^1 \geq 1+x$$

$$P(K): (1+x)^K \geq 1+Kx$$

$$P(K+1): (1+x)^{K+1} \geq 1+(K+1)x$$

c) $\frac{1}{1\times 2}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

$$P(1): \frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

$$P(2): \frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$$

$$P(K): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{K(K+1)}=\frac{K}{K+1}$$

$$P(K+1): \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{K(K+1)}+\frac{1}{(K+1)(K+2)}=\frac{K+1}{K+2}$$

3. క్రింది వాటిని విస్తరించండి.

a) $(2a+b)^3$

సాధన: ${}^3C_0(2a)^3+{}^3C_1(2a)^2(b)+{}^3C_2(2a)(b)^2+{}^3C_3b^3$

$$1(2)^3a^3+34a^2b+3\times 2ab^2+b^3$$

$$8a^3+12a^2b+86ab^2+b^3$$

b) $\left(x^2-3y\right)^6$

$${}^6C_0\left(x^2\right)^6-{}^6C_1\left(x^2\right)^5(3y)+{}^6C_2\left(x^2\right)^4(3y)^2-{}^6C_3\left(x^2\right)^3(3y)^3$$

$$+^6C_4\left(x^2\right)^3(3y)^4 -^6C_5\left(x^2\right)(3y)^5 +^6C_6(3y)^6$$

$$= x^{12} - 6x^{10}(3y) + 15x^8\left(9y^2\right) - 20x^6\left(27y^3\right) + 15x^4\left(81y^4\right) - 6x^2 \times 243y^5 + (3y)^5$$

$$\Rightarrow x^{12} - 18x^{10}y + 225x^8y^2 - 540x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 243y^5$$

4. $a)$ $(1-x)^7$

సాధన: $^7C_0(1) +^7C_1(1)(x) +^7C_2(1)\left(x^2\right) -^7C_3\left(x^3\right) +^7C_4\left(x^4\right) -^7C_5\left(x^5\right) +^7C_6\left(x^6\right) -^7C_7\left(x^7\right)$

$$1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$$

$b)$ $(1+2x)^5$

సాధన: $^5C_0 +^5C_1(2x) -^5C_2(2x)^2 +^5C_3(2x)^3 -^5C_4(2x)^4 +^5C_5(2x)^5$

$$= 1 + 5(2x) - 10\left(4x^2\right) + 10\left(8x^3\right) - 5\left(16x^4\right) + 32x^5$$

$$= 1 + 10x - 40x^2 + 80x^3 - 80x^4 + 32x^5$$

$c)$ గణితాను గమన సూత్రంను ఉపయోగించి క్రింది ప్రపచనాలను నిరూపింపుము.

$P(n) = n$ మూలకాల సమితికి ఉపసమితుల సంఖ్య 2^n

సాధన: $P(1)$: 1 మూలకాల సమితికి ఉపసమితుల సంఖ్య $= 2^1 = 2$

ఇదే విధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన

$P(K) = K$ మూలకాల సమితికి ఉపసమితుల సమితులు 2^K

$P(K+1) = K+1$ మూలకాల సమితికి ఉపసమితులు $2^{K+1} = 2^K.2^1$

కావున $P(K)$ సత్యమనుకొనిన $P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది.

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. ఏ సహజ సంఖ్యకైనా క్రింద వాటిని నిరూపించండి.

a) $\left(x^n - 1\right), x-1$ చే బాగించబడుతుంది.

సాధన: $P(n) = x^n - 1$

$P(1) = x - 1$ కావున $P(1)$ సత్యం.

ఇదేవిధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన $P(K) = x^K - 1$ ను $x-1$ భాగిస్తుంది.

$\frac{x^K - 1}{x-1} = t$ అయిన $\Rightarrow x^K - 1 = t(x-1) \Rightarrow x^K = t(x-1)+1$

$P(K+1)$ కు $P(K+1) = x^{K+1} - 1 \Rightarrow x^K.x - 1 = \left[t(x-1)+1\right]x - 1$ (1) నుండి.

$P(K+1) = t(x-1)x + (x-1) \Rightarrow (x-1)(tx+1)$ దీనిని $x-1$ భాగిస్తుంది.

కావున $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన $P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది.

కావున ఏ సహజ సంఖ్యకైనా $x^n - 1$ ను $x-1$ భాగిస్తుంది.

b) $n^3 + 2n$ ను 3 భాగిస్తుంది.

$P(n) = n^3 + 2n$ అయినా

$P(1) = 1^3 + 2(1) = 3 \qquad \therefore P(1)$ సత్యం.

ఇదేవిధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన $P(K) = K^3 + 2K$ ను 3 భాగిస్తుంది.

$\frac{K^3 + 2K}{3} = t$ అనుకొనిన $K^3 + 2K = 3t \Rightarrow K^3 = 3t - 2K \cdots$ (1)

$P(K+1) = (K+1)^3 + 2(K+1) = K^3 + 3K^2 + 3K + 1 + 2K + 2$

$\Rightarrow K^3 + 3K^2 + 5K + 3$

$\Rightarrow (3t - 2K) + 3K^2 + 5K + 3$

$\Rightarrow 3t + 3K^2 + 3K + 3$

$\Rightarrow 3\left(t + K^2 + K + 1\right)$ను 3 భాగిస్తుంది.

కావున $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన $P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది.

కావున ఏ సహజ సంఖ్యకైనా $n^3 + 2n$ను 3 భాగిస్తుంది.

2. ద్విపద సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి క్రింది వాటిని గణించండి.

1) $(101)^4$ 2) $(99)^4$ 3) $(102)^3$ 4) $(0.98)^3$

సాధన:

1) $(101)^4 = (100+1)^4$

$^4C_0(100)^4 + ^4C_1(100)^3(1) + ^4C_2(100)^2(1)^2 + ^4C_3(100)(1)^3 + ^4C_4(1)^4$

$\Rightarrow (100)^4 + 4(100)^3 + 6(100)^2 + 4(100) + 1$

$\Rightarrow 100000000 + 4(1000000) + 6(10000) + 400 + 1 = 104060401$

2) $(99)^4 = (100-1)^4$

$^4C_0(100)^4 - ^4C_1(100)^3 + ^4C_2(100)^2 - ^4C_3(1)$

$\Rightarrow 100000000 - 4(100000) + 6(10000) - 4(100) + 1$

$\Rightarrow 100000000 - 400000 + 60000 - 400 + 1 = 96059601$

ఇదేవిధంగా మిగతావి ప్రయత్నించండి.

3. క్రింది విస్తరణలో $(r+1)$వ పదం కనుక్కోండి.

$a)$ $(2x+y)^n$ $b)$ $\left(2a^2-1\right)^n$ $c)$ $(1-a)^n$ $d)$ $\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^n$

సూచన: $(a+b)^n$ విస్తరణలో $T_{r+1} = ^nC_r(a)^{n-r}(b)^r$

సాధన: $a)$ $T_{r+1} = ^nC_r(2x)^{n-r} \times (y)^r$

$\Rightarrow {}^{n}C_{r}\, 2^{n-r} x^{n-r} y^{r}$

$b)$ $\left(2a^{2}-1\right)^{n}$ లో T_{r+1} పదం.

$T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\left(2a^{2}\right)^{n-r}(-1)^{r}$

$\Rightarrow {}^{n}C_{r}\, 2^{n-r} a^{2n-2r}(-1)^{r}$

$\Rightarrow T_{r+1} = (-1)^{r} .{}^{n}C_{r}\, 2^{n-r} a^{2n-2r}$

మిగతావి ఇలాగే ప్రయత్నించండి.

4. $a)$ $(1+2y)^{8}$ విస్తరణలో 6వ పదం

$b)$ $(2x+3)^{7}$ విస్తరణలో 4వ పదం

$c)$ $(2a-b)^{11}$ లో 7వ పదం

$d)$ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{6}$ లో 4వ పదం

$e)$ $\left(x^{3}-\frac{1}{x^{2}}\right)^{7}$ లో 5వ పదం.

సమాధానాలు :

$a)$ $T_{r+1} = {}^{n}C_{r}(a)^{n-r} b^{r}$ నుండి

$T_{6} = T_{5+1} = {}^{8}C_{5}(1)^{8-5}(2y)^{5}$

$= {}^{8}C_{5}\ 2^{5}.y^{5}$

$= 1792y^{5}$

$b)$ $(2x+3)^{7}$ లో T_{4}

$T_{4} = T_{3+1} = {}^{7}C_{3}(2x)^{7-3}(3)^{3}$

$\Rightarrow \frac{7!}{3!4!} 2^{4} x^{4} 3^{3}$

$$\Rightarrow 35\times 2^4\times 3^3 x^4 = 15120x^4$$

మిగతావి ప్రయత్నించండి.

5. క్రింది విస్తరణలో మధ్యపదం కనుక్కోండి.

a) $(2x+y)^{10}$ b) $\left(1+\frac{2}{3}x^3\right)^8$ c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

d) $\left(1-x^2\right)^{10}$ e) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{4y}{3}\right)^7$

సమాధానాలు:

a) $(2x+y)^{10}$ విస్తరణలో మొత్తం పదాలు 11 కావున 6వ పదం మధ్యపదం అగును.

$$\therefore T_6 = T_{5+1} = {}^{10}C_5\,(2x)^{10-5}\,(y)^5$$

$$= {}^{10}C_5 2^5 x^5 y^5$$

మధ్యపదం $T_6 = 8064x^5y^5$

b) $\left(1+\frac{2}{3}x^3\right)^8$ విస్తరణలో మొత్తం పదాలు 9 కావున T_5 మధ్య పదం.

$$\therefore T_5 = T_{4+1} = {}^8C_4\,(1)^{8-4}\left(\frac{2}{3}x^3\right)^4$$

$$= {}^8C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(x^3\right)^4$$

$$\frac{70.2^4}{3^4}x^{12} \Rightarrow \frac{70\times 16}{81}x^{12} = \frac{1120}{81}x^{12}$$

ఇదే విధంగా (c), (d) లు ప్రయత్నించండి.

e) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{4y}{3}\right)^7$ విస్తరణలోని మొత్తం పదాలు 8 కావున మధ్య పదాలు T_4 మరియు T_5 రెండు వచ్చును.

$$\therefore T_4 = T_{3+1} = {}^7C_3\left(\frac{3x}{4}\right)^{7-3}\left(\frac{-4y}{3}\right)^3$$

$$= -{}^7C_3\frac{(3x)^4}{4^4}.\frac{4^3.y^3}{3^3}$$

$$\Rightarrow \frac{-7!}{3!4!}.\frac{3^4.x^4.4^3.y^3}{3^3.4^4}$$

$$\Rightarrow T_4 = -35\times\frac{3}{4}x^4y^3$$

$$T_4 = \frac{-105}{4}x^4y^3$$

$$T_5 = T_{4+1} = {}^7C_4\left(\frac{3x}{4}\right)^{7-4}\left(\frac{-4y}{3}\right)^4$$

$$\Rightarrow 35\times\frac{3^3.x^3}{4^3}\times\frac{4^4.y^4}{3^4}$$

$$\Rightarrow \frac{35\times 4}{3}x^3y^4 \Rightarrow T_5 = \frac{140}{3}x^3y^4$$

6. $a)$ $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ $b)$ $(2a-9)^9$ $c)$ $(a+b)^7$ విస్తరణలో మధ్య పదాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $a)$ $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ విస్తరణలోని మొత్తం పదాలు $11+1=12$ ఇందులో మధ్య పదాలు T_6 మరియు T_7 అగును.

$$\therefore T_6 = T_{5+1} = {}^{11}C_5(x)^{11-5}\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^5$$

$$= {}^{11}C_5x^6\times\frac{1}{x^{10}} \Rightarrow \frac{462}{x^4}$$

$$T_7 = T_{6+1} = {}^{11}C_6 (x)^{11-6} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^6$$

$$\Rightarrow {}^{11}C_6 x^5 \times \frac{1}{x^{12}}$$

$$\Rightarrow T_7 = \frac{462}{x^7}$$

ఇదేవిధంగా మిగతావి ప్రయత్నించండి.

7. క్రింది వాటిని విస్తరింపుము.

a) $(1-P)^{-3}, |P| < 1$ b) $(1+3x)^{\frac{4}{3}}, |x| < \frac{1}{3}$

c) $\left(1-\frac{5}{z}\right)^{\frac{6}{5}}, |z| < 5$ d) $(1-5z)^{\frac{6}{5}}, |z| < \frac{1}{5}$

సూచన: $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

ఇలాగే $(x+y)^r = x^r\left(1+\frac{y}{x}\right)^r$ ఇక్కడ $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$

$$\therefore \left[1+\frac{y}{x}\right]^r = 1 + r\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots$$

$$\therefore x^r\left(1+\frac{y}{x}\right)^r = x^r\left[1 + r\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ldots\right]$$

ఇలాగే $\left(1-\frac{y}{x}\right)^r = 1 - r\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \ldots.$

మరియు $(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots$

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + ..$$

సాధన: $a)$ $(1-P)^{-3}$ విస్తరణకు.

$$1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + ..$$

ఇక్కడ $n = 3, x = p$ వ్రాయగా

$(1-P)^{-3} = 1 + 3P + 6P^2 + 10P^3 + ...$ ఇక్కడ $|P| < 1$

$b)$ $(1+3x)^{\frac{4}{3}}$ విస్తరణకు

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2!}x^2 + ...$$

$$\therefore (1+3x)^{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{3}(3x) + \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)}{2!}(3x)^2 + ...$$

$$\Rightarrow 1 + 4x + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{2} \times 9x^2 + ...$$

$\Rightarrow 1 + 4x + 2x^2 + ...$ ఇక్కడ $|3x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3}$

$c)$ $\left(1 - \frac{5}{z}\right)^{\frac{6}{5}}$ విస్తరణకు

$$(1-x)^{\frac{p}{q}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2!}x^2 - ....$$

$$\therefore \left(1-\frac{5}{z}\right)^{\frac{6}{5}} = 1-\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{5}{z}\right)+\frac{\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{6}{5}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{z}\right)^2-....$$

$$=1-\frac{6}{z}+\frac{\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}}{2}\times\frac{25}{z^2}-....$$

$$=1-\frac{6}{z}+\frac{3}{z^2}-...$$

$d)$ $(1-5z)^{\frac{6}{5}}$ విస్తరణకు

$$1-\left(\frac{6}{5}\right)(5z)+\frac{\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{6}{5}-1\right)}{2!}(5z)^2-...$$

$$1-6z+\frac{\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{2}\times 25z^2....$$

$1-6z+3z^2....$ ఇక్కడ $|z|<\frac{1}{5}$

8. క్రింది వాటిని విస్తరించుము.

$a)$ $(27-6x)^{\frac{-2}{3}}$ $b)$ $(2a+x)^{-3}, \left|\frac{x}{2a}\right|<1$

$c)$ $(2+3y)^{\frac{1}{7}}, |y|<\frac{2}{3}$

సాధన: $a)$ $(27-6x)^{\frac{-2}{3}}$ విస్తరణకు

$$27^{\frac{-2}{3}}\left(1-\frac{6}{2}x\right)^{\frac{-2}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{-2}{3}}\left(1-\frac{2x}{9}\right)^{\frac{-2}{3}}$$

$3^{-2}\left(1-\frac{2x}{9}\right)^{\frac{-2}{3}}$ ఇక్కడ $\left|\frac{2x}{9}\right|<1$ లేదా $|x|<\frac{9}{2}$

$$(1-x)^{\frac{-p}{q}}=1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}+1\right)}{2!}x^2+\ldots$$

$$\therefore \frac{1}{9}\left(1-\frac{2x}{9}\right)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{3}\left(2x+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)}{2}x^2\right)\right)$$

$$\therefore \frac{1}{9}\left(1-\frac{2x}{9}\right)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{2x}{9}\right)+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)}{2!}\left(\frac{2x}{9}\right)^2+\ldots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\left[1+\frac{4x}{27}+\frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}}{2}\times\frac{4x^2}{81}+\ldots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\left[1+\frac{4x}{27}+\frac{20}{729}x^2+\ldots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}+\frac{4x}{243}+\frac{20}{6561}x^2+\ldots$$

b) $(2a+x)^{-3}$ విస్తరణకు ముందుగా దీనిని $(1+x)^{-n}$ గా మార్చాలి. $(2a)^{-3}\left(1+\frac{x}{2a}\right)^{-3}$

కాని $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2\ldots.$

$$(2a)^{-3}\left[1-\frac{x}{2a}(3)+\frac{3(3+1)}{2!}\left(\frac{x}{2a}\right)^2\ldots.\right]$$

$$\frac{1}{(2a)^3}\left[1-\frac{3x}{2a}++\frac{3(4)}{2}\times\frac{x^2}{4a^2}....\right]$$

$$\frac{1}{8a^3}\left[1-\frac{3x}{2a}++\frac{3x^2}{2a^2}....\right]$$

9. క్రింది వాటి విలువలను 3 దశాంశ స్థానాలకు సమరించి కనుక్కోండి.

$a)$ $(1.02)^2$ $b)$ $(1.01)^{-3}$ $c)$ $(0.97)^4$ $e)$ $(24)^{\frac{-1}{2}}$

సమాధానాలు :

$a)$ $(1.02)^2=(1+0.2)^2$ ఇక్కడ $|0.2|<1$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...$$

$$\therefore (1+0.2)^2=1+2(0.2)+\frac{2(2-1)}{2}(0.2)^2+...$$

$$=1+0.4+0.04=1.44$$

$b)$ $(1.01)^{-3}=(1+0.1)^{-3}=\left(1+\frac{1}{10}\right)^{-3}$

$$\Rightarrow 1-3\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{3(3+1)}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2-\frac{3(3+1)(3+2)}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ ....$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{10}+\frac{3(4)}{2}\times\frac{1}{100}-\frac{3(4)5}{6}\left(\frac{1}{1000}\right)+....$$

$$\Rightarrow 1-\frac{3}{10}+\frac{6}{100}-\frac{10}{1000}+\frac{3(4)(5)(6)}{24}\times\frac{1}{10000}$$

$$1-\frac{3}{10}+\frac{6}{100}-\frac{1}{100}+\frac{15}{10000}$$

$$\frac{100-30+6-1+0.15}{100}$$

$\frac{75.15}{100} = 0.751$ దాదాపు

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. గణితాను గమన పద్ధతిలో క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

$a)$ $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

సమాధానం. దత్తాంశాన్ని $P(n)$ అనుకొనిన

$$P(n): \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + .. + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$P(1): LHS = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3};\ RHS = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3}$$

$\therefore P(1)$ సత్యం.

ఇదే విధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన

$$P(K): \frac{1}{1.3} + \ldots + \frac{1}{(2K-1)(2K+1)} = \frac{K}{2K+1} \quad \ldots. \ (1)$$

$$P(K+1): \frac{1}{1.3} + \ldots + \frac{1}{(2K-1)(2K+1)} + \frac{1}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{K}{2K+1} + \frac{1}{(2K+1)(2K+3)}$$

$$\frac{K}{2K+1} + \frac{1}{(2K+1)(2K+3)}$$

$$\frac{K(2K+3)+1}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{2K^2+3K+1}{(2K+1)(2K+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{2K^2+2K+K+1}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{2K(K+1)+1(K+1)}{(2K+1)(2K+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{(K+1)(2K+1)}{(2K+1)(2K+3)} = \frac{K+1}{(2K+3)}$$

$\therefore P(K)$ సత్యం అనుకుంటే $P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది.

$\therefore$ ఏ సహజ సంఖ్య n కైనా $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}\cdots$

$b)$ $1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ అని చూపండి.

$$P(n):1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P(1):LHS=1^2=1\Rightarrow RHS:\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$$

$\therefore P(1)$ సత్యం.

ఇదేవిధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన

$$P(K):1^2+2^2+\ldots.+K^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}\ \ldots.\ (1)$$

$P(K+1)$ కు ఇరువైపుల $(K+1)^2$ కలుపగా

$$1^2+2^2+\ldots.+K^2+(K+1)^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}+(K+1)^2$$

$$\Rightarrow\frac{K(K+1)(2K+1)+6(K+1)^2}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{(K+1)}{6}\left[K(2K+1)+6(K+1)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{(K+1)}{6}\left[2K^2+K+6K+6\right]$$

$$\Rightarrow\frac{(K+1)}{6}\left[2K^2+7K+6\right]$$

$$\Rightarrow\frac{(K+1)}{6}\left[2K^2+4K+3K+6\right]$$

$$\Rightarrow \frac{K+1}{6}\left[2K(K+2)+3(K+2)\right] \Rightarrow \frac{(K+1)}{6}\left[(K+2)(K+3)\right]$$

(1) నుండి $P(K)$ సత్యం అనుకుంటే $P(K+1)$ కూడా సత్యమైంది.

$\therefore n$ అన్ని సహజ సంఖ్యలకు $1^2+2^2+...n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)....$ అగును.

c) $P(n): 1^3+2^3+...n^3=n^3=(1+2+...n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(1)$ కు $P(1): LHS=1^3=1 \Rightarrow RHS=\frac{1(1+1)^2}{4}=1$

$\therefore P(1)$ సత్యం

ఇదేవిధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన

$P(K): 1^3+2^3+...K^3=\frac{K^2(K+1)^2}{4}....$ (1)

$K+1$ కు ఇరువైపులా $(K+1)^3$ కలుపగా

$$P(K+1): 1^3+2^3+...+K^3+(K+1)^3=\frac{K^2(K+1)^2}{4}+\frac{(K+1)^3}{1}=\frac{K^2(K+1)^2+4(K+1)^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(K+1)^2}{4}\left(K^2+4(K+1)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(K+1)^2}{4}\left(K^2+4K+4\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(K+1)^2(K+2)^2}{4}$$

(1) నుండి $P(K)$ సత్యమైతే

$P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది. కావున

n అన్ని సహజ సంఖ్యలకు $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ అగును.

$d)$ $1+4+7+...+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$ అని చూపండి.

$P(n):1+4+7+...+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$

$P(1):LHS=1\Rightarrow RHS=\frac{1}{2}(3-1)=1$

$\therefore P(1)$ సత్యం.

ఇదేవిధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన

$P(K):1+4+7+..+(3K-2)=\frac{K}{2}(3K-1)$ .... (1)

$K+1$ కు ఇరువైపుల $3(K+1)-2$ అనగా $3K+1$ కలుపగా

$P(K+1)=1+4+7+..+(3K-2)(3K+1)=\frac{K}{2}(3K-1)+3K+1$

$\Rightarrow\frac{3K^2-K+6K+2}{2}=\frac{3K^2+5K+2}{2}$

$\Rightarrow\frac{3K^2+3K+2K+2}{2}$

$\Rightarrow\frac{3K(K+1)+2(K+1)}{2}=\frac{(K+1)(3K+2)}{2}$

$\Rightarrow P(K+1)=\frac{K+1}{2}\left[3(K+1)-1\right]$ (1) నుండి.

$P(K)$ సత్యం అనుకొనిన $P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది.

కావున n ఏ సహజ సంఖ్యకైనా

$1+4+7+....+3n-2=\frac{n}{2}(3n-1)$ అగును.

$e)$ $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.. ($n$ సహజ సంఖ్య)

$$P(n):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$n=1$కి

$$P(1):LHS=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow RHS=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\therefore P(1)$ సత్యం

ఇదేవిధంగా $P(K)$సత్యం అనుకొనిన

$$P(K):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{K(K+1)}=\frac{K}{K+1} \quad \ldots (1)$$

$\therefore K+1$కు ఇరువైపులా $\frac{1}{(K+1)(K+2)}$ కలుపగా

$$P(K+1)=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{K(K+1)}+\frac{1}{(K+1)(K+2)}=\frac{K}{(K+1)}+\frac{1}{(K+1)(K+2)}$$

$$\Rightarrow\frac{K(K+2)+1}{(K+1)(K+2)}=\frac{K^2+2K+1}{(K+1)(K+2)}=\frac{(K+1)^2}{(K+1)(K+2)}=\frac{K+1}{K+2}$$

$\Rightarrow P(K+1)=\frac{\mathrm{K}+1}{(K+1)+1}$ (1) నుండి

$P(K)$సత్యం అనుకొనిన $P(K+1)$కూడా సత్యమైనది. కావున n ఏ సహజ సంఖ్యకైనా

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ అగును.

$f)$ $P(n):a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$

$n=1$ విలువకు

సాధన: $P(1): LHS = a \Rightarrow RHS = \dfrac{a\left(r^1-1\right)}{r-1} = a$

$\therefore P(1)$ సత్యం

ఇదేవిధంగా $P(K)$ సత్యం అనుకొనిన

$$P(K): a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{K-1} = \frac{a\left(r^K-1\right)}{r-1} \qquad \ldots (1)$$

$n = K+1$ కు, ఇరువైపుల $ar^{K+1-1} = ar^K$ కలుపగా.

$$P(K+1): a + ar + ar^2 + .. + ar^{K-1} + ar^K = \frac{a\left(r^K-1\right)}{r-1} + \frac{ar^K}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{a\left(r^K-1\right) + ar^K(r-1)}{(r-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{ar^K - a + ar^{K+1} - ar^K}{(r-1)} = \frac{a\left(r^{K+1}-1\right)}{r-1}$$

$$\Rightarrow P(K+1) = \frac{a\left(r^{(K+1)}-1\right)}{r-1}$$

$\therefore P(K)$ సత్యం అనుకొనిన $P(K+1)$ కూడా సత్యమైనది.

$\therefore n$ ఏ సహజ సంఖ్యకైనా $P(n)$ సత్యం అగును.

మాడ్యూల్ - II

9

కార్టీసియన్ నిరూపకాల వ్యవస్థ

నీవు సినిమాకు వెళ్ళినపుడు, రైల్లో ప్రయాణించేటపుడు, లేదా ఏదో ఆటను చూడడానికి స్టేడియంకు వెళ్ళినపుడు నీవు కూర్చునే సీటును వెదకడం చేస్తావు. ఉదాహరణకు నీవు కూర్చునే సీటు H-4 అని ఉంటే దాని అర్థం H 'వ' అడ్డు వరుస 4'వ' సీట్ అని అంటాం. వేరొకవిధంగా చెప్పవలెనంటే H మరియు 4 అనేవి నీ సీటు యొక్క నిరూపకాలు. కావున సంఖ్యలను మరియు ఆంగ్ల అక్షరాలని (బీజీయ భావన) వినియోగించి ఒక బిందు స్థానాన్ని సూచించవచ్చని జ్యామితీయ భావన.

మనము ఒక కాలనీని (జనసముదాయము ఉండే) తీసుకుంటే ఆ కాలనీలో రోడ్లు, రోడ్డు నంబరులో మనకు కావలసిన ఇండ్లు సులువుగా తెలుసుకొనవచ్చు. ఇక్కడ ఒక క్రమానుసారం రోడ్‌నంబర్లు ఉంటాయని గమనించండి. బీజగణిత భావనను జ్యామితీయ చిత్రాల ద్వారా కూడా సూచించవచ్చు ఉదాహరణకు సరళరేఖలు, వృత్తాలు, బహుభుజిలు.

నిరూపక జ్యామితిని ప్రణాళికా బద్ధంగా అభివృద్ధి చేసి గణితశాస్త్రంలో ఒక కొత్త శాఖకు నాంది పలికారు. బీజగణిత భావాలను రేఖాగణిత భావాలను "సమన్వయ పరచడమే నిరూపక జ్యామితి ప్రధాన లక్ష్యం. దీనినే నిరూపక జ్యామితి లేదా కార్టీసియన్ జ్యామితి అని కూడా అంటారు. ప్రసిద్ధ ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు రెన్‌డెకార్టె గౌరవార్థం గణితశాస్త్రంలో ఈ శాఖను కార్టీసియన్ జ్యామితి అని కూడా అంటాం.

ఈ అధ్యాయంలో ప్రాథమిక స్థాయి జ్యామితీయ రూపాల బీజగణితీయ అర్థాలను, బీజగణిత సమాసాల జ్యామితీయ అర్థాలను అధ్యయనం చేయడమే నిరూపక జ్యామితి లక్ష్యం. బీజగణిత సమీకరణం సరళరేఖ అనే జ్యామితీయ భావనను జనింపచేయుచున్నది.

లక్ష్యాలు

మీరు ఈ పాఠ్యాంశాన్ని చదివిన తర్వాత గ్రహించవలసినవి.

- కార్టీసియన్ వ్యవస్థలో నిరూపకాలు, మూలబిందువు, నిరూపకాక్షాలు, పాదాలను నిర్వచించడం.
- రెండు బిందువుల మధ్యదూరం, విభజన సూత్రంను ఉత్పాదించుట
- బిందువులు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం ABC వైశాల్యం ఉత్పాదించుట
- మూడు బిందువులు ఇచ్చినపుడు సరేఖీయాలేమో సరిచూచుట
- ఒక సరళరేఖ వాలు, నిమ్నత అర్థాలను నిర్వచించడం
- రెండు బిందువులు ఇచ్చినపుడు సరళరేఖ వాలును కనుగొనడం
- రెండు సరళరేఖల వాలులు ఇచ్చినపుడు
  - i) సమాంతరంగా
  - ii) లంబంగా ఉండడానికి నియమము
- సరళరేఖ నిరూపకాక్షాల మీద చేసే అంతర ఖండాలను కనుగొనడం
- కొన్ని జ్యామితీయ నియమాలను పాటిస్తూ సమతలంలో చరించే బిందువుల సమితిని బిందుపథంగా నిర్వచిస్తాము.
- ఇచ్చిన నియమాలతో బిందుపథ సమీకరణంను కనుగొనడం

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. క్రింది క్రమయుగ్మాల మధ్య దూరాన్ని కనుక్కోండి.

$a)$ $(5,4)$ మరియు $(2,-3)$ $b)$ $(a,-a)$ మరియు (b,b)

సాధన:

సూచన: $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$ అయితే $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$a)$ $P(5,4), Q(2,-3)$

$\therefore PQ=\sqrt{(2-4)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-7)^2}$

$\Rightarrow PQ=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$

$b)$ $P(a,-a), Q=(b,b) \Rightarrow PQ=\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2}$

$PQ=\sqrt{\left(b^2+a^2-2ab+b^2+a^2+2ab\right)}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

2. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల నుండి రేఖా ఖండపు మధ్య బిందువును కనుగొనుము

$a)$ $(-2,3)$ మరియు $(3,5)$ $b)$ $(6,0)$ మరియు $(-2,10)$

సూచన: $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$ అయితే PQ మధ్య బిందువు $=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

సాధన: $a)$ $P(-2,3), Q(3,5)$ అయితే $\left(\frac{-2+3}{2},\frac{3+5}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{8}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},4\right)$

$b)$ $P(6,0), Q(-2,10)$ అయితే PQ మధ్య బిందువు నిరూపకాలు.

$\left(\frac{6-2}{2},\frac{0+10}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{10}{2}\right)=(2,5)$

3. సరళరేఖ X – అక్షంలో ధన దిశలో చేసే కోణాలు 1) 60^0 2) 150^0 అయితే ఆ సరళరేఖ వాలును కనుక్కోండి.

సాధన:

1) $\theta = 60^0$ కావున వాలు $m = Tan\theta = Tan60^0 = \sqrt{3}$

2) $\theta = 150^0$ కావున వాలు $m = Tan150^0 = Tan(90+60) = -\cot 60^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. సరళరేఖ Y – అక్షం, ధనదిశలో చేసే కోణం 30^0 అయితే ఆ సరళ రేఖ వాలును కనుక్కోండి.

సాధన: ఇక్కడ $\theta = 90 + 30^0$ కావున

వాలు $m = Tan\theta = Tan(90+30) = -\cot 30^0 = -\sqrt{3}$

5. సరళరేఖ X – అక్షం రుణదిశలో చేసే కోణం 60^0 అయితే ఆ సరళరేఖ వాలును కనుక్కోండి.

సాధన: ఇక్కడ $\theta = 180 - 60^0$

వాలు $m = Tan\theta = Tan(180-60) = -Tan60^0 = -\sqrt{3}$

6. క్రింది బిందు యుగ్మాల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనుము.

$a)$ $(2,0)$ మరియు $(1,\cot\theta)$ $b)$ $(-\sin A, \cos A)$ మరియు $(\sin B, \cos B)$

సాధన: $a)$ $PQ = \sqrt{(1-2)^2 + (\cot\theta - 0)^2} = \sqrt{1+\cot^2\theta} = \sqrt{\text{cosec}^2\theta} = \text{cosec}\ \theta$

$b)$ $PQ = \sqrt{(\sin B + \sin A)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$

$$= \sqrt{\sin^2 B + \sin^2 A + 2\sin A \sin B + \cos^2 B + \cos^2 A - 2\cos A \cos B}$$

$$= \sqrt{\left(\sin^2 B + \cos^2 B\right) + \left(\sin^2 A + \cos^2 A\right) - 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B)}$$

$$= \sqrt{1+1-2\cos(A+B)} = \sqrt{2-2\cos(A+B)} = \sqrt{2(1-\cos(A+B))}$$

$$= \sqrt{2\times 2\sin^2\left(\frac{A+B}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

7. $(3,-5)$ మరియు $(-6,8)$ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం మధ్య బిందువు కనుక్కోండి.

సాధన: మధ్య బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$=\left(\frac{3-6}{5},\frac{-5+8}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. క్రింద ఇచ్చిన బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలని చూపండి.

$a)$ $(4,4),(3,5),(-1,-1)$ $b)$ $(2,1)(0,3),(-2,1)$

సాధన: $a)$ $A(4,4),B(3,5),C(-1,-1)$ అనుకొనిన

$$AB=\sqrt{(3-4)^2+(5-4)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{52}$$

$$BC=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$$

$$CA=\sqrt{(-1-4)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$

$\because (AB)^2+(CA)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{50}\right)^2=2+50=52=(BC)^2$ కావున

ఇచ్చిన బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలు.

$b)$ పై లెక్క మాదిరి ప్రయత్నించండి.

2. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల సమితి త్రిభుజ శీర్షాల రూపంలో ఉందని చూపుము.

$a)$ $(3,3),(-6,3)(0,0)$ $b)$ $(0,a),(a,b)(0,0)$

సాధన: $a)$ త్రిభుజావైశాల్యం $\Delta=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|3(3-0)-6(0-3)+0(3-3)\right|$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left|9+18\right|=\frac{1}{2}(27)\neq 0$$

$\because \Delta\neq 0$ కావున పై బిందువులు త్రిభుజ శీర్షాలు అగును.

$b)$ రెండో పద్ధతి : $(0,a),(a,b)$ వాలు $m_1 = \frac{b-a}{a-0} = \frac{b-a}{a}$ ... (1)

$(a.b),(0,0)$ వాలు $m_2 = \frac{0-b}{0-a} = +\frac{b}{a}$ ... (2)

$\therefore m_1 \neq m_2$ కావున పై బిందువులు త్రిభుజ శీర్షాలు అగును.

3. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల సమితి సరేఖీయాలని చూపండి.

$a)$ **(3,−6), (2,4) మరియు (−4,8)** $b)$ **(0,3), (0,−4) మరియు (0,6)**

సాధన: $A(3,-6), B(2,4), C(-1,8)$ అనుకొనిన

AB వాలు $= \frac{4+6}{2-3} = -10$; BC వాలు $= \frac{8-4}{-4-2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$

మరియు AC వాలు $\frac{8+6}{-4-3} = \frac{14}{-7} = -2$

$\because AB$ వాలు $\neq BC$ వాలు $\neq AC$ వాలు కావున పైవి సరేఖీయాలు కావు.

$b)$ $A(0,3), B(0,4), C(0,6$

AB వాలు $= \frac{-4-3}{0-0} = \frac{-7}{0} = \alpha$

BC వాలు $= \frac{6+4}{0-0} = \frac{10}{0} = \alpha$

మరియు CA వాలు $= \frac{6-3}{0-0} = \frac{3}{0} = \alpha$

$\because AB$ వాలు $= BC$ వాలు $= AC$ వాలు కావున దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు.

4. $a)$ $(0,-1),(-2,3),(6,7)$ **మరియు** $(8,3)$ **బిందువులు దీర్ఘ చతురస్ర శీర్షాలని చూపండి.**

సాధన: $a)$ $A(0,-1), B(-2,3), C(6,7), D(8,3)$ అయినా

$$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

$CD = \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$DA = \sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ మరియు

కర్ణాలు $AC = \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$

$BD = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{100}$

$\because AB = CD$ మరియు $BC = DA$ మరియు కర్ణాలు $AC = BD$ కావున దత్త బిందువులు దీర్ఘ చతురస్ర శీర్షాలు అగును.

b) $A(3,-2), B(6,1), C(3,4), D(0,1)$ **చతురస్ర శీర్షాలు అనిచూపండి.**

సాధన: $AB = \sqrt{(6-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$CD = \sqrt{(0-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$DA = \sqrt{(0-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

మరియు AC కర్ణం $= \sqrt{(3-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{0+36} = \sqrt{36}$

BD కర్ణం $= \sqrt{(0-6)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{36+0} = \sqrt{36}$

$\because AB = BC = CD = DA$ మరియు కర్ణం $AC =$ కర్ణం BD కావున దత్త బిందువులు చతురస్ర శీర్షాలు అగును.

5. $(-5,-2)$ **మరియు** $(3,6)$ **బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని 3:1 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.**

సాధన: $\left(\frac{mx_{2+nx_1}}{m+n}, \frac{my_2 + my_1}{m+n}\right)$

$m : n = 3 : 1 \quad P(x_1, y_1) = (-5,-2), Q(x_2, y_2) = (3,6)$

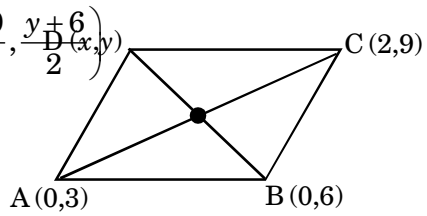
$\therefore$ బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{3\times3+1\times-5}{3+1},\frac{3\times6+1\times-2}{3+1}\right)$

$=\left(\frac{9-5}{4},\frac{18-2}{4}\right)=\left(\frac{4}{4},\frac{16}{4}\right)=(1,4)$

6. సమాంతర చతుర్భుజం మూడు శీర్షాలు $(0,3),(0,6),(2,9)$ అయితే నాలుగో శీర్షాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $A(0,3),B(0,6),C(2,9)$ మరియు నాలుగో శీర్షం $D(x,y)$ అనుకొనిన AC మధ్యం బిందువు

$=BD$ మధ్య బిందువు కావున $\left(\frac{0+2}{2},\frac{3+9}{2}\right)=\left(\frac{x+0}{2},\frac{y+6}{2}\right)$



$\frac{2}{2}=\frac{x}{2};\frac{12}{2}=\frac{y+6}{2}$

$\therefore x=2; y=6$

$\therefore$ నాలుగో శీర్షం $=(2,6)$

7. $(2,3)$ మరియు $(5,-1)$ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం యొక్క త్రిధాకరణ బిందువులను కనుక్కోండి.

సాధన: $2:1$ మరియు $1:2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువులు త్రిధాకరణ బిందువులు. కావున

$1:2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు $\left[\frac{1\times5+2\times2}{1+2},\frac{1\times-1+2\times3}{1+2}\right]$

$=\left(\frac{5+4}{3},\frac{-1+6}{3}\right)=\left(\frac{9}{3},\frac{5}{3}\right)=\left(3,\frac{5}{3}\right)$

$2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు

$\left[\frac{2\times5+1\times2}{2+1},\frac{2\times-1+1\times3}{2+1}\right]=\left[\frac{10+2}{3},\frac{-2+3}{3}\right]=\left[\frac{12}{3},\frac{1}{3}\right]=\left[4,\frac{1}{3}\right]$

$\therefore$ త్రిధాకరించు బిందువులు $\left(3,\frac{5}{3}\right),\left(4,\frac{1}{3}\right)$

8. క్రింద ఇచ్చిన బిందువులు శీర్షాలుగా గల ప్రతి దాని త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుక్కోండి.

a) $(0,5),(5,-5)$ **మరియు (0,0)** *b)* $(2,3),(-2,-3)$ **మరియు (−2,3)**

c) $(a,0),(0,-a)$ **మరియు (0,0)**

సాధన:

$a)$ $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\left|0(-5-0) + 5(0-5) + 0(5+5)\right| = \frac{1}{2}\left|-25\right| = \frac{25}{2}$ చ.యూ.

$b)$ $\Delta = \frac{1}{2}\left|2(-3-3) - 2(3-3) - 2(3+3)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|2(-6) - 2(0) - 2(6)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|-12-12\right| = \frac{24}{2} = 12$ చ.యూ.

$c)$ $(a,0),(0,-a)$ మరియు $(0,0)$

సూచన: దత్త బిందువులో ఒకటి $(0,0)$ అయితే

త్రిభుజవై $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|$ అగును.

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\left|a(-a) - 0(0)\right| = \frac{a^2}{2}$ చ.యూ.

9. $A(2,-3), B(3,-2)$ మరియు $C\left(\frac{5}{2}, K\right)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం $\frac{3}{2}$ చ.యూ. అయితే K విలువ ఎంత?

సాధన: $\Delta = \frac{3}{2}$ చ.యూ.

$\frac{1}{2}\left|2(-2-K) + 3(K+3) + \frac{5}{2}(-3+2)\right| = \frac{3}{2}$

$\therefore \left|-4 - 2K + 3K + 9 + \frac{5}{2}(-1)\right| = 3$

$K + 5 - \frac{5}{2} = 3 \Rightarrow K = 3 + \frac{5}{2} - 5 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

$\therefore K$ విలువ $= \frac{1}{2}$

10. $(-1,-1),(5,7)$ **మరియు (8,11) బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి.**

సాధన: $A(-1,-1), B(5,7), C(8,11)$ అనుకొనిన

AB వాలు $= \frac{7+1}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

BC వాలు $= \frac{11-7}{8-5} = \frac{4}{3}$,

AC వాలు $= \frac{11+1}{8+1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\because AB$ వాలు $= BC$ వాలు $= AC$ వాలు దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు.

11. $(a,0),(0,b)$ **మరియు** $(1,1)$ **బిందువులు సరేఖీయాలైతే** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన: $A(a,0), B(0,b), C(1,1)$ అనుకొనిన

AB వాలు $= \frac{b-0}{0-a} = \frac{-b}{a}$

AC వాలు $= \frac{1-b}{1-0} = 1-b$

దత్త బిందువులు సరేఖీయాలైతే AB వాలు $= BC$ వాలు $= AC$ వాలు

కావున $\frac{-b}{a} = 1-b \Rightarrow -b = a-ab$

$\Rightarrow a+b = ab \Rightarrow \frac{a}{ab}+\frac{b}{ab} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 1$

12. $(a,b),(a_1,b_1)$ **మరియు** $(a-a_1,b-b_1)$ **బిందువులు సరేఖీయాలైతే** $a_1b = ab_1$ **అనిచూపండి.**

సాధన: $A(a,b), B(a_1,b_1), C(a-a_1,b-b_1)$ అయిన

AB వాలు $= \frac{b_1-b}{a_1-a}$; $\qquad BC$ వాలు $= \frac{b-b_1-b_1}{a-a_1-a_1} = \frac{b-2b_1}{a-2a_1}$

దత్త బిందువులు సరేఖీయాలైతే వాటి వాలులు సమానం కావున

$$\frac{b_1-b}{a_1-a}=\frac{b-2b_1}{a-2a_1}\Rightarrow ab_1-ab-2a_1b_1+2a_1b=a_1b-ab-2a_1b_1+2ab_1$$

$$\Rightarrow ab_1+2a_1b=a_1b+2ab_1$$

$$a_1b=ab_1$$

13. $(5,7),(K,5)$ **మరియు** $(0,2)$ **బిందువులు** K **యొక్క ఏ విలువకు సరేఖీయాలగును.**

సాధన: $A(5,7),B(K,5),C(0,2)$ అనుకొనిన

AB వాలు $=\frac{5-7}{K-5}=\frac{-2}{K-5}$; $\qquad AC$ వాలు $=\frac{2-7}{0-5}=1$

$\therefore$ బిందువులు సరేఖీయాలైతే వాలులు సమానం కావున $=\frac{-2}{K-5}=1\Rightarrow K-5=-2\Rightarrow K=3$

14. $(3,6)$ **మరియు** $(x,4)$ **బిందువుల గుండా పోయే రేఖావాలు '2' అయితే** x **విలువను రాబట్టండి.**

సాధన: దత్త బిందువుల గుండా పోయే రేఖ వాలు $=\frac{4-6}{x-3}=\frac{2}{x-3}$

కాని వాలు $=2$ కావున $\frac{-2}{x-3}=2\Rightarrow x-3=-1\Rightarrow x=2$

15. $A(6,8)$ **మరియు** $B(4,14)$ **బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వాలు ఎంత?**

సాధన: AB వాలు $=\frac{14-8}{4-6}=\frac{6}{-2}=-3$

వాలు $=-3$

16. $A(6,12)$ **మరియు** $B(x,8)$ **బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలు 4 అయితే** x **విలువ ఎంత?**

సాధన: AB వాలు $=4--\frac{8-12}{x-16}=4\Rightarrow\frac{-4}{x-6}=4$

$\therefore x-6=-1\Rightarrow x=5$

17. $A(-8,11)$ **మరియు** $B(2,y)$ **బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలు** $-\frac{4}{3}$ **అయితే** y **విలువ రాబట్టండి.**

సాధన: AB వాలు $= \frac{-4}{3}, \therefore \frac{y-11}{2+8} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \frac{y-11}{10} = \frac{-4}{3}$

$\therefore 3y - 33 = -40 \Rightarrow 3y = -7$

$\therefore y = -\frac{7}{3}$

18. $A(2,3), B(0,4)$ మరియు $C(-5,0)$ లు త్రిభుజ శీర్షాలు B బిందువు మరియు AC మధ్య బిందువు గుండా పోయే రేఖవాలు కనుగొనుము.

సాధన: AC మధ్య బిందువు E అనుకొనిన

E నిరూపకాలు $\left(\frac{2-5}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore BE$ రేఖవాలు $= \frac{\frac{3}{2} - 4}{-\frac{3}{2} - 0} = \frac{\frac{3-8}{2}}{\frac{-3}{2}} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

$\therefore BE$ రేఖ వాలు $= \frac{5}{3}$

19. $A(-2,7), B(1,0), C(4,3)$ మరియు $D(1,2)$ లు చతుర్భుజ శీర్షాలు అయితే

1) AB వాలు $= CD$ వాలు

2) BC వాలు $= AD$ వాలు

సాధన: 1) AB వాలు $= \frac{0-7}{1+2} = \frac{-7}{3}$

CD వాలు $= \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore AB$ వాలు $\neq CD$ వాలు

2) BC వాలు $= \frac{3-0}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$

AD వాలు $= \frac{2-7}{1+2} = \frac{-5}{3}$

$\therefore BC$ వాలు $\neq AD$ వాలు

20. $(2,-3)$ **మరియు** $(-4,1)$ **బిందువులను కలిపే రేఖ**

1) $(7,-1)$ **మరియు** $(0,3)$ **బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరం.**

2) $(4,5)$ **మరియు** $(0,-2)$ **లను కలిపే రేఖకు లంబం అనిచూపము.**

సాధన: సూచన: రెండు రేఖలు సమాంతరాలైతే వాటి వాలులు సమానం.

రెండు రేఖలు లంబాలైతే వాటి వాలుల లబ్ధం '-1'కి సమానం.

$A(2,-3), B(-4,1)$ బిందువులను కలిపే రేఖ

AB వాలు $= \frac{1+3}{-4-2} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

1) $C(7,-1), D(0,3)$ లను కలిపే రేఖవాలు $CD = \frac{3+1}{0-7} = \frac{4}{-7}$

$\therefore AB$ వాలు $\neq CD$ వాలు కావున ఇవి సమాంతరం కావు.

2) $P(4,5), Q(0,-2)$ లను కలిపే రేఖవాలు $= \frac{-2-5}{0-4} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$

$\because$ CD వాలు $\times PQ$ వాలు $= -1$ కావున CD రేఖ PQ రేఖకు లంబం అగును.

21. $A(-4,1), B(2,3)$ **బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ వాలును కనుగొనుము.**

సాధన: AB రేఖ వాలు $= \frac{3-1}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ దత్త రేఖకు సమాంతరంగా గల రేఖ వాలు $= \frac{1}{3}$ అగును.

22. $A(-5,7), B(0,-2)$ **లను కలిపే రేఖ** $C(1,3)$ **మరియు** $D(4,x)$ **లను కలిపే రేఖకు లంబంగా వుండే** x **విలువను కనుగొనుము.**

సాధన: AB రేఖ వాలు $= \frac{-2-7}{0+5} = \frac{-9}{5}$

CD రేఖ వాలు $= \frac{x-3}{4-1} = \frac{x-3}{3}$

కాని దత్త రేఖలు లంబంగా వుంటే వాటి వాలుల లబ్ధం -1 కావాలి.

$\therefore \frac{x-3}{3} \times \frac{-9}{5} = -1$

$9x - 27 = 15$

$9x = 42$

$\therefore x = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$

$\therefore x = \frac{14}{3}$

23. సరళరేఖ వాలు బావమును ఉపయోగించి $A(6,-1), B(5,0)$ మరియు $C(2,3)$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి.

సాధన: AB వాలు $= \frac{0+1}{5-6} = -1$; AC వాలు $= \frac{3+1}{2-6} = -1$

అదే విధంగా BC వాలు $= \frac{3-0}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$

$\because AB$ వాలు $= BC$ వాలు $= AC$ వాలు

కావున దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు అగును.

24. $(K,9)$ మరియు $(2,7)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ, $(2,-2)$ మరియు $(6,4)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖకు సమాంతరంగా వుంటే K విలువ ఎంత?

సాధన: $(K,a),(2,7)$ ల గుండా పోవు రేఖవాలు $= \frac{7-9}{2-K} = \frac{-2}{2-K}$ మరియు $(2,-2),(6,4)$ ల గుండా పోవు రేఖవాలు $= \frac{4+2}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

దత్త రేఖలు సమాంతరంగా వుంటే వాలులు సమానం కావున

$\frac{-2}{2-K} = \frac{3}{2} \Rightarrow 6 - 3K = -4 \Rightarrow 3K = 10 \Rightarrow K = \frac{10}{3}$

25. క్రింది సరళరేఖా సమీకరణాల నుండి X – అంతర ఖండం, Y – అంతర ఖండంలను కనుక్కోండి.

1) $x + 3y = 6$ **2)** $7x + 3y = 2$ **3)** $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$

4) $ax+by=c$ 5) $\frac{y}{2}-2x=8$ 6) $\frac{y}{3}-\frac{2x}{3}=7$

సాధన: 1) $x+3y=6$ ఇరువైపుల 6చే భాగించగా $\frac{x}{6}+\frac{3y}{6}=1 \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$ దీనిని $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

చే పోల్చగా $X-$అంతర ఖండం $a=6$

$Y-$అంతర ఖండం $b=2$ అగును.

2) $7x+3y=2$ ఇరువైపుల 2చే భాగించగా $\frac{7x}{2}+\frac{3y}{2}=1 \Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{2}{7}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{2}{3}\right)}=1$

ఇక్కడ $X-$అంతర ఖండం $a=\frac{2}{9}$; $Y-$అంతర ఖండం $b=\frac{2}{3}$

3) $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1 \Rightarrow X-$అంతర ఖండం $=2a$, $Y-$అంతర ఖండం $=2b$

4) $ax+by=c$ -ఇరువైపులా c చే భాగించగా

$$\frac{ax}{c}+\frac{by}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{c}{a}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{c}{b}\right)}=1$$

$\therefore X-$అంతర ఖండం $a=\frac{c}{a}$, $Y-$అంతర ఖండం $b=\frac{c}{b}$

5) $\frac{y}{2}-2x=8 \Rightarrow 2x-\frac{y}{2}=-8$ ఇరవైపుల 8 చే భాగించగా $\frac{2x}{-8}-\frac{y}{2\times 8}=1 \Rightarrow \frac{x}{-4}+\frac{y}{16}=1$

$\therefore X-$అంతర ఖండం $a=-4$, $Y-$అంతర ఖండం $b=16$

6) $\frac{y}{3}-\frac{2x}{3}=7$ ఇరువైపుల 7 చే భాగంచగా $\frac{y}{3\times 7}-\frac{2x}{3\times 7}=1$

$$\frac{y}{3\times 7}-\frac{2x}{3}=1 \Rightarrow \frac{y}{21}-\frac{x}{\left(\frac{21}{2}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{21}{2}\right)}+\frac{y}{21}=1$$

$\therefore X-$అంతర ఖండం $a=\frac{-21}{2}$, $\quad Y-$అంతర ఖండం $b=21$

26. $(4,2)$ **మరియు** $X-$**అక్షం నుండి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పథ సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన: $A(4,2)$ మరియు- $X-$అక్షం నుండి సమాన దూరంలో గల బిందువు $P(x,y)$ అనుకొనిన

$X-$అక్షం నుండి $p(x,y)$ కి గల దూరం $=y$

దత్తాంశం నుండి $AP=y \Rightarrow (AP)^2=y^2$

$(x-4)^2+(y-2)^2=y^2$

$x^2+16-8x+y^2+4-4y=y^2 \Rightarrow$ బిందుపథం సమీకరణం

$x^2-8x-4y+20=0$ అగును.

27. **క్రింద ఇచ్చిన ఏ బిందువుల సమితి త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి?**

1) $(3,2),(-3,2)$ **మరియు (0,3)** **2)** $(3,2),(3,-2)$ **మరియు (3,0)**

సాధన: 1) $A(3,2),B(-3,2),C(0,3)$ అనుకొనిన

AB వాలు $=\frac{2-2}{-3-3}=0;\quad BC$ వాలు $=\frac{3-2}{0+3}=\frac{1}{3}$

$\because AB$ వాలు $\neq BC$ వాలు కావున దత్తబిందువులు సరేఖీయాలు కావున ఇవి త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

2) $A(3,2),B(3,-2),C(3,0)$ అయిన

AB వాలు $=\frac{-2-2}{3-3}=\alpha;\quad BC$ వాలు $=\frac{0+2}{3-3}=\alpha$

$\therefore AB$ వాలు $=BC$ వాలు కావున దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు కావున ఇవి త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచవు.

28. **క్రింద ఇచ్చిన శీర్షాలతో త్రిభుజ వైశాల్యాలను కనుక్కోండి.**

1) $(1,2),(-2,3),(-3,-4)$ **2)** $(c,a),(c+a,a),(c-a,a)$

సాధన: 1) త్రిభుజవైశాల్యం $\Delta=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\left|1(3+4)-2(-4-2)-3(2-3)\right|$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|7-2(-6)-3(-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|7+12+3\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|22\right|$$

$\Delta = 11$ చ.యూ.

29. క్రింది బిందువు సమితి సరేఖీయాలని చూపండి. (దాని వైశాల్యం శూన్యం అని చూపండి?)

1) $(-2,5),(2,-3)$ మరియు **(1,0)**

సాధన: $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|-2(-3-0)+2(0-5)+1(5+3)\right|$$

$= \frac{1}{2}\left|+6-10+8\right| = \frac{1}{2}\left|4\right| = 2$ చ.యూ.

$\therefore \Delta \neq 0$ కావున దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు కావు.

2) $(a,b+c),(b,c+a),(c,a+b)$

సాధన: $\Delta = \frac{1}{2}\left|a(c+a-a-b)+b(a+b-b-c)+c(b+c-c-a)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|ac-a^2b+ab-bc+bc-ca\right| = \frac{1}{2}\left|0\right| = 0$$

$\because \Delta = 0$ కావున దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు.

30. $(-3,12),(7,6)$ మరియు (x,a) లు సరేఖీయాలైతే x విలువ ఎంత?

సాధన: $A(-3,12),B(7,6),C(x,a)$ అనుకొనిన

AB వాలు $= \frac{6-12}{7+3} = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5}$

BC వాలు $= \frac{a-6}{x-7}$ దత్త బిందువులు సరేఖీయాలైతే వాలులు సమానం కావున $\frac{-3}{5} = \frac{a-6}{x-7}$

$-3x + 21 = 5a - 30 \Rightarrow -3x = 5a - 51$

$\therefore x = \frac{51-5a}{3}$ అగును.

31. క్రింది బిందువుల ద్వారా పోయే సరళరేఖ వాలును కనుక్కోండి.

$a)$ $(1,2),(4,2)$ $b)$ $(4,-6),(-2,-5)$

సాధన: $a)$ వాలు $= \frac{2-2}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$ $b)$ వాలు $= \frac{-5+6}{-2-4} = \frac{-1}{6}$

32. $(3,y),(2,7)$ బిందువులను కలిపే రేఖ $(-1,4),(0,6)$ బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరంగా వుంటే y విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: మొదటి రేఖ వాలు $= \frac{7-y}{2-3} = -7 + y$

రెండో రేఖ వాలు $= \frac{6-4}{0+1} = 2$

$\because$ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటే వాటి వాలులు సమానం $-7 + y = 2 \Rightarrow y = 9$

33. క్రింది సరళరేఖల అంతర ఖండాలు కనుక్కోండి.

1) $2x - 3y = 8$ **2)** $3x - 7y + 9 = 0$ **3)** $x - \frac{y}{2} = 3$

సాధన: 1) ఇరువైపులా8చే భాగించగా $\frac{2x}{8} - \frac{3y}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{8}{2}} + \frac{y}{-\frac{8}{3}} = 1$

$\therefore X$ – అంతర ఖండం $a = 4$; Y – అంతర ఖండం $b = \frac{-8}{3}$

2) $3x - 7y + 9 = 0 \Rightarrow 3x - 7y = -9$ ఇరువైపులా 9చే భాగించగా

$$\frac{3x}{-9}-\frac{7y}{-9}=1 \Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{-9}{3}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{9}{7}\right)}=1$$

$X-$ అంతర ఖండం $-=-3$, $Y-$ అంతర ఖండం $=\frac{9}{7}$

3) $x-\frac{y}{2}=3 \Rightarrow \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1$

$\therefore X-$ అంతర ఖండం $=3$, $Y-$ అంతర ఖండం $=-6$.

34. $(2,4)$ **మరియు** $Y-$ **అక్షానికి సమాన దూరంలో గల బిందువు బిందు పథం కనుక్కోండి**

సాధన: దత్త బిందువు $A(2,4)$ మరియు $Y-$ అక్షానికి సమాన దూరంలో గల బిందువు $P(x.y)$ అనుకొనిన P నుండి

$Y-$ అక్షానికి దూరం $=x$ మరియు దత్తాంశం నుండి $AP=x \Rightarrow (AP)^2=x^2$

$(x-2)^2+(y-4)^2=x^2 \Rightarrow x^2+4-4x+y^2+16-8y=x^2$

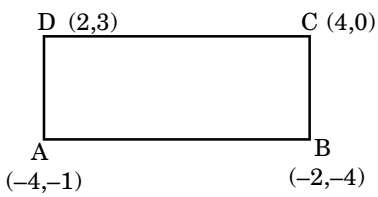
$\therefore$ బిందు పథం $=y^2-4x-8y+20=0$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. **సరళరేఖ వాలును ఉపయోగించి** $(-4,-1),(-2,-4),(4,0)$ **మరియు** $(2,3)$ **బిందువులు వరుసగా దీర్ఘచతురస్ర శీర్షాలు అని చూపండి.**

సాధన: AB వాలు $=\frac{-4+1}{-2+1}=\frac{-3}{2}$; BC వాలు $=\frac{0+4}{4+2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

CD వాలు $=\frac{3-0}{2-4}=\frac{-3}{2}$; AD వాలు $=\frac{3+1}{2+4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$



ఇక్కడ AB వాలు $=CD$ వాలు $=\frac{-3}{2}$ మరియు BC వాలు $=AD$ వాలు $=\frac{2}{3}$

కావున $AB \| CD$ & $BC \| AD$ మరియు

AB వాలు $\times$ BC వాలు $=-1$ మరియు AD వాలు $\times$ CD వాలు $=-1$

కావున $AB \perp BC, AB \perp AD$ కావున $ABCD$ దీర్ఘ చతురస్రం అగును..

2. $A(-3,3), B(-1,-4)$ **మరియు** $C(5,-2)$ **లు త్రిభుజ శీర్షాలు.** M **మరియు** N **లు వరుసగా** AB **మరియు** AC **ల మధ్య బిందువులు. కావున** MN **అనునది** BC **కి సమాంతరం మరియు** $MN = \frac{1}{2}BC$ **అని చూపండి.**

సాధన: AB కి M మధ్య బిందువు కావున

$$M \text{ నిరూపకాలు} = \left(\frac{-3-1}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{-1}{2}\right) = \left(-2, \frac{-1}{2}\right) = M$$

ఇదేవిధంగా AC కి N మధ్య బిందువు కావున

$$N \text{ నిరూపకాలు } = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right) = N$$

$$\therefore MN \text{ వాలు} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$BC \text{ వాలు} = \frac{-2+4}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\because BC$ వాలు $= MN$ వాలు కావున MN, BC కి సమాంతరం.

$$MN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(-2+4)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$\therefore MN = \frac{1}{2}BC$ అగును.

3. **ఒక బిందువు** $(4,1)$ **కి గలదూరం** $(1,5)$ **కి గల దూరానికి రెట్టింపు అయితే** P **బిందు పదాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన: బిందు పథంపై బిందువును $P(x,y)$ అనుకొనిన మరియు $A(4,1), B(1,5)$ అయిన దత్తాంశం నుండి.

$$AP = 2PB \Rightarrow (AP)^2 = 4(PB)^2$$

$$(x-4)^2+(y-1)^2=4\left[(x-1)^2+(y-5)^2\right]$$

$$x^2+16-8x+y^2+1-2y=4\left(x^2+1-2x+y^2+25-10y\right)$$

$$x^2+y^2-8x-2y+17=4x^2+4y^2-8x-40y+104$$

$\therefore$ బిందు పథం : $3x^2+3y^2-38y+87=0$

4. $A(2,3)$ **మరియు** $B(0,2)$ **బిందువులు త్రిభుజ శీర్షాలు, త్రిభుజం** PAB **వైశాల్యం 3చ.యూ.గా గల** P **బిందుపథం కనుక్కోండి.**

సాధన: బిందు పథంపై బిందువును $P(x,y)$ అనుకొనిన,

ΔPAB వై. = 3చ.యూ.

$$\frac{1}{2}\left|x(3-2)+2(2-y)+0(y-3)\right|=3$$

$$\left|x(1)+4-2y\right|=6$$

$$\therefore x-2y+4=\pm 6$$

$$x-2y+4=6, \quad x-2y+4=-6$$

$$x-2y=2 \qquad x-2y=-10$$

$\therefore P$ బిందు పథం : $(x-2y-2)(x-2y+10)=0$

5. $(2,3)$ **మరియు** $(-3,4)$ **బిందువుల నుండి దూరాల వర్గాల మొత్తం 16 అయితే** P **బిందు పథ సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన: బిందుపథంపై బిందువు $P(x,y)$ అనుకొనిన మరియు $A(2,3), B(-3,4)$ మరియు దత్తాంశం నుండి.

$$(PA)^2+(PB)^2=16$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(x+3)^2+(y-4)^2=16$$

$$x^2+4-4x+y^2+9-6y+x^2+9+6x+y^2+16-8y-16=0$$

$$\therefore 2x^2+2y^2+2x-14y+22=0$$

$\therefore$ బిందుపథం సమీకరణం : $x^2 + y^2 + x - 7y + 11 = 0$

6. $A(3,0)$ **మరియు** $B(-3,0)$ **బిందువుల నుండి దూరాల భేదం 9గా గల బిందువు పథ సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన: బిందు పథంపై బిందువును $P(x,y)$ అనుకొనిన దత్తాంశం నుండి $PA - PB = 9$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 9$$

$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 9 + \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$ ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 = 81 + x^2 + 9 + 6x + y^2 + 18\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$-12x - 81 = 18\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$-(4x + 27) = 6\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

మళ్లీ ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$16x^2 + 729 + 216x = 36\left(x^2 + 9 + 6x + y^2\right)$$

$$16x^2 + 729 + 216x = 36x^2 + 324 + 216x + 36y^2$$

$$20x^2 + 36y^2 - 405 = 0$$

$\therefore P$ బిందు పథ సమీకరణం : $20x^2 + 36y^2 - 405 = 0$

7. $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ **బిందువుగా గల బిందు పథ సమీకరణం** $y^2 = ax$ **దీనిపై** $(b,6)$ **కూడా ఒక బిందువు అయితే** b **విలువ కనుక్కోండి.**

సాధన: $y^2 = ax$ పై $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ ఒక బిందువు కావున

$$(-2)^2 = a\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{39}{2} = 4 \Rightarrow 3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$$

$y^2 = ax$ నుండి $y^2 = \frac{8}{3}x$ కాని దీనిపై (1) $(b,6)$

కూడా బిందువు కావున $(6)^2 = \frac{8}{3}(b)$

$36 \times 3 = 86 \Rightarrow b = \frac{36 \times 3}{8} = \frac{27}{2}$

8. $(a+b, a-b)$ **మరియు** $(a-b, a+b)$ **బిందువులకు సమాన దూరంలో ఉండే బిందువు బిందు పథం కనుక్కోండి..**

సాధన: బిందు పథంపై బిందువు $P(x, y)$ మరియు $A(a+b, a-b), B(a-b, a+b)$ అనుకొనిన దత్తాంశం నుండి

$PA = PB$ కావున $(PA)^2 = (PB)^2$

$\Rightarrow [x-(a+b)]^2 + [y-(a-b)]^2 = [x-(a-b)^2] + (y-(a+b))^2$

$x^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)x + y^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)y$

$= x^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)x + y^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)y$

$\Rightarrow -2(a+b)(x-y) + 2(a-b)(x-y) = 0$

$[-(a+b) + (a-b)](x-y) = 0$

$x - y = 0$ కావలసిన బిందు పథం.

9. $A(a, 0), B(-a, 0)$ **రెండు స్థిర బిందువులు అయితే** $3|PA| = 2|PB|$ **అగునట్లు చలించే బిందువు** P **బిందుపథం కనుక్కోండి.**

సాధన: $P(x, y)$ అనుకొనిన దత్తాంశం నుండి.

$3(PA) = 2(PB) \Rightarrow 9(PA)^2 = 4(PB)^2$

$9[(x-a)^2 + (y-0)^2] = 4[(x+a)^2 + (y-0)^2]$

$9[x^2 + a^2 - 2ax + y^2] = 4[x^2 + a^2 + 2ax + y^2]$

$9x^2 + 9a^2 - 18ax + 9y^2 = 4x^2 + 4a^2 + 8ax + 4y^2$

$5x^2 + 5y^2 - 26ax + 5a^2 = 0$

బిందు పథ సమీకరణం : $5x^2 + 5y^2 - 26ax + 5a^2 = 0$

10. $A(1,2)$ **మరియు** $B(3,4)$ **బిందువులకు దూరాల మొత్తం 25 అయితే** P **బిందు పథ సమీకరణం కనుక్కోండి?**

సాధన: బిందుపథంపై బిందువు $P(x, y)$ అనుకొనిన

దత్తాంశం నుండి

$(PA)^2 + (PB)^2 = 25$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 - 4y + x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = 25$

$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 30 - 25 = 0$

$\therefore$ బిందుపథ సమీకరణం :

$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 5 = 0$ ·

10

సరళరేఖలు

గణితశాస్త్ర శాఖ అయిన జ్యామితిలో మనం రేఖలు, కోణాలు, తలాలు, వక్రాలు, దీర్ఘచతురస్ర చిత్రాలు గురించి చదువుకున్నాం. రేఖ గురించి ఒకసారి జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుంటే, తలంలో అది రెండు బిందువులను కలిపే రేఖ ఇది అంతం కాకుండా ఇరుదిశల పోయే కిరణమే మనము ఏకఘాత సమీకరణ చిత్రాలను గూర్చి కూడ తెలిసికొని ఉన్నాము. ఇవి అన్నియు సరళరేఖలకు సంబంధించినవే.

ఒక తలంలో వివిధ నియమాల నుండి ఒక సరళరేఖ సమీకరణ సమస్యలను ఉత్సాహంగా కనుగొనవచ్చును. ఈ పాఠ్యాంశంనందు ఇటువంటి సందర్భంలో వైశ్లేషిక జ్యామితిని నిరూపక జ్యామితి అనిపిలుస్తారు. మనము ఇప్పుడు సరళరేఖ సమీకరణాల వివిధ రూపాలను, సమస్యలను సాధించడం ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చును.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠాన్ని చదవడం వలన మీరు ఈ క్రింది విషయాలు తెలుసుకుంటారు.

- అంతరాళంలోగల సరళరేఖకు సౌష్ఠవ రూపంలో సమీకరణాలు.
- సరళరేఖ సాధారణ రూపాన్ని సౌష్ఠవ రూపంలోకి మార్చుట
- ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖకు లంబదూరము కనుగొనుట
- ఒక సరళరేఖ, ఒక తలము మధ్య కోణము కనుగొనుట
- రెండు సరళరేఖల సతలీయ నియమాలు

ముఖ్యాంశాలు :

- Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x = a$ మరియు X− అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $y = b$
- Y-అక్షంపై అంతరఖండం 'C' గా, వాలు m గా గల సరళరేఖ సమీకరణం $\mathrm{Y} = mx + \mathrm{C}$
- సరళరేఖ $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ బిందువు గుండా పోతూ, వాలు m గా గల సరళరేఖ సమీకరణము $y = mx + \mathrm{C}$
- $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ మరియు $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ అనే రెండు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- X-అక్షం, Y-అక్షాలతో వరసగా శూన్యేతర అంతరఖండాలు a, b గల సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుంచి P దూరంలో ఉండి, మూలబిందువు నుంచి దానికి గీసిన అభిలంబకిరణం ధన -అక్షంతో అపసవ్యదిశలో కోణం చేస్తే, ఆ సరళరేఖ సమీకరణం $x \cos \alpha + y \sin \alpha = P$.

- పరామితి రూపంలో సరళరేఖ సమీకరణం $\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\sin \alpha} = r$ ఇక్కడ r అనేది సరళరేఖ మీద ఇచ్చిన బిందువు $A(x_1, y_1)$ బిందువు $P(x, y)$ నుంచి ఏదేని బిందువుకు గల దూరం. దత్తరేఖ ధన X-అక్షంలో అపసవ్యదిశలో 'α' కోణం చేస్తూండాలి.

- x మరియు y లలో సాధారణ ఏకఘాత సమీకరణం ఎల్లప్పుడు ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది. A మరియు B లు రెండూ సున్న కానప్పుడు.

- $Ax + By + C = 0$ అనే సాధారణ సమీకరణం నుండి ఈ క్రింది వాటిని గణించవచ్చును.

i) సరళరేఖ వాలు $= -\frac{A}{B}$

ii) X-అంతరఖండము $= -\frac{C}{A}$

iii) Y- అంతరఖండము $= -\frac{C}{B}$

iv) మూలబిందువు నుండి సరళరేఖకు గల లంబదూరం $= \frac{|C|}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

v) మూలబిందువు నుంచి అభిలంబము క్షితిజముతో చేయు కోణాలు

$$\cos \alpha = \frac{\mp A|}{\sqrt{A^2+B^2}} \; ; \quad \sin \alpha = \frac{\mp B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$C > 0$ అయితే ఎగువ గుర్తును (ధనాత్మకము) తీసుకుంటుంది.

$C < 0$ అయితే దిగువ గుర్తును (రుణాత్మకము) తీసుకుంటుంది.

$C = 0$ అయితే ఎగువ లేదా దిగువ గుర్తులను తీసుకుంటుంది.

- m_1, m_2 వాలులు గల రెండు సరళరేఖల మధ్యకోణం అయితే

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

i) $m_1 = m_2$ అయితే సరళరేఖలు సమాంతరాలు

ii) $m_1 m_2 = -1$ అయితే సరళరేఖలు లబ్దాలు

B. రెండు సాధారణ రూపంలోగల సరళరేఖల మధ్యకోణం అయితే

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

i) $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ లేదా $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ అయితే సరళరేఖలు సమాంతరాలు.

ii) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ అయితే సరళరేఖలు లబ్ధాలు.

- దత్త బిందువు (x_1, y_1) నుండి సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు గల దూరం

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

- సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ సమీకరణం $Ax + By + K = 0$
- సరళరేఖ $Ax + By + C = 0$ కు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $Bx - Ay + K = 0$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. X -అక్షం ధనదిశలో 45^0 కోణం చేసే సరళరేఖ వాలు ఎంత?

సాధన : వాలు = m = $\tan 45^0 = 1$

$\therefore$ వాలు = 1

2. Y -అక్షం ధనదిశలో 45^0 కోణం చేసే సరళరేఖ వాలు ఎంత?

సాధన : Y -అక్షములో అనగా $m = -\tan 45^0$

$\therefore$ వాలు $m = -1$

3. (2, −3) మరియు (3, 4) బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వాలు ఎంత?

సాధన : వాలు = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y \text{ నిరూపకాల భేదం}}{x \text{ నిరూపకాల భేగం}} = \dfrac{4+3}{3-2}$

$m = 7$.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. (2,5) మరియు (7, x) బిందువులను కలిపే రేఖ వాలు 3 అయితే x విలువ ఎంత?

సాధన : $\dfrac{y \text{ నిరూపకాల భేదం}}{x \text{ నిరూపకాల భేగం}} = \dfrac{x-5}{7-2} = \dfrac{x-5}{5}$

$\therefore \dfrac{x-5}{5} = 3 \Rightarrow x-5 = 15 \Rightarrow x = 20$

2. X -అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటూ (−3, −4) బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : X -అక్షానికి సమాంతరం ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $y = C$ ఇది (−3, −4) గుండా పోతుంది. కావున $C = -4$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $y = -4$ or $y + 4 = 0$ అవుతుంది.

3. X -అక్షానికి లంబంగా ఉంటూ (5, −3) బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : X -అక్షం అనగా y నిరూపకం సున్నా

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y-0=\frac{-3}{0}(x-5)$$

$$-3(x-5)=0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$$

కావలసిన సమీకరణం $x-5=0$

4. $y-$**అంతరఖండం −2, వాలు '2' గా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.**

సాధన : $y=mx+c \quad \therefore m=2; \quad C=-2$

$$y=2x-2$$

5. $4x+3y=6$ **సరళరేఖకు వాలు మరియు** $y-$**అంతరఖండంను కనుగొనుము.**

సాధన : $4x+3y=6 \quad \ldots(1)$

$$3y=-4x+6$$

$$y=\frac{-4}{3}x+6$$

$\therefore$ వాలు $= -\frac{4}{3}$

(1)ని కింది విధంగా వ్రాయవచ్చు

$$\frac{x}{\frac{6}{4}}+\frac{y}{\frac{6}{3}}=1$$

$\therefore y-$ అంతరఖండం $= \frac{6}{3}=2$.

6. **వాలు** $\frac{-3}{7}$ **గా, (−7, 4) బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.**

సాధన : $y-y_1=m(x-x_1)$

$m=\frac{-3}{7}$; బిందువు $(-7,4)$

$$y-4=\frac{-3}{7}(x+7)$$

$$3x+7y=7$$

7. (3, −4) మరియు (−4, 3) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 4 = \frac{3+4}{-4-3}(x-3)$$

$$-y - 4 = x - 3 \rightarrow \Rightarrow x + y + 1 = 0$$

8. $2x + 5y + 3 = 0$ సమీకరణంను అంతరఖండ రూపంలోకి వ్రాయండి లేదా మార్చండి.

సాధన :

$$2x + 5y = -3$$

$$\frac{2x}{-3} + \frac{5y}{-3} = 1$$

$$\frac{x}{(-3/2)} + \frac{y}{(-3/5)} = 1$$

$x -$ అంతరఖండం = $\frac{-3}{2}$

$y -$ అంతరఖండం = $\frac{-3}{5}$

9. $3x - 2y + 12 = 0$ అనే సరళరేఖ నిరూపకాక్షాల మధ్య A,B అంతరఖండాల రేఖాఖండం పొడవును కనుగొనుము.

సాధన : $x -$ అక్షంపై y నిరూపకం సున్నా

అనగా $3x - 2(0) = -12$

$$x = -4$$

$y -$ అక్షంపై x నిరూపకం సున్నా

$$3(0) - 2y = -12 \Rightarrow y = 6$$

$(-4, 0), (0, 6)$ ల మధ్య ఉన్న AB రేఖ పొడవు $= \sqrt{(4)^2 + (6)^2} = 2\sqrt{13}$

10. $3x-4y+10=0$ **సమీకరణాన్ని అభిలంబ రూపంలోకి మార్చండి.**

సాధన : $ax+by+c=0$ ను అభిలంబ రూపంలోకి మార్చగా

$ax+by=-c$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

అదేవిధంగా $3x-4y=-10$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=\frac{-10}{5}$$

లేదా $\frac{-3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$

11. $4x+y=3$ **మరియు** $\frac{x}{2}+y=\frac{4}{7}$ **సరళరేఖల మధ్య కోణం కనుగొనుము.**

సాధన : $4x+y=3 \quad \ldots(1)$

$y=-4x+3$ ఇక్కడ $A_1=-4,\ B_1=1,\ C_1=3$

$\frac{x}{2}+y=\frac{4}{7} \quad \ldots(2)$

$$y=\frac{-x}{2}+\frac{4}{7}$$

ఇక్కడ $A_2=\frac{-1}{2};\ B_2=1;\ C_2=\frac{4}{7}$

సరళరేఖల మధ్య కోణం

$$Tan\theta=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}$$

$$Tan\ \theta = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{4}{1}}{+\frac{4}{2}+\frac{1}{1}} = \frac{-1+8}{+4+2} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$$

12. $A_1x+B_1y+C_1=0;\ A_2x+B_2y+C_2=0$ **అనే రెండు సరళరేఖలు**

$i)$ **సమాంతరం** $ii)$ **లంబంగా ఉండడానికి నియమాలు వ్రాయండి.**

సాధన : $i)$ సమాంతరంగా ఉండడానికి వాలు సమానంగా ఉండాలి అనగా $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$

$ii)$ లంబంగా ఉండడానికి వాలుల లబ్ధం -1 కి సమానంగా ఉండాలి అనగా $A_1A_2+B_1B_2=0$.

13. $x-3y=7$ **మరియు** $2x-6y-16=0$ **అనే సరళరేఖలు సమాంతరాలా?**

సాధన : వాలులు సమానమైతే అవి సమాంతరాలు

$$x-3y=7 \Rightarrow y=\frac{-x}{-3}-\frac{7}{3}$$

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$$

ఇక్కడ $m_1=\frac{1}{3}$

$$2x-6y-16=0$$

$$2x-6y=16$$

$$x-3y=8$$

$$-3y=-x+8$$

$$y=\frac{-1}{-3}x-\frac{8}{3}$$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

$\therefore$ ఇక్కడ $m_2 = \frac{1}{3}$

$\therefore m_1 = m_2$ కావున అవి సమాంతరాలు.

14. $x = y + 1$ **మరియు** $x = -y + 1$ **అనే సరళరేఖలు లంబాలా?**

సాధన : సరళరేఖలు లంబం కావడానికి

వాలుల లబ్ధం -1 కావలెను లేదా $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ కావలెను.

$x - y - 1 = 0 \quad \ldots(1)$

$A_1 = 1;\ B_1 = -1;\ C = -1$

$x + y - 1 = 0 \quad \ldots(2)$

$A_2 = 1;\ B_2 = 1;\ C = -1$

$\therefore A_1A_2 + B_1B_2 = 1 - 1 = 0$

$\therefore$ కావున ఇచ్చిన సరళరేఖలు లంబాలు.

15. **(2,3) బిందువు నుండి** $3x + 2y + 4 = 0$ **సరళరేఖకు గల లంబదూరంను కనుగొనుము.**

సాధన : లంబదూరం $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

$$d = \left| \frac{3(2) + 2(3) + 4}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{6 + 6 + 4}{\sqrt{9 + 4}} \right|$$

$d = \frac{16}{\sqrt{13}}$ యూనిట్లు.

16. Y **– అక్షం మీది ఏ బిందువల నుండి సరళరేఖ** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **కు గల లంబదూరం** 'b' **అవుతుంది.**

సాధన : బిందువు Y – అక్షంమీద ఉంటే x నిరూపకం సున్నా అవుతుంది.

లంబదూరం $b = \left|\dfrac{bx + ay - ab}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right|$

$$b = \frac{b.0 + a(y - b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a(y - b) = \pm b\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

$\therefore$ బిందువు = $\left[0, \dfrac{b}{a}\left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)\right]$

17. **Y – అక్షం మీది ఏ బిందువుల నుండి సరళరేఖ $4x + 3y = 12$ గల లంబదూరం 4 అవుతుంది.**

సాధన : Y – అక్షం మీద x నిరూపకం సున్నా కావున

$$4 = \left|\frac{4.0 + 3y - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right|$$

$$4 = \left|\frac{3y - 12}{5}\right|$$

$$3y - 12 = 20 \Rightarrow y = \frac{32}{3}$$

$\therefore$ బిందువు = $\left(0, \dfrac{32}{3}\right)$

18. **X – అక్షం మీది ఏ బిందువుల నుండి సరళరేఖ $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1$ కు గల లంబదూరం '3' అవుతుంది.**

సాధన : X – అక్షం మీద y నిరూపకం సున్నా

$$3 = \left|\frac{x + y - 4}{\sqrt{4^2 + 4^2}}\right|$$

$$3 = \left|\frac{x+0-4}{\sqrt{32}}\right|$$

$$3\sqrt{32} = x - 4$$

$$x = 4 \pm 3\sqrt{32}$$

$$\therefore\ x = 4 \pm 3\sqrt{12}$$

19. రేఖ (0,−2) బిందువు గుండా పోతూ $3x + y = 2$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $3x + y = 2 \rightarrow (1)$ కి సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $3x + y = C$ రూపంలో ఉండును. ఇది $(0,-2)$ గుండా పోయినచో $3(0) - 2 = C \Rightarrow\ C = -2$

$\therefore$ సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $3x + y = -2$

20. బిందువు (0,−3) గుండా పోతూ $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $x + y + 1 = 0 \rightarrow (1)$ కి లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం $x + b + k = 0$ రూపంలో ఉండును.

ఇది $(0,-3)$ గుండా పోతుంది. $\therefore k = -3$

$$x - y - 3 = 0$$

21. సరళరేఖ $A(2,1)$ బిందువు ద్వారా పోతూ ధన $X-$ అక్షంతో అపసవ్య దిశలో $\frac{\pi}{6}$ కోణం చేసే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : వాలు = $m = \tan\theta \Rightarrow \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ వాలు, బిందువు గుండా పోయే సమీకరణం

బిందువు $A(2,1)$ $\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$$

$$x - \sqrt{3}y - 2 - \sqrt{3} = 0$$

22. $x-$ అంతరఖండం 'a' మరియు $x-$ అంతరఖండం 'b' అయితే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $x-$ అంతరఖండం = a

$y-$ అంతరఖండం = b గా గల సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow bx+ay=ab$$

23. $2x+3y=4$ మరియు $4x+6y=20$ సరళరేఖల మధ్య దూరం కనుగొనుము.

సాధన : $ax+by+c_1=0;\ ax+by+c_2=0$ అనే సరళరేఖల మధ్య దూరం

$$=\left|\frac{c_2-c_4}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{10-4}{\sqrt{2^2+3^2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $x-$ అక్షం ధనదిశలో 120^0 కోణం చేసే ఒక సరళరేఖ $y-$ అక్షం రుణ దిశలో $\frac{1}{\sqrt{3}}$ అంతరఖండం చేసే సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $y-$ అంతరఖండం $=\frac{1}{\sqrt{3}}=c$

వాలు $=m=\tan=120^0=\tan\left(90+30^0\right)$

$$m=-\tan 30^0=-\sqrt{3}$$

$$m=-\sqrt{3}$$

రేఖా సమీకరణం $y=mx+c$

$$y=-\sqrt{3}x+c$$

$$\sqrt{3}x+y=c$$

$$\frac{\sqrt{3}}{c}x+\frac{y}{c}=1$$

$y-$ అంతరఖండం $= c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

కావలసిన సమీకరణం $3x + \sqrt{3}y = 1$

2. సరళరేఖ (1,2) గుండా పోతూ నిరూపకాక్షలమీద సమాన అంతరఖండాలు చేసే సరళరేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $m = \tan 45^0 = 1 \Rightarrow m = 1$

బిందువు (1,2)గా గలిగిన సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 1(x - 1)$$

$$y - x = 1 \rightarrow (1)$$

$$m = \tan 135^0 = \tan\left(90 + 45^0\right) = -1$$

$$m = -1$$

బిందువు (1,2) గా కలిగిన సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$x + y = 3.$$

3. (2,0), (0,2) మరియు (4,6) లు త్రిభుజ శీర్షాలు అయితే త్రిభుజ మధ్యగత రేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.

సాధన : AD మధ్యగతరేఖ సమీకరణం

$A(4,6),\ D(1,1)$

$$\frac{y-6}{1-6} = \frac{x-4}{1-4}$$

$$\frac{y-6}{-5}=\frac{x-4}{-3}\Rightarrow 5x-3y-2=0$$

BE మధ్యగతరేఖ సమీకరణం

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-2}{2-2}$$

$$x=2$$

CF మధ్యగత రేఖ సమీకరణం $C(0,2)$ $F(3,3)$

$$\frac{y-2}{3-2}=\frac{x-0}{3-0}$$

$$x-3y+6=0$$

4. ఒక సరళరేఖ మూలబిందువు నుండి '2' యూనిట్ల దూరంలో ఉండి, మూల బిందువు నుంచి ఆ రేఖకు గీసిన లంబం X – అక్షం ధనదిశలో 45^0 కోణం చేస్తే ఆ సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : దూరం $d=2;\ \ m=\tan 45^0=1$

$$y=mx+c$$

$$y=1.x+c \ \Rightarrow\ y=x+c$$

$$d=\left|\frac{x-y+c}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=\left|\frac{x-y+c}{\sqrt{2}}\right|$$

$$2=\left|\frac{x-y+c}{\sqrt{2}}\right|$$

$(0,0)$ నుండి

$$2=\left|\frac{0-0+c}{\sqrt{2}}\right|\Rightarrow c=2\sqrt{2}$$

కావలసిన సమీకరణం $y=1.x+2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x-y+2\sqrt{2}=0$$

5. నిరూపకాక్షల మీద a,b లు అంతరఖండాలు చేస్తే మూలబిందువు నుంచి సరళరేఖకు గల లంబదూరం $'p'$ అయితే $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

సాధన : సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$bx+ay-ab=0$$

మూలబిందువు నుడి దూరం $p=\left|\frac{bx+ay-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

$$p=\left|\frac{b.0+a.0-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$p^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\Rightarrow\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{p^2}=\frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

6. రేఖ (2,–3) బిందువు గుండా పోతూ $2a(x+2)+3y=0$ సరళరేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $2a(x+2)+3y=0$

$2ax+3y+4a=0\rightarrow(1)$ కి లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం

$3x-2ay+k=0$

ఇది (2,–3) బిందువు గుండా పోతే $k=-(6+6a)$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $3x-2ay=6(a+1)$

7. సరళరేఖ $2x-3y+7=0$ కు సమాంతరంగా ఉంటూ Y – అంతరఖండం '2'గా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : Y – అంతరఖండం = 2

$2x-3y+7=0 \rightarrow (1)$ కి

సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం

$2x-3y+k=0$ రూపంలో ఉంటుంది.

$$2x-3y=-k$$

$$\frac{2x}{-k}-\frac{3y}{-k}=1$$

$$\frac{x}{\left(-\frac{k}{2}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{k}{3}\right)}=1$$

దత్తాంశం ప్రకారం $y-$అంతరఖండం = 2

లెక్కలో $y-$అంతరఖండం = $\frac{k}{3}$

$$\therefore \frac{k}{3}=2$$

$$\Rightarrow k=6.$$

కావలసిన సమీకరణం $2x-3y+6=0$.

8. $y-$అంతరఖండం −3గా కలిగి (−2,3) మరియు (4,−5) బిందువులను కలిపే సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : $y-$అంతరఖండం = −3

$(-2,3)$, $(4,-5)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{-5-3}{4+2}(x+2)$$

$$6y-18=-8x-16$$

$$\therefore 8x+6y-2=0 \qquad \ldots(1)$$

(1)కి సమాంతరం ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం

$4x+3y=k$ రూపంలో ఉంటుంది.

$$\frac{x}{\left(\frac{k}{4}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{k}{3}\right)}=1$$

దత్తాంశం ప్రకారం $y-$అంతరఖండం = -3

$\therefore$ ఇక్కడ $y-$అంతరఖండం = $\frac{k}{3}$

$$\therefore \frac{k}{3}=-3 \Rightarrow k=-9$$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $4x+3y=-9$

$$\therefore 4x+3y+9=0$$

9. సరళరేఖ (4,−5) బిందువు గుండా పోతూ (−1,2) మరియు (4,6) బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : $(-1,2)$ మరియు $(4,6)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-2=\frac{6-2}{4+1}(x+1)$$

$$5y-10=4x+4$$

$\Rightarrow 4x-5y+14=0 \quad \ldots(1)$

(1)కి లంబంగా ఉన్న సరళరేఖా సమీకరణం

$5x+4y+k=0$ రూపంలో ఉండును.

ఇది $(4,\ -5)$ గుండా పోతుంది.

$$5(4)+4(-5)+k=0$$

$$k=0$$

కావలసిన సమీకరణం $5x+4y=0$

10. సరళరేఖలు $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+5$ మరియు $y=\left(2+\sqrt{3}\right)x+5$ ల మధ్య కోణం కనుగొనుము.

సాధన : $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+5 \quad \ldots(1)$

$y=\left(2+\sqrt{3}\right)x+5 \quad \ldots(2)$

పై సరళరేఖలు $y=m_1x+c$ మరియు $y=m_2x+c$ రూపంలో కలవు. కావున

$$m_1=2-\sqrt{3};\ \ m_2=2+\sqrt{3}$$

$\therefore$ మధ్యకోణం $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

$$\tan\theta=\left|\frac{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\right|$$

$$\tan\theta=\left|\frac{-2\sqrt{3}}{1+1}\right|=\sqrt{3}$$

$$\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}.$$

11. బిందువు (3,4) నుండి సరళరేఖ $12\left(x+6\right)=5\left(y-2\right)$ కు గీచిన లంబదూరమును కనుగొనుము.

సాధన : $\left(x_1,y_1\right)$ బిందువు నుండి $ax+by+c=0$ సరళరేఖకు గల లంబదూరం d అయితే

$$d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$ అని తెలుసు.

కావున $12x+72-5y+10=0$

$12x-5y+82=0$ సరళరేఖకు $(3,4)$ నుండి లంబదూరం

$$d=\left|\frac{12(3)-5(4)+82}{\sqrt{(12)^2+(5)^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{36-20+82}{13}\right|$$

$$d = \left|\frac{98}{13}\right|$$ యూనిట్లు.

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. సరళరేఖ (−1, −2) బిందువు గుండా పోతూ X− అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తుంది. $2x - 3y + 9 = 0$ రేఖ నుండి బిందువుకు గల దూరాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ (1, 2) బిందువు గుండాపోతూ X− అక్షంతో 45 కోణం చేసే సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x-1}{\cos 45^0} = \frac{y-2}{\sin 45^0} = r$$

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = r$$

ఏదైన బిందువు $\left(1+\frac{r}{\sqrt{2}}, 2+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ గా ఉంటుంది.

ఇది $2x - 3y + 9 = 0$ రేఖ మీద ఉంటుంది.

$$2\left(1+\frac{r}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(2+\frac{r}{\sqrt{2}}\right) + 9 = 0$$

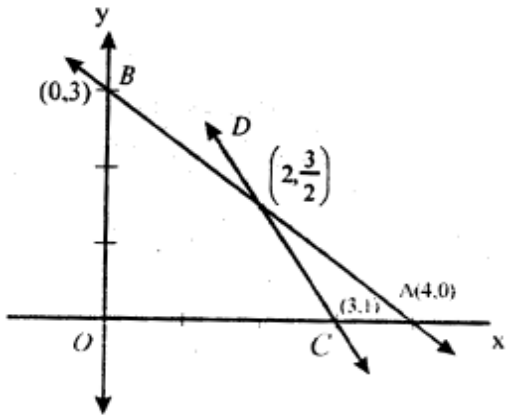
లేదా $2-6+9-\frac{r}{\sqrt{2}} = 0$

లేదా $r = 5\sqrt{2}$

కావున కావలసిన దూరం $5\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

2. సరళరేఖ (3, 1) బిందువు గుండాపోతూ, $3x + 4y = 12$ ను ఖండిస్తుంది. అయితే ఆ సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొని దత్త రేఖ నిరూపకాక్షలతో చేసే అంతరఖండాలను కనుగొనుము.

సాధన: మొదట $3x + 4y = 12$ అనే సరళరేఖ నిరూపకాక్షలతో చేసే అంతరఖండాలను కనుగొందాం.



దత్తరేఖ: $3x + 4y = 12$

లేదా $$\frac{x}{\frac{12}{3}} + \frac{y}{\frac{12}{4}} = 1$$

$\therefore$ కావున వరుసగా x – అంతరఖండం 4; y – అంతరఖండం –3 అని తెలుస్తుంది.

సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలపై బిందువులు A(4, 0) మరియు B(0, 3) వద్ద కలుస్తుంది.

$\therefore$ AB మధ్యబిందువు $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ కావున బిందువులు (3, 1) మరియు $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 - 3} \ (x - 3)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2} \ (x - 3)$$

లేదా $2(y - 1) + (x - 3) = 0$

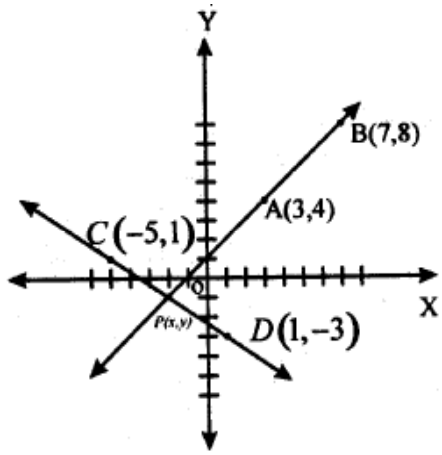
లేదా $2y - 2 + x - 3 = 0$

లేదా $x + 2y - 5 = 0$

3. (–5, 1) మరియు (1, –3) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ (3, 4) మరియు (7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని ఏ నిష్పత్తి విభజిస్తుందో కనుగొనుము.

సాధన: C(–5, 1) మరియు D(1, –3) బిందువుల గుండాపోయే సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - 1 = \frac{-3 - 1}{1 + 5} \ (x + 5)$$



లేదా $\quad y-1=\dfrac{-4}{6}\ (x+5)$

లేదా $\quad 3y-3=-2x-10$

లేదా $\quad 2y+3y+7=0$

A(3, 4) మరియు B(7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని రేఖ (i) విభజించే బిందువు అనుకొనుము.

A(3, 4) మరియు B(7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖను సరళరేఖ (i) $\lambda : 1$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు P నిరూపకాలు

$$\left(\frac{7\lambda+3}{\lambda+1}, \frac{8\lambda+4}{\lambda+1}\right)$$

P బిందువు సరళరేఖ (i) మీద ఉంది కావున

$$2\left(\frac{7\lambda+3}{\lambda+1}\right)+3\left(\frac{8\lambda+4}{\lambda+1}\right)+7=0$$

$$\Rightarrow\ 14\lambda+6+24\lambda+12+7\lambda+7=0$$

$$\Rightarrow\ 45\lambda+25=0 \Rightarrow\ \lambda=-\frac{5}{9}$$

$\therefore$ (−5, 1) మరియు (1, −3) బిందువులను కలిపే సరళరేఖ, (3, 4) మరియు (7, 8) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని బాహ్యంగా 5:9 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

4. అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణము అని చూపుము.

సాధన: O(0, 0) వృత్తకేంద్రం అనుకొనుము. $(-a, 0)$ మరియు $(a, 0)$ బిందువులు వ్యాసం చివరి బిందువులు వృత్తం Y− అక్షాన్ని $(0, a)$ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది అనుకొనుము (పటం 10.13 చూపండి)

BQ వాలు $=\dfrac{a-0}{0-a}=1=m_1$

AQ వాలు $=\dfrac{0-a}{a-0}=-1=m_2$

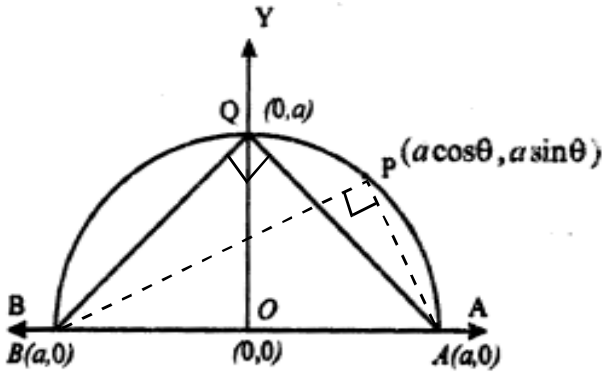
కాని $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow$ AQ అనేది BQ కు లంబంగా ఉంది.

మరల P($a\cos\theta, a\sin\theta$) అనే బిందువు వృత్తం మీద ఉంది అనుకొనుము.

PB వాలు $= \dfrac{a\sin\theta}{a\cos\theta + a} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = m_1$ అనుకొనుము.

PA వాలు $= \dfrac{0 - a\sin\theta}{a - a\cos\theta} = \dfrac{-\sin\theta}{1-\cos\theta} = m_2$ అనుకొనుము.



మరియు $m_1.m_2 = \left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)\left(\dfrac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$

$$= \frac{-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$= -1.$$

$\therefore$ PA అనేది PB కి లంబంగా ఉంది.

$\therefore$ $\angle$BPA అనేది లంబకోణం.

5. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజంలో రెండు శీర్షాల నుండి గీచిన మధ్యగత రేఖలు రెండు సమానం.

సాధన: OAB అనేది ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అనుకొనుము. వాటి శీర్షాలు (0, 0) (a, 0) మరియు $\left(\dfrac{a}{2}, a\right)$

C మరియు Dలు AB మరియు OB ల మధ్య బిందువులు అనుకొనుము.

అపుడు C నిరూపకాలు $\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{2}\right)$

మరియు D నిరూపకాలు $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$

OC పొడవు $= \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{9a}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}$$

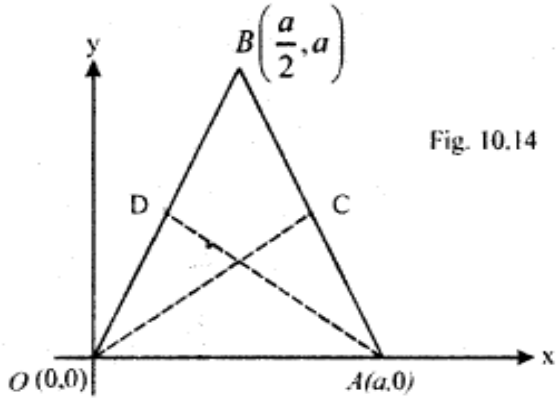


Fig. 10.14

మరియు AD పొడవు $= \sqrt{\left(a - \frac{a}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \frac{a}{4}\sqrt{13}$$

కావున OC పొడవు = AD పొడవు.

అలా రెండు మధ్యగత రేఖలు సమానం.

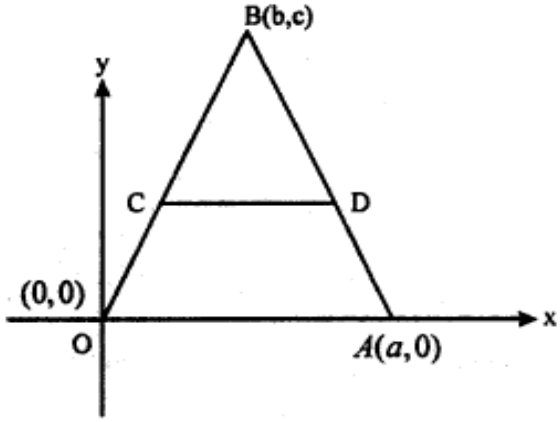
6. ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల మధ్యబిందువులను కలిపే రేఖాఖండం మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను, మరియు అందులో సగం ఉంటుంది.

శీర్షాల నిరూపకాలు O(0, 0), A(a, 0) మరియు B(b, c) అనుకొనుము

C మరియు Dలు OB మరియు AB ల మధ్యబిందువులు అనుకొనుము.

$\therefore$ అపుడు C నిరూపకాలు $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

D నిరూపకాలు $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$



CD వాలు $\dfrac{\frac{c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}} = 0$

OA వాలు X−అక్షం $= 0$

$\therefore$ CD అనేది OA కు సమాంతరం.

CD పొడవు $= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$

OA పొడవు $= a$

$$\therefore \text{ CD} = \frac{1}{2}\text{OA}.$$

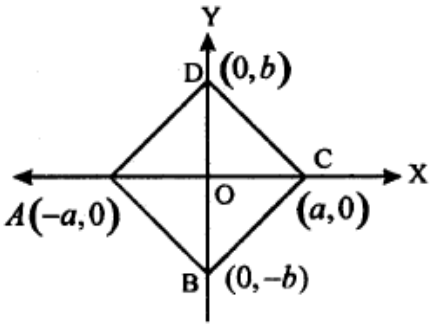
ఇది పై ఫలితాన్ని ఋజువు చేస్తుంది.

7. చతుర్భుజములో కర్ణాలు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటే చతుర్భుజము సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుంది.

సాధన: పటం 10.16 చూపిన విధంగా కర్ణాలు OX మరియు OY ల వెంబడి సూచించబడినవి.

(కర్ణాలు) వాటి పొడవులు వరుసగా

$2a$ మరియు $2b$



OA = OC = a మరియు OD = OB = b

$\text{AD} = \sqrt{\text{OA}^2 + \text{OD}^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\text{AB} = \sqrt{\text{OB}^2 + \text{OA}^2}$

$= \sqrt{a^2+b^2}$

అదేవిధంగా $\text{BC} = \sqrt{a^2+b^2} = \text{CD}$

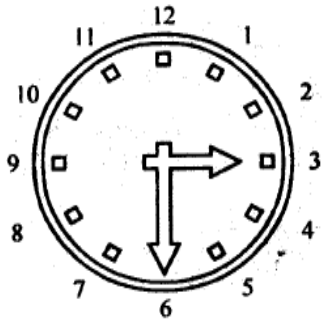
కాని AB = BC = CD = DA

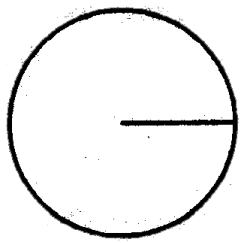
$\therefore$ కావున ABCD ఒక సమలంబ చతుర్భుజం.

11

వృత్తాలు

గడియారం ముల్లు కొన పోవుచున్న మార్గమును గమనించు (పటం 11.1 ను చూడండి)





మరలా, ఒక బిందువు వద్ద ఒక మేకును స్థిరంగా ఉంచి దాని చుట్టూ తిప్పడానికి వీలుగా నిర్ధారిత పొడవుగల దారం కట్టి దాని రెండో కొనకు ఒక పెన్సిల్‌ను కట్టి దారం ఆధారంగా పెన్సిల్‌ను మేకు చుట్టూ త్రిప్పగా ఏర్పడే వక్రాన్ని గమనించండి. (పటం 11.2 చూపండి.)

కచ్చితంగా, పై ఉదాహరణలలో ఏర్పడే వక్రాలు ఒకే ఆకారంగా ఉన్నాయి. మరియు ఈ రకంగా ఏర్పడిన వక్రం వృత్తమని తెలుసు

పెన్సిల్ మొన మరియు మేకును ఉంచిన బిందువుల మధ్యదూరం ఆవృత్త వ్యాసార్థంగా తెలుసు.

పై ఉదాహరణలలో ఏర్పడిన వక్రాల గురించి ఇంకా ఎక్కువగా మనం చర్చిద్దాం.

లక్ష్యాలు:

ఈ పాఠ్యభాగమును చదివిన తర్వాత మీరు గ్రహించదగినవి

- ఇచ్చిన వృత్త కేంద్రం, వ్యాసార్థంలో వృత్త సమీకరణమును ఉత్పాదించుట.
- రెండు చలరాశులు ఉన్న రెండో తరగతి సాధారణ సమీకరణం వృత్తాన్ని సూచించడానికి నియమాన్ని రాబట్టుట
- దత్త వృత్త సమీకరణ సాధారణ రూపం ఇచ్చినపుడు కేంద్రము, వ్యాసార్ధాన్ని కనుగొనుట
- వృత్తం
  (i) సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువుల గుండా పోయినపుడు
  (ii) గా ఇచ్చిన రెండు బిందువుల గుండా పోతూ, ఒక నిరూపకాన్ని తాకుతున్నపుడు ఆ వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.
- వ్యాసం రూపంలో గల వృత్త సమీకరణంను ఉత్పాదించుట
- వ్యాసం చివరి బిందువులు బిందువు ఇచ్చినపుడు వృత్తసమీకరణంను కనుగొనుట
- కేంద్రము, వ్యాసార్థం ఇచ్చినపుడు పరామితీయ రూపంలో వృత్త సమీకరణంను కనుగొనుట

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. క్రింది నియమాలను తృప్తి పరిచే వృత్తాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

1) కేంద్రం $(0,0)$ మరియు వ్యాసార్థం $r=3$

2) కేంద్రం $(-2,3)$ మరియు $r=4$

సాధన :

1) వృత్త కేంద్రం $C(0,0)$ వ్యాసార్థం r గా వుండే వృత్త సమీకరణం $x^2+y^2=r^2$

$\therefore (0,0)$ కేంద్రం $r=3$ గా గల వృత్తం.

$x^2+y^2=9$

2) కేంద్రం $C(h,K), r$ వ్యాసార్థంగా గల వృత్తం $(x-h)^2+(y-K)^2=r^2$

$\therefore C(-2,3), r=4$

$(x+2)^2+(y-3)^2=16$

$x^2+y^2+4x-6y+13-16=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y-3=0$

2. వృత్త కేంద్రం $(4,-6)$ మరియు వ్యాసార్థం $r=7$ గా గల వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన :

$c(h,K)=(4,-6)$, వ్యాసార్థం $r=7$ గా గల వృత్త సమీకరణం.

$(x-4)^2+(y+6)^2=49 \Rightarrow x^2+16-8x+y^2+36+12y=49$

$x^2+y^2-8x+12y+3=0$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. ఇచ్చిన ప్రతి వృత్తపు కేంద్రం, వ్యాసార్థం కనుక్కోండి.

1) $x^2+y^2+3x-y=6$ **2)** $4x^2+4y^2-2x+3y-6=0$

సాధన :

1) వృత్త సమీకరణం: $x^2 + y^2 + 3x - y - 6 = 0$

దీనిని $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ చే పోల్చగా

$2g = 3;\ g = \frac{3}{2} \qquad 2f = -1 \Rightarrow f = \frac{-1}{2};\ C = -6$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $(-g, -f) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

వ్యాసార్థం $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 6} = \sqrt{\frac{9+1+24}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ యూనిట్లు

2) $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$ ను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయడానికి 4చే భాగించగా

$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{6}{4} = 0$

ఇక్కడ $2g = \frac{-1}{2} \Rightarrow g = \frac{-1}{4}; 2f = \frac{3}{4} \Rightarrow f = \frac{3}{8}; c = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $(-g, -f) = \left(\frac{1}{4}, \frac{-3}{8}\right)$

వ్యాసార్థం $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{36+9+96}{64}}$

$\therefore r = \frac{\sqrt{141}}{8}$

2. $(2,3)$ మరియు $(-2,6)$ బిందువులను కలిపే సరళరేఖ వ్యాసంగా గల వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ లను కలిపే రేఖ వ్యాసంగా గల

వృత్త సమీకరణం : $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\therefore$ వృత్తం : $(x-2)(x+2) + (y-3)(y-6) = 0$

$x^2 - 4 + y^2 - 9y + 18 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 9y + 14 = 0$

3. క్రింద ఇచ్చిన వృత్తాల నుంచి ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలు వ్రాయండి.

1) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ **2)** $4x^2 + 4y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

3) $(x-1)(x+1) + (y-1)(y+1) = 0$

సాధన :

1) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

ఇక్కడ $(h, K) = (-1, -1), r = 2$

$\therefore$ పరామితీయ సమీకరణాలు : $x = h + r\cos\theta,\ y = K + r\sin\theta$

$\Rightarrow x = -1 + 2\cos\theta,\ \ y = -1 + 2\sin\theta$

2) ప్రామాణిక రూపంలో సమీ: $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0$

$2g = \frac{1}{2} \Rightarrow g = \frac{1}{4};\ 2f = \frac{1}{2} \Rightarrow f = \frac{1}{4}, c = \frac{-3}{4}$

$(h, K) = (-g, -f) = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}\right);\ r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1+1+12}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}\ (or) \sqrt{\frac{7}{8}}$

$\therefore$ పరామితీయ సమీ: $x = h + r\cos\theta,\ \ y = K + r\sin\theta$

$x = \frac{-1}{4} + \sqrt{\frac{7}{8}}\cos\theta,\ y = \frac{-1}{4} + \sqrt{\frac{7}{8}}\sin\theta$

3) $(x-1)(x+1) + (y-1)(y+1) = 0$

$x^2 - 1 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

ఇక్కడ $(h, K) = (0, 0), r = \sqrt{2}$

పరామితీయ సమీకరణాలు $x = h + r\cos\theta,\ y = K + r\sin\theta$

$\Rightarrow x = 0 + \sqrt{2}\cos\theta;\ y = 0 + \sqrt{2}\sin\theta$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}\cos\theta;\ y = \sqrt{2}\sin\theta$

4. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ **వృత్తానికి కేంద్రం, వ్యాసార్థం కనుక్కోండి.**

సాధన :

$2g = 4 \Rightarrow g = 2;\ 2f = -6 \Rightarrow f = -3,\ c = 0$

కేంద్రం $(-g, -f) = (-2, 3)$

వ్యాసార్థం $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

5. **ఇచ్చిన వృత్తాలలోని ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.**

1) $x^2 + y^2 = 3$ **2)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

సాధన :

1) $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$

ఇక్కడ $(h, K) = (0, 0)$ వ్యాసార్థం $r = \sqrt{3}$

$\therefore$ పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = h + r\cos\theta \Rightarrow x = 0 + \sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow x = \sqrt{3}\cos\theta$

$y = K + r\sin\theta \Rightarrow y = 0 + \sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow y = \sqrt{3}\sin\theta$

2) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ నుండి

$2g = -4 \Rightarrow g = -2;\ 2f = 6 \Rightarrow f = 3;\ c = -12$

$\therefore$ కేంద్రం $(h, K) = (-g, -f) = (2, -3)$

వ్యాసార్థం $r = \sqrt{4+9+12} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ పరామితీయ సమీకరణాలు $x = h + r\cos\theta;\ y = K + r\sin\theta$

$x = 2 + 5\cos\theta;\ y = -3 + 5\sin\theta$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $(1,-2)$ **మరియు** $(3,-4)$ **బిందువుల గుండా పోతూ** $X-$**అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన :

కావలసిన వృత్తాన్ని $s = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

అనుకొనిన వృత్తం $X-$అక్షాన్ని స్పృశిస్తే $g^2 = c$ అగును.

సూచన: $X-$అక్షాన్ని స్పృశిస్తే $g^2 = c$ మరియు $Y-$అక్షాన్ని స్పృశిస్తే $f^2 = c$ రెండు అక్షాలను స్పృశిస్తే $g^2 = f^2 = c$ అగును.

$g^2 = c$ మరియు వృత్తం (1)

$(1,-2)$ గుండా పోవును కావున $1 + 4 + 2g(1) + 2f(-2) + c = 0$

$\therefore 2g - 4f + c = -5$ ...(3), ఇదే విధంగా వృత్తం (1)

$(3,4)$ గుండా పోతే $9 + 16 + 6g - 8f + c = 0$

$\therefore 6g - 8f + c = -25$ ... (4)

(3), (4) ల నుండి

$$\begin{array}{l} 2g - 4f + c = -5 \\ 6g - 8f + c = -25 \\ -\quad +\quad -\quad + \\ \hline -4g + 4f = 20 \Rightarrow g - f + 5 = 0 \end{array} \quad \ldots (5)$$

(2), (3)ల నుండి

$$\begin{array}{l} g^2 - c = 0 \\ 2g - 4f + c = -5 \\ \hline g^2 + 2g - 4f = -5 \end{array} \quad \ldots(6)$$

(5), (6)ల నుండి

$$\begin{array}{l} 4g - 4f + 20 = 0 \\ g^2 + 2g - 4f + 5 = 0 \\ -\quad -\quad +\quad - \\ \hline -g^2 + 2g = -15 \end{array}$$

$\therefore g^2 - 2g - 15 = 0 \Rightarrow g = -3, 5$

(5) నుండి $g - f + 5 = 0$

1) $g = -3$ అయితే $f = 2$

2) $g = 5$ అయితే $f = 10$

3) $c = g^2 \Rightarrow c = 9\ (or)\ 25$

$\therefore$ కావలసిన వృత్తం (1) నుండి

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ మరియు

2) $x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$ అగును.

2. $(1,0),(0,-6)$ **మరియు** $(3,4)$ **బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.**

సాధన :

కావలసిన వృత్తాన్ని $s = x^2 + y^2 + 2gx + 2fg + c = 0$ .. (1)

అనుకొనిన ఇది $(1,0)(0,-6)$ మరియు $(3,4)$ల గుండా పోవుట వలన క్రింది సమీకరణాలు వచ్చును.

$1 + 0 + 2g + c = 0 \Rightarrow 2g + c = -1$ ... (2)

$0 + 36 + 12f + c = 0 \Rightarrow -12f + c = -36$ ... (3)

$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0 \Rightarrow 6g + 8f + c = -25$ .. (4)

(2), (3) ల నుండి

$$\begin{array}{r} 2g + c = -1 \\ -12f + c = -36 \\ + \quad - \quad + \\ \hline 2g + 12f = 35 \end{array} \Rightarrow 2g + 12f = 35 \quad .. (5)$$

(3), (4) ల నుండి

$$\begin{array}{r} -12f + c = -36 \\ 6g + 8f + c = -25 \\ - \quad - \quad - \quad + \\ \hline -6g - 20f = -11 \end{array}$$

$$\therefore 6g + 20f = 11 \qquad .. \ (6)$$

$$2g + 12f = 35 \Rightarrow 6g + 36f = 105$$

(5), (6) ల నుండి

$$\begin{array}{l} 6g + 20f = 11 \\ 6g + 36f = 105 \\ - \quad - \qquad - \\ \hline -16f = -97 \Rightarrow f = \dfrac{94}{16} = \dfrac{47}{8} = f \end{array}$$

(5) నుండి

$$2g + 12\left(\frac{47}{8}\right) = 35 \Rightarrow 2g + \frac{141}{2} = 35$$

$$\therefore 2g = 35 - \frac{141}{2} = \frac{-71}{2} \Rightarrow g = \frac{-71}{4}$$

(2) నుండి $2g + c = -1$

$$2\left(\frac{-71}{4}\right) + c = -1 \Rightarrow c = -1 + \frac{71}{2} = \frac{69}{2}$$

g, f, c లను (1)లో వ్రాయగా

కావలసిన సమీకరణం: $x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-71}{4}\right)x + 2\left(\frac{47}{8}\right)y + \frac{69}{2} = 0$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{71}{2}x + \frac{47}{4}y + \frac{69}{2} = 0$$

లేదా $4\left(x^2 + y^2\right) - 142x + 47y + 138 = 0$

3. $(0,0), (0,2), (2,0)$ **గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన :

కావలసిన వృత్తాన్ని $s = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad .. \ (1)$

అనుకొనిన ఇది $(0,0)$ గుండా పోతే $c = 0$ అగును $\qquad .. \ (2)$

మరియు వృత్తం (1) $(0,2),(2,0)$ ల గుండా పోతే

$4+4f+c=0 \Rightarrow 4+4f=0 \qquad \because c=0$ కావున

$\therefore 4f=-4 \Rightarrow f=-1$

వృత్తం (1) $(2,0)$ గుండా పోతే $4+4g+c=0$

$4+4g=0,\ -c=0$ కావున

$\therefore g=-1$ అగును.

g,f,c లను (1)లో వ్రాయగా

$x^2+y^2-2x-2y=0$

4. $(-1,2),(-2,1)$ బిందువుల గుండా పోతూ Y – అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్తం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : కావలసిన వృత్తాన్ని $s=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots$ (1)

అనుకొనిన ఇది $(-1,2)$ మరియు $(-2,1)$ ల గుండా పోతే

$1+4-2g+4f+c=0$

$-2g+4f+c=-5 \qquad ..$ (2)

$4+1-4g+2f+c=0$

$\therefore -4g+2f+c=-5 \qquad ..$ (3)

(2), (3)ల నుండి

$$\begin{array}{l} -2g+4f+c=-5 \\ -4g+2f+c=-5 \\ +\quad -\quad -\quad + \\ \hline 2g+2f=0 \Rightarrow g+f=0 \end{array} \qquad .. \ (4)$$

కాని వృత్తం(1) Y – అక్షాన్ని స్పృశిస్తే $f^2=c$ అగును. .. (5)

(2), (5)ల నుండి $-2g+4f+c=-5$

$f^2-c=0$

$-2g+4f+f^2=-5 \qquad ..$ (6)

(4), (6) ల నుండి

$$2g + 2f = 0$$
$$-2g + 4f + f^2 = -5$$

$f^2 + 6f + 5 = 0 \Rightarrow f = -1$ మరియు $f = -5$

$g + f = 0$ నుండి $g = -f$ కావున

$g = -(-1) = 1$ మరియు $g = -(-5) = 5$ అగును.

$\because f^2 = c$ మరియు $c = (-1)^2 = 1$ లేదా $c = (-5)^2 = 25$ అగును.

$\therefore g = 1, f = -1, c = 1$ అయితే వృత్తం సమీకరణం.

1) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ మరియు

$g = 5, f = -5, c = 25$ అయితే వృత్తం సమీకరణం.

2) $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$ అగును.

5. $(1,0),(-1,0)$ **మరియు** $(0,1)$ **బిందువుల గుండా పోవు వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన : వృత్తాన్ని $s = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1)

ఇది $(1,0),(-1,0)$ మరియు $(0,1)$ ల గుండా పోతే

$1 + 2g + c = 0 \Rightarrow 2g + c = -1$ ... (2)

$1 - 2g + c = 0 \Rightarrow -2g + c = -1$ ... (3)

$1 + 0 + 2f + c = 0 \Rightarrow 2f + c = -1$ ... (4)

(2), (3) లనుండి

$$2g + c = -1$$
$$-2g + c = -1$$
$$+ \quad - \quad +$$

$\Rightarrow 4g = 0$

$g = 0$

(2) నుండి $2g + c = -1 \Rightarrow c = -1$

(4) నుండి $2f + c = -1 \Rightarrow 2f = 0 \Rightarrow f = 0$

$\therefore g = 0,\ f = 0,\ c = -1$ లను (1)లో వ్రాయగా

కావలసిన వృత్తం $x^2 + y^2 - 1 = 0$ లేదా $x^2 + y^2 = 1$ అగును.

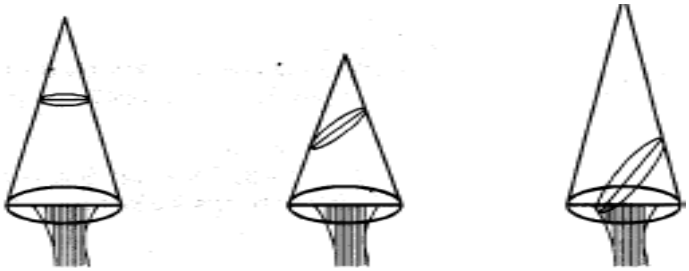
12

శాంకవ ఛేదములు

మనము క్యారెట్‌ను కోస్తున్నప్పుడు దాని అంచులు వివిధ రకాల ఆకారాలలో ఉన్నట్లు గమనిస్తాం.

క్యారెట్‌ను మూడు విధాలుగా కోయడం (ఖండించడం) వలన వాటికి 3 రకాల ఆకారాలు ఏర్పడుతాయి. విశ్లేషణాత్మకంగా అవి :

i) పటం 12.1లో చూపిన విధంగా క్యారెట్‌ను భూమికి సమాంతరంగా ఉండేటట్లు ఖండించడం జరిగింది.



పటం 12.1 పటం 12.2 పటం 12.3

ii) పటం 12.2లో చూపిన విధంగా క్యారెట్‌ను ఏటవాలుగా ఖండించడం జరిగింది. ఇది భూమి ద్వారా పోవడం లేదు.

iii) పటం 12.3లో చూపిన విధంగా క్యారెట్‌ను ఏటవాలుగా ఖండించడం జరిగింది. అది భూమి ద్వారా పోతుంది.

వివిధ పద్ధతుల్లో కోసిన ముక్కలు (క్యారెట్ ముక్కలు) వివిధ "ఆకార రూపాలు" కలిగి ఉన్నవి.

సందర్భం 1 నుండి క్యారెట్ ముక్క వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. దీన్ని గురించి ముందు పాఠ్యభాగంనందు చదువుకొని ఉన్నారు.

సందర్భం 2 మరియు సందర్భం 3ల ద్వారా కోసిన ముక్కలు వేర్వేరు జ్యామితీయ వక్రాలను సూచిస్తున్నాయి. మనము వీటి గురించి ఈ పాఠ్యభాగమునందు చదువుకొంటాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యభాగమును చదివిన తర్వాత మీరు గమనించే విషయాలు

- వృత్తం, పరావలయం, దీర్ఘవృత్తంలను శాంకవ ఛేదాలుగా గుర్తిస్తారు.
- పరావలయం, దీర్ఘవృత్తాలను ప్రత్యేక బిందు పథాలుగా గుర్తిస్తారు.
- శాంకవాలలో ఉత్కేంద్రత భావము, నియత రేఖ, నాభులు, శీర్షాలను గుర్తించటము
- పరావలయం, దీర్ఘవృత్త సమీకరణాలను ప్రామాణిక రూపంలో గుర్తించటము
- నాభి, నియత రేఖ ఇచ్చినపుడు పరావలయ సమీకరణాన్ని కనుగొనుట

ముఖ్యాంశాలు :

1. శాంకవం నిర్వచనం : ఒక సమతలంపై చలించే బిందువు దూరాలు ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, ఒక స్థిర సరళరేఖ నుంచి స్థిర నిష్పత్తి లో ఉంటే ఆ బిందుపథాన్ని ఒక శాంకవ ఛేదంగా నిర్వచిస్తాం.
2. స్థిరబిందువును నాభి అంటాము.
3. స్థిర సరళ రేఖను నియత రేఖ అంటాము.
4. స్థిర నిష్పత్తి 'e' ని ఉత్కేంద్రత అంటాము.
5. నియత రేఖకు లంబంగా ఉంటూ నాభి గుండా పోయే రేఖను అక్షరేఖ అంటాము.
6. నాభి గుండా పోయే $y-$నిరూపకాన్ని నాభిలంబం అంటాం.
7. ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
8. దీర్ఘాక్షం $=2a$
9. హ్రస్వాక్షం $=2b$
10. నియత రేఖాసమీకరణం $x=\pm\frac{a}{c}$
11. నాభులు $(\pm ae, 0)$
12. ఉత్కేంద్రత $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$
13. ప్రామాణిక రూపంలో పరావలయ సమీకరణం $y^2=4ax$

    (i) శీర్షం $(0, 0)$ (ii) నాభి $(a, 0)$

    (iii) పరావలయం అక్షము $y=0$

    (iv) పరావలయ నియత రేఖా సమీకరణం $x+a=0$

    (v) నాభిలంబం $=4a$

I. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. కేంద్రము (0,0) గా, నాభిలంబం 5 మరియు ఉత్కేంద్రత $\frac{2}{3}$ గా గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణమును కనుగొనండి.

సాధన : నాభిలంబం $\frac{2b^2}{a} = 5$ ...(1)

ఉత్కేంద్రత $e = \frac{2}{3}$ ...(2)

కానీ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

$$\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$\frac{4}{9} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow 4a^2 = 9a^2 - 9b^2$$

$$9b^2 = 5a^2 \quad ...(2)$$

(1) నుండి $2b^2 = 5a \Rightarrow b^2 = \frac{5}{2}a$ ...(3)

b^2 విలువను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$9.\frac{5}{2}.a = 5a^2$$

$$\frac{9}{2} = a \Rightarrow a^2 = \frac{81}{4}$$

$b^2 = \frac{5}{2}a$ కావున

$$b^2 = \frac{5}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{4}$$

$\therefore (0,0)$ కేంద్రంగా ఉన్న దీర్ఘవృత్త సమీకరణం

$\frac{(x-0)^2}{a^2} + \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1$ రూపంలో ఉండును.

$$\frac{x^2}{\frac{81}{4}}+\frac{y^2}{\frac{45}{4}}=1$$

$$\frac{4x^2}{81}+\frac{4b^2}{45}=1$$

$$20x^2+36y^2=405$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $20x^2+36y^2=405$.

2. కేంద్రం (0,0)గా, ఉత్కేంద్రత $e=\frac{1}{3}$ మరియు నాభుల నిరూపకాలు (4,0), (−4,0)గా గల దీర్ఘ వృత్త సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన : నాభుల మధ్య దూరం $= \sqrt{(4+4)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{64}$

$= 8$

$\therefore$ దత్తాంశ ప్రకారం నాభుల మధ్య దూరం $2ae=8$

కానీ $e=\frac{1}{3}$ కావున

$$2a.\frac{1}{3}=8 \Rightarrow 2a=24 \Rightarrow a=12$$

$b^2=a^2\left(1-e^2\right)$ కావున

$$b^2=144\left(1-\frac{1}{9}\right)$$

$$b^2=144\times\frac{8}{9}=\frac{1152}{9}$$

కావలసిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{(x-0)^2}{a^2}+\frac{(y-0)^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{144}+\frac{b^2}{\frac{1152}{9}}=1$$

$$\frac{x^2}{144}+\frac{9y^2}{1152}=1$$

$$8x^2+9y^2=1152$$

3. నాభిలంబం పొడవు, హ్రస్వాక్షం పొడవులో సగం ఉండే దీర్ఘవృత్తం (ప్రామాణిక రూపంలో) ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

సాధన : ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్త సమీకరణం

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$$

(నాభిలంబ పొడవు) = $\frac{1}{2}$ (హ్రస్వాక్షం పొడవు)

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}(2b)\Rightarrow 2b=a$$

$$\therefore 4b^2=a^2\Rightarrow 4a^2\left(1-e^2\right)=a^2$$

$$1-e^2=\frac{1}{4}\Rightarrow e^2=\frac{3}{4}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ ఉత్కేంద్రత $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $3x^2+4y^2=12$ దీర్ఘవృత్తానికి ఉత్కేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, దీర్ఘాక్షం, హ్రస్వాక్షం పొడవులను కనుగొనుము.

సాధన : $3x^2+4y^2=12$ ను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయగా

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

దీనికి $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ తో పోల్చగా

$a^2=4$ మరియు $b^2=3$

i) $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow e=\frac{1}{2}$

ii) నాభుల నిరూపకాలు = $(\pm ae,0)$

$$=\left(\pm 2\times\frac{1}{2},0\right)$$

$$=(\pm 1,0)$$

$\therefore$ నాభుల నిరూపకాలు $(1,0)$ మరియు $(-1,0)$

$iii)$ దీర్ఘాక్షము పొడవు = $2a = 2\times 2 = 4$ మరియు

హ్రస్వాక్షం పొడవు = $2b = 2\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

5. నియతరేఖ $x-y-3=0$ గాను, $e=\frac{1}{2}$, ఒక నాభి (1,-1) వద్ద గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : నిర్వచనం ప్రకారం, దీర్ఘవృత్తంపై $p(h,k)$ ఏదేని బిందువు అనుకొనుము.

$$\frac{sp}{pm} = e \Rightarrow sp = epm$$

$$\Rightarrow sp^2 = e^2 pm^2$$

$$(h-1)^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{h-k-3}{\sqrt{1+1}}\right]^2$$

$$7\left(h^2+k^2\right) + 2hk - 10h + 10k + 7 = 0$$

p వద్ద బిందుపథ సమీకరణం

$$7\left(x^2+y^2\right) + 2xy - 10x + 10y + 7 = 0$$

6. $2x+y-1=0$ నియతరేఖగా, నాభి మూలబిందువుగా గల పరావలయ సమీకణం కనుక్కోండి.

సాధన : నిర్వచనం ప్రకారం $\frac{sp}{pm} = 1$ అయితే అది పరావలయం అవుతుంది

$$sp = pm$$

$s=(0,0)$, $p=(x,y)$ M అనేది పరావలయంపై బిందువు p నుండి నియత రేఖకు గల లంబదూరం

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{2x+y-1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2$$

$$x^2+y^2 = \frac{(2x+y-1)^2}{5}$$

$$5x^2+5y^2 = 4x^2+y^2+1+4xy-2y-4x$$

$\therefore$ కావలసిన పరావలయ సమీకరణం

$$x^2+4y^2-4xy+4x+2y-1=0.$$

7. నాభి (2,3), నియతరేఖ $x-4y+3=0$ గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{SP}{PM}=1$

$$SP=PM \Rightarrow SP^2=PM^2$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=\left[\frac{x-4y+3}{\sqrt{1^2+4^2}}\right]^2$$

$$x^2+4-4x+y^2+9-6y=\frac{(x-4y+3)^2}{17}$$

$$x^2+y^2-4x-6y+13=\frac{(x-4y+3)^2}{17}$$

$$17x^2+17y^2-68x-102y+221=x^2+16y^2+9-8xy-24y+6x$$

$$16x^2+y^2+8xy-74x-78y+212=0$$

8. నియతరేఖ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ మరియు నాభి (a,b) గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : నియతరేఖ సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$\Rightarrow bx+ay-ab=0$$

$$s=(a,b)$$

$$\frac{SP}{PM}=1 \Rightarrow SP=PM$$

$$\Rightarrow SP^2=PM^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{bx+ay-ab}{\sqrt{b^2+a^2}}\right)^2$$

$$x^2+a^2-2ax+y^2+b^2-2by=\frac{(bx+ay-ab)^2}{a^2+b^2}$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left[x^2+a^2-2ax+y^2+b^2-2by\right]=b^2x^2+a^2y^2+a^2b^2+2abxy-2a^2by-2ab^2x$$

$\therefore$ కావలసిన పరావలయ సమీకరణం.

9. నియతరేఖ $3x+4y=1$ మరియు నాభి (2,3) గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన : నియతరేఖ సమీకరణం $3x+4y-1=0$

నాభి $S=(2,3)$

$\frac{SP}{PM}=1$ కావున $SP=PM \Rightarrow SP^2=PM^2$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=\left[\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right]^2$$

$$x^2+4-4x+y^2+9-6y=\frac{(3x+4y-1)^2}{25}$$

$$25x^2+100-100x+25y^2+225-150y$$

$$=9x^2+16y^2+1+24xy-8y-6x$$

$\therefore$ కావలసిన పరావలయ సమీకరణం

$$16x^2+9y^2-24xy-94x-142y+224=0$$

10. నియతరేఖ $x+y=0$, ఉత్కేంద్రత $e=\frac{1}{2}$, ఒక నాభి (0,1) వద్ద దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన : నియత రేఖ సమీకరణం $x+y=0$

$$e=\frac{1}{2}$$

$$S=0,1$$

$$\therefore \frac{SP}{PM}=e \Rightarrow SP=ePM$$

$$SP^2=e^2PM^2$$

$$(x-0)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}\left[\frac{x+y}{\sqrt{1^2+1^2}}\right]^2$$

$$x^2+y^2+1-2y=\frac{1}{4}\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]$$

$$8x^2+8y^2+8-16y=x^2+y^2+2xy$$

$$7x^2+7y^2-2xy-16y+8=0$$

మాడ్యూల్ -III

అనుక్రమాలు మరియు శ్రేణులు

13

అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢి

ఇవ్వబడిన సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్యను మొదటి సంఖ్యగాను, ఇంకొక సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యగాను, మరియొక సంఖ్యను మూడవ సంఖ్యగాను అలాగే నాల్గవ సంఖ్యను, ఐదవ సంఖ్యను, ... అని చెప్పగలిగిన ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను శ్రేఢి అంటారు. చాలా విషయములలో శ్రేఢులను ఉపయోగిస్తారు.

ఈ పాఠ్యాంశములో మనము అంకశేఢి, గుణశ్రేఢి, అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమముల గురించి తెలుసుకొందాము.

ఈ కింది ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

(a) ఒకతను కుందేళ్ళ సంఖ్య ఎలా పెరుగుతుందో తెలుసు కోవాలనే ఉత్సాహముతో అప్పుడే పుట్టిన రెండు కుందేళ్ళను తెచ్చి పెంచుతున్నాడు. కుందేళ్ళు పుట్టిన రెండు మాసములకు ప్రత్యుత్పత్తి చేయడం మొదలు పెట్టి ఆ తరువాత ప్రతి నెల ఒక జత కుందేళ్ళకు పుట్టుకను యిస్తాయి. మొదటి నెల మరియు రెండవ నెల ఒక జత కుందేళ్ళు ఉంటాయి. మూడవ నెల 2 జతలు, 4వ నెల 3 జతలు ఆ విధముగా వృద్ధి చెందుతాయి. పై విషయమును ఇలా వ్రాయవచ్చును.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

(b) అనంత ఆవర్త దశాంశ సంఖ్య 0.3333 ... ను $0.\overline{3}$ గా వ్రాస్తాము. దీనిని ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా వ్రాయవచ్చును.

(c) ఒకతను మొదటి రోజున రూ॥లు 10/– సంపాదించినాడు. రెండవ రోజున రూ॥లు 30/–, మూడవ రోజున రూ॥లు 50/–, ... సంపాదించినాడు. అతని యొక్క సంపాదన ఈ విధముగ నున్నది.

రూ॥ 10/–, రూ॥ 30/–, రూ॥ 50/– ....

ఇప్పుడు మనము 10వ రోజున అతని సంపాదన ఎంత అన్నది కనుగొనవచ్చును.

(d) ఈ క్రింది శ్రేఢులను పరిశీలించండి

(i) 2, 4, 8, 16, ...

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, ...$

(iii) 0.01, 0.0001, 0.000001, ...

ప్రతి శ్రేఢిలోను, మొదటి పదము తప్ప, ప్రతి పదము ఒక నిర్ధిష్ట క్రమంలో వచ్చుటను పరిశీలించవచ్చు.

లక్ష్యాలు

1. శ్రేణుల నిర్వచనం.
2. అంకశ్రేణి, సామాన్య బేధం లేదా పదాంతరం, సామాన్యపదం లేక n వ పదము.
3. a, d, n మరియు t_n లలో మూడు విషయములు తెలిసిన నాల్గవ దానిని కనుగొనుట.
4. అంకశ్రేణిలోని ఏవైనా రెండు పదములు తెలిసిన ఆ $A.P$ యొక్క పదాంతరం గాని, ఏదైనా పదమును గాని తెలుసుకొనుట.
5. $A.P$ లోని మొదటి n పదముల మొత్తమును తెలుసుకొనుట.
6. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యల మధ్య అంక మధ్యమములను కూర్చుట.
7. గుణశ్రేణిలో a, r, n మరియు t_n లలో మూడింటి విలువలు తెలిసినపుడు నాల్గవ దాని విలువ కనుగొనుట.
8. $G.P$ లో మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగొనుట.

ముఖ్యాంశాలు :

1. అంకశ్రేణిలో సామాన్య పదం $t_n = a + (n-1)d$ అయితే ఆ శ్రేణి $a, a+d, a+2d, a+3d...$
2. అంకశ్రేణిలో మొదటి n పదాల మొత్తం S_n అయితే

   $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ ఆ శ్రేణి $a, a+d, a+2d....$

   $= \frac{n}{2}[a + l],\ l = a + (n-1)d$
3. ఒక శ్రేఢిలో రెండు వరుస పదాల బేధం స్థిరము అయితే ఆ శ్రేఢిని అంకశ్రేఢి అంటాము.

   $t_n = S_n - S_{n-1}$
4. $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
5. a, b ల అంక మధ్యమము $\frac{a+b}{2}$
6. ఒక శ్రేఢిలో రెండు వరుస పదాల నిష్పత్తి స్థిరము అయితే ఆ శ్రేఢిని గుణశ్రేఢి అంటాము.
7. గుణ శ్రేఢిలో n వ పదము $a, ar, ar^2.....ar^{n-1}$

8. $a, ar, ar^2 .....ar^{n-1}$ గుణ శ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తం

$$S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) for \ |r| > 1$$

$$= a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) for \ |r| < 1$$

9. అనంత గుణ శ్రేఢి మొత్తం $S_\alpha = \frac{a}{1-r} for |r| < 1$

10. a, b ల గుణ మధ్యమము $\sqrt{ab}$

11. a, b ల మధ్య ఉన్న అంకమధ్యమము A, గుణ మాధ్యమము G కన్నా ఎక్కువ $A > G$.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. అంకశ్రేఢి n వ పదానికి సూత్రాన్ని వ్రాయండి.

సాధన: $t_n = a + (n-1)d$

2. $3, 4, 5....$ అంకశ్రేఢిలో పదాంతరం ఎంత?

సాధన: పదాంతరం $d = 4 - 3$ లేదా $5 - 4$

$d = 1$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $1, 3, 5, 7.....$ అంకశ్రేణిలో n వ పదం వ్రాయండి.

సాధన: $a = 1;\ d = 3 - 1 = 2$

$t_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2$

$t_n = 2n - 1$

2. $3, 5, 7, 9.....$ అంకశ్రేఢిలో ఉంటే n వ పదం కనుగొనండి.

సాధన: $a = 3;\ d = 5 - 3 = 2$

$t_n = a + (n-1)d$

$= 3 + (n-1)2$

$= 3 + 2n - 2$

$t_n = 2n + 1$

3. $t_n = 2n + 1$ **అయితే అంకశ్రేఢిని కనుగొనండి.**

సాధన: $n = 1, 2, 3.....$ లను ప్రతిక్షేపించగా

$t_1 = 2.1 + 1 = 3$

$t_2 = 2.2 + 1 = 5$

$t_3 = 2.3 + 1 = 7$

కావున అంకశ్రేఢి $3, 5, 7.....$

4. $5, 11, 17.....119$ **లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే** 119 **అనే పదం ఎన్నవది?**

సాధన: $a = 5;\ d = 11 - 5 = 6;\ t_n = 119$

$\therefore t_n = a + (n-1)d = 5 + (n-1)6$

$119 = 5 + 6n - 6$

$119 = 6n - 1$

$6n = 120 \Rightarrow n = 20$

$\therefore n = 20$

5. $2, 4, 6....$ **అంకశ్రేఢిలో ఉంటే 10వ పదంను కనుగొనండి.**

సాధన: $a = 2;\ \ d = 4 - 2 = 2;\ n = 10$

$t_n = 1 + (n-1)d$

$t_n = 2 + (10-1)2$

$t_n = 2 + 20 - 2$

$t_n = 20$

$\therefore$ కావున అంకశ్రేఢిలో 10వ పదం 20

6. $8, 11, 14, 17....15$ **పదాల వరకు అంకశ్రేఢి మొత్తాన్ని కనుగొనండి.**

సాధన: $a = 8,\ d = 3$

$n = 15$

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$= \frac{15}{2}\left[16 + (15-1)3\right]$

$= \frac{15}{2}[58]$

$= 435$

7. $8, 3, -2, -7, -12.....n$ **పదాల వరకు అంకశ్రేఢి మొత్తాన్ని కనుగొనండి.**

సాధన: $a = 8,\ d = -5$

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$= \frac{n}{2}\left[2.8 + (n-1)(-5)\right]$

$= \frac{n}{2}[16 - 5n + 5]$

$S_n = \frac{n}{2}[21 - 5n]$

8. $4, 8, 16....$ **గుణ శ్రేఢిలో 6వ పదము కనుగొనండి.**

సాధన: మొదటి పదం $a = 4$

సామాన్య నిష్పత్తి $r = 8 \div 4 = 2;\ n = 6$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_6 = 4(2)^{6-1} = 4 \times 2^5 = 4 \times 32$

$t_6 = 128$

గుణశ్రేఢిలో 6వ పదం 18

9. **గుణశ్రేఢిలో మొదటిపదం మరియు సామాన్య నిష్పత్తి వరుసగా 3 మరియు** $\frac{-1}{2}$ **అయితే మొదటి 5**

పదాలను వ్రాయండి.

సాధన: $a = 3;\ r = \frac{-1}{2}$

గుణశ్రేఢిలో మొదటి 5 పదాలు

a, ar, ar^2, ar^3, ar^4

కావున $a = 3$

$ar = 3 \times \frac{-1}{2} = \frac{-3}{2}$

$ar^2 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$ar^3 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-3}{8}$

$ar^4 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^4 = \frac{-3}{16}$

$\therefore 3, \frac{-3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{8}, \frac{3}{16}$

10. $6, 12, 24....$ **(10 పదాల వరకు) గుణశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: ఇక్కడ మొదటి పదము $a = 6;\ n = 10$

సామాన్య నిష్పత్తి $(r) = \frac{12}{6} = 2$

n పదాల మొత్తం $S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} (r > 1)$

$S_n = \frac{6\left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1}$

$S_n = 6(1024 - 1) = 6138$

11. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}....$ **(20 పదాల వరకు) గుణశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: ఇక్కడ మొదటి పదము $a = 1$

సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$

$n = 20$

పదాల మొత్తం $S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} (r < 1)$

$$S_n = \frac{1\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{20}\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right)$$

12. $8, 16, 32, 64.....$ **గుణశ్రేణిలో ఉంటే, ఎన్ని పదాల మొత్తము 8184 అగును?**

సాధన: మొదటి పదం $a = 8$; సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{16}{8} = 2$

పదాల మొత్తము $S_n = 8184$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

$$8184 = \frac{8\left(2^n - 1\right)}{2 - 1} = 8\left(2^n - 1\right)$$

$\Rightarrow 2^n - 1 = 1023$

$2^n = 1024 = 2^{10}$

$\Rightarrow n = 10 \cdot$

13. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\propto$ **అనంత గుణశ్రేఢి మొత్తంను కనుగొనము.**

సాధన: $a=1$, సామాన్య నిష్పత్తి $r=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}r<1$

$$S_\alpha=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

14. $\frac{1}{3},\frac{-2}{9},\frac{4}{27},\frac{-8}{81}.....$ **అనంత గుణశ్రేఢి మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: $a=\frac{1}{3}$ మరియు $r=\frac{\frac{-2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{-2}{3}r<1$

$$S_\alpha=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. అంకశ్రేణిలో 10వ పదం −15 మరియు 31వ పదం −57 అయితే 15వ పదంను కనుగొనండి.

సాధన: మొదటి పదం 'a'

పదాంతరం 'd'గా గల అంకశ్రేఢి

సూత్రం $t_n=a+(n-1)d$

కావున $t_{10}=a+(10-1)d=a+9d$

$t_{31}=a+(31-1)d=a+30d$

$\therefore$ దత్తాంశ ప్రకారము

$a+9d=-15 \quad ... \ (1)$

$a+30d=-57 \ldots$ (2)

(1), (2) లను సాధించగా

సమీకరణం (2) నుండి (1)ని తీసివేయగా

$21d=-42$

$d=-2$

(1) నుండి

$a+9(-2)=-15$

$a-18=-15$

$a=3$

కావున $t_{15}=a+(15-1)d$

$t_{15}=3+14(-2)$

$t_{15}=-25$

2. అంకశ్రేణిలో పదాంతరం 3 మరియు 15వ పదం 37 అయితే మొదటి పదమును కనుగొనండి.

సాధన: ఇక్కడ $d=3$

$t_{15}=37$ మరియు $n=15$

మొదటి పదం 'a' అనుకొనము.

$t_n=a+(n-1)d$

$37=a+(15-1)3$

$37=a+42$

$a=-5$

$\therefore$ కావున అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం -5.

3. $a+b+c\neq 0$ మరియు $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$ అంకశ్రేఢిలో ఉంటే $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$లు కూడా అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయని చూపండి.

సాధన: $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ లు $A.P$ లో ఉన్నాయి.

కావున $\frac{b}{c+a} - \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{c+a}$

లేదా $\left(\frac{b}{c+a}+1\right) - \left(\frac{a}{b+c}+1\right) = \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - \left(\frac{b}{c+a}+1\right)$

లేదా $\frac{a+b+c}{c+a} - \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{a+b} - \frac{a+b+c}{a+c}$

లేదా $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} (a+b+c \neq 0)$

లేదా $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ లు $A.P$ లో ఉండును.

4. $2\frac{1}{2}, 4, 5\frac{1}{2} .....31$ **లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే 31 అనేది ఎన్నవ పదము మరియు 10వ పదంను కనుగొనము.**

సాధన: $a = \frac{5}{2}; d = \frac{4}{1} - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

$t_n = 31$

$\therefore t_n = a + (n-1)d$

$31 = \frac{5}{2} + (n-1)\frac{3}{2}$

$31 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

$31 = 1 + \frac{3}{2}n$

$\frac{3}{2}n = 30$

$n = 20$

$\therefore$ అంకశ్రేణిలో 31 అనేది 20వ పదం.

ii) 10వ పదం :

$$t_{10} = \frac{5}{2} + (10-1)\frac{3}{2}$$

$$t_{10} = \frac{5}{2} + 9.\frac{3}{2}$$

$$t_{10} = \frac{32}{2}$$

$$t_{10} = 16$$

$\therefore$ 10వ పదం 16 అవుతుంది.

5. $7, 4, 1, -2.....$ **అంకశ్రేఢిలో ఉంటే −292 అనేది అంకశ్రేఢిలో ఉందా?**

సాధన: $a = 7;\ d = 4 - 7 = -3$

$$t_n = -292$$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$-292 = 7 + (n-1)(n-3)$$

$$-292 = 7 - 3n + 3$$

$$-3n = -302$$

$$n = \frac{302}{3} = 100\frac{2}{3}$$

$'n'$ అనేది భిన్నంక భాగం.

కావున ఇది అంకశ్రేణిలో ఉండదు. −292 పదం ఇచ్చిన అంకశ్రేఢిలో లేదు.

6. అంకశ్రేణిలో మూడు పదాలు ఉన్నాయి. చివరి మరియు మొదటి పదానికి బేధం 8 మరియు వాటి లబ్ధం 20 అయితే ఆ పదాలను కనుగొనండి.

సాధన: a, b, c లు $A.P$ లో ఉంటే

దత్తాంశ ప్రకారం $c - a = 8 \rightarrow (1)$

$ca = 20$

కావున $(c+a)^2 = (c-a)^2 + 4ac$

$(c+a)^2 = 64 + 80$

$(c+a)^2 = 144$

$c + a = 12 \rightarrow (2)$

(1), (2) లను సాధించగా

$c - a = 8$
$c + a = 12$
$2c = 20 \Rightarrow c = 10$

$\therefore c = 10$ అయితే $a = 2$

a, b, c లు $A.P$ లో ఉన్నాయి. కావున

$b - a = c - b$

$2b = a + c$

$2b = 12$

$b = 6$

$\therefore$ పదాలు 2, 6, 10

7. ఒక అంకశ్రేణిలో n వ పదం $na + b$ అయితే పదాంతరం 'a' ఉండునని రుజువు చేయుము.

సాధన: $t_n = na + b \Rightarrow t_1 = a + b$

$\Rightarrow t_2 = 2a + b$

$\Rightarrow t_3 = 3a + b$

$\Rightarrow t_n = na + b$

దత్త శ్రేఢి $a + b, 2a + b, 3a + b ... na + b$

పదాంతరం $d = 2a + b - (a + b)$

$d = a$

8. $27, 23, 19, 15.....$ **అంకశ్రేఢి మొత్తం 95 అయిన ఆ శ్రేఢిలో పదములెన్ని?**

సాధన: $a = 27;\ d = -4$ మరియు $S_n = 95$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[54 + (n-1) - 4\right] = 95$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\left[54 - 4n + 4\right] = 95$$

$$\Rightarrow 54n - 4n^2 + 4n = 190$$

$$58n - 4n^2 - 190 = 0$$

$$-2n^2 + 29n - 95 = 0$$

$$2n^2 - 29n + 95 = 0$$

$$2n^2 - 10n - 19n + 95 = 0$$

$$2n(n-5) - 19(n-5) = 0$$

$$(2n-19)(n-5) = 0$$

$n = \frac{19}{2}$ లేదా $n = 5$

$\therefore n = \frac{19}{2}$ భిన్నము కనుక కానేరదు. $\therefore n = 5$

$\therefore$ శ్రేఢిలో పదములు 5.

9. $2, 3, 5, 9, 8, 15, 11....(2n+1)$ **పదాలవరకు అంకశ్రేఢి మొత్తాన్ని కనుగొనండి.**

సాధన: మొత్తంను 's' తో సూచిస్తే

$S = 2 + 3 + 5 + 9 + 8 + 15 + 11 + ... + (2n+1)$ పదాలు.

$= \left[2 + 5 + 8 + 11 + ...(n+1)\ \text{పదాలు}\right] + \left[3 + 9 + 15 + 21 + ...n\,\text{పదాలు}\right]$

$$=\frac{n+1}{2}\left[2\times2+(n+1-1)3\right]+\frac{n}{2}\left((2\times3)+(n-1)6\right)$$

$$=\frac{n+1}{2}\left[4+3n\right]+\frac{n}{2}\left[6+6n-6\right]$$

$$=\frac{(n+1)(3n+4)}{2}+3n^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[3n^2+7n+4+6n^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[9n^2+7n+4\right]$$

10. అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం 10 మరియు చివరి పదం 50 అయితే ఆ శ్రేణిలో పదాల మొత్తంను, పదాల సంఖ్యను కనుగొనండి?

సాధన: $a=10,\ l=t_n=50,\ S_n=480$

పై విలువలను ఈ క్రింద సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించగా

$S_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$ మరియు $t_n=a+(n-1)d$

$$480=\frac{n}{2}\left[20+(n-1)d\right] \qquad \ldots (1)$$

$$50=10(n-1)d \qquad \ldots (2)$$

$$(n-1)d=40 \qquad \ldots (3)$$

(1) నుండి

$$480=\frac{n}{2}(20+40)$$

$$60n=2\times480$$

$$n=16$$

(3) నుండి

$$d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore n - 1 = 16 - 1 = 15$$

11. ఒకతను తన స్నేహితుని నుండి రూ॥లు 1740.00 అప్పుగా (వడ్డీ లేదు) తీసుకొని నెలరి వాయిదా పద్ధతిలో తిరిగి చెల్లించవలెను, అని అంగీకరించినాడు. మొదటి నెల రూ.లు 200లు తరువాత నెలల్లో ప్రతినెల రూ.10లు తగ్గిస్తూ చెల్లించిన యెడల అతనికి ఆ అప్పు ఎన్ని నెలల్లో పూర్తి అగునో కనుగొనండి.

సాధన: స్నేహితుని నుండి తీసుకొన్ని రూపాయలను S_n అనుకుంటే

$$S_n = 1740 = 00$$

మొదటి నెల ఇచ్చిన రూపాయలను 'a' అనుకుంటే

$$a = 200$$

ప్రతినెల రూ.10లు తగ్గించడము 'd'తో పోలిస్తే (పదాంతరం)

$$d = -10$$

అయితే ఆ శ్రేణి 200, 190, 180, 170, 160.....

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$1740 = \frac{n}{2}\left[2 \times 200 + (n-1)(-10)\right]$$

$$3480 = n\left[400 - 10n + 10\right]$$

$$3480 = 410n - 10n^2$$

$$\Rightarrow 10n^2 - 410n + 3480 = 0$$

$$n^2 - 41n + 348 = 0$$

$$n^2 - 29n - 12n + 348 = 0$$

$$n(n-29) - 12(n-29) = 0$$

$$(n-29)(n-12) = 0$$

$$n = 12 \ (or) \ 29$$

అతడు స్నేహితుని నుండి తీసుకొన్న రూ.లు 12నెలలో చెల్లిస్తాడు.

12. పిల్లలు ఆడుకొనే బంగాళాదుంపల పందెంలో, n బంగాళా దుంపలలో ఒక్కొక్కటి 1మీ దూరములో సరళ రేఖలో అమర్చినారు. పందెంలో పాల్గొనే పిల్లవాడు దగ్గరగా వున్న బంగాళా దుంపకు 5మీ.ల దూరం నుండి బయలుదేరి ఒకసారి ఒక్క బంగాళా దుంపను మాత్రమే తీసుకొని బయలుదేరిన చోట వేసి మరళ ఇంకొక దుంపను తీసుకొని బయలు దేరిన చోటనే వేసి ఈ విధముగా దుంపలను తీసుకొని వచ్చినప్పుడు ఒక పిల్లవాడు తిరిగి మొత్తం దూరం 162మీ.లు అయిన ఆ పిల్లవాడు తీసుకొని వచ్చిన దుంపలు ఎన్ని?

సాధన:

ఇక్కడ సరళరేఖపై $A, B.....$ లను బంగాళా దుంపలు

అనుకుంటే A, B ల మధ్య దూరం 1మీ.

B, C ల మధ్య దూరం 1మీ.

C, D ల మధ్య దూరం 1మీ.

అయితే A అనే స్థానము నుండి 5మీ. దూరంలోనున్న P అనే బిందువు నుండి పిల్లవాడు, P నుండి బయలుదేరి A దగ్గర ఉన్న బంగాళా దుంపను తీసుకురావడానికి మొత్తం 10.మీ.

అదే విధంగా P నుండి B దగ్గర ఉన్న బంగాళాదుంప తీసుకురావడానికి మొత్తం దూరం 12 మీ.

అదేవిధంగా P నుండి C దగ్గర ఉన్న దానిని తీసుకోవడానికి మొత్తం దూరం. 14మి.

అయితే ఆ శ్రేణి 10, 12, 14.....

ఇక్కడ $a = 10;\ d = 12 - 10 = 2$

మొత్తం దూరం $S_n = 162$ మీ.

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$162 = \frac{n}{2}\left[2 \times 10 + (n-1)2\right]$$

$$324 = n\left[20 + 2n - 2\right]$$

$$324 = n(18 + 2n)$$

$$324 = 2n^2 + 18n$$

$$2n^2 + 18n - 324 = 0$$

$n^2 + 9n - 162 = 0$

$n^2 + 18n - 9n - 162 = 0$

$n(n+18) - 9(n+18) = 0$

$(n+18)(n-9) = 0$

$\therefore n = 9$ లేదా $n = -18$ (తీసుకోదు).

పిల్లవాడు తీసుకొని వచ్చిన దుంపలు '9'.

13. ఒక శ్రేణిలో n పదముల మొత్తం $an^2 + bn$ అయిన, ఆ శ్రేణి అంకశ్రేణి అని చూపి పదాంతరమును కూడా కనుక్కోండి.

సాధన: అంకశ్రేణిలో n పదాల మొత్తం S_n అనుకుంటే

దత్తాంశ ప్రకారం $S_n = an^2 + bn$

$n = 1, 2, 3....$ ప్రతిక్షేపించిన

$S_1 = a + b$

$S_2 = 4a + 2b$

$S_3 = 9a + 3b$

$S_4 = 16a + 4b$

.....

.....

.....

$S_n = an^2 + bn$

$\therefore t_1 = S_2 - S_1 = (4a + 2b) - (a + b) = 3a + b$

$t_2 = S_3 - S_2 = (9a + 3b) - (4a + 2b) = 5a + b$

$t_3 = S_4 - S_3 = (16a + 4b) - (9a + 3b) = 7a + b$

$\therefore t_1, t_2, t_3....A.P$ లో ఉంటే $3a + b, 5a + b, 7a + b$ లు కూడా $A.P.$ లో ఉండును.

$\therefore$ పదాంతరం $d = 5a + b - 3a - b = 2a$

14. $8, 26$ **ల మధ్య 5 అంక మధ్యమములనుంచుము.**

సాధన: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 అంక మధ్యములు $8, 26$ మధ్య ఉండును.

కావున $8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26$ లు $A.P$ లో ఉండును.

మొదటి పదం $a = 8,\ t_n = 26;\ n = 7$

కావున $t_n = a + (n-1)d$

$26 = 8 + (7-1)d$

$26 = 8 + 6d$

$\therefore d = 3$

$\therefore A_1 = a + d = 8 + 3 = 11$

$A_2 = a + 2d = 8 + 2 \times 3 = 14$

$A_3 = a + 3d = 8 + 3 \times 3 = 17$

$A_4 = a + 4d = 8 + 4 \times 3 = 20$

$A_5 = a + 5d = 8 + 5 \times 3 = 23$

$\therefore 8$ మరియు 26 ల మధ్య 5 అంక మాధ్యమాలు $11,\ 14, 17, 20, 23$

15. x, y, z **లు అంకశ్రేణిలో ఉంటే** $(x + 2y - z)(2y + z - x)(z + x - y) = 4xyz$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: x, y, z లు $A.P$ లో ఉంటే

$y - x = z - y$

$2y = x + z$

$y = \dfrac{x+z}{2}$ ... (1)

Take LHS:

$= (x + 2y - z)(2y + z - x)(z + x - y)$

$= (x + x + z - z)(x + z + z - x)(2y - y)$

$= (2x)(2z)y$

$= 4xyz$

$= RHS$.

16. గుణశ్రేఢిలో 4వ మరియు 9వ పదాలు వరుసగా 8 మరియు 256 అయితే ఈ గుణశ్రేఢిని కనుగొనుము.

సాధన: మొదటి పదాన్ని a మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r అనుకొనుము.

$t_4 = ar^{4-1} = ar^3$

$t_9 = ar^{9-1} = ar^8$

దత్తాంశ ప్రకారం $ar^8 = 256$ ... (1)

$ar^3 = 8$ ... (2)

$\therefore \frac{ar^8}{ar^3} = \frac{256}{8}$

లేదా $r^5 = 32 = 2^5 \Rightarrow r = 2$

(2) నుండి $ar^3 = a \times 2^3 = 8$

$\Rightarrow a = \frac{8}{8} = 1$

$\therefore$ కావున గుణశ్రేఢిలోని పదాలు $1, 2, 4, 8, 16...$

17. $5, -10, 20, -40....$ **గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ దము 320 అగును?**

సాధన: $a = 5;\ r = \frac{-10}{5} = -2$

320 అనేది గుణశ్రేఢిలో n వ పదము అనుకొనుము.

$\therefore t_n = ar^{n-1}$

$t_n = 5(-2)^{n-1}$

$5(-2)^{n-1} = 320$

$(-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6$

$n-1=6$

$n=7$

$\therefore$ 320 అనేది గుణశ్రేఢిలో 7వ పదం అగును.

18. $1,2,4,8,16...$ **1024 గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 1024 అగును? మరియు 520 అనేపదం గుణశ్రేఢిలో ఉందా?**

సాధన: మొదటి పదం $a=1$

సామాన్య నిష్పత్తి $r=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=...2$

గుణశ్రేఢిలో n వ పదం t_n అవుతుంది.

$t_n = ar^{n-1},\ t_n = 1024$

$a=1, r=2$ కావున

$ar^{1-1}=1024$

$1.(2)^{n-1}=1024$

$(2)^{n-1}=2^{10} \Rightarrow n-1=10$

$\Rightarrow n=11$

ఇచ్చిన శ్రేఢిలో 520 అనే పదం ఉండదు.

కారణం : $2^8=256;\ 2^9=512$ కాని 520 అనే పదం ఉండదు.

19. మూడు సంఖ్యలు గుణశ్రేఢిలోనున్నవి. వాని మొత్తం 43 లబ్ధం 216 అయిన ఆ సంఖ్యలు ఏవి?

సాధన: మూడు సంఖ్యలు $\frac{a}{r}, a, ar$ అనుకొనుము

సంఖ్యల మొత్తం $\frac{a}{r}+a+ar=43$

$a+ar+ar^2=43r \qquad \ldots (1)$

లబ్ధం $= \frac{a}{r}.a.ar$

$\Rightarrow \frac{a}{r}.a.ar = 216$

$a^3 = 216$

$a = \sqrt[3]{216} = 6 \quad \ldots (2)$

a విలువను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$6 + 6r + 6r^2 = 43r$

$6r^2 - 37r + 6 = 0$

$6r(r-6) - 1(r-6) = 0$

$(r-6)(6r-1) = 0$

$r = 6$ లేదా $r = \frac{1}{6}$

ఆ సంఖ్యలు $\frac{a}{r}, a, ar$

$1, 6, 36$ లేదా $36, 6, 1$ అగును.

20. గుణశ్రేఢిలో n వ పదము 2×3^n అయితే

1) మొదటి పదం

2) సామాన్య నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

సాధన: $ar^{n-1} = t_n = 2 \times 3^n$

$t_1 = ar^{1-1} = 2 \times 3^1 = 6$

$t_2 = ar^{2-1} = 2 \times 3^2 = 18$

$t_3 = ar^{3-1} = 2 \times 3^3 = 54$

$t_4 = ar^{4-1} = 2 \times 3^4 = 162$

.....

.....

.....

$t_n = ar^{n-1} = 2\times 3^n = ---$

$\therefore$ గుణ శ్రేణిలో పదాలు $6, 18, 54, 162.....$

1) మొదటి పదం $a = 6$

2) సామాన్య నిష్పత్తి $\frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = 3$

$\therefore r = 3$

21. $8, 88, 888.....$ **శ్రేఢిలో** n **పదాల మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: పదాల మొత్తంను S తో సూచిస్తే

$S = 8 + 88 + 888 + ...n$ పదాల వరకు

$= 8(1 + 11 + 111 + ...n$ పదాల వరకు$)$

$= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + ...n$ పదాల వరకు $)$

$= \frac{8}{9}\left[(10-1) + \left(10^2 - 1\right) + \left(10^3 - 1\right) + ...\right.$ పదాల వరకు $\left.\right]$

$= \frac{8}{9}\left[\left(10 + 10^2 + 10^3 + ...n\right) - (1 + 1 + 1 + ...n\right.$ పదాల వరకు$\left.)\right]$

$= \frac{8}{9}\left[\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right]$

$= \frac{8}{9}\left[\frac{10^n - 1 - 9n}{9}\right]$

$= \frac{8}{81}\left(10^n - 1 - 9n\right)$

22. $0.2, 0.22, 0.222, ...$ (n **పదాల వరకు) పదాల మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: పదాల మొత్తం S అనుకొనుము

$S = (0.2 + 0.22 + 0.222 + ...n$ పదాల వరకు)

$S = 2(0.1 + 0.11 + 0.111 + ...n$ పదాల వరకు)

$S = \frac{2}{9}(0.9 + 0.99 + 0.999 + ...n$ పదాల వరకు)

$S = \frac{2}{9}\{(1-0.1) + (1-0.01) + (1-0.001) + ...n$ పదాల వరకు) $\}$

$= \frac{2}{9}\{(1+1+1+...n) - (0.1 + 0.01 + 0.001 + ...n$ పదాల వరకు) $\}$

$$= \frac{2}{9}\left\{n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + n\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left\{n - \frac{\frac{1}{10}\left[1 - \frac{1}{10^n}\right]}{1 - \frac{1}{10}}\right\}(r < 1)$$

$$= \frac{2}{9}\left\{n - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{9n - 1 + 10^{-n}}{9}\right]$$

$$= \frac{2}{81}\left[9n - 1 + 10^{-n}\right]$$

23. $0.6, 0.06, 0.006, 0.0006....$ (n) **పదాల వరకు గుణశ్రేఢిలో పదాల మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: ఇక్కడ $a = 0.6;\ r = \frac{0.06}{0.6} = \frac{1}{10}$

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} r<1$$

$$S_n = \frac{\frac{6}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{6}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$S_n = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

24. $0.7, 0.77, 0.777....$ **శ్రేఢిలో** n **పదాల మొత్తంను కనుగొనుము.**

సాధన: పదాల మొత్తం S అనుకొనుము.

$S = 0.7 + 0.7 + 0.777 + ... + n$ పదాల వరకు

$S = 7(0.1 + 0.11 + 0.111 + ... + n$ పదాల వరకు)

$$S = \frac{7}{9}(0.9 + 0.99 + 0.999 + ... + n)$$

$$= \frac{7}{9}\{(1-0.1) + (1-0.01) + (1-0.001) + ... + n\}$$

$$= \frac{7}{9}\{(1+1+1+....+n) - (0.1+0.01+0.001+.....n)\}$$

$$= \frac{7}{9}\left\{n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... + n\right)\right\}$$

$$= \frac{7}{9}\left\{n - \frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right\}$$

$$= \frac{7}{9}\left\{n - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$$

$$= \frac{7}{9}\left\{\frac{9n-1+10^{-n}}{9}\right\}$$

$$= \frac{7}{81}\left\{9n-1+10^{-n}\right\}$$

25. $0.\bar{7}$ **యొక్క అనంత గుణశ్రేఢి మొత్తాన్ని కనుగొనుము.**

సాధన: $0.\bar{7} = 0.777777....$

$$= 0.7 + 0.07 + 0.007 + 0.0007 + ...$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ...$$

పై శ్రేఢి అనంత గుణ శ్రేఢి కావున

$$a = \frac{7}{10}; r = \frac{\frac{7}{10^2}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{10}$$

$$S_\alpha = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$$

26. **అనంత గుణశ్రేఢి మొత్తం 3 మరియు మొదటి, రెండు పదాల మొత్తం** $\frac{8}{3}$ **అయితే మొదట పదమును కనుగొనము.**

సాధన: $S_\alpha = 3$

మొదటి పదము a, మరియు సామాన్య నిష్పత్తి r గా అనంత గుణశ్రేఢి

దత్తాంశ ప్రకాశము $a + ar = \frac{8}{3}$

$$3(a+ar) = 8$$

$$3a(1+r) = 8 \qquad ... \ (1)$$

$S = \frac{a}{1-r}$ కావున

$S = 3;\ S = \frac{a}{1-r}$

$3 = \frac{a}{1-r} \Rightarrow a = 3(1-r) \quad \ldots (2)$

(1), (2)ల నుండి a విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$3.3(1-r)(1+r) = 8$

$9(1-r^2) = 8$

$1 - r^2 = \frac{8}{9}$

$r^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$r = \pm\frac{1}{3}$

(2)నుండి $a = 3(1-r)$

$a = 3\left(1 \pm \frac{1}{3}\right) = 2\ (or)\ 4$

27. అనంత గుణశ్రేఢి మొత్తం $\frac{1}{3}$ మరియు మొదటి పదం $\frac{1}{4}$ అయితే గుణశ్రేఢిని కనుగొనుము.

సాధన: దత్తాంశ ప్రకాశం $S = \frac{1}{3}$

$a = \frac{1}{4}$

కాని $S = \frac{a}{1-r} \quad \ldots (1)$

(1)లో s, a విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{1-r}$$

$$\frac{1}{3}(1-r)=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{r}{3}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{r}{4}$$

$$\frac{4-3}{12}=\frac{r}{3} \Rightarrow \frac{1}{12}=\frac{r}{3}$$

$$r=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ గుణ శ్రేఢి $\frac{1}{4},\frac{1}{4^2},\frac{1}{4^3},.....\alpha$

28. 8 మరియు $\frac{1}{64}$ ల మధ్య 8 గుణ మధ్యమాలను ఉంచండి.

సాధన: $G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6,G_7,G_8$ లను 8 గుణమధ్యమాలు అనుకొనుము.

$$8, G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6,G_7,G_8\ \frac{1}{64}$$

$a=8;\ n=10$ పదాలు $t_n=\frac{1}{64}$

$$t_n=ar^{n-1}$$

$$8.ar^{n-1}=\frac{1}{64}\Rightarrow 8.r^a=\frac{1}{64}$$

$$r^9=\frac{1}{512}=\frac{1}{2^9}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$r = \frac{1}{2}$

$G_1 = ar = 8.\frac{1}{2} = 4$

$G_2 = ar^2 = 8.\frac{1}{4} = 2$

$G_3 = ar^3 = 8.\frac{1}{8} = 1$

$G_4 = ar^4 = 8.\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

$G_5 = ar^5 = 8.\frac{1}{22} = \frac{1}{4}$

$G_6 = ar^6 = 8.\frac{1}{64} = \frac{1}{8}$

$G_7 = ar^7 = 8.\frac{1}{128} = \frac{1}{16}$

$G_8 = ar^8 = 8.\frac{1}{256} = \frac{1}{32}$

$\therefore$ గుణ మధ్యమాలు $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$.

29. a **మరియు** b**ల మధ్య గుణ మధ్యమము** G **అయితే** $\frac{1}{G^2 - a^2} + \frac{1}{G^2 - b^2} = \frac{1}{G^2}$ **అనిచూపుము.**

సాధన: a, bల మధ్య గుణ మధ్యమము G అయితే

$G^2 = ab \Rightarrow G = \sqrt{ab}$ అవుతుంది.

LHS దత్తాంశములో

$= \frac{1}{G^2 - a^2} + \frac{1}{ab - b^2}$

$$= \frac{ab - b^2 + ab - a^2}{\left(ab - a^2\right)\left(ab - b^2\right)}$$

$$= \frac{2ab - \left(a^2 + b^2\right)}{a(b-a)b(a-b)}$$

$$= \frac{\left(\left(2ab - \left(a^2 + b^2\right)\right)\right)}{(ab)(a-b)^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{(ab)(a-b)^2}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{(ab)(a-b)^2}$$

$$= \frac{1}{ab} \qquad = \frac{1}{G^2} = RHS$$

$$LHS = RHS$$

30. a మరియు b ల మధ్య వరుసగా అంకమధ్యమము A మరియు గుణమధ్యమము G లు ఉంటే $A > G$ అని చూపుము.

సాధన: a, b ల మధ్య వరుసగా అంకమధ్యమము A, గుణమాధ్యమము G లు ఉంటే

$A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ అగును.

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab}}{2}$$

$$A - G = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$

$\therefore A > G$ అగును.

31. గుణశ్రేఢిలో మూడు పదాల మొత్తం $\frac{13}{12}$ మరియు వాటి లబ్ధం **−1** అయితే ఆ శ్రేఢిని కనుగొనుము.

సాధన: మూడు పదాలు $\frac{a}{r}, a, ar$ అనుకొనుము

దత్తాంశ ప్రకారం

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{1}{12} \quad .. \ (1)$$

$$\frac{a}{r}.a.ar = -1 \quad .. \ (2)$$

$$a^3 = -1 \Rightarrow a = -1$$

(1) నుండి

$$a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12}$$

$a = -1$ ప్రతిక్షేపించిన

$$\frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{-13}{12}$$

$$12 + 12r + 12r^2 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$\therefore r = \frac{-25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4(12)(12)}}{212}$$

$$r = \frac{-25 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{-25 \pm 7}{24}$$

$r = \frac{-25 - 2}{24}$ లేదా $r = \frac{-25 + 7}{24}$

$r = \frac{-4}{3}$ లేదా $r = \frac{-3}{4}$ అగును.

ఆ శ్రేఢి $\frac{a}{r}, a, ar$

$\therefore \frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ లేదా $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$

32. గుణశ్రేఢిలోని మూడు పదాల లబ్ధం 512.. అయితే మొదటి పదానికి 8 మరియు రెండో పదానికి 6 కలిపితే ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన: $\frac{a}{r}.a.ar = 512$

$a^3 = 512 = 8^3$

$a = 8$

దత్తాంశ ప్రకారం $t_1 + 8, t_2 + 6, t_3$ లు $A.P.$ లో ఉండును ...(1)

కావున $\frac{a}{r} + 8, a + 6, ar$ లు $A.P.$ లో ఉండును.

$$(a+6) - \left(\frac{a}{r} + 8\right) = ar - (a+6)$$

$$(8+6) - \left(\frac{8}{r} + 8\right) = 8r - (8+6)$$

$$14 - \left(\frac{8+8r}{r}\right) = 8r - 14$$

$$8r + \frac{8+8r}{r} = 28$$

$8r^2 + 8 + 8r = 28r$ *or* $8r^2 - 20r + 8 = 0$

$2r^2 - 5r + 2 = 0$ *or* $2r(r-2) - 1(r-2) = 0$

$(r-2)(2r-1) = 0$

$r = 2$ లేదా $r = \frac{1}{2}$ అగును.

శ్రేఢి $\frac{a}{r}, a, ar \left(r = \frac{1}{2} \text{ అయితే } \right)$

$\frac{8}{\frac{1}{2}}, 8, 8 \times \frac{1}{2}$

16, 8, 4

$r = 2$ అయితే $4, 8, 16$ అవుతాయి.

14

ప్రత్యేక రకాల శ్రేణులు

మొదటి రోజున ఒక ముత్యము, రెండవ రోజున మొదటి రోజున ముత్యముల సంఖ్యకు రెట్టింపు, మూడవ రోజున రెండవ రోజు ముత్యముల సంఖ్యకు రెట్టింపు ఆ విధముగ నాల్గవ రోజు, మరుసటి రోజు, ఆమరుసటి రోజు, అలా ముత్యముల సంఖ్యను పెంచుతూ ముత్యములు సంపాదించవలెను.

అప్పుడు ముత్యముల సంఖ్య రోజు వారీ ఈ అనుక్రమములో నుండును.

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$$

ఈ అనుక్రమము నుండి మనము ఒక శ్రేణిని రాబట్టవచ్చును.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$$

ఫిబోనస్సి శ్రేణి (FIBONACCI)

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \ldots$$

ఈ పాఠమునందు మనము కొన్ని ప్రత్యేక రూపంలో నున్న శ్రేణులను గూర్చి తెలుసుకొంటాము.

లక్ష్యాలు :

1. శ్రేణుల నిర్వచనం.
2. n మరియు t_n విలువలు ఇచ్చినప్పుడుశ్రేణిలోని పదాలను గణించుట.
3. గణితాను గమన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\Sigma n, \Sigma n^2, \Sigma n^3$ విలువలను గణించుట.
4. $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots\ldots n$ పదాల వరకు సామాన్య శ్రేణిని గణించవచ్చు.

ముఖ్యాంశాలు :

1. $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . u_n$ అనే రూపంలో ఉన్న దానిని శ్రేణి అంటాము. మరియు $u_1, u_2 \ldots . u_n$ శ్రేణిలోని సంఖ్యలు.

$$\sum_{n=1}^{\alpha} n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\alpha} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\alpha} n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\therefore S_n = \sum t_n$$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $1-1+1-1+1....$ **శ్రేణి యొక్క** n **వ పదాన్ని వ్రాయండి.**

సాధన: దత్త శ్రేణి $1-1+1-1+1....$

$$\therefore T_n = (-1)^{n+1}$$

2. $-2+4-6+8-....$ **శ్రేణి యొక్క** n **వ పదాన్ని వ్రాయండి.**

సాధన: దత్త శ్రేణి $-2+4-6+8.....$

ఇందులో సరి పదాలు ధనాత్మకం, బేసి పదాలు ఋణాత్మకం.

$2,4,6,8,...$లు సరి సంఖ్యలు

$$\therefore T_n = (-1)^n\, 2n$$

3. $4+16+64+256+....$ **శ్రేణి యొక్క** n **వ పదాన్ని వ్రాయండి.**

సాధన: దత్త శ్రేణి $4+16+64+256+...$

$$= 4+4^2+4^3+4^4+....$$

$\therefore n$ వ పదము $T_n = 4^n$

4. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+...$ **శ్రేణి యొక్క** n **వ పదాన్ని వ్రాయండి.**

సాధన: దత్త శ్రేణి $= \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+...$

$\therefore n$ వ పదము $T_n = 4^n$

5. $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.....$ శ్రేణి యొక్క n వ పదాన్ని వ్రాయండి.

సాధన: దత్త శ్రేణి $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.....$

$\therefore n$ వ పదము $=(-1)^n\frac{1}{n}$

6. $3-6+9-12+....$ శ్రేణి యొక్క n వ పదమును కనుగొనండి.

సాధన: దత్త శ్రేణి $3-6+9-12+....$

$=3-2.3+3.3+4.3+...$

$\therefore n$ వ పదము $(-1)^{n+1}3n$

7. $1+2+3+4...+n$ మొదటి n సహజ సంఖ్యలు మొత్తం ఎంత?

సాధన: $S_n=1+2+3+4+...+n$ అనుకొనిన

$$S_n=\sum n=\frac{n(n+1)}{2}$$

8. $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2$ మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం ఎంత?

సాధన: $S_n=\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$

9. $1^3+2^3+3^3+...+n^3$ మొదటి 'n' సహస సంఖ్యల ఘనాల మొత్తం ఎంత?

సాధన: $S_n=\Sigma n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(\Sigma n)^2$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $\therefore n$ వ పదము $a_n=n^2-n+1$ గా గల అను క్రమము యొక్క మొదటి '6' పదాలను కనుగొనండి.

సాధన: $a_n=n^2-n+1$

$n=1$ అయిన, $a_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

$n=2$ అయిన, $a_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$n=3$ అయిన, $a_3 = 3^2 - 3 + 1 = 7$

$n=4$ అయిన, $a_4 = 4^2 - 4 + 1 = 13$

$n=5$ అయిన, $a_5 = 5^2 - 5 + 1 = 21$

$n=6$ అయిన, $a_6 = 6^2 - 6 + 1 = 31$

$\therefore$ మొదటి 6 పదాలు $1+3+7+13+21+31+\ldots$

2. n వ పదము $f_n = (-1)^n 5^n$ గా గల అనుక్రమము యొక్క మొదటి **6** పదాలను కనుగొనండి.

సాధన: $f_n = (-1)^n 5^n$

$n=1$ అయిన $f_1 = (-1)^1 5^1 = -5$

$n=2$ అయిన $f_2 = (-1)^2 5^2 = 25$

$n=3$ అయిన $f_3 = (-1)^3 5^3 = -125$

$n=4$ అయిన $f_4 = (-1)^4 5^4 = 625$

$n=5$ అయిన $f_5 = (-1)^5 5^5 = -3125$

$n=6$ అయిన $f_6 = (-1)^6 5^6 = 15625$

$\therefore f_n = (-1)^n 5^n$ అనుక్రమానికి, మొదటి 6 పదాలు

$-5+25-125+625-3125+15625+\ldots$

3. n వ పదము $T_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ గా గల అనుక్రమము యొక్క మొదటి **6** పదాలు కనుగొనండి.

సాధన: $n=1$ అయిన, $T_1 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{6} = \dfrac{2\times 3}{6} = 1$

$n=2$ అయిన, $T_2=\frac{2(2+1)(2+2)}{6}=\frac{2\times3\times4}{6}=4$

$n=3$ అయిన, $T_3=\frac{3(3+1)(3+2)}{6}=\frac{3\times4\times5}{6}=10$

$n=4$ అయిన, $T_4=\frac{4(4+1)(4+2)}{6}=\frac{4\times5\times6}{6}=20$

$n=5$ అయిన, $T_5=\frac{5(5+1)(5+2)}{6}=\frac{5\times6\times7}{6}=35$

$n=6$ అయిన, $T_6=\frac{6(6+1)(6+2)}{6}=\frac{6\times7\times8}{6}=56$

$\therefore$ దత్త క్రమంలోని మొదటి 6 పదాలు $1+4+10+20+35+56+.....$

4. n వ పదము $a_n=\frac{n^2-1}{2n-3}$ **అనుక్రమము యొక్క మొదటి '6' పదాలు కనుగొనండి.**

సాధన: $n=1$ అయిన, $a_1=\frac{1^2-1}{2\times1-3}=0$

$n=2$ అయిన, $a_2=\frac{2^2-1}{2\times2-3}=\frac{3}{1}=3$

$n=3$ అయిన, $a_3=\frac{3^2-1}{2\times3-3}=\frac{8}{3}$

$n=4$ అయిన, $a_4=\frac{4^2-1}{2\times4-3}=\frac{15}{5}=5$

$n=5$ అయిన, $a_5=\frac{5^2-1}{2\times5-3}=\frac{24}{7}$

$n=6$ అయిన, $a_6=\frac{6^2-1}{2\times6-3}=\frac{35}{9}$

$\therefore$ దత్త అనుక్రమము యొక్క మొదటి 6 పదాలు $0+3+\frac{8}{3}+3+\frac{27}{4}+\frac{35}{9}+...$

5. $A_1 = 1$ **మరియు** $A_2 = 2, A_n = \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}, (n > 2)$ **అయినా** A_6 **ను కనుగొనండి.**

సాధన: $A_1 = 1, A_2 = 2$

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} (n > 2)$$

$$A_3 = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$A_4 = \frac{A_3}{A_2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A_5 = \frac{A_4}{A_3} = \frac{1}{2};$$

$$\therefore A_6 = \frac{A_5}{A_4} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

6. **ఈ క్రింది శ్రేణిలోని 40 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.**

$2 + 4 + 6 + ... + 40$ పదాల వరకు

సాధన: $2 + 4 + 6 + ... + 40$ పదాలు

$a = 2;\ d = 2,\ n = 10$

పై శ్రేణి అంక శ్రేఢిలో ఉంది.

$\therefore n$ పదాల మొత్తం $= S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$$= \frac{40}{2}\left[2 \times 2 + (40-1) \times 2\right]$$

$$= 20(4 + 78) = 20 \times 82 = 1640$$

7. **ఈ క్రింది శ్రేణిలోని 6 పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.**

సాధన: $2 + 6 + 18 + ... + 6$ పదాల వరకు.

ఈ శ్రేణి గుణశ్రేఢిలో ఉంది.

$a = 2,\ r = 3 > 1,\ n = 6$

$\therefore n$ పదాల మొత్తం

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{2\left(3^6 - 1\right)}{3-1}$$

$$= \frac{2(729-1)}{2} = 728$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\dfrac{1\times 2^2 + 2\times 3^2 + \ldots . n\times(n+1)^2}{1^2\times 2 + 2^2\times 3 + \ldots . + n^2\times(n+1)} = \dfrac{3n+5}{3n+1}$ **అని చూపండి.**

సాధన: దత్త శ్రేణిలోని పదాల మొత్తం

$$S_n = \frac{\sum n(n+1)^2}{\sum n^2(n+1)} = \frac{\sum\left(n^3 + 2n^2 + n\right)}{\sum\left(n^3 + n^2\right)}$$

$$S_n = \frac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$S_n = \frac{\dfrac{n(n+1)}{2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(2n+1)}{3} + 1\right)}{\dfrac{n(n+1)}{2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(2n+1)}{3}\right)}$$

$$S_n = \frac{\dfrac{3\left(n^2+n\right)+4\left(2n+1\right)+6}{6}}{\dfrac{3\left(n^2+n\right)+2\left(2n+1\right)}{6}} = \frac{3n^2+11n+10}{3n^2+7n+2}$$

$$= \frac{\left(3n+5\right)\left(n+2\right)}{\left(3n+1\right)\left(n+2\right)} = \frac{3n+5}{3n+1}$$

III. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $1.3+3.5+5.7+....$ **శ్రేఢి యొక్క మొదటి** n **పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.**

సాధన: $S_n = 1.3+3.5+5.7+....$ అనుకొనుము.

n వ పదము = $t_n = 1,3,5...$ యొక్క n వ పదము)× $(3,5,7....$ యొక్క n వ పదము)

$$= \left(2n-1\right)\left(2n+1\right)$$

$$\therefore t_n = 4n^2-1$$

$$\therefore S_n = \sum t_n$$

$$= \sum\left(4n^2-1\right)$$

$$= 4\sum n^2 - \sum 1$$

$$= 4.\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} - n$$

$$= \frac{2n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)-3n}{3} - n$$

$$= \frac{2n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)-3n}{3}$$

$$= \frac{n}{3}\left[2\left(2n^2+3n+1\right)-3\right]$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{3}\left[4n^2 + 6n - 1\right]$$

2. $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + ...$ **– శ్రేణి యొక్క మొదటి n పదాల మొత్తం కనుగొనండి.**

సాధన: దత్త శ్రేణి $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + ...$

$$\therefore t_n = n\left(2 + (n-1)\right)^2$$

$$= n(n+1)^2 = n\left(n^2 + 2n + 1\right)$$

$$t_n = n^3 + 2n^2 + n$$

$$\therefore S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + ... + n(n+1)^2$$

$$\therefore S_n = \sum t_n = \sum\left(n^3 + 2n^2 + n\right)$$

$$= \sum n^3 + 2\sum n^2 + \sum n$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= n(n+1)\left[\frac{3n(n+1) + 4(2n+1) + 6}{12}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(3n^2 + 11n + 10\right)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

3. $2.3.5 + 3.5.7 + 4.7.9 + ...$ **శ్రేణిలోని మొదటి n పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.**

సాధన: $S_n = 2.3.5 + 3.5.7 + 4.7.9 + ...$

ఈ శ్రేణిలోని n వ పదము

$t_n = (2,3,4....n$వ పదము) × $(3,5,7.....n$వ పదము)× $(5,7,9.....n$వ పదము)

$= (n+1)\times(2n+1)\times(2n+3)$

$= (n+1)\left(4n^2+8n+3\right)$

$= 4n^3+12n^2+11n+3$

$\therefore S_n = \sum t_n = \sum\left(4n^3+12n^2+11n+3\right)$

$= 4\sum n^3 + 12\sum n^2 + 11\sum n + 3\sum 1$

$= \frac{4.n^2(n+1)^2}{4} + \frac{12n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{11n(n+1)}{2} + 3n$

$= n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + \frac{11n(n+1)}{2} + 3n$

$= \frac{n}{2}\left[2n(n+1)^2 + 4(n+1)(2n+1) + 11(n+1) + 6\right]$

$= \frac{n}{2}\left[2n\left(n^2+2n+1\right) + 4\left(2n^2+3n+1\right) + 11n + 17\right]$

$= \frac{n}{2}\left[2n^2+12n^2+25n+21\right]$

4. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....$ **శ్రేణిలోని మొదటి n పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.**

సాధన: $t_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$

$n = 1,2,3.....$లను ప్రతిక్షేపించగా

$t_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$$t_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$t_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$

.....

.....

$$t_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

కూడగా.. $t_1 + t_2 + ... + t_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2n}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{n}{2n+1}$$

5. $1 + (1+3) + (1+3+5) + ...$ **శ్రేణి యొక్క మొదటి** n **పదాల మొత్తం కనుగొనండి?**

సాధన: దత్త శ్రేణిలోని n వ పదము.

$$t_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$$

$\therefore t_0 = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1)$ ($\because$ n పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$)

$$= \frac{n}{2} 2n$$

$$t_n = n^2$$

$$\therefore S_n = \sum t_n$$

$$= \sum n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....$ **శ్రేణిలోని మొదటి** n **పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.**

సాధన: దత్తశ్రేణిలోని n వ పదము

$$t_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$t_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right]$$

$n=1,2,3,.....$ లను వరుసగా ప్రతిక్షేపించగా

$$t_1=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}\right]$$

$$t_2=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right]$$

$$t_3=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right]$$

.....

.....

$$t_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right]$$

కూడగా.. $t_1+t_2+....+t_n=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{3n+1}\right]$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

7. n **వ పదము** $n(n+1)(n+4)$ **గా గల శ్రేణి యొక్క** n **పదాల మొత్తమును కనుగొనండి.**

సాధన: $t_n=n(n+1)(n+4)=n^3+5n^2+4n$

$$\therefore S_n=\sum t_n=\sum\left(n^3+5n^2+4n\right)$$

$$= \sum n^3 + 5\sum n^2 + 4\sum n$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{5(2n+1)}{3} + 4\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3\left(n^2+n\right)+10(2n+1)+24}{6}\right]$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2+23n+34\right)$$

8. $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...n$ **పదాల వరకు గల శ్రేణిలోని పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.**

సాధన: $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...$ శ్రేణిలోని

n వ పదము = $t_n = n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$

n వ పదాల మొత్తం

$$\therefore S_n = \sum t_n = \sum n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$= \sum n^3 + 3\sum n^2 + 2\sum n$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + (2n+1) + 2\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n^2+n+4n+2+4}{2}\right)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)\left(n^2+5n+6\right)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

15

సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయాలు

లక్ష్యాలు :

- సమితిని నిర్వచించడం – వివిధ రకాల సమితులు, వాటి ఉదాహరణ.
- రెండు సమితుల యొక్క సమ్మేళనం, క్షీధనలను నిర్వచించడం.
- వెన్ చిత్రాల ద్వారా గుర్తించడం.
- సంబంధం, ప్రమేయాలను ఉదాహరణలతో నిర్వచించడం.
- ప్రమేయ ప్రదేశాన్ని, వ్యాప్తిని కనుక్కోవడం, వివిధ రకాల ప్రమేయాలను నిర్వచించడం.
- బేసి మరియు సరి ప్రమేయాలను ఉదాహరణలతో నిర్వచించడం.

ముఖ్యాంశాలు :

1. నిర్దిష్ట ధర్మాన్ని కలిగివున్న వస్తువుల సముదాయం సమితి.
2. సమితి A లోని ప్రతి మూలకం సమితి B లో ఉంటే A ని B కి ఉపసమితి అందురు.
3. రెండు సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకాలచే ఏర్పడిన సమితిని ఛేదన సమితి అందురు. రెండు సమితులలోని మూలకాలచే ఏర్పడిన సమితిని వాటి సమ్మేళనము అంటారు.
4. A, B లలోని మూలకాలచే ఏర్పడిన క్రమయుగ్మాల సమితిని A, B ల కార్టీజియన్ లబ్ధం అందురు. దీనిని $A \times B$ తో సూచిస్తారు.
5. $f : A \to B$ ప్రమేయం అనేది A నుండి B కి సంబంధం. f అనేది A నుండి B కి ప్రమేయం అయితే

   ప్రదేశం : f లోని క్రమయుగ్మాల యొక్క ప్రథమ నిరూపకాల సమితి

   వ్యాప్తి : f లోని క్రమయుగ్మాల యొక్క ద్వితీయ నిరూపకాల సమితి.
6. $f : A \to B$ అయితే A ను f కి ప్రదేశం అని, B ని f కి సహప్రదేశం అని అంటాం. A లోని మూలకాల f- ప్రతిబింబాల సమితి $f(A)$ ని, f వ్యాప్తి అంటాం. వ్యాప్తి సహ ప్రదేశానికి ఉపసమితి అంటే $f(A) \subseteq B$.
7. A లోని విభిన్న మూలకాలకు B లో విభిన్న ప్రతిబింబాలు ఉంటే f ను అన్యేక ప్రమేయం అని అంటారు.

8. A లోని (ప్రదేశం) మూలకాలకు వ్యాప్తిలో ఒకే ఒక మూలకం వుంటే f ను బహు-ఏక ప్రమేయం అంటారు.

9. సంగ్రస్త ప్రమేయం : $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$. B లోని ప్రతి మూలకం A లోని కనీసం ఒక మూలకానికైనా ప్రతిబింబమయితే f ను సంగ్రస్త ప్రమేయం అంటారు.

   $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ సంగ్రస్త ప్రమేయం $\Leftrightarrow$ ప్రతి $b \in \mathrm{B}$ కి $f(a) = b$ అయ్యేలా $a \in \mathrm{A}$ ఉంటుంది.

10. ద్విగుణ ప్రమేయం : $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ అన్వేకం, సంగ్రస్తం రెండూ అయితే f ను A నుంచి B కి ద్విగుణ ప్రమేయం అంటారు.

11. స్థిర ప్రమేయం : $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$. f వ్యాప్తిలో ఒకే ఒక మూలకం ఉంటే f ను స్థిర ప్రమేయం అంటారు.

12. తత్సమ ప్రమేయం : A ఒక శూన్యేతర సమితి. A నుంచి A కు f ప్రమేయాన్ని ప్రతి $x \in \mathrm{A}$ కు $f(x) = x$ గా నిర్వచిస్తే ఆ ప్రమేయాన్ని తత్సమ ప్రమేయం అంటాం. దీనిని $\mathrm{I_A}$ తో సూచిస్తాం.

    గమనిక : ప్రతి తత్సమ ప్రమేయం ద్విగుణ ప్రమేయం.

13. విలోమ ప్రమేయం : A నుంచి B కి f ఒక సంబంధం.

    $\{(b,a)/(a,b) \in f\}$ అనే సంబంధాన్ని f^{-1} తో సూచిస్తాం.

    $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ కి ద్విగుణ ప్రమేయమైతే $f^{-1} = \{(b,a)/(a,b) \in f\}$ అనే సంబంధం B నుంచి A కి ప్రమేయం అవుతుంది. దీనిని f విలోమ ప్రమేయం అంటాం.

14. సంయుక్త ప్రమేయం : $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ అయితే $\{a, g(f(a))/a \in \mathrm{A}\}$ ని f, g ల సంయుక్త ప్రమేయం అంటాం. దీనిని gof తో సూచిస్తాం $gof : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$.

15. ఒక ప్రమేయం అది ఇచ్చిన అంతరంలో ఆరోహణ లేదా అవరోహణ అయితే దానిని ఏకదిష్ఠ ప్రమేయం అందురు.

16. $f(-x) = f(x)$ అయితే f ను సరిప్రమేయం అని అంటారు.

17. $f(-x) = -f(x)$ అయితే f ను బేసి ప్రమేయం అంటారు.

18. ఒక ప్రమేయం అన్యేకం మరియు సంగ్రస్తం అయితేనే దానికి విలోమం ఉంటుంది.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. 7 కంటే తక్కువ గల సహజ సంఖ్యల సమితిని వ్రాయుము.

జ. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ని సమితి నిర్మాణ రూపంలో వ్రాయండి.

జ. $A = \{x : x \in Z$ మరియు $-3 \le x \le 3\}$

3. $A = \{x : x \in N$ మరియు $50 \le x \le 60\}$ రోష్టర్ లేదా జాబితా పద్ధతిలో వ్రాయండి.

జ. $A = \{50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60\}$

4. పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులను నిర్వచించండి.

జ. మూలకాలను లెక్కించడానికి వీలుగా ఉంటే ఆ సమితిని పరిమిత సమితి లేదా లెక్కించడానికి వీలుకాకుంటే ఆ సమితిని "అపరిమిత" సమితి అంటారు.

5. తుల్య సమితిని నిర్వచించండి?

జ. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ ఇక్కడ మూలకాల సంఖ్య సమానం కానీ ఒకే మూలకాలు కావు. ఇలాంటి సమితులను తుల్య సమితులు అంటారు.

6. కింది వాటిలో ఏవి సమితులు

i) S తో మొదలయ్యే వారంలోని రోజులు

జ. సమితి అవుతుంది.

ii) 50 వరకు గల సహజ సంఖ్య

జ. ఒక సమితి అవుతుంది.

iii) మీ పాఠశాలలోని లావుగా ఉండే విద్యార్థులు

జ. సమితి కాదు

7. కింది సమితులను రోష్టర్ పద్ధతిలోకి మార్చి వ్రాయండి.

i) $A = \{x : x \in Z$ మరియు $-5 \le x \le 0\}$

జ. $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

ii) $D = \{x : x$ అనునది ప్రధాన సంఖ్య మరియు 60 ని భాగించేది $\}$

జ. $D = \{2, 3, 5\}$

8. కింది సమితులను సమితి నిర్మాణ రూపంలో వ్రాయండి.

i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

జ. $A = \{x : x$ అనేది 10 కంటే తక్కువ లేదా సమానంగా గల సరి సహజ సంఖ్య$\}$

ii) $B = \{3, 6, 9, ..., \infty\}$

జ. $\{x : x \in N$ మరియు x అనేది 3 యొక్క గుణిజం$\}$

iii) $C = \{2, 3, 5, 7\}$

జ. $\{x : x$ అనేది 10 కంటే తక్కువ గల ప్రధాన సంఖ్య$\}$

iv) $D = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

జ. $D = \{x : x$ మరియు $x^2 - 2 = 0$ కు సాధన$\}$

9. కింది దానిలో ఏవి పరిమిత మరియు ఏవి అపరిమిత సమితులు?

i) ఇచ్చిన రేఖకు సమాంతరం ఉండే రేఖల సమితి

జ. అపరిమితం

ii) భూమిపై గల జంతువుల సమితి

జ. పరిమితం

iii) వృత్తంపై బిందువుల సమితి

జ. అపరిమితం

10. కింది వానిలో ఏవి శూన్య సమితులు లేదా ఏక మూలక సమితులు

i) $A = \{x : x \in R$ మరియు x అనేది $x^2 + 2 = 0$ సాధన$\}$

జ. A కు సాధన ఉండదు కావున శూన్య సమితి.

ii) $B = \{x : x \in Z$ మరియు x అనునది $x - 3 = 0$ సాధన$\}$

జ. సాధన ఉంది. ఇది ఏకమూలక సమితి.

iii) $C = \{x : x \in R$ మరియు x అనునది $x^2 - 3 = 0$ సాధన$\}$

జ. $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ x పూర్ణ సంఖ్యల సమితికి చెందింది కావున ఇది శూన్య సమితి.

11. కింది వాటిని $A = B$ లేదా $A \simeq B$ లను గుర్తించండి.

i) $A = \{a\}$. $B = \{x : x$ అనేది సరిపదన సంఖ్య$\}$

జ. $A = B$ అవుతుంది.

ii) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x : x$ అనేది guava పదంలోని అక్షరం$\}$

జ. $A \simeq B$ అవుతుంది.

iii) $A = \{x : x$ అనేది $x^2 - 5x + 6 = 0$ సాధన$\}$ $B = \{2,3\}$

జ. $A = B$ అవుతుంది.

గమనిక : $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 2,3$

$\therefore B = \{2,3\}$

12. ఉన్నత సమితిని నిర్వచించుము?

జ. $A \subseteq B$ మరియు $A \neq B$ అయితే అపుడు సమితి A ను B కి క్రమ ఉపసమితి అని, సమితి B ని సమితి A కు ఉన్నత సమితి అని అందురు.

13. $B = \{b : b \in N$ మరియు $1 \le y \le 3\}$ ఘాత సమితి వ్రాయండి.

జ. సమితి B ని B = {1, 2, 3} గా వ్రాయవచ్చు.

B కి ఉపసమితులు $\{\phi\}$, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}

P(B) = { ϕ, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

14. $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{2,4\}$ మరియు $B = \{1,3\}$ అయితే వీటి వెన్ చిత్రాలను గీయండి.

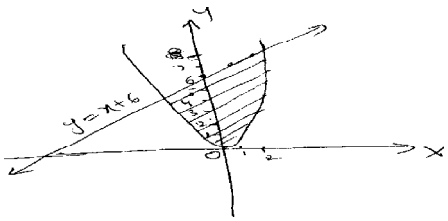
జ.

15. A, B లు వియుక్త సమితులు కాకపోవడానికి వెన్ చిత్రం గీయండి.

జ.

16. పూరక సమితిని వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపించండి?

జ. $A' = U - A$



17. $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{2,3,5,7\}$ అయిన A' ఎంత?

జ. $A' = U - A = \{1,4,6,8,9,10\}$

18. $A = \{1,3,5,7,9\}$ అయితే కింది ఖాళీలను సరియైన గుర్తులతో సూచించండి.

i) ϕ.....A

జ. $\phi \subset A$

ii) {2, 3, 9} .....A

జ. $\not\subset$

iii) 3.....A

జ. $\in$

iv) 10 ..... A

జ. $\notin$

19. $A = \{a,b\}$ అయితే P(A) ఎన్ని మూలకాలు ఉండును?

జ. $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} = 4$

20. A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {5, 6, 7} అయితే

i) A – B ఎంత?

జ. A – B = {1, 2, 3, 4}

ii) B – A ఎంత?

జ. B – A = {6, 7}

21. సార్వత్రిక సమితి N కు A, B, C, D లు క్రింది విధంగా నిర్వచించిన ఉపసమితులైతే వాటి పూరక సమితులను కనుక్కోండి.

A = {x:x అనునది సరిసహజ సంఖ్య}

జ. $A^C = \{x : x$ బేసి సహస సంఖ్య$\}$

B = {x:x మరియు x అనునది 3 యొక్క గుణిజము}

జ. $B^C = \{x : x \in N$ మరియు x అనేది 3 యొక్క గుణిజం కాదు$\}$

C = {x:x మరియు $x \geq 5$}

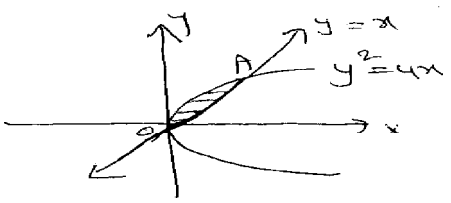
జ. $C^C = \{1, 2, 3, 4\}$

$D = \{x : x \in N$ మరియు $x \leq 10\}$

జ. $D^C = \{11, 12, 13, ...\}$

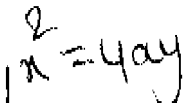
22. $A \cap B$ ని వెన్ చిత్రం ద్వారా గుర్తించండి.

జ.



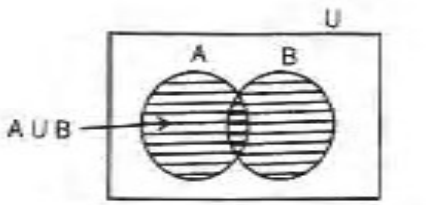
23. $A \cap B = \phi$ అని వెన్ చిత్రం ద్వారా గుర్తించండి.

జ.



24. $A \cup B$ ని వెన్ చిత్రం ద్వారా గుర్తించండి.

జ.



25. కింది సమితుల జతలలో ఏవి వియుక్త సమితులు? ఏవి కావు?

i) $\{x : x$ అనునది సరి సహజసంఖ్య$\}$, $\{y : y$ అనేది సరి సహజ సంఖ్య$\}$

జ. వియుక్త సమితి

ii) $\{x : x$ అనునది ప్రధాన సంఖ్య మరియు 12ను భాగిస్తుంది$\}$

$\{y : y \in \mathrm{N}$ మరియు $3 \le y \le 5\}$

జ. వియుక్త సమితులు కావు.

iii) $\{x : x$ అనునది 52 పేక ముక్కలలో రాజు$\}$

$\{y : y$ అనునది 52 పేక ముక్కలలో డైమండ్ ముక్క$\}$

జ. వియుక్త సమితులు కావు.

26. కింది వాటి నుండి A మరియు B ల ఛేదనం కనుక్కోండి.

i) $\mathrm{A} = \{x : x \in \mathrm{Z}\}$, $\mathrm{B} = \{x : x \in \mathrm{N}\}$

జ. $\{x : x \in \mathrm{N}\}$

ii) A = {రామ్, రహీమ్, గోవింద్, గౌతమ్}

B = {సీతా, మీరా, ఫాతిమా, మణిప్రీత్}

జ. ϕ

27. A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10} అయితే $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ కనుక్కోండి.

జ. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{5\}$

28. A = {2, 4, 6, 8, 10}, B = {8, 10, 12, 14}, C = {14, 16, 18, 20} అయితే

i) $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ లను కనుక్కోండి.

జ. $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

ii) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ ని కనుక్కోండి.

జ. $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{14\}$

$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \phi$

29. $\mu = \{1,2,3,....10\}$, $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{1,3,5,7,9,10\}$ అయితే

i) $(A \cup B)'$ కనుక్కోండి?

జ. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$(A \cup B)' = \phi$

ii) $(A \cap B)'$ కనుక్కోండి.

జ. $(A \cap B) = \{10\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

iii) $(B')'$ ను కనుక్కోండి.

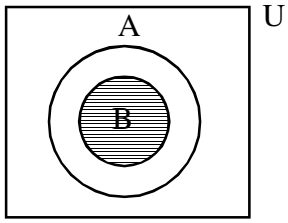
జ. $B' = \mu - B = \{2,4,6,8\} \Rightarrow (B')' = \{1,3,5,7,9,10\}$

iv) $(B-A)'$ కనుక్కోండి.

జ. $B-A = \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow (B-A)' = \{2,4,6,8,10\}$

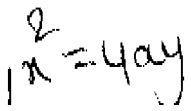
30. i) $B \subset A$ అయినపుడు $A \cap B$ వెన్ చిత్రం ద్వారా సూచించండి.

జ.



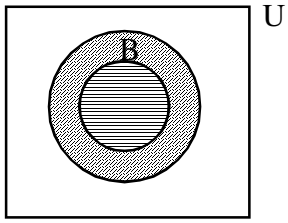
ii) A, B లు వియుక్త సమితులయితే $A \cap B$ వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపండి.

జ.



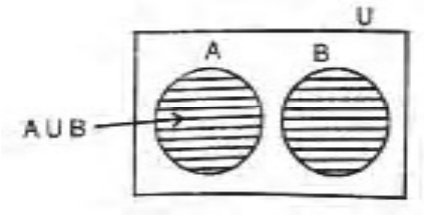
31. i) $A \subset B$ అయిన $A \cup B$ ని వెన్ చిత్రం ద్వారా గుర్తించండి.

జ.



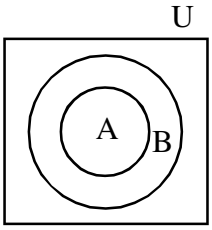
ii) A, B లు వియుక్త సమితులయితే $A \cup B$ ని వెన్ చిత్రం ద్వారా గుర్తించండి.

జ.

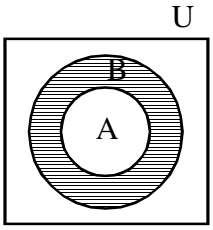


32. i) $A \subset B$ అయినపుడు A–B మరియు B–A వెన్ చిత్రం ద్వారా గుర్తించండి.

జ.



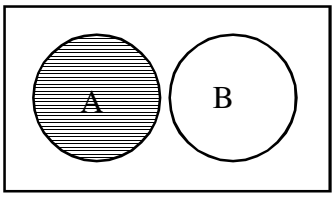
A–B = φ



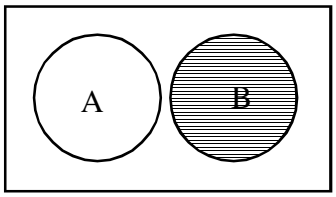
B–A = Shaded portion

ii) A, B లు వియుక్తాలయితే A–B మరియు B–A లను వెన్ చిత్రాల ద్వారా గుర్తించండి.

జ.



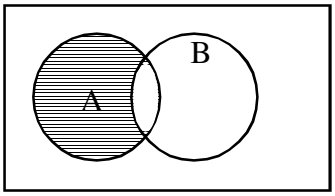
A–B = A



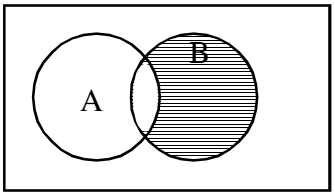
B–A = B

iii) A, B లు ఒకదానికొకటి ఉపసమితులు కాకుండా మరియు వియుక్తాలు కానప్పుడు A–B మరియు B–A ని గుర్తించండి.

జ.



A–B = Shaded portion



B–A = Shaded portion

33. A = {4,5,6,7}, B = {8,9}, C = {10} అయితే $A\times B$, $A\times C$ లను కనుక్కోండి.

జ. $A\times B = \{(4,8)(4,9)(5,8)(5,9)(6,8)(6,9)(7,8)(7,9)\}$

$A\times C = \{(4,10)(5,10)(6,10)(7,10)\}$

34. A = {2,4,5,6,7}, B = {2,3} సంబంధం R ను A నుండి B కి R = {(a,b) : $a\in$ A, $b\in$ B మరియు a ను b భాగిస్తుంది} గా నిర్వచిస్తే

i) జాబితా రూపంలో వ్రాయండి.

జ. R = {(2,2), (4,2), (6,2), (6,3)}

ii) R యొక్క ప్రదేశం

జ. R ప్రదేశం = {2,4,6}

iii) R యొక్క వ్యాప్తిని తెల్పండి.

జ. R వ్యాప్తి {2,3}

35. μ అనునది సార్వత్రిక సమితి మరియు A, B లు దానికి ఉపసమితులు

μ = {1,2,3,4,5}, A = {1,3,5}

B = {x:x అనేది ప్రధాన సంఖ్య} అయితే $A'\times B'$ ని కనుక్కోండి.

జ. $A'\times B'$ = {(2,1) (4,1) (2,4) (4,4)}

36. A = {4,6,8,10}, B = {2,3,4,5} అవుతూ A నుండి B కి R ను ఒక సంబంధం

R = {(a,b) : $a\in$ A, $b\in$ B మరియు a అనేది b యొక్క గుణిజం} గా నిర్వచిస్తే

i) R ను రోష్టర్ రూపంలో వ్రాయండి.

జ. R = {(4,2) (4,4) (6,2) (6,3) (8,2) (8,4) (10,2) (10,5)}

ii) R యొక్క ప్రదేశం వ్రాయండి.

జ. R ప్రదేశం = {4,6,8,10}

iii) R వ్యాప్తి వ్రాయండి.

జ. R యొక్క వ్యాప్తి = {2,3,4,5}

37. R అను సంబంధాన్ని N పై

$R = \{ (x, x^2) : x$ అనేది 15 కంటే తక్కువగా గల ప్రధాన సంఖ్య$\}$ గా నిర్వచిస్తే

i) R ను రోష్టర్ రూపంలో వ్రాయండి.

జ. $R = \{(2,4), (3,9), (5,25), (7,49), (11,121), (13,169)\}$

ii) R యొక్క ప్రదేశాన్ని వ్రాయండి.

జ. R ప్రదేశం $= \{2,3,5,7,11,13\}$

iii) R యొక్క వ్యాప్తిని వ్రాయండి.

జ. R వ్యాప్తి $= \{4,9,25,49,121,169\}$

38. కింది వాటిలో ఏవి A నుండి B కి ప్రమేయాలు? ప్రమేయాలు కాకపోతే కారణం తెల్పండి.

a) $\{(1,-2), (3,7), (4,-6), (8,11)\}$

$A = \{1,3,4,8\}, B = \{-2, 7, -6, 11\}$

జ. ప్రమేయం అవుతుంది.

b) $\{(1,0), (1,-1), (2,3), (4,10)\}, \ A = \{1,2,4\}, B = \{1,0,-1,3,10\}$

జ. ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకంటే మొదటి రెండు క్రమయుగ్మాలకు ప్రథమ నిరూపకం 1 ఉంది.

c) $\{(a,2), (b,3), (c,2), (d,3)\}, \ A = \{a,b,c,d\}, B = \{2,3\}$

జ. ప్రమేయం అవుతుంది.

d) $\{(1,1), (1,2), (2,3), (-3,4)\}, \ A = \{1,2,-3\}, \ B = \{1,2,3,4\}$

జ. ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకంటే మొదటి రెండు క్రమయుగ్మాలకు ప్రథమ నిరూపకం 1 ఉంది.

e) $\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),....\left(10,\frac{1}{10}\right)\right\}, \ A = \{1,2,3,4\}, \ B = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},....\frac{1}{11}\right\}$

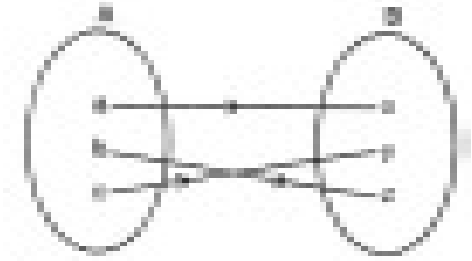
జ. ఇది ప్రమేయం కాదు. ఎందుకంటే A లోని 1 అనే మూలకానికి B లో ప్రతిబింబం లేదు.

f) $\{(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4)\}, \ A = \{0,1,-1,2,-2\}, \ B = \{1,4\}$

జ. ప్రమేయం కాదు. ఎందుకనగా A లోని 0 అనే మూకానికి B లో ప్రతిబింబం లేదు.

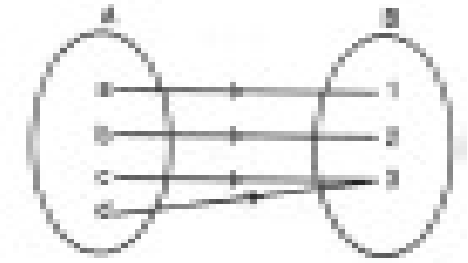
39. కిందివాటిలో వేటిని ప్రమేయాలుగా గుర్తిస్తారు.

a)



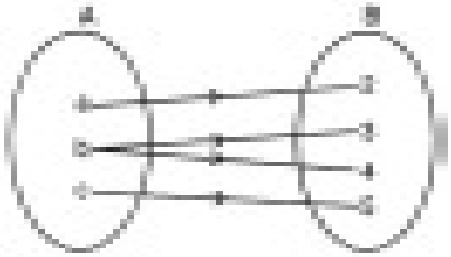
జ. ప్రమేయం

b)



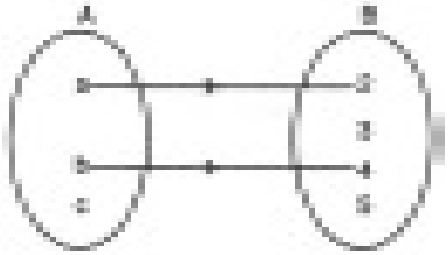
జ. ప్రమేయం

c)



జ. A లోని b అనే మూలకానికి రెండు ప్రతిబింబాలు ఉన్నాయి కావున ప్రమేయం కాదు.

d)



జ. ప్రమేయం కాదు. B లోని 3, 5 లకు A లో పూర్వబింబాలు లేవు.

40. కిందివాటిలో వేటిని $R \to R$ కు ప్రమేయాలుగా నిర్వచిస్తాం.

a) $y = 2x + 1$

x	1	2	3
y	3	5	7

జ. ప్రమేయం అవుతుంది.

x బదులు విలువలు ఇస్తే y విలువలు వచ్చును. $\{(1,3), (2,5), (3,7),.....\}$

b) $y > x + 3$

జ. ప్రమేయం కాదు.

c) $y > 3x + 1$

జ. ప్రమేయం కాదు.

d) $y = x^2 + 1$

జ. ప్రమేయం అవుతుంది.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. కింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశం, వ్యాప్తులను వ్రాయండి.

a) $\{(\sqrt{2},2)(\sqrt{5},-1)(\sqrt{3},5)\}$

జ. ప్రదేశం = $\{\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{3}\}$

వ్యాప్తి = $\{2,-1,5\}$

b) $\left\{\left(-3,\frac{1}{2}\right),\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$

జ. ప్రదేశం = $\{-3,-2,-1\}$

వ్యాప్తి = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $\{(1,1)(0,0)(2,2)(-1,-1)\}$

జ. ప్రదేశం = $\{1,0,2,-1\}$

వ్యాప్తి = $\{1, 0, 2, -1\}$

d) {(దీపక్, 16) (సందీప్, 28) (రాజన్, 24)}

జ. ప్రదేశం = {దీపక్, సందీప్, రాజన్}

వ్యాప్తి = {16, 28, 24}

2. $x \in R$ కు కింది ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

a) i) $y = 2x$

జ. $\{...(-2,-4)(-1,-2)(0,0)(1,2)(2,4)....\}$ అన్నీ వాస్తవాల సమితి

$\therefore y = 2x$ ప్రదేశం = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

ii) $y = 9x + 3$

జ. ప్రదేశం = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

iii) $y = x^2 + 5$

జ. ప్రదేశం = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

b) i) $y = \dfrac{1}{3x-1}$

జ. $\left\{\left(1, \dfrac{1}{2}\right)(2,5)(3,8)....\left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)\right\}$

$x = \dfrac{1}{3}$ కు నిర్వచింపబడదు కావున

ప్రదేశం = $R - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

ii) $y = \dfrac{1}{(4x+1)(x-5)}$

జ. ఈ ప్రదేశము $x = -\dfrac{1}{4}$ కు నిర్వచింపబడదు. (ఇక్కడ $-\dfrac{1}{4}$ తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువలను తీసుకొంటుంది)

$x = 5$ కు నిర్వచింపబడదు. (ఇక్కడ 5 తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువలను తీసుకొంటుంది)

$\therefore$ కావున ప్రదేశం = $R - \left\{-\dfrac{1}{4}, 5\right\}$

iii) $y=\dfrac{1}{(x-3)(x-5)}$

జ. ఇక్కడ $x=3$ ను తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువలను తీసుకొంటుంది.

మరియు $x=5$ ను తప్ప అన్ని వాస్తవ విలువలను తీసుకొంటుంది.

అనగా $x=3$ మరియు 5 అయినపుడు y విలువను నిర్వచించలేము.

$\therefore$ ప్రదేశం $=\mathrm{R}-\{3,5\}$

iv) $y=\dfrac{1}{(3-x)(x-5)}$

$\therefore$ ప్రదేశం $\mathrm{R}=\mathrm{R}-\{3,5\}$

c) i) $y=\sqrt{6-x}$

జ. y యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలను $6-x\geq 0$ కావాలి

i.e., $x\leq 6$

$\therefore x\leq 6$ అగునట్లు అన్ని వాస్తవ విలువలు ప్రమేయ ప్రదేశం అగును.

ప్రదేశం $=\{x\in \mathrm{R}: x\leq 6\}$

ii) $y=\sqrt{7+x}$

జ. y యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలను $7+x\geq 0$ కావాలి

i.e., $x\geq -7$

$\therefore$ ప్రదేశము $=\{x\in \mathrm{R}: x\geq -7\}$

iii) $y=\sqrt{3x+5}$

జ. y యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలను $3x+5\geq 0$ కావాలి

i.e., $x\geq -\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ ప్రదేశము $=\left\{x: x\in \mathrm{R}: x\geq -\dfrac{5}{3}\right\}$

3. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు ఇవ్వబడినవి. వ్యాప్తిని కనుక్కోండి.

a) i) $f(x)=3x+10 \quad x\in\{1,5,7,-1,-2\}$

జ. వ్యాప్తి $=\{f(1), f(5), f(7), f(-1), f(-2)\}$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{13,25,31,7,4\}$

ii) $f(x)=2x^2+1 \quad x\in\{-3,2,4,0\}$

జ. f వ్యాప్తి $=\{f(-3), f(2), f(4), f(0)\}$

వ్యాప్తి $=\{19,9,33,1\}$

iii) $f(x)=x^2-x+2 \quad x\in\{1,2,3,4,5\}$

జ. f వ్యాప్తి $=\{f(1), f(2), f(4), f(5)\}$

వ్యాప్తి $=\{2,4,8,14,22\}$

b) i) $f(x)=x-2,\ 0\le x\le 4$

$0\le x\le 4$

$0-2\le x-2\le 4-2$

$-2\le x-2\le -2$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{-2\le f(x)\le 2\}$

ii) $f(x)=3x+4,\ -1\le x\le 2$

$-3\le 3x\le 6$

$-3+4\le 3x+4\le 6+4$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{1\le f(x)\le 10\}$

c) i) $f(x)=x^2 \quad -5\le x\le 5$

$y=x^2$ అనుకొనిన $(5+y)(5-y)\ge 0$ అగును.

కాని $f(x)$ రుణేతర వాస్తవ సంఖ్యలు మాత్రమే తీసుకొంటాయి.

$\therefore f$ వ్యాప్తి $[1,25]$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{f(x):1\le f(x)\le 25\}$

ii) $f(x)=2x \quad -3\le x\le 3$

$-3\le x\le 3$

$-3\times 2\le 2x\le 3\times 2$

$-6\le 2x\le 6$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{f(x):-6\le f(x)\le 6\}$

iii) $f(x)=x^2+1,\ -2\le x\le 2$

$-4\le x^2\le 4$

$-4+1\le x^2+1\le 4+1$

$-3\le x^2+1\le 5$

కాని $f(x)$ రుణేతర వాస్తవ సంఖ్యలు మాత్రమే తీసుకొంటాయి.

కావున వ్యాప్తి $(1,5)$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{f(x):1\le f(x)\le 5\}$

iv) $f(x)=\sqrt{x},\ 0\le x\le 25$

$y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^2$ అగును. ప్రదేశం = $[0,5]$ అగును.

వ్యాప్తి $=\{f(x):0\le f(x)\le 5\}$

d) i) $f(x)=x+5,\ x\in \mathrm{R}$

జ. x అనేది వాస్తవ సంఖ్యలకు చెందినది కావున వచ్చే వ్యాప్తి వాస్తవ సంఖ్యలు అవును.

$\therefore$ వ్యాప్తి = R అవుతుంది.

ii) $f(x)=2x-3\quad x\in \mathrm{R}$

జ. x వాస్తవ సంఖ్యలకు చెందినది కావున వచ్చే సంఖ్యలు అన్నియు వాస్తవ సంఖ్యలు

కావున వ్యాప్తి = R అవుతుంది.

iii) $f(x)=x^3\quad x\in \mathrm{R}$

$\therefore$ వ్యాప్తి అన్నీ వాస్తవ సంఖ్యలే.

$\therefore$ వ్యాప్తి = R అవుతుంది.

iv) $f(x)=\dfrac{1}{x}\{x:x<0\}$

అవి రుణ సంఖ్యలు అన్నియు 0 కంటే తక్కువ.

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{f(x):f(x)<0\}$

v) $f(x)=\dfrac{1}{x-2},\{x : x \le 1\}$

$f(x)$ వ్యాప్తి -1 మరియు 0 ల మధ్య ఉంటుంది.

$x=1$ అయితే $f(x)=-1$

$x=0$ అయితే $f(x)=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\{f(x) : -1 \le f(x) \le 0\}$

$f(x)$ వ్యాప్తి $=$ $\mathrm{R}-\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

vi) $f(x)=\dfrac{1}{3x-2}\{x : x<0\}$

f వ్యాప్తి $=\{f(x) : 0.5 \le f(x) < 0\}$

x విలువ $\dfrac{1}{2}$ కంటే తక్కువ, సమానంగా ఉన్నపుడు $f(x)$ ప్రమేయం నిర్వచించవచ్చును.

vii) $f(x)=\dfrac{2}{x}\{x : x>0\}$

వ్యాప్తి $=\{f(x) : f(x)>0\}$

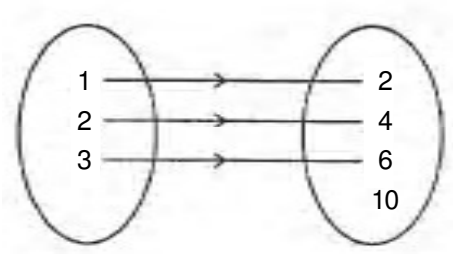
viii) $f(x)=\dfrac{x}{x+5},\ \{x : x \ne -5\}$

$x+5 \ne 0$

$x \ne -5$

$\therefore$ వ్యాప్తి $x=-5$ అయినపుడు తప్ప $f(x)$ అన్ని విలువలు తీసుకొంటుంది.

4. a)



ప్రమేయమగునా?

జ. ప్రమేయం

b) $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N} \quad f(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే ప్రమేయమగునా?

జ. అవును ప్రమేయము.

5. క్రిందివానిలో ఏవి అన్వేక ప్రమేయాలు

a) $f : \{20, 21, 22\} \to \{40, 42, 44\} \quad f(x) = 2x$ గా నిర్వచిస్తే

జ. అన్వేక ప్రమేయము (విభిన్న మూలకాలకు విభిన్న ప్రతిబింబాలు)

b) $f(x) = 10 \quad f : \{7, 8, 9\} \to \{10\}$

జ. కాదు

c) $f(x) = x^3$ గా నిర్వచిస్తే $f : 1 \to \mathrm{R}$

జ. అన్వేక ప్రమేయం

d) $f(x) = 2 + x^4$ గా నిర్వచిస్తే $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

జ. అన్వేకం కాదు

e) $f(x) = x^4 + 2x$ గా నిర్వచిస్తే $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$

జ. అన్వేక ప్రమేయం

6. క్రింది వానిలో ఏవి బహు-ఏక ప్రమేయాలు?

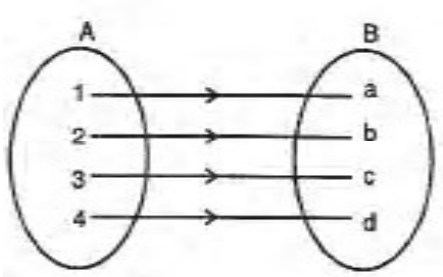
a) $f(x) = x^2 + 2$ గా $f : \{-2, -1, 1, 2\} \to (2, 5)$ నిర్వచిస్తే

జ. బహు-ఏక ప్రమేయం

b) $f(x) = 1$ నిర్వచిస్తే $f : \{0, 1, 2\} \to \{1\}$

జ. బహు-ఏక ప్రమేయం

c)



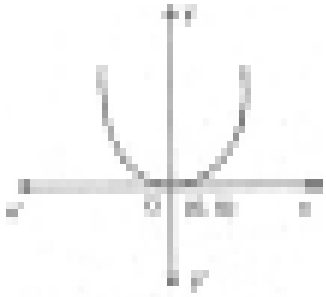
జ. కాదు

7. క్రింది ప్రమేయాలకు గ్రాఫ్ గీయండి.

a) $y = 3x^2$

జ.

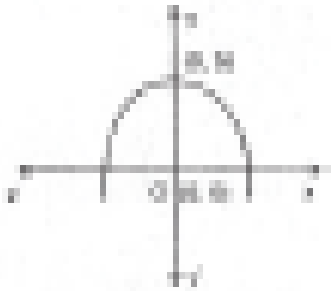
x	1	2	3	0	–1	–2	–3
y	3	12	27	0	3	12	27



b) $y = 5 - x^2$

జ.

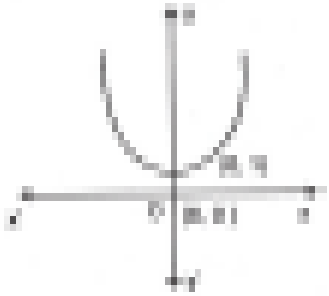
x	1	2	3	0	–1	–2	–3
y	4	1	–4	5	4	1	–4



c) $y = 2x^2 + 1$

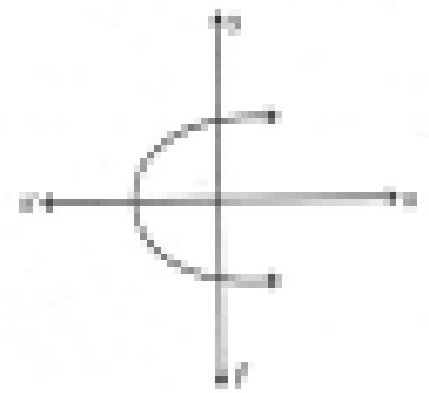
జ.

x	1	2	3	0	–1	–2	–3
y	3	9	19	1	3	9	19



8. క్రింది చిత్రాలలో ఏవి ప్రమేయాలు?

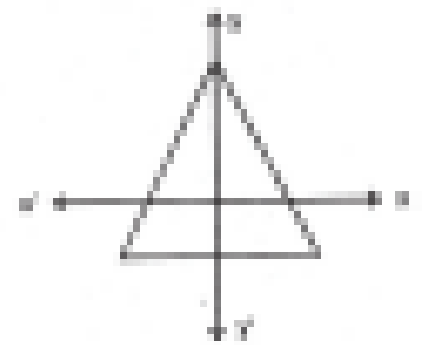
a)



జ. ప్రమేయం కాదు. ఎందుకనగా x విలువలకు అనుగుణంగా y లో విలువలు ఏకైకం కాదు.

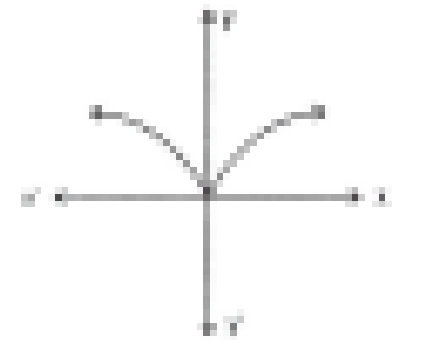
లేదా వక్రం 1 కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద y–అక్షాన్ని ఖండిస్తుంది.

b)



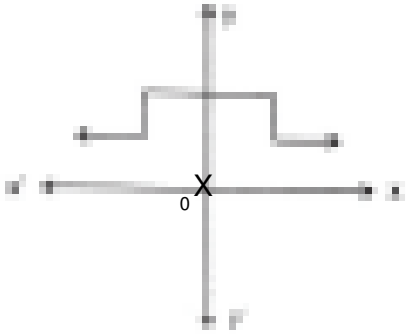
జ. ఇది ప్రమేయం కాదు. పై కారణం చెప్పవచ్చు.

c)



జ. x, y విలువలు ఏకైకం. కావున ప్రమేయం. లేదా ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. లేదా ఏకీభవిస్తుంది.

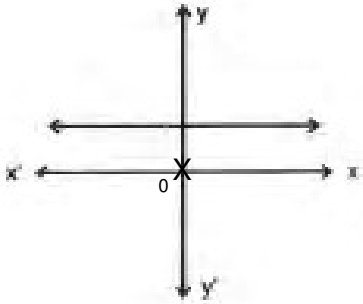
d)



జ. ప్రమేయం.

ఒకే బిందువు మధ్య ఖండిస్తుంది.

e)



జ. ఇది కూడా ప్రమేయం. ఒకే బిందువు మధ్య ఖండిస్తుంది.

9. గరిష్ఠ పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయంను నిర్వచించుము.

జ. $f(x)=[x]$ x కంటే తక్కువ లేదా సమానమైన గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య అయితే $f(x)$ ను గరిష్ఠ పూర్ణ సంఖ్య ప్రమేయం అని అందురు.

10. e^x శ్రేఢిని వ్రాయండి.

జ. $e^x = 1+\frac{x}{\angle 1}+\frac{x^2}{\angle 2}+\frac{x^3}{\angle 3}+....+\frac{x^n}{\angle n}+....$ దీనినే ఘాతశ్రేఢి అందురు.

11. $y=e^x$ కు విలోమ ప్రమేయం వ్రాయండి.

జ. $x=\log_e^y$

12. $\log_a^{mn}$ విలువ ఎంత?

జ. $\log_a^{mn}=\log_a^m+\log_a^n$

13. $\log_a^{m^n}$ విలువను వ్రాయండి.

జ. $\log_a^{m^n} = n\log_a^m$

14. $\log_b^m$ విలువ వ్రాయండి.

జ. $\log_b^m = \dfrac{\log_a^m}{\log_a^b}$

OR $\log_b^m = \log_a^m . \log_b^a$

15. క్రిందివానిలో ఏవి సరి ప్రమేయాలు? ఏవి బేసి ప్రమేయాలు?

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{5+x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $f(x) = x - x^3$

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{5+x^2}$

జ. $\therefore f(-x) = f(x)$ అయితే అటువంటి దానిని సరి ప్రమేయం అందురు.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{5+(-x)^2} = \frac{x^2}{5+x^2}$$

$\therefore$ ఇది సరి ప్రమేయం.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$

జ. $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+5} = \dfrac{1}{x^2+5}$ ఇది సరి ప్రమేయం.

c) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

జ. $f(-x) = \dfrac{2}{(-x^3)} = -\dfrac{2}{x^3}$

$\therefore f(-x) = -f(x)$ అయితే దానిని బేసి ప్రమేయం అంటారు. కావున ఇది బేసి ప్రమేయ మగును.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

జ. $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x}{x^2+1} = -f(x)$

$\therefore$ ఇది బేసి ప్రమేయం

e) $f(x) = x - x^3$

జ. $f(-x) = (-x) - (-x)^3 \quad = -x - (-x^3)$

$= -x + x^3$

$= -\left(x + x^3\right)$

$= -f(x)$

$\therefore$ ఇది బేసి ప్రమేయం

16. క్రింది ప్రమేయాలలో బహుపది, అకరణీయ, వ్యుత్క్రమ లేదా స్థిర ప్రమేయాలుగా విడదీయండి.

a) $y = 3x^8 - 5x^7 + 8x^5$

జ. ఇది బహుపది ప్రమేయం

b) $y = \dfrac{x^2+2x}{x^3-2x+3} \quad x^3 - 2x + 3 \neq 3$

జ. ఇది అకరణీయ ప్రమేయం

c) $y = \dfrac{1}{9}$

జ. ఇది స్థిర ప్రమేయం

17. $f(x) = \sqrt{x+1}$ మరియు $g(x) = x^2 + 2$ లో fog మరియు gof విలువలు ఎంత?

జ. $fog(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[x^2+2\right] = \sqrt{x^2+2+1} = \sqrt{x^2+3}$

$gof(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[\sqrt{x+1}\right] = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2 = x + 3$

$\therefore$ ఇక్కడ $fog \neq gof$ అని తెలుస్తుంది.

18. క్రింది ప్రమేయాలకు fog, gof, fof మరియు gog లను వ్రాయండి.

a) i) $f(x) = x^2 - 4,\ \ g(x) = 2x + 5$

జ. $fog = f\{g(x)\} = f[2x+5] = (2x+5)^2 - 4 = 4x^2 + 25 + 20x - 4$

$fog = 4x^2 + 20x + 21$

$gof = g[f(x)] = g\left[x^2 - 4\right] = 2\left[x^2 - 4\right] + 5 = 2x^2 - 8 + 5$

$gof = 2x^2 + 3 \quad \therefore fog \neq gof$

ii) $fof = f[f(x)] = f\left[x^2 - 4\right] = \left[x^2 - 4\right]^2 - 4 = x^4 + 16 - 8x^2 - 4$

జ. $fof = x^4 - 8x^2 + 12$

$gof = g\left[g(x)\right] = g[2x+5] = 2[2x+5] + 5 = 4x + 10 + 5$

$gog = 4x + 15 \quad \therefore fof \neq gog$.

b) i) $f(x) = x^2,\ \ g(x) = 3$ లో fog మరియు gof లను కనుగొనుము.

జ. $fog = f[g(x)] = f[3] = (3)^2 = 9$

$gof = g\left[f(x)\right] = g\left[x^2\right] = 3$. $\quad \therefore fog \neq gof$

ii) fof మరియు gog లను కనుగొనుము.

జ. $fof = f[f(x)] = f\left[x^2\right] = \left(x^2\right)^2 = x^4$

$gog = g[g(x)] = g[3] = 3$

19. $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{x}$ అయితే $fog = gof$ అని చూపుము.

జ. $fog = f\left[g(x)\right] = f\left[\sqrt{x}\right] = f\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

$gof = g\left[f(x)\right] = g\left[x^2\right] = \sqrt{x^2} = x$

$\therefore fog = gof$

20. $f(x) = |x|,\ \ g(x) = (x)^{\frac{1}{3}},\ \ h(x) = \frac{1}{x},\ \ x \neq 0$

a) fog కనుగొనుము.

$$fog = f\left[g(x)\right] = f\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = x^{\frac{1}{3}}$$

b) goh కనుగొనుము.

$$goh = g\left[h(x)\right] = g\left[\frac{1}{x}\right] = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

c) foh కనుగొనుము.

$$foh = f\left[h\right] = h\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x}$$

d) hog కనుగొనుము.

$$hog = h\left[g(x)\right] = h\left[x^{1/3}\right] = x^{\frac{1}{3}}$$

e) $fogoh$ ని కనుగొనుము.

$$fogoh = fog\left[h(x)\right] = f\left[g(hx)\right] = f\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right] = f\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)$$

$\therefore fogoh(1) = 1$

21. i) $y = 4x - 7$ ప్రమేయానికి విలోమం ఉంటుందని చూపండి.

జ. $y = 4x - 7 \Rightarrow y + 7 = 4x \Rightarrow x = \frac{y+7}{4}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$

ii) f అనేది A ప్రదేశం గాను, B కి వ్యాప్తిగాను గల ఒక ప్రమేయం అనుకొనిన f విలోమానికి ప్రదేశం వ్యాప్తి కనుగొనుము.

అయితే f^{-1} లో ప్రదేశం B మరియు వ్యాప్తి A అగును.

22. క్రింది ప్రమేయాలకు, విలోమాలు వుంటే కనుగొనుము.

a) $f(x) = x+3 \ \forall \ x \in \mathrm{R}$

జ. $y = f(x) = x+3 \Rightarrow y = x+3 \Rightarrow x = y-3$

$\therefore f^{-1}(x) = x-3$

b) $f(x) = 1-3x \ \forall \ x \in \mathrm{R}$

జ. $y = 1-3x \Rightarrow 3x+y = 1$ or

$$x = \frac{1-y}{3}$$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{3}$

c) $f(x) = x^2 \ \forall \ x \in \mathrm{R}$

జ. $y = x^2$ దీనికి విలోమం ఉండదు.

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x} \quad x \neq 0 \quad x \in \mathrm{R}$

$f(x) = \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$

$\therefore y = 1 + \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = y-1$

$f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = x-1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$

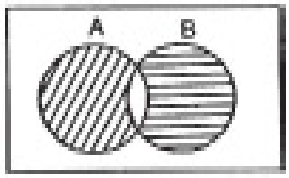
లు వియుక్త సమితులు కాకపోతే

23. కింది పటాలలోని ఛాయా చిత్రాలు గల భాగాలకు రోష్టర్ రూపంలో వ్రాయండి.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

జ. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

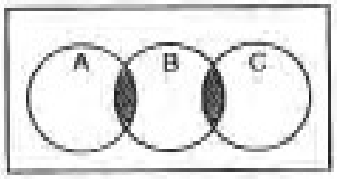


15.62

ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 6, 8, 10, 12\}$

జ. $\{8, 10, 12\}$

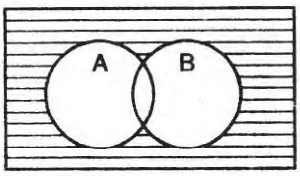


15.63

24. కింది వాటిని వెన్ చిత్రాల ద్వారా గుర్తించండి.

i) $(A \cup B)'$ ను A, B లు వియుక్త సమితులు కాకపోతే

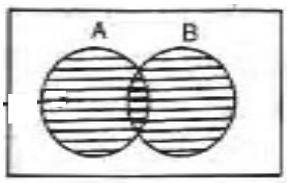
జ.



15.95

ii) $(A \cap B)'$ ను A, B లు వియుక్త సమితులైతే

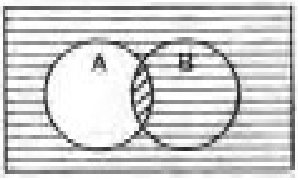
జ.



15.96

iii) $(A - B)'$ ను A, B లు వియుక్త సమితులు కాకపోతే గుర్తించండి.

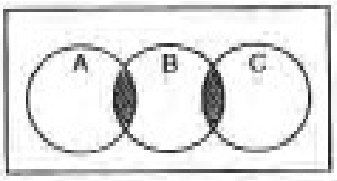
జ.



15.97

25. కింది వెన్–చిత్రాలలోని ఛాయా చిత్రాలు వేటిని తెలియజేస్తుంది.

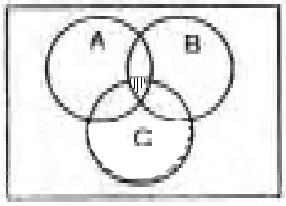
i)



15.64

జ. $(A \cap B) \cap (B \cap C)$

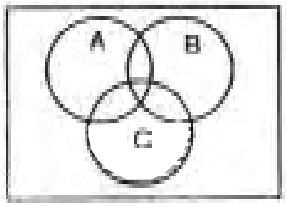
ii)



15.65

జ. $(A \cap B) \cap C$

iii)



15.66

జ. $\left[(A \cup B) \cup C\right]'$

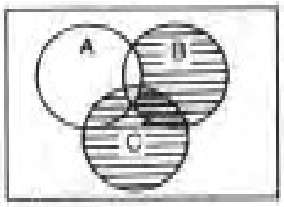
26. కింది వాటికి వెన్ చిత్రాలు గీయండి.

i) $A' \cap (B \cap C)$ ii) $A' \cap (C - B)$

ఇక్కడ A, B, C వియుక్త సమితులు మరియు సార్వత్రిక సమితికి ఉపసమితులు.

i) $A' \cap (B \cap C)$

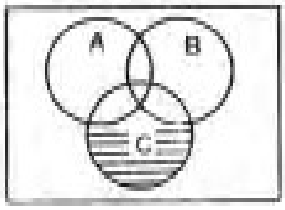
జ.



15.98

ii) $A' \cap (C - B)$

జ.



15.99

27. $A = \{7,8,9\}$, $B = \{9,10,11\}$, $C = \{11,12\}$

i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

జ. $B \cap C = \{11\}$

$A \times (B \cap C) = \{(7,11),(8,11),(9,11)\}$ ....(1)

$A \times B = \{(7,9),(7,10),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,9),(9,10),(9,11)\}$

$A \times C = \{(7,11),(7,12),(8,11),(8,12),(9,11),(9,12)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(7,11),(8,11),(9,11)\}$ ....(2)

(1), (2) ల నుండి

LHS = RHS

ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(B \cup C) = \{9,10,11,12\}$

$(A \times B) \cup C = \{(7,9),(7,10),(7,11),(7,12),$
$(8,9),(8,10),(8,11),(8,12),(9,9),(9,10),(9,11),(9,12)\}$ ...(1)

$A \times B = \{(7,9),(7,10),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,9),(9,10),(9,11)\}$

$$A\times C=\{(7,11),(7,12),(8,11),(8,12),(9,11),(9,12)\}$$

$$(A\times B)\cup(A\times C)=\{(7,9),(7,10),(7,11),(7,12),$$
$$(8,9),(8,10),(8,11),(8,12),(9,9),(9,10),(9,11),(9,12)\}\ ...(2)$$

(1), (2) ల నుండి

LHS = RHS

28. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు, వ్యాప్తిలు వ్రాయండి.

i) $f_1=\{(0,1),(2,3),(4,5),(6,7)....(100,101)\}$

జ. f_1 ప్రదేశం $=\{0,2,4,6,.....100\}$

వ్యాప్తి $=\{1,3,5,7,....,101\}$

ii) $f_2=\{(-2,4),(-4,16),(-6,36),....\}$

జ. f_2 ప్రదేశం $=\{-2,-4,-6,....\}$

వ్యాప్తి $=\{4,16,36,....\}$

29. క్రింది ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు వ్రాయండి.

a) $f(x)=x^3$

జ. పై ప్రమేయమునకు అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలే కావున

ప్రదేశము = R

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

జ. $x^2-1\neq 0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

$\therefore$ ప్రదేశము $R-\{-1,1\}$

c) $f(x)=\sqrt{3x+1}$

జ. $3x+1\geq 0 \Rightarrow 3x\geq -1$

$$x\geq -\frac{1}{3}$$

$\therefore$ ప్రదేశము $= x\geq -\frac{1}{3}\ \forall\ x\in \mathrm{R}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$

x అనేది 1 కంటే పెద్దది లేదా సమానం మరియు

x అనేది −3 కంటే చిన్నది లేదా సమానంగా ఉన్నపుడు

x విలువలు తీసుకోదు.

ప్రదేశం $= x\geq -1,\ x\leq -3$

30. క్రింది ప్రమేయాలకు వ్యాప్తి వ్రాయండి.

a) $y=3x+2 \quad x\in \mathrm{R}$

జ. పై ప్రమేయంకు వ్యాప్తి అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలే. కావున

ప్రదేశము = R

b) $y=\dfrac{1}{x-2},\ x\in \mathrm{R}-\{2\}$

జ. $x-2\neq 0$

$x\neq 2$

$\therefore$ కావున వ్యాప్తి $x=2$ తప్ప y యొక్క అన్ని విలువలకు నిర్వచింపబడుతుంది.

c) $y=\dfrac{x-1}{x+1},\ x\in\{0,2,3,5,7,9\}$

$x=0 \Rightarrow y=-1,\ x=2 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$x=3 \Rightarrow y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$x=5 \Rightarrow y=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$x=7 \Rightarrow y=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$x=9 \Rightarrow y=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ వ్యాప్తి $=\left\{-1,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right\}$

31. $f(x)=x^2+3,\ g(x)=2x^2+1$ అయితే $fog(3)$ మరియు $gof(3)$ విలువను కనుగొనుము.

$fog(x)=f\left[g(x)\right]=f\left(2x^2+1\right)=\left(2x^2+1\right)^2=4x^4+1+4x^2+3$

i) $fog(3)=f\left[g(3)\right]=4(3)^4+1+4(9)+3=364$

$gof(x)=g\left[f(x)\right]=g\left(x^2+3\right)=2\left(x^2+3\right)^2+1=2x^4+18+12x^2+1$

ii) $gof(3)=g\left[f(3)\right]=2(3)^4+18+12(3)^2+1=289$

16

త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు-I

పరిచయం :

క్రింది తరగతులలో మనం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల గురించి చదివాము. లంబకోణ త్రిభుజ భుజాల మధ్య నిష్పత్తులను ఈ విధంగా నిర్వచించామని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

$$\sin\theta = \frac{c}{b},\ \cos\theta = \frac{a}{b},\ \tan\theta = \frac{c}{a}$$

$$\text{cosec}\ \theta = \frac{b}{c},\ \sec\theta = \frac{b}{a},\ \cot\theta = \frac{a}{c}$$

ఈ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య ఈ క్రింది సంబంధాలను కూడా మనం నేర్చుకున్నాము.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,\ 1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$$

ఈ అధ్యాయంలో ప్రమేయాలను ఉపయోగించి త్రికోణమితికి చెందిన జ్ఞానాన్ని అభివృద్ధి చెప్తాము. ఒక యూనిట్ వృత్తాన్ని ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల భావనను పెంపొందిస్తాం. అంతేకాక కోణానికి రేడియన్ మానాన్ని చర్చిస్తూ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలైన $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \text{cosec}\ x$, $y = a \sin x$, $y = b \cos x$ మొదలైన వాటిని నిర్వచిస్తాం. ఇక్కడ x, y లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, మరియు $y = \text{cosec}\ x$, $y = a \sin x$, $y = b \cos x$ ల గ్రాఫ్‌లను గీస్తాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ అధ్యాయం చదివిన తర్వాత నీవు

- ధన మరియు ఋణ కోణాలను నిర్వచించగలవు.
- కోణానికి డిగ్రీ మరియు రేడియన్‌మానాలను నిర్వచించగలవు.
- కోణాలను డిగ్రీ నుండి రేడియన్ మానానికి, రేడియన్ మానం నుండి డిగ్రీలకు మార్చడం చేయగలవు.
- $l = r\,\theta$ సూత్రాన్ని నిర్వచించగలవు.
- $l = r\,\theta$ సంబంధాన్ని ఉపయోగించి సమస్యల సాధన.
- వాస్తవ సంఖ్యలపై త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల నిర్వచనం.
- త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల గ్రాఫ్‌లను గీయడం, వివరించడం.
- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆవర్తనీయతను తెలుసుకోవడం.

ముఖ్యాంశాలు :

1. ఒక కిరణం సవ్యదిశ లేదా అపసవ్య దిశలో భ్రమణం చేసే దానిని బట్టి కోణం ధనాత్మకం లేదా ఋణాత్మకం అని తెలుస్తుంది.
2. కోణాన్ని రేడియన్‌లలో కొలుస్తాం. $360^0 = 2\pi$ రేడియన్‌లు.
3. 'r' వ్యాసార్థంగా గల వృత్త కేంద్రం వద్ద 'θ' కోణం చేసే చాపం పొడవు l అయితే $l = r\,\theta$.
4. ఒక ప్రమాణ (యూనిట్) వృత్తంపై ఏదేని బిందువు P కి రూపాలు (x, y) అయితే వరుసగా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను $\sin\theta = \frac{y}{1}, \cos\theta = \frac{x}{1}, \tan\theta = \frac{y}{x}, \cot\theta = \frac{x}{y}, \sec\theta = \frac{1}{x}$ మరియు $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y}$ గా నిర్వచిస్తాం. $P(x, y)$ ని $P(\cos\theta, \sin\theta)$ గా కూడా రాయవచ్చు.
5. $\sin\theta, \cos\theta$ రెండింటి యొక్క గరిష్ఠ విలువ $+1$ అని, కనిష్ఠ విలువ -1. ఈ రెండింటి ప్రమేయాల ఆవర్తనం 2π.
6. $\operatorname{Tan}\theta, \operatorname{Cot}\theta$ ల ఏ విలువైనా $-\infty$ మరియు ∞ ల మధ్య ఉంటుంది. $\operatorname{Tan}\theta$ ప్రమేయం $\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{3\pi}{2}$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం $(0, 2\pi)$ లలో దీని ఆవర్తన π.

7. Cot θ ఆవర్తనం π ఇది $0, \pi, 2\pi$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం.

8. Sec θ ఆవర్తనం 2π ఇది $\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{3\pi}{2}$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం.

9. Cosec θ ఆవర్తనం 2π ఇది $0, \pi, 2\pi$ ల వద్ద విచ్ఛిన్నం.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

కింది కోణాలను డిగ్రీల నుండి రేడియన్లకు మార్చండి.

1. 60^0

సాధన : $360^0 = 2\pi$ రేడియన్‌లు

$$1^0 = \frac{2\pi}{360^0} = \frac{\pi^c}{180}$$

$\therefore 60^0 = \frac{2\pi}{360} \times 60$ రేడియన్లు = $\frac{\pi}{3}$ రేడియన్‌లు

2. 75^0

సాధన : $75^0 = \frac{2\pi}{360} \times 75 = \frac{5}{12}$

$75^0 = \frac{5}{12}$ రేడియన్‌లు

3. 270^0

సాధన : $270^0 = \frac{2\pi}{360} \times 270 = \frac{3\pi}{2}$

$270^0 = \frac{3\pi}{2}$ రేడియన్‌లు

క్రింది రేడియన్‌ల నుండి డిగ్రీలకు మార్చండి.

4. $\frac{\pi}{4}$ విలువ ఎంత?

సాధన : 2π రేడియన్‌లు = 360^0

1^c రేడియన్ = $\frac{360^0}{2\pi}$

$\therefore \frac{\pi}{4}$ రేడియన్‌లు $= \frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45^0$

$\frac{\pi^c}{4} = 45^0$

5. $\frac{\pi^c}{60}$ విలువ ఎంత?

సాధన : $\frac{\pi^c}{60} = \frac{360}{2\pi} = \frac{\pi}{60} = 3^0$

$\frac{\pi^c}{60} = 3^0$

6. $\frac{2\pi^c}{3}$ విలువ ఎంత?

సాధన : $\frac{2\pi^c}{3} = \frac{360}{2\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120^0$

$\frac{2\pi^c}{3} = 120^0$

క్రింది వాటి గుర్తులను మార్చండి.

7. $\cos^2 \frac{\pi}{3}$

సాధన : $\frac{\pi}{3}$ అనగా $\frac{180^0}{3} = 60^0$ అనేది మొదటి పాదంలోని కోణం

కావున $\cos^2 \frac{\pi}{3}$ అనేది ధనాత్మకం.

8. $\sec\frac{2\pi}{3}$

సాధన : $\frac{2\pi}{3}=\frac{2\times180}{3}=120^0$ రెండో పాదంలోని కోణం

$\therefore$ $\sec\frac{2\pi}{3}$ గుర్తు ఋణాత్మకం.

9. $\sec\frac{35\pi}{18}$

సాధన : $\frac{35\times\pi}{18}=\frac{35\times180}{18}=350^0$ నాలుగో పాదంలోని కోణం.

$\therefore$ $\sec\frac{35\pi}{18}$ గుర్తు ధనాత్మకం.

10. $\cot\frac{3\pi}{4}$

సాధన : $\frac{3\pi}{4}$ రెండో పాదంలోని కోణం

$\therefore$ $\cot\frac{3\pi}{4}$ ఋణాత్మకం

క్రిందివాటి విలువలు కనుక్కోండి.

11. $\tan\frac{3\pi}{4}$

సాధన : $\tan\frac{3\pi}{4}=\tan125^0=\tan\left(90+45^0\right)=-\cot45^0=-1$

12. $\tan\frac{\pi}{2}$

సాధన : నిర్వచింపలేము.

13. $\cos2\pi$

సాధన : $\cos2\pi=\cos360^0=\cos\left(270^0+90^0\right)=\sin90^0=1$

14. $\tan\theta$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ ఎంత?

సాధన : అనంతము.

15. $\cot\theta$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ ఎంత?

సాధన : అనంతము.

16. గ్రాఫ్ నుండి $\cot\theta = -1$ అయితే θ విలువ ఎంత?

సాధన : $\cot\theta = -1$ అయితే $\theta = \frac{3\pi}{4}$

17. $y = 2\sin 3x$ ఆవర్తనం కనుక్కోండి.

సాధన : $\sin x$ ఆవర్తనం 2π

$\sin 3x$ ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{3}$

18. $y = 3\cos 2x$ ఆవర్తనం కనుక్కోండి.

సాధన : $\cos x$ ఆవర్తనం 2π

$\cos 2x$ ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{2} = \pi$

19. $y = \tan 3x$ ఆవర్తనం కనుక్కోండి.

సాధన : $\tan x$ ఆవర్తనం π

$\tan 3x$ ఆవర్తనం $\frac{\pi}{3}$

20. $y = \sin^2 2x$ ఆవర్తనం ఎంత?

సాధన : $\frac{\pi}{2}$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. ఒక త్రిభుజ కోణాలు 45^0, 65^0 మరియు 70^0 అయితే వీటిని రేడియన్లలో తెల్పండి.

సాధన : $45^0 = \frac{2\pi}{360} \times 45^0 = \frac{\pi^c}{4}$

$65^0 = \frac{2\pi}{360} \times 65^0 = \frac{13\pi}{36}$

$70^0 = \frac{2\pi}{360} \times 70^0 = \frac{7\pi}{18}$

$\therefore$ రేడియన్లు = $\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{36}, \frac{7\pi}{18}$

2. ఒక చతుర్భుజంలోని మూడు కోణాలు $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ అయితే నాలుగో కోణాన్ని రేడియన్లలో తెల్పండి.

సాధన : నాలుగో కోణం x అనుకొనుము.

చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం = 2π

$$x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{1} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi - 1\pi - 2\pi - 4\pi}{6}$$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6}$$

3. 15 సెం.మీ.ల వ్యాసార్థం గల వృత్త కేంద్రం వద్ద 2.5 సెం.మీ. పొడవుగల చాపం చేసే కోణాన్ని రేడియన్ మరియు డిగ్రీలలో తెల్పండి.

సాధన : వ్యాసార్థం r = 15 సెం.మీ.

చాపం పొడవు l = 2.5 సెం.మీ.

$l = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{l}{r} = \frac{2.5}{15} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$ రేడియన్లు

$\frac{1}{6}$ రేడియన్లు $= \frac{360}{2\pi} \times \frac{1}{6}$

$$= \frac{360}{2 \times \frac{22}{7}} \times \frac{1}{6} = \frac{360 \times 7}{44 \times 6} = \frac{210}{22} = 9.55^0$$

$\frac{1}{6}$ రేడియన్లు $= 9.55^0$

4. ఒక రైలు వృత్తాకార మార్గంలో గంటకు 20 కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. ఆ వృత్తం వ్యాసార్థం $\frac{1}{12}$ కి.మీ. అయితే ఆ రైలు 3 సెకండ్లలో చేసే కోణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : రైలు వేగం గంటకు 20 కి.మీ. కావున

15 సెకన్లలో అది పోయే దూరం = $\frac{20 \times 3}{60 \times 60}$ కి.మీ. $= \frac{1}{60}$ కి.మీ.

$\therefore l = \frac{1}{60}$ కి.మీ. మరియు $r = \frac{1}{12}$ కి.మీ.

కావున $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{12}} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ రేడియన్‌లు

$\frac{1}{5}$ రేడియన్లు $= \frac{360}{2\pi} \times \frac{1}{5} = \frac{360}{2 \times \frac{22}{7}} \times \frac{1}{5} = \frac{360 \times 7}{220}$

$$= \frac{126}{11} = 11.45^0$$

$\frac{1}{5}$ రేడియన్లు $= 11.45^0$

5. $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\text{LHS} = \sin^4\theta - \cos^4\theta = \left(\sin^2\theta\right)^2 - \left(\cos^2\theta\right)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ కావున

$$\left(\sin^2\theta\right)^2 - \left(\cos^2\theta\right)^2 = \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$= 1\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$\therefore \sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

6. $\sin^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6} + \sec^2\frac{\pi}{4} - \cos^2\frac{\pi}{3}$ విలువ ఎంత?

సాధన : $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = 2;\ \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{1} + \frac{2}{1} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3+16+8-1}{4}$$

$$= \frac{26}{4} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$

7. $\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

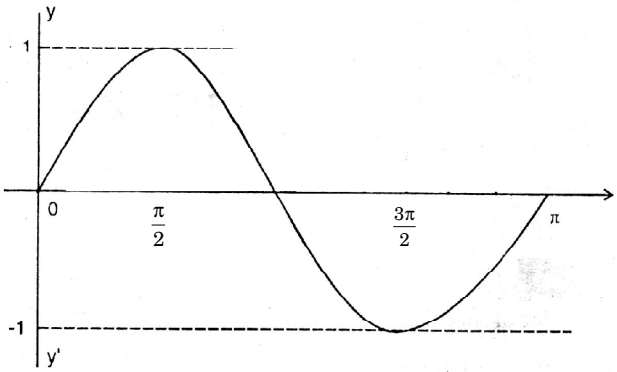
$$= \frac{1-2+1}{4}$$

$$= 0$$

8. $[0, 2\pi]$ అంతరంలో $\sin\theta$ యొక్క గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు ఏవి?

సాధన : $y = \sin\theta$

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	1	0	–1	0



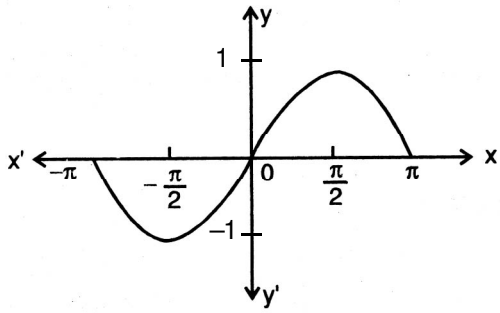
$\therefore \sin\theta$ గరిష్ఠ విలువ = 1

కనిష్ఠ విలువ = –1

9. $[-\pi, \pi]$ అంతరంలో $y = \sin x$ గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన :

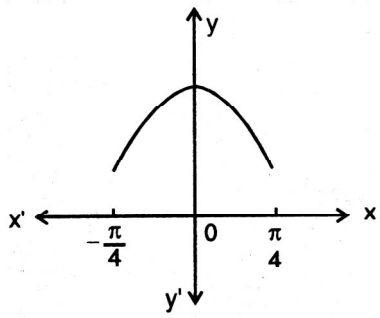
x	0	$\pi/2$	π	$-\pi/2$	$-\pi$
$\sin x$	0	1	0	–1	0



10. $-\frac{\pi}{4}$ నుండి $\frac{\pi}{4}$ లో $y = \cos\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన :

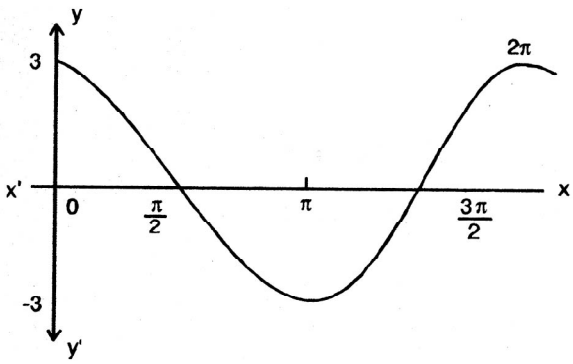
θ	0	$\pi/4$	$-\pi/4$
$\cos\theta$	1	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$



11. 0 నుండి 2π విచరణలో $y = \cos 3\theta$ గ్రాఫ్ గీయండి.

సాధన :

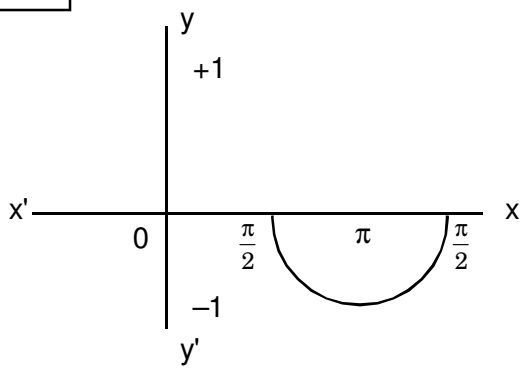
θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos\theta$	3	–1	0	–3	0	1



12. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ అంతరంలో $y = \cos\theta$ గ్రాఫ్ X –అక్షానికి పైన ఉంటుందా? X –అక్షానికి క్రిందివైపు ఉంటుందా?

సాధన :

θ	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos\theta$	0	–1	0



X –అక్షానికి క్రిందవైపు గ్రాఫ్ ఉంటుంది.

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$ అని చూపండి.

సాధన : LHS తీసుకోండి.

$$\text{LHS} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)} \times \frac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \because \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$$

$$= \text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

2. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$ అని చూపండి.

సాధన : LHS తీసుకోండి.

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = \left(\sin^2\theta\right)^3 + \left(\cos^2\theta\right)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$\left(\sin^2\theta\right)^3 + \left(\cos^2\theta\right)^3 = \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$= 1^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta\ (1)$$

$$\therefore \sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

3. $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}=\cos\theta+\sin\theta$ అని చూపండి.

సాధన : LHS తీసుకోండి.

$$\frac{\cos\theta}{\frac{1}{1}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\sin\theta}{\frac{1}{1}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$\therefore \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}=\cos\theta+\sin\theta$$

$$\therefore \text{LHS}=\text{RHS}$$

4. $\dfrac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\theta+\text{cosec}\,\theta\,\sec\theta$ అని చూపండి.

సాధన : LHS తీసుకోండి.

$$\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta-\sin\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta} \qquad \because \tan\theta\cos\theta=\sin\theta$$

$$= \frac{\tan\theta + \sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta\sec\theta + \cot\theta$$

$$\therefore \frac{\tan\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta + \sec\theta$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

5. $A = \frac{\pi}{3},\ B = \frac{\pi}{6}$ గా తీసుకొని

i) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\ \tan B}$ ని సరిచూడండి.

సాధన : LHS తీసుకోండి.

$$= \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{2\pi + \pi}{6}\right)$$

$$= \tan\frac{3\pi}{6}$$

$$= \tan\frac{\pi}{2}$$

= నిర్వచింపబడదు.

RHS తీసుకోండి.

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\ \tan B} = \frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{1}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}.0} = \frac{4}{0}$$

$= \infty$ నిర్వచించబడదు.

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$

6. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ లను సరిచూడండి.

సాధన : $A = \frac{\pi}{3},\ B = \frac{\pi}{6}$

LHS తీసుకోండి.

$$\cos(A+B) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi+\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 \quad \ldots (1)$$

RHS తీసుకోండి.

$$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0 \quad \ldots (2)$$

$\therefore$ (1), (2) ల నుండి $\text{LHS} = \text{RHS}$

7. $\theta = \frac{\pi}{4}$ అయితే

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ లను సరిచూడండి.

సాధన : $\cos 2\theta = \cos 2.\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 0$$

$$2\cos^2\theta - 1 = 2.\cos^2\frac{\pi}{4} - 1$$

$$= 2.\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 1 - 2.\frac{1}{2}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

8. 2500 మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తాకార బాట వెంబడి ఒక రైలు గంటకు 75 కి.మీ. వేగంతో కదులుతుంది. అయితే ఒక నిమిషం కాలంలో అది ఎన్ని రేడియన్‌ల కోణం చేస్తుంది.

సాధన : వ్యాసార్థం r = 2500 మీ.

చాపం పొడవు l = 75 కి.మీ.

రైలు వేగం గంటకు 75 కి.మీ. కావున 60 సెకన్‌లలో అది పోయే దూరం = $\frac{75\times60}{60\times60} = \frac{5}{4}$ కి.మీ.

$\therefore l = \frac{5}{4}$ కి.మీ. మరియు r = 2.5 కి.మీ.

కావున $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\frac{5}{4}}{2.5} = \frac{5}{4\times 2.5} = \frac{50}{4\times 25} = \frac{1}{2}$

కావున $\theta = \frac{1}{2}$ రేడియన్‌లు

9. $\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} + \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ అని నిరూపించండి.

సాధన : LHS తీసుకోండి. $\therefore 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta,\ 1+\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

$$= \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta} + \frac{\cot\theta}{\text{cosec}^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta.\sec^2\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta.\text{cosec}^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sec^2\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta.\text{cosec}^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sec\theta} + \frac{\cos\theta}{\text{cosec}\,\theta}$$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta = \text{RHS}$$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$ అని నిరూపించండి.

సాధన : Take LHS

$$=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$=\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)=1-\sin^2\theta$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ రూపంలో కలదు

కావున $\frac{1+\sin^2\theta+2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\sec^2\theta+\tan^2\theta+2\tan\theta\sec\theta$$

$$=(\tan\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS}=\text{RHS}$$

2. $\sin^8\theta-\cos^8\theta=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$ అని నిరూపించండి.

సాధన : Take LHS

$$\sin^8\theta-\cos^8\theta=(\sin^4\theta)^2-(\cos^4\theta)^2$$

$$=\left[(\sin^2\theta)+(\cos^2\theta)^2\right]\left[(\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2\right]$$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ కావున

$$=\left[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\right]\left[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\right]$$

$$= \left[1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\right]\left[\sin^2\theta - \cos^2\theta\right]$$

$$= \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\left(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)$$

$$= \text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

3. $\theta = \frac{\pi}{4}$ అయితే $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ సరిచూడండి.

సాధన : Take LHS

$$\sin 3\theta = 3\sin 3.\frac{\pi}{4}$$

$$= \sin 135^0$$

$$= \sin\left(90 + 45^0\right)$$

$$= \cos 45^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ....(1)$$

Take RHS

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3\sin\frac{\pi}{4} - 4\sin^3\frac{\pi}{4}$$

$$= 3.\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} - 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3-2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ...(2)$$

(1), (2) ల నుండి LHS = RHS Hence proved.

17

త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు-II

క్రింది అధ్యాయంలో మనము వాస్తవ సంఖ్యలపై త్రికోణమితి ప్రమేయాల గురించి మరియు త్రికోణమితి ప్రమేయాల రేఖా చిత్రాలు గీయడం, ఇంకా వాటిని వివరణాత్మకంగా నేర్చుకున్నాము. ఈ అధ్యాయంలో $\cos(A \pm B)$, $\sin(A \pm B)$ మరియు $\tan(A \pm B)$ ల సంకలనం మరియు వ్యవకలన సూత్రాలను రాబట్టుతాము. అంతేకాక గుణిజ, ఉపగుణిజ కోణాలను నిర్వచిస్తూ వాటికి సోదాహరణలు ఇస్తాము. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల సాధనలను కూడా ఈ అధ్యాయములో చర్చిస్తాం.

లక్ష్యాలు :

1. $-x, \frac{x}{2}, x \pm y, \frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x$ (ఇక్కడ x, y లు వాస్తవ సంఖ్యలు)లకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు వ్రాయడం.

2. $cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

   $\sin(A \pm B) = \sin A \sin B \pm \cos A \cos B$ మరియు

   $\tan(A \pm B) = \frac{TanA + TanB}{1 \mp TanATanB}$ ల సంకలన, వ్యవకలను సూత్రాలను నిర్మించడం.

3. $\cos 2A, \sin 2A, \tan 2A, \cos 3A, \sin 3A, \tan 3A, \sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}$ మరియు $Tan\frac{A}{2}$ వంటి గుణిజ, ఉపగుణిజ కోణాల సూత్రాలు నిర్వచించడం మరియు

   $\sin x = 0, \cos x = 0$ రకాల త్రికోణమితీయ సమీకరణాలను సాధించడం.

   $\sin x = \sin\alpha, \cos x = \cos\alpha, Tanx = Tan\alpha$

ముఖ్యాంశాలు :

1. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

   $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

   $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

2. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

3. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

4. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2TanA}{1+Tan^2A}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-Tan^2A}{1+Tan^2A}$

$Tan2A = \frac{2TanA}{1-Tan^2A}$

5. $\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}, \cos^2 A = \frac{1+\cos^2 A}{2}, Tan^2A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

6. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$Tan3A = \frac{3TanA - Tan^3A}{1-3Tan^2A}$

7. $\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin A}{4}, \cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$

8. $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}, \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

$$Tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

9. $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

10. $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in I$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$

$Tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$

11. $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \alpha, n \in I$

$\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi + \alpha, n \in I$

$Tan\theta = Tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$

$\sin^2\theta = \sin^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$

$\cos^2\theta = \cos^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$

$\tan^2\theta = \tan^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $\sin\frac{\pi}{10}$ విలువ ఎంత?

సాధన: $\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

నోట్: $\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

2. $\cos\frac{\pi}{4}$ విలువ ఎంత?

సాధన: $\cos\frac{\pi}{10} = \cos 18^0 = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$

నోట్ : $\cos 18^0 = \sin 72^0 = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$

3. $\cos\frac{\pi}{5}$ విలువ ఎంత?

సాధన: $\cos\frac{\pi}{5} = \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

నోట్ 1: $\cos\left(90^0 - 54\right) = \sin 54^0$

నోట్ 2: $\cos 36^0 = \sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

4. $\sin\frac{\pi}{5}$ విలువ ఎంత?

సాధన: $\sin\frac{\pi}{5} = \sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

నోట్ : $\sin 36^0 = \sin\left(90^0 - 54^0\right) = \cos 54^0$

$\therefore \sin 36^0 = \cos 54^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

5. θను తృప్తిపరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}\ n \in I$

2) $\cos ec\theta = \sqrt{2} = \cos ec\left(\frac{\pi}{4}\right)$

θ ప్రధానము $= n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\ n \in I$

3) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = +\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

θ ప్రధానము $= n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3} \quad n \in I$

4) $\sec\theta = -\sqrt{2} = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4} \qquad n \in I$

5) $Tan\theta = -1 = Tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

θ ప్రధానము $= n\pi + \frac{3\pi}{4} n \in I$

6) $Tan\theta = -1 = T\,an\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4} n \in I$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $\sin\frac{5\pi}{12}$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

ఇక్కడ $\sin(A+B)$ రూపంలో కలదు కావున

$\sin(A+B) = \sin A \cos A + \cos A \sin B$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$$\frac{\sin\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

2. $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

సాధన: $=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

3. $\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$ విలువ ఎంత?

సాధన: ఇది $\sin A\cos B+\cos A\sin B$ రూపంలో కలదు.

$$=\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right)=\frac{1}{2}\left(\cos A+\sqrt{3}\sin A\right)$$

$LHS=$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos A+\cos\frac{\pi}{6}\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos A+\sqrt{3}\sin A\right)$$

5. $\cos\frac{5\pi}{12}$ – విలువను కనుక్కోండి.

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$= \cos(A+B)$ రూపంలో కలదు.

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$ విలువ ఎంత?

$\sin(A+B)\sin(A-B)$ రూపంలో ఉంది. దీని విలువ $\sin^2 A - \sin^2 B$

సాధన: $\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{4}\cos A + \cos\frac{\pi}{4}\sin A\right]\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos A - \cos\frac{\pi}{4}\sin A\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A + \sin A)\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos^2 A - \sin^2 A\right]$$

7. $Tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)Tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 1$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $= \left[\dfrac{Tan\frac{\pi}{4}+Tan\theta}{1-Tan\frac{\pi}{4}Tan\theta}\right]\left[\dfrac{Tan\frac{\pi}{4}-Tan\theta}{1+Tan\frac{\pi}{4}Tan\theta}\right]$

$$=\left[\frac{1+Tan\theta}{1-Tan\theta}\right]\left[\frac{1-Tan\theta}{1+Tan\theta}\right]$$

$$=1$$

8. $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

సాధన: $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$

లవ హారాలను sinA sinB లచే భాగించగా

$$=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

9. $Tan\dfrac{\pi}{12}+Tan\dfrac{\pi}{6}+Tan\dfrac{\pi}{12}.Tan\dfrac{\pi}{6}=1$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $Tan15^0+Tan30^0+Tan15^0Tan30^0=1$

$LHS=$

$Tan45^0=Tan\left(30^0+15^0\right)$

$\therefore Tan45^0=1$

$$1=\frac{Tan30^0+Tan15^0}{1-Tan30^0Tan15^0}$$

$1-Tan30^0Tan15^0=Tan30^0Tan15^0$

$\therefore Tan15^0Tan30^0+Tan15^0Tan30^0=1$

లేదా $Tan\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{Tan\dfrac{\pi}{12}+Tan\dfrac{\pi}{6}}{1-Tan\dfrac{\pi}{12}Tan\dfrac{\pi}{6}}$

$$Tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{Tan\frac{\pi}{12}+Tan\frac{\pi}{6}}{1-Tan\frac{\pi}{12}Tan\frac{\pi}{6}}$$

$$1=Tan\frac{\pi}{12}+Tan\frac{\pi}{6}+Tan\frac{\pi}{12}.Tan\frac{\pi}{6}$$

10. $2\sin 4\theta \sin\theta$ లబ్ధాన్ని మొత్తంగా లేదా బేధంగా వ్రాయండి.

సాధన: $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

$$2\sin 4\theta\sin\theta=\cos(4\theta-\theta)-\cos(4\theta+\theta)$$

$$=\cos 3\theta-\cos 5\theta$$

11. $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$ లబ్ధాన్ని మొత్తంగా, లేదా బేధంగా వ్రాయండి.

సాధన: $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{3\pi+\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{12}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}$$

12. $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$ లబ్ధాన్ని మొత్తంగా లేదా భేదంగా వ్రాయండి.

సాధన: $2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sin\left(\frac{3\pi+2\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{3\pi-\pi}{12}\right)$$

$$=\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}$$

13. $\sin 6\theta+\sin 4\theta$ ను లబ్ధంగా వ్రాయుము

సాధన: $\sin C + \sin D$ రూపంలో ఉంది.

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\therefore \sin 6\theta + \sin 4\theta = 2\sin\frac{6\theta+4\theta}{2}\cos\frac{6\theta-4\theta}{2} = 2\sin 5\theta \sin\theta$$

14. $\cos 2\theta - \cos 4\theta$ ను లబ్ధంగా వ్రాయండి.

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \text{ లేదా } 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

$$\cos 2\theta - \cos 4\theta = 2\sin\frac{2\theta+4\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2}$$

$$= 2\sin 3\theta \sin\theta$$

15. $\cos 7\theta + \cos 5\theta$ ను లబ్ధంగా వ్రాయండి.

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos 7\theta + \cos 5\theta = 2\cos\frac{7\theta+5\theta}{2}\cos\frac{7\theta-5\theta}{2}$$

$$= 2\cos 6\theta \cos\theta$$

16. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$ విలువ ఎంత?

$A = \frac{\pi}{3}$ అయిన

$$\cos 2A = \cos 2\frac{\pi}{3} = \cos 120^0 = \cos\left(90^0 + 30^0\right) = -\sin 30^0 = \frac{-1}{2}$$

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$2\cos^2 A - 1 = 2.\cos^2 - 1 = 2.\frac{1}{4} - \frac{1}{1} = \frac{2-4}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$1-2\sin^2 A = 1-2\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}-2.\frac{3}{4} = \frac{4-6}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1-2\sin^2 A$$

17. $\cot A - TanA = 2\cot 2A$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\cot A - TanA = \dfrac{1}{TanA} - \dfrac{TanA}{1}$

$$= \frac{1-Tan^2 A}{TanA}$$

$$= \frac{2\left(1-Tan^2 A\right)}{2TanA} = \frac{2}{\dfrac{2TanA}{1-Tan^2 A}}$$

$$= \frac{2}{2TanA} = 2\cot 2A$$

18. $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \dfrac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= 1$$

19. క్రింది సందర్భాలలో $\sin 2A$ విలువను కనుక్కోండి.

$a)$ $\cos A = \dfrac{3}{5}$ అయితే

సాధన: $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$\sin 2A = \frac{24}{25}$$

$b)$ $\sin A = \frac{12}{13}$ అయితే

$$\sin 2A = \frac{120}{169}$$

$c)$ $TanA = \frac{16}{63}$ అయితే

$$\sin 2A = \frac{2TanA}{1 + \tan^2 A}$$

$$= \frac{2 \times \frac{16}{63}}{\frac{1}{1} + \frac{(16)^2}{(63)^2}} = \frac{\frac{32}{63}}{\frac{1}{1} + \frac{256}{3963}} = \frac{\frac{32}{63}}{\frac{3969 + 256}{7969}}$$

$$= \frac{\frac{32}{63}}{\frac{4225}{3969}} = \frac{32}{63} \times \frac{3969}{4225} = \frac{2016}{4225}$$

20. ఈ క్రింది వానిలో $\cos 2A$ విలువను కనుక్కోండి.

$TanA = \frac{5}{12}$ అయితే

సాధన: $\cos 2A = \frac{1 - Tan^2 A}{1 + Tan^2 A} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{25}{144}}{\frac{1}{1} + \frac{25}{144}} = \frac{\frac{144 - 25}{144}}{\frac{144 + 25}{144}}$

$$= \frac{119}{169}$$

21. క్రింది సందర్భాలలో $Tan2A$ విలువను కనుక్కోండి.

$a)$ $TanA = \frac{3}{4}$ అయితే

సాధన: $Tan2A = \frac{2TanA}{1 - Tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{1} - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{16}{70} = \frac{24}{7}$

$b)$ $TanA = \frac{a}{b}$ అయితే

సాధన: $TanA = \frac{\frac{2a}{b}}{\frac{1}{1} - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{2a}{b}}{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}$

$TanA = \frac{2ab}{b^2 - a^2}$

22. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $= \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

23. క్రింది సందర్భాలలో $\sin 3A$ విలువను కనుక్కోండి.

$a)$ $\sin A = \frac{2}{3}$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$$= 3.\frac{2}{3} - 4.\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{2}{1} - \frac{32}{27} = \frac{54-32}{27} = \frac{22}{27}$$

b) $\sin A = \frac{P}{Q}$

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$= 3.\frac{P}{Q} - 4.\left(\frac{P}{Q}\right)^3$$

$$= \frac{3P}{Q} - \frac{4P^3}{Q^3} = \frac{3PQ^2 - 4P^3}{Q^3} = \frac{3pq^2 - 4p^3}{q^3}$$

24. $A = \frac{\pi}{3}$ క్రింది వాటిని పరిశీలించండి.

a) $sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

సాధన: $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

b) $Tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

సాధన: $= Tan\frac{A}{2}$

$$= Tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

25. $\sin\frac{\pi}{12}$ మరియు $\sin\frac{\pi}{24}$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

1) $$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{\frac{1}{1}-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{1}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} \qquad 4-2\sqrt{3}=1+3-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

26. క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము.

$a)$ $\sin\frac{\pi}{8}$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

27. θను తృప్తిపరిచే ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

1) $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$\sin 2\theta = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$2\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ θప్రధానము $= \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

28. $Tan3\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$Tan3\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = Tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$3\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}$

θప్రధానము $= \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18} n \in I$

29. $\sin^2 2\theta = \frac{1}{4}$

$\sin^2 2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$2\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$

θప్రధానము $= \frac{n\pi}{6} \pm (-1)^n \frac{\pi}{12} n \in I$

30. $\cos^2 2\theta = \frac{3}{4}$

$\cos^2 2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 2\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$2\theta = \frac{\pi}{6} = \theta = \frac{\pi}{12}$$

θ ప్రధానము $= \frac{2n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$

$$= n\pi \pm \frac{\pi}{2} \; n \in I$$

31. $Tan(A+B)Tan(A-B) = \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B - \sin^2 A}$ అని నిరూపించండి.

$LHS =$

$$= Tan(A+B)Tan(A-B)$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos B^2 - \sin^2 A} = RHS$$

32. θ ను తృప్తిపరిచే ప్రధాన విలువను కనుక్కోండి.

$a)$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

θ ప్రధాన విలువ $= n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{3} \quad n \in I$

$b)$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\theta = n\pi \pm (-1)^n \frac{\pi}{4} \quad n \in I$$

c) $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\frac{\pi}{3}$$

θ ప్రధాన విలువ $= 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad n \in I$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: Take LHS

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} + \sin\theta\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

2. $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: Take $LHS =$

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{2}{2}\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$\therefore \sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B)$ రూపంలో కలదు.

$$= 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

3. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\cos(A+B)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)$$

ఇది $\cos A\cos B + \sin A\sin B$ రూపంలో కలదు కావున $\cos(A-B)$ రూపంలో వ్రాయగా

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}+A-\left(\frac{\pi}{4}-B\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}+A-\frac{\pi}{4}+B\right)$$

$$= \cos(A+B)$$

$= RHS$

$\therefore LHS = RHS$

4. $Tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)Tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right)=-1$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$=\left[\frac{Tan\frac{\pi}{4}+TanA}{1-Tan\frac{\pi}{4}TanA}\right]\left[\frac{Tan\frac{3\pi}{A}+TanA}{1-Tan\frac{3\pi}{4}TanA}\right]$$

$$=\left[\frac{1+TanA}{1-TanA}\right]\left[\frac{-1+TanA}{1+TanA}\right]$$

$$=-\left[\frac{1+TanA}{1-TanA}\times\frac{1-TanA}{1+TanA}\right]$$

$$=-1$$

5. $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=Tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

సాధన: $=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

లవహారాలను $\cos\theta$ చే భాగించగా

$$=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{1+Tan\theta}{1-Tan\theta}$$

$$=\frac{Tan\frac{\pi}{4}+Tan\theta}{1-Tan\frac{\pi}{4}Tan\theta}$$

$$= Tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

$$= RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

6. క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

$$\sin\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$$

సాధన: $\sin\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{4\pi}{9}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{18}\right)+\cos\frac{4\pi}{9}$

$$=\cos\frac{4\pi}{18}+\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$=2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{6\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{-2\pi}{18}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$=2.\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$$

$$=\cos\frac{\pi}{9}$$

7. $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}=0$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{18}+\frac{7\pi}{18}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{18}-\frac{7\pi}{18}}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{18}$$

$$= 2\cos\left(\frac{12\pi}{36}\right)\sin\left(\frac{-2\pi}{36}\right) + \sin\frac{\pi}{18}$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sin\frac{\pi}{18}$$

$$= -2.\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{18}$$

$$= -\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{18}$$

$$= 0$$

$$= RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

8. $\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi + \pi}{12}\right)\cos\left(\frac{3\pi - \pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} = RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

9. $\frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A} = Tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$Tan^2\left(\frac{\pi}{4}+A\right) = \left[\frac{Tan\frac{\pi}{4}+TanA}{1-Tan\frac{\pi}{4}TanA}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1+TanA}{1-TanA}\right]^2 = \left[\frac{\frac{1}{1}+\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{1}{1}-\frac{\sin A}{\cos A}}\right]^2 = \left[\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}\right]^2$$

$$= \frac{\cos^2 A+\sin^2 A+2\sin A\cos A}{\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin A\cos A}$$

$$= \frac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A} \qquad = RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

10. $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\cos 2A = 1-2\sin^2 A$; $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$2\sin^2 A = 1-\cos 2A$$

$$LHS = \frac{2\sin A\cos A}{2\sin^2 A}$$

$$= \cot A$$

$$\therefore LHS = RHS$$

11. $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} = Tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $RHS =$

$$Tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right) = \frac{Tan\frac{\pi}{4} - Tan\frac{A}{2}}{1+Tan\frac{\pi}{4}Tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1-Tan\frac{A}{2}}{1+Tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}$$

లవ హారాలను $\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)$ చే గుణించగా

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos A}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos A}{1+\sin A} = LHS$$

$\therefore LHS = RHS$

12. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ అయితే $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}\left(a^3+\dfrac{1}{a^3}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{4}{8}\left(a^3 + 3a^2\frac{1}{a} + 3a\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) - \frac{3a}{2} - \frac{3}{2a}$$

$$= \frac{a^3}{2} + \frac{1}{2a^3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

13. $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{4}$ అని నిరూపించండి.

$$\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{2}\sin\alpha\left(\cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\alpha - \left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2.\frac{1}{2}\sin\alpha\left(\sin^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\alpha\right)$$

$$= \sin\alpha\left(\frac{3}{4} - \sin^2\alpha\right) = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

14. $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

సాధన: *LHS*

$$= \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

$$= \cos\alpha\left(\cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\alpha\right)$$

$$= \cos\alpha\left(\frac{1}{4} - \sin^2\alpha\right)$$

$$= \cos\alpha\left(\frac{1-4+4\cos^2\alpha}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

15. $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$ ను తృప్తిపరిచే ప్రధాన విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $2\left(1-\cos^2\theta\right) + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

$$2 - 2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$$

$$-2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 3 = 0$$

$$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$

$$2\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$

$$2\cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$

$$2\cos\theta\left(\cos\theta - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\left(\cos\theta - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left(\cos\theta - \sqrt{3}\right)\left(2\cos\theta + \sqrt{3}\right) = 0$$

1) $\therefore \cos\theta = \sqrt{3}$; $2\cos\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta$ ప్రధాన విలువ ఉండదు.

2) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ కావున $\therefore \theta$ ప్రధాన విలువ $2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

16. $4\cos^2\theta - 4\sin\theta = 1$ ను తృప్తిపరిచే ప్రధాన విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $4\left(1-\sin^2\theta\right) - 4\sin\theta = 1$

$$4 - 4\sin^2\theta - 4\sin\theta = 1$$

$$-4\sin^2\theta - 4\sin\theta = -3$$

$$4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3 = 0$$

$$4\sin^2\theta + 6\sin\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$$

$$2\sin\theta(2\sin\theta + 3) - 1(2\sin\theta + 3) = 0$$

$$(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$$

$$2\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

θ ప్రధాన విలువ = $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

17. $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$= \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right]$$

$$= 2\left[\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= RHS$$

18. $A+B=\frac{\pi}{4}$ అయితే $(1+TanA)(1+TanB)=2$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $A+B=\frac{\pi}{4}$

$$Tan(A+B)=Tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{TanA+TanB}{1-TanATanB}=1$$

$$TanA+TanB=1-TanATanB$$

$$TanA+TanBTanA+TanB=1$$

$$1+TanA+TanB+TanA+TanB=1+1$$

$$1+TanA+TanB(TanA+1)=2$$

$$(1+TanA)(1+TanB)=2$$

19. $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$ అని నిరూపించండి.

$LHS=$

సాధన: $=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin C\cos A-\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$

$$=\frac{\sin A\cos B\cos C-\cos A\sin B\cos C+\cos A\sin B\cos C-\cos A\cos B\sin C+\sin C\cos A\cos B-\cos B\cos C\sin A}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{0}{\cos A\cos B\cos C} \qquad =RHS$$

$\therefore LHS=RHS$

20. $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=Tan2\theta+\sec 2\theta$

$$LHS=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\times\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1 + \sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos 2\theta} + \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= \sec 2\theta + Tan 2\theta \qquad = RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

21. $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = \frac{-1}{8}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $C = \cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)$

$$C = -\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$S = \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}$$

$$C.S = -\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\left(\frac{2}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(\frac{2}{2}\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\sin\frac{2\pi}{9}\right]\frac{1}{2}\left[\sin\frac{4\pi}{9}\right]\frac{1}{2}\left[\sin\frac{8\pi}{9}\right]$$

$$C.S = \frac{-1}{8}\left[\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\right]$$

$$C.S = \frac{-1}{8}.S$$

$$C = \frac{-1}{8}$$

$$\therefore \cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = \frac{-1}{8}$$

22. $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{Tan8A}{Tan2A}$ అని నిరూపించండి.

సాధన $LHS =$

$$= \frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos 8A} - \dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{\cos 4A} - \dfrac{1}{1}} = \frac{\dfrac{1-\cos 8A}{\cos 8A}}{\dfrac{1-\cos 4A}{\cos 4A}}$$

$$= \frac{1-\cos 8A}{\cos 8A} \times \frac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$$

$$= \frac{2\sin^2 4A \cos 4A}{\cos 8A.2\sin^2 2A}$$

$$= \frac{2\sin 4A \cos 4A \sin 4A}{\cos 8A.2\sin 2A.\sin 2A}$$

$$= \frac{\sin 8A}{\cos 8A} \times \frac{2\sin 2A \cos 2A}{2\sin 2A \sin 2A}$$

$$= \tan 8A \times \cot 2A$$

$$= \frac{Tan8A}{Tan2A} = RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

23. $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$ సాధించండి.

సాధన $(\sin 3\theta + \sin\theta) + (\sin 4\theta + \sin 2\theta) = 0$

$2\sin 2\theta\cos\theta + 2\sin 3\theta\cos\theta = 0$

$2\cos\theta(\sin 2\theta + \sin 3\theta) = 0$

$2\cos\theta = 0$ లేదా $\sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$

$\cos\theta = 0$ లేదా $2\sin\frac{2\theta+3\theta}{2}\cos\frac{2\theta-3\theta}{2} = 0$

$\cos\theta = 0$ లేదా $2\sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$

$\cos\theta = 0$ లేదా $\sin\frac{5\theta}{2} = 0$ లేదా $\cos\frac{\theta}{2} = 0$

$\theta = \frac{2n\pi}{5}$ లేదా $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ $n \in I$ లేదా $\theta = (2n-1)\pi,\ n \in I$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

$a)$ $\frac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta} = Tan 4\theta$

$LHS =$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\theta+7\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-7\theta}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{3\theta+5\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta-5\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta+7\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta-7\theta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{3\theta+5\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{3\theta-5\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin 4\theta\cos 3\theta + 2\sin 4\theta\cos\theta}{2\cos 4\theta\cos 3\theta + 2\cos 4\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 4\theta\cos 3\theta + \sin 4\theta\cos\theta}{\cos 4\theta\cos 3\theta + \cos 4\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 4\theta(\cos 3\theta + \cos\theta)}{\cos 4\theta(\cos 3\theta + \cos\theta)}$$

$$= Tan4\theta \quad = RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

2. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $LHS =$

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$= 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \qquad = \begin{pmatrix} \therefore \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \therefore \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 + 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$= 2(1 + \cos(\alpha - \beta))$$

$$= 2.2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

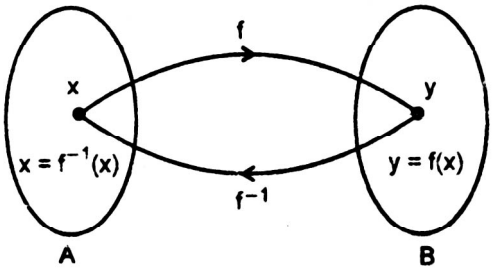
$$= RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

18

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

క్రింది అధ్యాయంలో నీవు ప్రమేయ నిర్వచనం, వివిధ రకాల ప్రమేయాలు గురించి చదివావు. విలోమ ప్రమేయం గురించి కూడా మనం తెలుసుకున్నాము. వాటిని సంక్షిప్తంగా గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం !!



'f' అనేది A నుండి B కి ఒక ద్విగుణ ప్రమేయం అనుకొని, 'y' అనేది B లో ఒక మూలకం అయినపుడు $f(x) = y$ సంగ్రస్తం అగునట్లు $x \in$ A ఉండును. 'f' అనేది అన్వేకం కూడా కావున 'x' అనేది ఏకైకం.

ఈ విధంగా $f(x) = y$ అగునట్లు ప్రతి $y \in$ B కి A లో x అనే ఏకైక మూలకం $x \in$ A వుండును.

కావున f^{-1} అనే ప్రమేయాన్ని $f^{-1} : \text{B} \to \text{A}$ గా నిర్వచించవచ్చు.

$\therefore\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

పైన పేర్కొన్న f^{-1} ను f కు "విలోమ ప్రమేయం" అంటారు. ఏదైన ఒక ప్రమేయం విలోమం కావాలంటే అది ద్విగుణం అయితేనే సాధ్యమగును.

ఈ సందర్భంలో f^{-1} యొక్క ప్రదేశం f కు వ్యాప్తి మరియు f^{-1} వ్యాప్తి, f కు ప్రదేశం అగును.

f^{-1} వ్యాప్తి = f ప్రదేశం; f^{-1} ప్రదేశం = f వ్యాప్తి.

మరొక ఉదాహరణ తీసుకుంటే :

ఒక ప్రమేయం f : car $\to$ రిజిస్ట్రేషన్ నెం.

g : రిజిస్ట్రేషన్ నెం. $\to$ car గా వ్రాస్తే

'f' ప్రదేశం, 'g' వ్యాప్తి మరియు 'f' వ్యాప్తి, 'g' కి ప్రదేశం అగును. కావున 'g' ని 'f' కు విలోమ ప్రమేయం అందురు.

i.e., $g = f^{-1}$

ఈ అధ్యాయంలో విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల గురించి, వాటి ప్రదేశాలు, వ్యాప్తి మరియు వాటిలోని సమస్యలను సూక్ష్మీకరించడం నేర్చుకుంటాము.

లక్ష్యాలు:

- విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాన్ని నిర్వచించడం.
- ఏఏ సందర్భాలలో విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయం వ్యవస్థితమవుతుందో చెప్పగలగడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల ప్రదేశం, వ్యాప్తిని నిర్వచించడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాల ధర్మాలను చెప్పగలగడం.
- విలోమ త్రికోణ మితీయ ప్రమేయాలతో కూడిన సమాసాలను సూక్ష్మీకరించడం.

ముఖ్యాంశాలు

ఈ ప్రమేయాలు క్రింది ప్రదేశాలను నిర్వచితమవుతాయి.

1. $\sin^{-1} x = y$ అయిన $\sin y = x;\ -1 \le x \le 1\ \ -\frac{\pi}{2} \le y \in \frac{\pi}{2}$

2. $\cos^{-1} x = y$ అయిన $\cos y = x;\ -1 \le x \le 1\ \ 0 \le y \le \pi$

3. $\tan^{-1} x = y$ అయిన $\tan y = x;\ x \in \mathrm{R}\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

4. $\cot^{-1} x = y$ అయిన $\cot y = x;\ x \in \mathrm{R}[0 < y < \pi]$

5. $\sec^{-1} x = y$ అయిన $\sec y = x;\ x \ge 1;\ 0 \le \mathrm{y} \le \frac{\pi}{2}$ లేదా $x \le -1, \frac{\pi}{2} < y \le \pi$

6. $\mathrm{cosec}^{-1} x = y$ అయిన $\mathrm{cosec}\ y = x;\ x \ge 1\ \ 0 < y \le \frac{\pi}{2}$ లేదా $x \ge -1, \frac{-\pi}{2} \le y < 0$

7. $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta,\ \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta,\ \tan\left(\tan^{-1}\theta\right) = \theta$ మరియు $\sin\left(\sin^{-1}\theta\right) = \theta$.

8. $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ \sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

9. $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x, \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x, \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

10. $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2};\ \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

11. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right);\ \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left[\frac{x-y}{1+xy}\right]$

12. $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

13. $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$

14. $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy \mp x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

I. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

క్రింది వాటి ప్రధాన విలువలు కనుక్కోండి.

1. $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

సాధన : $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$ అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

2. $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

సాధన : $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\theta$ అనుకొనిన

$$\tan\theta=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{-\pi}{6}$$

3. $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$

సాధన : $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\theta$ అనుకొనిన

$$\tan\theta=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

4. $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$

సాధన : $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ $\therefore \cos^{-1}\frac{1}{3}=\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{3}$

5. $\cos\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

సాధన : $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}=\theta$ అనుకొనిన

$$\operatorname{cosec}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{1}{\sin\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{1}-\frac{3}{4}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

6. $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$

సాధన : $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$

$\sec^{-1}\sqrt{2} = \theta$ అనుకొనిన

$$\sec\theta = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$$

$$\tan\theta = \sqrt{2-1} = 1$$

క్రింది సమాసాలను సూక్ష్మీకరించండి.

7. $\sec\left(\tan^{-1}x\right)$

సాధన : $\tan^{-1}x = \theta$ అనుకొనిన $\tan\theta = x$

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+x^2}$$

8. $\tan\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$

సాధన : $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \theta$ అనుకొనిన

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

II. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ అని చూపుము.

సాధన : Take LHS

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)=A \Rightarrow \tan A=\frac{1}{7}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right)=B \Rightarrow \tan B=\frac{1}{13}$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A-\tan B}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{7}.\frac{1}{13}}$$

$$=\frac{\frac{13+7}{13.7}}{\frac{91-1}{13.7}}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$$

$$\tan(A+B)=\frac{2}{9}$$

$$A+B=\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$\therefore \tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}=\tan^{-1}\frac{2}{9}$$

2. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$ నిరూపించండి.

సాధన : $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\cos^{-1}\left[\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\sqrt{1-\frac{16}{25}}\sqrt{1-\frac{144}{169}}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{48}{65} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{48}{65} - \frac{3}{13}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{48-15}{65}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{33}{65}\right]$$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x \quad x > 0$ సాధించండి.

సాధన : $x = \tan\theta$ అనుకొనిన

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)$$

$$\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right] = \frac{1}{2}\theta$$

$$\frac{\pi}{4} - \theta = \frac{1}{2}\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$ గణించండి.

సాధన : $x = \tan A$ అనుకొనుము. $y = \tan B$ అనుకొనుము.

$$= \tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B}\right)\right]$$

$$= \tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(\sin 2A) + \cos^{-1}(\cos 2B)\right]$$

$$= \tan\frac{1}{2}[2A + 2B]$$

$$= \tan[A + B]$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

5. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = A \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5} \quad \therefore \cos A = \frac{4}{5}$

$$\sin^{-1}\frac{8}{17} = B \Rightarrow \sin B = \frac{8}{17}$$

$$\cos B = \frac{15}{17}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{4}{5} \times \frac{8}{17}$$

$$= \frac{45}{85} + \frac{32}{85}$$

$$\sin(A+B) = \frac{77}{85}$$

$$A + B = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$$

6. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = \tan^{-1}\frac{23}{11}$

సాధన : Take LHS $\qquad \therefore 2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left[\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right]+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{4}{3}.\frac{1}{5}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{20+3}{15}}{\frac{15-4}{15}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{23}{11}\right)$$

$$= \text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

7. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}(2)$

సాధన : $\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left[\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}.\frac{3}{4}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{2+3}{4}}{\frac{5}{8}}\right] = \tan^{-1}(2)$$

$$= \text{RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

III. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. ఒకవేళ $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y + \cos^{-1} z = \pi$ అయితే

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\cos^{-1} x = \text{A} \Rightarrow \cos \text{A} = x$

$\cos^{-1} y = \text{B} \Rightarrow \cos \text{B} = y$

$\cos^{-1} z = \text{C} \Rightarrow \cos \text{C} = z$

$\therefore \text{A} + \text{B} + \text{C} = \pi$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 \text{A} + \cos^2 \text{B} + \cos^2 \text{C}$$

$$= \cos^2 \text{A} + 1 - \sin^2 \text{B} + \cos^2 \text{C}$$

$$= 1 + \left(\cos^2 \text{A} - \sin^2 \text{B}\right) + \cos^2 \text{C}$$

$$= 1 + \cos(\text{A+B})\cos(\text{A} - \text{B}) + \cos^2 \text{C}$$

$$= 1 - \cos(\pi - \text{C})\cos(\text{A} + \text{B}) + \cos^2 \text{C}$$

$$= 1 - \cos \text{C}\left[\cos(\text{A} - \text{B}) + \cos(\text{A} + \text{B})\right]$$

$$= 1 - \cos C\left[2\cos A\cos B\right]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2xyz$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

2. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{2}$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \alpha; \quad \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \beta$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{4}{5}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{5-1}{5}} \qquad \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \left(\frac{5}{5}\right)$$

$$(\alpha+\beta) = \sin^{-1}(1) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

3. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$ అని నిరూపించండి.

సాధన : $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{4}{5};\quad \cos\alpha=\frac{3}{5}$

$$\sin^{-1}\frac{5}{13}=\beta \Rightarrow \sin\beta=\frac{5}{13};\quad \cos\beta=\frac{12}{13}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}.\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{16}{65}$$

$$\therefore \alpha+\beta=\cos^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}=\cos^{-1}\frac{16}{65}$$

$\therefore$ LHS

$$=\left[\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]+\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$$

$$=\cos^{-1}\frac{16}{65}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$$

$$=\frac{\pi}{2} \qquad (\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2})$$

$\therefore$ LHS = RHS

19

త్రిభుజము యొక్క భుజాలకు మరియు కోణాలకు గల సంబంధం

క్రితం అధ్యాయంలో మనం వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు, వాటి మధ్య సంబంధం త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల రేఖాచిత్రాలు గీయడం, ఈ రేఖాచిత్రాల నుండి వాటి లక్షణాలను చదివాము మరియు వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మొత్తము మరియు బేధము గురించి గుణిజ, గుణిజ కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు చదివాము. మరియు విలోమ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు, వాటి ధర్మాలు మరియు వాటిపై ఆధారపడిన భావనలకు సంబంధించిన సాధన సమస్యలూ చదివాము.

ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజం యొక్క భుజాలు మరియు కోణాలమధ్య సంబంధానికి సంబంధించిన ఫలితాల గురించి తెలుసుకొనుటకు ప్రయత్నిద్దాం.

లక్ష్యాలు :

1. సైన్ సూత్రాలు, కొసైన్ సూత్రాలు మరియు విక్షేప సూత్రాలను నిర్వచించగలము.
2. సమస్యల సాధనలో వీటిని అనువర్తించడం.

ముఖ్యాంశాలు :

1. సైన్ సూత్రం : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

2. కొసైన్ సూత్రాలు: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3. విక్షేప సూత్రాలు : $a = b\cos c + c\cos B$

$b = c\cos A + a\cos C$

$c = a\cos B + b\cos A$

I. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

sin సూత్రాన్ని ఉపయోగించి క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

1. $$\frac{Tan\frac{A-B}{2}}{Tan\frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

సాధన: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = K$ అనుకొనుము

$$\frac{a}{\sin A} = K \Rightarrow a = K\sin A$$

$$\frac{b}{\sin B} = K \Rightarrow b = K\sin B$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{K\sin A - K\sin B}{K\sin A + K\sin B}$$

$$= \frac{K(\sin A - \sin B)}{K(\sin A + \sin B)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$= \cot\left(\frac{A+B}{2}\right).Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= \frac{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

2. $a\sin\frac{B-C}{2} = (b-c)\cos\frac{A}{2}$

సాధన: $RHS =$

$$(b-c)\cos\frac{A}{2} = (K\sin B - K\sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$= K(\sin B - \sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$= K2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$$

$$cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

$$RHS = 2K\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= K\sin A.\sin\frac{B-C}{2}$$

$$= a\sin\frac{B-C}{2}$$

$$= LHS$$

3. $\frac{b+c}{b-c} = Tan\frac{B+C}{2}, \cot\frac{B-C}{2}$

సాధన: $\text{LHS}: \frac{b+c}{b-c} = \frac{K\sin B + K\sin C}{K\sin B - K\sin C} = \frac{K(\sin B + \sin C)}{K(\sin B - \sin C)}$

$$= \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$= Tan\frac{B+C}{2}\cot\frac{B-C}{2}$$

$$= RHS$$

4. ఏదైన త్రిభుజములో $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ అయితే అది సమద్విబాహు త్రిభుజము అనిచూపండి.

సాధన: $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$

$a\cos B = b\cos A$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ అనుకుంటే

$\therefore a = k\sin A;\ \ b = k\sin B$

$a\cos B - b\cos A = 0$

$K\sin A\cos B - K\sin B\cos A = 0$

$K(\sin A\cos B - \cos A\sin B) = 0$

$K\sin(A-B) = 0$

$\Rightarrow \sin(A-B) = 0$

$\Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$

$\therefore \Delta ABC$ సమద్విబాహూ త్రిభుజం.

5. $\sin$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

సాధన: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K$ అనుకొనుము.

$a=K\sin A; b=K\sin B; c=K\sin C$

$RHS=$

$=2K\left(\sin B-\sin C\right)\cos^2\frac{A}{2}$

$=2K\left\{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}\right\}\cos^2\frac{A}{2}$

$=4K\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{A}{2}$

$=2K\sin A\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}$

$=2a\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

$=a\left[\cos C-\cos B\right]$

$=RHS$

6. ఏదైనా త్రిభుజంలో $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

సాధన: $LHS==\frac{a^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

$=RHS$

7. ΔABC లో $\angle A=60^0$ లో $\frac{b}{c+a}+\frac{c}{c+b}=1$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\angle A=60^0\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$b^2 + c^2 - a^2 = bc$ లేదా $b^2 + c^2 = a^2 + bc$ ... (1)

$$RHS = \frac{b}{c+a} + \frac{c}{c+b} = \frac{ab + b^2 + c^2 + ac}{(c+a)(a+b)}$$

$$= \frac{ab + ac + a^2 + bc}{(c+a)(a+b)}$$ .. (1) నుండి.

$$= \frac{a(a+b) + c(a+b)}{(c+a)(a+b)}$$

$$= \frac{(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)} = 1$$

8. $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + C\sin(A-B) = 0$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$ అనుకొనుము

$$= K\sin A\sin(B-C) + K\sin B\sin(C-A) + K\sin C\sin(A-B)$$

$$= K[\sin A(\sin B\cos C - \cos B\sin C) + \sin B(\sin C\cos A - \cos C\sin A)$$

$$+ \sin C(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$$

$$= K[\sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C + \sin B\sin C\cos A$$

$$-\sin A\sin B\cos C + \sin A\sin C\cos B - \sin B\sin C\cos A]$$

$$= K(0)$$

$$= 0$$

$$= RHS$$

9. $\frac{a - b\cos C}{c - b\cos A} = \frac{\sin C}{\sin A}$

సాధన: $LHS =$

$$= \frac{a - b\cos C}{c - b\cos A}$$

$$= \frac{b\cos C + c\cos B - b\cos C}{a\cos B + b\cos A - b\cos A}$$

$$= \frac{c\cos B}{a\cos B}$$

$$= \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$= RHS$$

10. ΔABC లో $(a+b+c)\left[Tan\frac{A}{2} + Tan\frac{B}{2}\right] = 2c\cot\frac{C}{2}$ అనిచూపుము.

సాధన: $LHS = (a+b+c)\left[Tan\frac{A}{2} + Tan\frac{B}{2}\right]$

$$= 2s\left(\frac{\Delta}{s(s-a)} + \frac{\Delta}{s(s-b)}\right)$$

$$= 2\Delta\left(\frac{1}{(s-a)} + \frac{1}{(s-b)}\right)$$

$$= 2\Delta\left[\frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)}\right]$$

$$= 2C\left[\frac{\Delta}{(s-a)(s-b)}\right]$$

$$= 2C\cot\frac{C}{2}$$

$$LHS = RHS$$

11. $\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$ అనిచూపండి.

సాధన: $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \frac{a-b}{c}\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{(A-B)}{2}$$

12. $(c-a)^2\cos^2\frac{B}{2}+(c+a)^2\sin^2\frac{B}{2}=b^2$ అనిచూపండి.

సాధన: $LHS=$

$$=\left(c^2+a^2-2ca\right)\cos^2\frac{B}{2}+\left(c^2+a^2+2ca\right)\sin^2\frac{B}{2}$$

$$=\left(c^2+a^2\right)\left[\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\right]-2ca\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

$$=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$=b^2$$

$$=RHS\cdot$$

II. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

ఏదైనా త్రిభుజంలో కింద వాటిని నిరూపించండి.

1. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

సాధన: $\frac{K^2\sin^2 B-K^2\sin C}{K^2\sin^2 A}\sin 2A+\frac{K^2\sin^2 C-K^2\sin^2 A}{K^2\sin^2 B}\sin 2B$

$$+\frac{K^2\sin^2 A-K^2\sin^2 B}{K^2\sin^2 C}\sin 2C$$

$$=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}\sin 2A+\frac{\sin^2 C-\sin^2 A}{\sin^2 B}\sin 2B+\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}\sin 2C$$

$$=\frac{\sin(A+B)\sin(B-C)}{\sin^2 A}2\sin A\cos A+\frac{\sin(C+A)\sin(C-A)}{\sin^2 B}2\sin B\cos B$$

$$+\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 C}2\sin C\cos C$$

$$=2\cos A\sin(B-C)+2\cos B\sin(C-A)+2\cos C\sin(A-B)$$

$$=2\cos A(\sin B\cos C-\cos B\sin C)+2\cos B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$$

$$+2\cos C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$=0=RHS$$

$$\therefore LHS=RHS$$

2. $\left(b^2-c^2\right)\cot A+\left(c^2-a^2\right)\cot B+\left(a^2-b^2\right)\cot C=0$

సాధన: $LHS=$

$$\left[\sin^2 B-\sin^2 C\right]\cot A+\left(\sin^2 C-\sin^2 A\right)\cot B+\left(\sin^2 A-\sin^2 B\right)\cot C$$

$$=\sin(B+C)\sin(B-C)\cot A+\sin(C+A)\sin(C-A)\cot B+\sin(A+B)\sin(A-B)\cot C$$

$$=\sin(B-C)\sin A.\frac{\cos A}{\sin A}+\sin(C-A)\sin B\frac{\cos B}{\sin B}+\sin(A-B)\sin C\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$=\cos A[\sin B\cos C-\cos B\sin C]+\sin B[\sin C\cos A-\cos C\sin A]$$

$$+\cos C[\sin A\cos B-\cos A\sin B]$$

$= 0 = RHS$

3. త్రిభుజం ABC లో $a = 9cm, b = 8cm, c = 4cm$ అయితే $6\cos C = 4 + 3\cos B$ అనిచూపండి.

సాధన: $LHS =$

$$6\cos C = 6\left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right]$$

$$= 6\left[\frac{81 + 64 - 16}{2 \times 9 \times 8}\right]$$

$$= 6\left[\frac{129}{144}\right]$$

$$= \frac{387}{72} \quad .. \ (1)$$

$$RHS : 4 + 3\cos B = 4 + 3\left[\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right]$$

$$= 4 + 3\left[\frac{81 + 16 - 64}{2 \times 9 \times 4}\right]$$

$$= 4 + 3\left[\frac{33}{72}\right]$$

$$= \frac{288 + 99}{72}$$

$$= \frac{387}{72} = RHS$$

$$\therefore LHS = RHS$$

4. $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$ అనిచూపండి.

సాధన: LHS $= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$= b\cos A + a\cos B + b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C$

$= c + a + b$

$= a + b + c$

$= RHS$

5. ΔABC లో $a\cos A = b\cos B, a \neq b$ అయితే ABC లంబకోణ త్రిభుజం అనిచూపండి.

సాధన: $a\cos A = b\cos B$

$$\Rightarrow a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=b\left[\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right]$$

$$a^2\left[b^2+c^2-a^2\right]=b^2\left[a^2+c^2-b^2\right]$$

$$a^2b^2+a^2c^2-a^4=a^2b^2+b^2c^2-b^4$$

$$c^2\left(a^2-b^2\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

$\therefore \Delta ABC$ లంబకోణ త్రిభుజం.

6. $a:b:c=7:8:9$ $\cos A:\cos B:\cos C=14:11:16$ అనిచూపండి.

సాధన: $\frac{a}{7}=\frac{b}{8}=\frac{c}{9}=K$ అనుకొనుము.

$$a=7K; b=8K; c=9K$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{64K^2+81K^2-49K^2}{2(8K)(9K)}$$

$$=\frac{96K^2}{144K^2}=\frac{2}{3}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{81K^2+49K^2-64K^2}{2(9K)(7K)}$$

$$=\frac{66K^2}{126K^2}=\frac{11}{21}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49K^2+64K^2-81K^2}{2(7K)(8K)}$$

$$=\frac{32K^2}{112K^2}=\frac{2}{7}$$

$$\cos A:\cos B:\cos C=\frac{2}{3}:\frac{11}{21}:\frac{2}{7}$$

$$\cos A:\cos B:\cos C=14:11:6$$

మాడ్యూల్ - V

20

అవధి మరియు అవిచ్ఛిన్నత

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ప్రమేయాన్ని పరిగణించండి. $(x-1)$ హారంలో ఉన్నది కావున $x = 1$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయము నిర్వచింపబడదని గమనించవచ్చు. 1కి సమానం కాకుండా, 1కి అత్యంత సమీపంలో ఉండేట్లు x విలువలను తీసుకోవడాన్ని కింది పట్టికల రూపంలో చూడవచ్చు. ఈ సందర్భంలో $x \neq 1$ కాబట్టి $(x - 1) \neq 0$ అవుతుంది.

$(x - 1) \neq 0$ కాబట్టి $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$ గా వ్రాయవచ్చును కావున $(x-1)$ చే భాగహారము సాధ్యమే.

పట్టిక - 1

x	$f(x)$
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
0.91	1.91
:	:
:	:
0.99	1.99
:	:
:	:
0.9999	1.9999

పట్టిక - 2

x	$f(x)$
1.9	2.9
1.8	2.8
1.7	2.7
1.6	2.6
1.5	2.5
:	:
:	:
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
:	:
:	:
1.00001	2.00001

పై పట్టికల ద్వారా, x విలువ 1ని సమీపిస్తున్న కొలది, తదనుగుణంగా $f(x)$ విలువ 2ని సమీపిస్తుండటం చూడవచ్చు.

ఏదైనా, $x = 1$ వద్ద $f(x)$ యీ సందర్భంలో నిర్వచింపబడలేదు. దీనిని x విలువ 1ని సమీపించినపుడు $f(x)$ అవధి విలువను 2గా వ్యక్తీకరించొచ్చు.

ఇపుడు, $f(x) = 2x$ అనే మరో ప్రమేయాన్ని గమనిద్దాం. బిందువు '1' సమీపంలో మరియు $x = 1$ వద్ద దీని ప్రవర్తనను పరిశీలిద్దాం. x విలువ 1ని సమీపించినపుడు తదనుగుణంగా $x = 1$ వద్ద $f(x)$ విలువ 2 ను సమీపిస్తుండటం మరియు $f(x)$ విలువ '2' కావడం గమనించొచ్చు.

పై ఫలితాలను గమనించడం ద్వారా, $x = 2$ సమీపంలో మరియు $x = 2$ వద్ద ప్రమేయపు ప్రవర్తన గురించి ఇంకా ఏమి చెప్పవచ్చు?

ఈ పాఠంలో, ఒక ఫలాన బిందువు సమీపంలో మరియు ఫలాన బిందువు వద్ద, ప్రమేయం నిర్వచింపబడినా, నిర్వచింపబడకపోయినా, దాని ప్రవర్తనను తెలుసుకునే ప్రయత్నం చేస్తాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగలిగిన విషయాలు.

1. ఒక ప్రమేయపు అవధి విలువ భావనను రేఖాచిత్రాలు మరియు ఉదాహరణల ద్వారా వివరించుట.
2. $x = a$ వద్ద $y = f(x)$ ప్రమేయపు ఎడమ, కుడి అవధులను నిర్వచించి, ఉదహరించటం.
3. $x = a$ వద్ద $y = f(x)$ ప్రమేయపు అవధిని నిర్వచించటం.
4. అవధులపై ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలను ప్రవచించి, వినియోగించటం.
5. ఒక అంతరంలో ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నతను నిర్వచించటం.
6. ఒక బిందువు వద్ద ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నత లేదా ఇతరములను నిర్ధారించటం మరియు
7. ప్రమేయాల అవిచ్ఛిన్నతపై సిద్ధాంతాలను ప్రవచించి, ఉదాహరణల ద్వారా ఉపయోగించటం.

ముఖ్యాంశాలు

$'x', 'a'$ ని సమీపించినపుడు $f(x)$ప్రమేయమును $'l'$ను సమీపించడానికి $f(x)$ అవధి $'l'$ అని అంటాం. దీనిని $\lim_{x \to a} f(x) = l$ గా రాస్తాం.

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ మరియు $\lim_{x \to a} g(x) = m$ అయినపుడు

1. $\lim_{x \to a} K\, f(x) = K \lim_{x \to a} f(x) = Kl$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(K(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=l\pm m$

3. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\ g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=lm$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{l}{m},\ \lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ కానపుడు

ముఖ్య ప్రమేయాల అవధులు

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)=1$

కుడి అవధి :

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ ని పొందటానికి

$x=a+h$ ప్రవేశపెట్టండి.

$\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)$ కనుక్కోండి.

ఎడమ అవధి :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ని పొందటానికి

$x = a - h$ ప్రవేశపెట్టండి.

$\lim\limits_{h \to 0} f(a-h)$ కనుక్కోండి.

అవిచ్ఛిన్నం

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ అయిన

$x = a$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$ $\quad \left(\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right)$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4)$

$= 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12$

2. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

$= \lim\limits_{x \to -5} \dfrac{(x+5)(x-5)}{x + 5}$

$$= \lim_{x \to -5} (x-5)$$

$$= -5-5 = -10$$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2+x+1)$$

$$= 1+1+1 = 3$$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

$$= \lim_{2x \to 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) \times 2 \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1\right)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{5x^2}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{5x^2} = \frac{1}{5} \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

$$= \frac{1}{5} \times 1 \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

$$= \frac{1}{5}$$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \times ax}{\frac{\sin bx}{bx} \times bx}$$

$$= \frac{1 \times a}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3$ (3చే గుణించి, భాగించగా)

$= 3 \lim\limits_{3x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$ $x \to 0 \Rightarrow 3x \to 0$

$= 3 \times 1 = 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3.$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ ను గుణించండి.

సాధన: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1)\left(x^2+1\right) \qquad (\because x \neq 1)$$

$$= (1+1)\left(1^2+1\right) = 4$$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1 \\ 1, \quad x = 1 \end{cases}$ అయితే $\lim_{x \to 1} f(x)$ కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= x+1 \qquad (\because x \neq 1)$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1)$$

$$= 1+1 = 2$$

గమనిక : $x = 1$ వద్ద $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ నిర్వచింపబడదు. $x = 1$ వద్ద $f(x)$ విలువపై $\lim_{x \to 1} f(x)$ విలువ ఆధారపడియుండదు.

3. $\lim_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$ వ్యవస్థితం కాదని చూపండి.

సాధన: $\lim_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5} = \lim_{h \to 0} \dfrac{|5+h-5|}{5+h-5}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} (\because h > 0, |h| = h)$$

$=1$

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}=\lim_{h\to 0}\frac{|5-h-5|}{5-h-5}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}\ \ (\because h\to 0, |-h|=h)$$

$=-1$

$\therefore$ (1) మరియు (2)ల నుండి

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5}\neq\lim_{x\to 5^-}\frac{|x-5|}{x-5}$$

$\therefore \lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$ వ్యవస్థితము కాదు.

4. $x=2$ వద్ద $f(x)=x-5$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

సాధన: $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x-5)$

$=2-5=-3$ మరియు

$f(2)=2-5=-3$

$\therefore \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$

$\therefore f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము

5. $x=-q$ వద్ద $f(x)=px+q$ యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

సాధన: $\lim_{x\to -q}f(x)=\lim_{x\to -q}(px+q)$

$=-pq+q$

$f(-q)=P(-q)+q=-pq+q$

$\therefore \lim_{x \to -q} f(x) = f(-q)$

$\therefore f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము.

6. $f(x) = \sin x$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన: $f(x) = \sin x$ మరియు $\sin x$ ప్రవేశము R

'a'ఒక యాధృచ్ఛిక వాస్తవ సంఖ్య అనుకుందాం.

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$

$= \lim_{h \to 0} \sin(a+h)$

$= \lim_{h \to 0} (\sin a \cosh + \cos a \sinh)$

$= \sin a \lim_{h \to 0} \cosh + \cos a \lim_{h \to 0} \sinh$

$= \sin a \times 1 + \cos a \times 0$

$= \sin a$ ..(1) ($\because \lim_{x \to 0} \sin x = 0$ మరియు $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$)

మరియు $f(a) = \sin a$ .. (2)

$\therefore$ (1), (2)ల నుండి

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\therefore x = a$ వద్ద $\sin x$ అవిచ్ఛిన్నము.

7. $f(x) = \cos x$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన: $f(x) = \cos x$ మరియు $\cos x$ ప్రదేశము R

'a'ఒక యాధృచ్ఛిక వాస్తవ సంఖ్య అనుకుందాం.

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$

$= \lim_{h \to 0} \cos(a+h)$

$= \lim_{h\to 0}(\cos a \cosh - \sin a \sinh)$

$= \cos a \lim_{h\to 0} \cosh - \sin a \lim_{h\to 0} \sinh$

$= \cos a \times 1 - \sin a \times 0 \qquad \left(\because \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \lim_{x\to 0} \sin x = 0\right)$

$= \cos a \to (1)$

మరియు $f(a) = \cos a \qquad \ldots (2)$

$\therefore$ (1), (2)ల నుండి

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore x = a$ వద్ద $f(x) = \cos x$ అవిచ్ఛిన్నము.

8. $x = 1$ వద్ద $f(x)$ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమై, $f(x) = ax + 5$ మరియు $f(1) = 4$ అయినపుడు 'a' కనుక్కోండి.

సాధన: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} f(1+h)$

$= \lim_{h\to 0}(a(1+h)+5)$

$= \lim_{h\to 0}(a + ah + 5)$

$= a + 0 + 5$

$= a + 5 \qquad .. (1)$

మరియు $f(1) = 4 \qquad .. (2)$

$x = 1$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమైతే, , $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ అవుతుంది.

$\therefore$(1), (2)ల నుండి

$a + 5 = 4$

$a = 4 - 5$

$\therefore a = -1$

III. దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}$ ను గణించండి.

సాధన: లవంను అకరణీయం చేయగా

$$\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}=\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}\times\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}$$

$$=\frac{3-x-1}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)} \qquad \left(\because (a-b)(a+b)=a^2-b^2\right)$$

$$=\frac{2-x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3-x}+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3-2}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ ను గణించండి.

సాధన: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(1+x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$= \sqrt{1+0}+1$$

$$= 1+1 = 2$$

3. $f(x) = \begin{cases} ax+5, x<2 \\ x-1,\ x\geq 2 \end{cases}$ అయి, $\lim_{x\to 2} f(x)$ వ్యవస్థితం అయితే 'a' విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-1)$ $\left(\because f(x) = x-1, x\geq 2\right)$

$$= \lim_{h\to 0}(2+h-1)$$

$$= \lim_{h\to 0}(1+h) = 1+0 = 1$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax+5)$ $\left(\because f(x) = ax+5, if\ \ x<2\right)$

$$= \lim_{h\to 0}\left[a(2-h)+5\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[2a-ah+5\right]$$

$$= 2a - a\times 0 + 5$$

$$= 2a+5$$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ వ్యతస్థితం.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\therefore 1 = 2a+5$$

$2a = 1 - 5 = -4$

$a = \frac{-4}{2}$

$\therefore a = -2$

4. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<2 \\ 1, & x=2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$ అయి, వ్యవస్థితమైతే $\lim_{x\to 2} f(x)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1)$

$= \lim_{h\to 0} (2+h+1)$

$= \lim_{h\to 0} (3+h)$

$= 3+0 = 3$ .. (1)

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-1)$

$= \lim_{h\to 0} (2-h-1)$

$= \lim_{h\to 0} (1-h)$

$= 1-0 = 1$ .. (2)

(1), (2) ల నుండి

$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ... (1)

(1)లో $x=-x$ వుంచటం ద్వారా

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{-x}=1 \qquad \ldots (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x} \qquad ((1), (2)\text{లను కూడటం ద్వారా})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-e^x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$

$$=1+1 \qquad ((1), (2)\text{ లనుండి})$$

$$=2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=2.$$

6. గుణించండి. $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

సాధన $h\to 0$ అయినపుడు $x=1+h$ వుంచండి.

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-e}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^1.e^h-e}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e\left(e^h-1\right)}{h}$$

$$=e\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}$$

$$=e\times 1=e$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{e^h-1}{x-1}=e$$

7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $x=\frac{\pi}{2}+h$ ప్రతిక్షేపించండి.

$x\to\frac{\pi}{2}+h\to 0$ అయినప్పుడు

$2x=\pi+2h$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\left(\pi-(\pi+2h)\right)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+\cos(\pi+2h)}{4h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{4h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 h}{4h^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{(\pi-2x)^2}=\frac{1}{2}$$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{Tanbx}$ గణించండి.

సాధన: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{Tanbx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}\times a}{\frac{Tanbx}{bx}\times b}$

$$=\frac{a}{b}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim_{x\to 0}\frac{Tanbx}{bx}}$$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{1}{1}$$

$$=\frac{a}{b}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{Tanbx}=\frac{a}{b}$$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3Tan^2x}$ గణించండి.

సాధన: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3Tan^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\cos^2 x$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}(\cos x)^2$$

$$=\frac{2}{3}\times 1$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3Tan^2x}=\frac{2}{3}$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}\times\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\dfrac{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}\times\left(\frac{bx}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{a^2}{b^2}\frac{\lim\limits_{\frac{ax}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2}{\lim\limits_{\frac{bx}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{a^2}{b^2}\times\frac{1^2}{1^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

11. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$ గణించండి.

సాధన: $x\to\pi\Rightarrow\pi-x\to 0$

$Let\ \pi-x=h\Rightarrow x=\pi-h$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\pi - h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$

$$= 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi - x} = 1$$

12. $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$ గణించండి.

సాధన: $x \to 1 \Rightarrow 1 - x \to 0$

$Let\ 1 - x = h \Rightarrow x = 1 - h$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi h}{2}}{\frac{\pi}{2}h}\times\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\lim_{\frac{\pi h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\pi h}{2}}{\frac{\pi h}{2}} \qquad \left(\because h \to 0 \Rightarrow \frac{\pi h}{2} \to 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\times 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} = \frac{\pi}{2}$$

13. $f(x) = e^{5x}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన: e^{5x} ప్రదేశము R

$a \varepsilon R$ అనేది యాధృచ్ఛికరాశి అనుకుందాం.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{5(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{5a} e^{5h}$$

$$= e^{5a} \lim_{h\to 0} e^{5h}$$

$$= e^{5a} \times 1 = e^{5a} \qquad ..(1)$$

ఇంకనూ, $f(a) = e^{5a} \qquad ..(2)$

(1), (2)ల నుండి $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore x = a$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

'a' యాదృచ్ఛిక రాశి కావున, e^x అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము.

14. $f(x) = e^{-2x+5}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన: e^{-2x+5} ప్రదేశము R

$a \varepsilon R$ అనేది యాధృచ్ఛికరాశి అనుకుందాం.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{-2(a+h)+5}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{-2a+5}.e^{-2h}$$

$$= e^{-2a+5} \lim_{h\to 0} e^{-2h}$$

$$= e^{-2a+5} \times 1$$

$$= e^{-2a+5} \qquad \ldots (1)$$

ఇంకనూ $f(a) = e^{-2a+5} \qquad \ldots(2)$

(1), (2)ల నుండి $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore x = a$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

'a' యాధృచ్ఛికరాశి కావున e^{-2x+5} అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ ను గణించండి.

సాధన: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, లవాన్ని అకరణీయం చేయగా

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$$

16. $\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(2x+3)(x-1)}$ ను గణించండి.

సాధన: $\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(2x+3)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(2x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} \quad \left(\because x-1=\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{(2x+3)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2\times 1-3}{(2\times 1+3)\left(\sqrt{1}+1\right)}$$

$$=\frac{-1}{5\times 2}=\frac{-1}{10}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(2x+3)(x-1)}=\frac{-1}{10}$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ అయితే $x=0$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నమా, కాదా కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

ఎడమ అవధి $=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(0-h)}{0-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin 2h}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\sin 2h}{2h} \times 2 \right\}$$

$$= 2.\lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{2h}$$

$$= 2\times 1 = 2 \qquad \ldots (1)$$

కుడి అవధి $= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(0+h)}{0+h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times 2$$

$$= 2.\lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{2h}$$

$$= 2\times 1 = 2 \qquad \ldots (2)$$

ఇంకా, $f(0) = 2$ (దత్తాంశం)

(1), (2)ల నుండి

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$$

$\therefore x = 0$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

2. $x \neq 1$ కి $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ మరియు $x = 1$ కి $f(x) = 2$ అయితే $x = 1$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

సాధన: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$

ఎడమ అవధి $=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$=\lim\limits_{h\to 0} f(1-h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1-h)^2-1}{(1-h)-1}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-2h+h^2-1}{-h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-2)}{-h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}-(h-2)$

$=2 \quad \ldots (1)$

కుడి అవధి $=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$=\lim\limits_{h\to 0} f(1+h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{1+h-1}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1+2h+h^2-1}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h+2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(h+2)$

$=2 \quad \ldots (2)$

ఇంకనూ, $f(1) = 2$ (దత్తాంశం) .. (3)

$\therefore$ (1), (2), (3)ల నుండి

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(1)$$

ఈ విధంగా $x = 1$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

3. $f(x) = \begin{cases} \sin 4x, & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$, $x = 0$ వద్ద ప్రమేయపు అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

సాధన: $f(x) = \begin{cases} \sin 4x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

ఎడమ అవధి $= \lim_{x \to 0^-} \sin 4x$

$$= \lim_{h \to 0} \sin 4(0 - h) = \lim_{h \to 0} \sin(-4h)$$

$$= -\lim_{h \to 0} \sin 4h$$

$$= 0 \quad ..(1) \quad \left(\because \lim_{x \to 0} \sin x = 0\right)$$

కుడి అవది $= \lim_{x \to 0^+} \sin 4x$

$$= \lim_{h \to 0} \sin 4(0 + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin 4h$$

$$= 0 \to (2)$$

ఇంకా, $f(0) = 2$ ..(3)

$\therefore$ (1), (2), (3)ల నుండి

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

$\therefore x = 0$ వద్ద $f(x)$ విచ్ఛిన్నం.

4. 'a' యొక్క ఏ విలువలకు ప్రమేయము $x = a$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం?

సాధన: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{3x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

ఎడమ అవధి $= \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin 5x}{3x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 5(0-h)}{3(0-h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(-5h)}{-3h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin 5h}{-3h}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{h \to 0} \frac{\sin 5h}{5h} \times 5 \qquad (\because h \to 0 \Rightarrow 5h \to 0)$$

$$= \frac{5}{3} . \lim_{5h \to 0} \frac{\sin 5h}{5h}$$

$$= \frac{5}{3} \times 1 = \frac{5}{3} \qquad \ldots (1)$$

కుడి అవధి $= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin 5x}{3x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 5(0+h)}{3(0+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 5h}{3h}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{h \to 0} \frac{\sin 5h}{h}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{h \to 0} \frac{\sin 5h}{5h} \times 5$$

$$= \frac{5}{3} \lim_{5h \to 0} \frac{\sin 5h}{5h}$$

$$= \frac{5}{3} \times 1 = \frac{5}{3} \quad .. \ (2)$$

(1), (2)ల నుండి

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{5}{3}$$

ఇంకనూ, $f(0) = a$ (దత్తాంశం) ...(3)

$x = a$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం.

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \frac{5}{3} = a$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ K, & x = 4 \end{cases}$ అయితే K యొక్క ఏ విలువకు $x = 4$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం?

సాధన: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ K, & x = 4 \end{cases}$

ఎడమ అవధి $= \lim_{x \to 4^-} f(x)$

$$= \lim_{h \to 0} f(4 - h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4 - h)^2 - 16}{4 - h - 4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 - 8h - 16}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-8)}{-h} = \lim_{h \to 0} -(h-8)$$

$$= \lim_{h \to 0} (8-h)$$

$$= 8 - 0 = 8 \qquad \ldots(1)$$

కుడి అవధి $= \lim_{x \to 4^+} f(x)$

$$= \lim_{h \to 0} f(4+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{4+h-4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 16}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+8)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h+8)$$

$$= 0 + 8 = 8 \qquad \ldots\ (2)$$

ఇంకనూ, $f(4) = K \qquad \ldots\ (3)$

$x = 4$ వద్ద $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం

$\therefore$ (1), (2), (3)ల నుండి

$$\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$$

$$8 = K$$

$$\therefore K = 8$$

21

అవకలనం

ఇప్పుడు మనం ఉపయోగిస్తున్న అవకలనము అనే ప్రక్రియను (అవకలజం అనే ఫలితాన్నిచ్చే ఒక గణిత ప్రక్రియ) ఐజాక్ న్యూటన్ క్రీ.శ. 1665 లేదా 1666 కాలంలో తొలుత కనుగొనడంలో అవకలన కలన గణితము ప్రారంభమయినది. న్యూటన్ మరియు లెబ్నీజ్ కనుగొన్న అనేక పరిశోధనలలో, యితర ఫలితాలతో కలిసి సంయుక్త ప్రమేయాల సంకలన, గుణకార, భాగహార అవకలజాలను కనుగొనే పద్ధతులు కూడా వున్నాయి. ఈ పాఠంలో మనం ఒక ప్రమేయం అవకలజం, దాని జ్యామితీయ మరియు భౌతిక వివరణ, వివిధ రకాల అవకలన పద్ధతులను గురించి తెలుసుకోవటంతోపాటు, రెండో తరగతి అవకలజ భావనను కూడా తెలుసుకుంటాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠము చదివిన పిమ్మట మీరు నేర్చుకునే అంశాలు:

- $x = a$ వద్ద $y = f(x)$ అవకలజాన్ని నిర్వచించటం మరియు జ్యామితీయంగా విశ్లేషించటం.
- $f(x) = x^n$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోవడం మరియు ఇతర ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుక్కోవడానికి దీనిని ఉపయోగించడం.
- $\mathrm{C}\, f(x), f(x) \pm g(x)$, ఇతర బహుపద ప్రమేయాల అవకలజాలను కనుక్కోవడం.
- ఒక ప్రమేయపు గొలుసు సూత్రాన్ని ప్రవచించి, ఉపయోగించటం. అవకలజాలను కనుక్కోవడం.
- ఒక ప్రమేయపు రెండో తరగతి అవకలజాన్ని కనుక్కోవడం.

ముఖ్యాంశాలు :

- x దృష్ట్యా $f(x)$ అవలజం $f'(x) = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}, \delta x > 0$ గా నిర్వచనీయం.
- స్థిరరాశి అవకలజం సున్నా.
- $\dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = n.x^{n-1}$.
- $\dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{C}\, f(x)\right] = \mathrm{C}.f'(x)$.
- సంకలన లేదా వ్యవకలన సూత్రం : $\dfrac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right] \pm \dfrac{d}{dx}\left[g(x)\right]$..

- గుణకార నియమం : $\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right]=f(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)+g(x).\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$
- భాగాహార నియమం : $\phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$ అయితే $\phi'(x)=\frac{g(x)f'(x)+f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
- గొలుసు నియమం : $\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right]=f'\left[g(x)\right].\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$.
- x దృష్ట్యా y రెండో అవకలజం $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. x^{10} అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{d}{dx}\left(x^{10}\right)=10x^{10-1}=10x^9\ \left[\because \frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}\right]$

2. $\frac{1}{x}, x\neq 0$ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)=-\frac{1}{x^2}$

3. $\sqrt{x}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. x^2+5x అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{d}{dx}\left(x^2+5x\right)=2x+5.1=2x+5$

5. $y=12$ అయిన y' కనుక్కోండి.

సాధన : $y'=0$. ($\because$ స్థిర ప్రమేయ అవకలజం సున్నా)

6. $y=12x+12$ అయిన y' కనుక్కోండి.

సాధన : $y' = 12 \times 1 + 0 = 12$.

7. $y = 2x^3 - 3x^2$ అయిన y' కనుక్కోండి.

సాధన : $y' = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x = 6x^2 - 6x$

8. $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},\ x \neq 0$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

$$y = x^3 + x^{-2} - x^{-1}$$

$$y' = 3x^2 - 2x^{-3} - (-1)x^{-2}$$

$$\therefore y' = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

9. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ అయిన $f'(x)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \sqrt{x} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

2. $f(x) = \frac{x^2 - a}{a - 2}$, $a \neq 2$ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \frac{x^2 - a}{a - 2}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - a}{a - 2}\right)$$

$$= \frac{1}{a - 2} \times 2x$$

$$= \frac{2x}{a - 2}$$

3. $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 2$ అయిన $f'(x)$ కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 2 \quad \left(\because \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\, x^{n-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{8x^7}{8} - \frac{6x^5}{6} + \frac{4x^3}{4} - 0$$

$$\therefore f'(x) = x^7 - x^5 + x^3.$$

4. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{7}x^7 + 2x - 5$ అయిన $f'(-2)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{7}x^7+2x-5$

$f'(x)=\frac{4x^3}{4}+\frac{3}{7}\times 7x^6+2\times 1-0$

$\therefore f'(x)=x^3+3x^6+2$

$f'(-2)=(-2)^3+3(-2)^6+2$

$=-8+3\times 64+2$

$=-8+192+2$

$\therefore f'(-2)=186$

5. $f(x)=16x+2$ అయితే $f'(0), f'(3), f'(8)$ లను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x)=16x+2$

$f'(x)=16\times 1+0$

$f'(x)=16$

$\therefore f'(0)=16$

$f'(3)=16$

$f'(8)=16$

6. $y=5x^6\left(7x^2+4x\right)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుక్కోండి.

సాధన : పద్ధతి (1) : y రెండు ప్రమేయాల లబ్ధం కాబట్టి

$\frac{dy}{dx}=5x^6.\frac{d}{dx}\left(7x^2+4x\right)+\left(7x^2+4x\right)\frac{d}{dx}\left(5x^6\right)$

$=5x^6.\left(7\times 2x+4\times 1\right)+\left(7x^2+4x\right).30x^5$

$=70x^7+20x^6+210x^7+120x^6$

$\therefore \frac{dy}{dx}=280x^7+140x^6$.

పద్ధతి-2 : $y = 5x^6\left(7x^2 + 4x\right)$

$$y = 35x^8 + 20x^7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 35\times 8.x^7 + 20\times 7.x^6$$

$$= 280x^7 + 140x^6 \cdot$$

7. గుణకార నియమాన్ని ఉపయోగించి, $f(x) = (x+1)(-3x-7)$ ప్రమేయ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = (x+1)(-3x-7)$

$$f'(x) = (x+1).\frac{d}{dx}\left(-3x-7\right) + \left(-3x-7\right)\frac{d}{dx}\left(x+1\right)$$

$$= \left(x+1\right)\left(-3\right) + \left(-3x-7\right)\times 1$$

$$= -3x - 3 - 3x - 7$$

$$= -6x - 10 = -2(3x+5)$$

8. $u(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right)\left(x^3 - 2\right)$ ప్రమేయ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $u(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right)\left(x^3 - 2\right)$

$$u'(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right).\frac{d}{dx}\left(x^3 - 2\right) + \left(x^3 - 2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2 - 4x + 5\right)$$

$$= \left(x^2 - 4x + 5\right).3x^2 + \left(x^3 - 2\right).\left(2x - 4\right)$$

$$= 3x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 2x^4 - 4x - 4x^3 + 8$$

$$\therefore u'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 4x + 8$$

9. $y = x^2\left(2x^2 + 3x + 8\right)$ ప్రమేయ అవలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = x^2\left(2x^2 + 3x + 8\right)$

$$y = 2x^4 + 3x^3 + 8x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = 2\times 4x^3 + 3\times 3x^2 + 8\times 2x$$

$$= 8x^3 + 9x^2 + 16x.$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ప్రమేయ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$$f'(x) = (x-1)(x-2).\frac{d}{dx}(x-3) + (x-1)(x-3).\frac{d}{dx}(x-2) + (x-2)(x-3).\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$= (x-1)(x-2)\times 1 + (x-1)(x-3)\times 1 + (x-2)(x-3)\times 1$$

$$= x^2 - 2x - x + 2 + x^2 - 3x - x + 3 + x^2 - 3x - 2x + 6$$

$$= 3x^2 - 12x + 11.$$

2. $f(x) = \left(3x^2+7\right)(5x-1)\left(3x^2+9x+8\right)$ ప్రమేయ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \left(3x^2+7\right)(5x-1)\left(3x^2+9x+8\right)$

$$f'(x) = \left(3x^2+7\right)(5x-1).\frac{d}{dx}\left(3x^2+9x+8\right) +$$

$$(5x-1)\left(3x^2+9x+8\right).\frac{d}{dx}\left(3x^2+7\right) + \left(3x^2+7\right)\left(3x^2+9x+8\right).\frac{d}{dx}(5x-1)$$

$$f'(x) = \left(3x^2+7\right)(5x-1)\times(6x+9) + (5x-1)\left(3x^2+9x+8\right).6x$$

$$+\left(3x^2+7\right)\left(3x^2+9x+8\right).5$$

3. $f(x)=x,\ g(x)=x-3,\ h(x)=x^2+x$ అయితే $\left[f(x).g(x).h(x)\right]$ యొక్క అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : పద్ధతి-1 : $f(x).g(x).h(x)=x(x-3)\left(x^2+x\right)$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right]=x(x-3)\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right)+(x-3)\left(x^2+x\right).\frac{d}{dx}(x)+x\left(x^2+x\right).\frac{d}{dx}(x-3)$$

$$=x(x-3)(2x+1)+(x-3)\left(x^2+x\right)\times 1+x\left(x^2+x\right)\times 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4x^3-6x^2-6x$$

పద్ధతి-2 : $y=x(x-3)\left(x^2+x\right)=\left(x^2-3x\right)\left(x^2+x\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(x^2-3x\right).\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right)+\left(x^2+x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-3x\right)$$

$$=\left(x^2-3x\right)(2x+1)+\left(x^2+x\right).(2x-3)$$

$$=2x^3-6x^2+x^2-3x+2x^3-3x^2+2x^2-3x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4x^3-6x^2-6x$$

4. $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-1}, x\neq\dfrac{1}{2}$ అయితే $f'(x)$ కనుక్కోండి.

సాధన : $f'(x)=\dfrac{(2x-1)\dfrac{d}{dx}(4x+3)-(4x+3)\dfrac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-1)(4)-(4x+3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{8x-4-8x-6}{(2x-1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-10}{(2x-1)^2}$$

5. $y = \dfrac{3x-2}{x^2+x-1}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = \dfrac{3x-2}{x^2+x-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2+x-1\right)\frac{d}{dx}(3x-2)-(3x-2).\frac{d}{dx}\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+x-1\right).3-(3x-2).(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2+3x-3-6x^2+4x-3x+2}{\left(x^2+x-1\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2+4x-1}{\left(x^2+x-1\right)^2}$$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+4}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+4}$

$$f'(x) = \frac{\left(x^3+4\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}.\frac{d}{dx}\left(x^3+4\right)}{\left(x^3+4\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^3+4\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}.3x^2}{\left(x^3+4\right)^2} = \frac{x^3+4-6x^3}{2\sqrt{x}\left(x^3+4\right)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{4-5x^3}{2\sqrt{x}\left(x^3+4\right)^2}$$

7. $y = \sqrt{x^4+8x^2+1}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుక్కోండి.

సాధన : $y = \sqrt{x^4+8x^2+1}$ దత్తాంశం

$t = x^4+8x^2+1$ గా గ్రహించి

$y = \sqrt{t}$ గా రాద్దాం.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dt}{dx} = 4x^3+16x$$

కాబట్టి $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}.\left(4x^3+16x\right)$$

$$= \frac{4x^3+16x}{2\sqrt{x^4+8x^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+8x}{\sqrt{x^4+8x^2+1}}$$

8. అవకలజం కనుక్కోండి. $y = \frac{5}{\left(x^2-3\right)^7}$

సాధన : $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[5.\left(x^2-3\right)^{-7}\right]$

$=5\times(-7).\left(x^2-3\right)^{-8}.\frac{d}{dx}\left(x^2-3\right)$

$=-35\left(x^2-3\right)^{-8}.2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-70x}{\left(x^2-3\right)^8}$.

9. $y=\frac{1}{x^2+3x+1}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+3x+1}\right)$

$=\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+1\right)^{-1}$

$=-1.\left(x^2+3x+1\right)^{-2}.\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+1\right)$

$=-\left(x^2+3x+1\right)^{-2}\times(2x+3)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+3)}{\left(x^2+3x+1\right)^2}$

10. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}-1}.\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}.2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

11. $y = x+\sqrt{x^2+8}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = x+\sqrt{x^2+8}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x+\sqrt{x^2+8}\right]$$

$$= 1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+8}}\times\frac{d}{dx}\left(x^2+8\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+8}}\times 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

12. $y = \left(2x^2+5x-3\right)^{-4}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^2+5x-3\right)^{-4}$

$$= -4\left(2x^2+5x-3\right)^{-5}.\frac{d}{dx}\left(2x^2+5x-3\right)$$

$$= -4\left(2x^2+5x-3\right)^{-5}.\left(4x+5\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-4\left(4x+5\right)}{\left(2x^2+5x-3\right)^5}$$

13. నిర్వచనం పద్ధతిన $x+\frac{1}{x}$ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి?

సాధన : $y = x+\frac{1}{x}$ అనుకొందాము.

$$y+\delta y = x+\sqrt{x}+\frac{1}{x+\delta x}$$

$$y+\delta y - y = x+\delta x+\frac{1}{x+\delta x}-\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$= x+\delta x+\frac{1}{x+\delta x}-x-\frac{1}{x}$$

$$= \delta x+\frac{1}{x+\delta x}-\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\delta x(x+\delta x)x+x-(x+\delta x)}{(x+\delta x)x}$$

$$= \frac{\delta x(x+\delta x)x+x-x-\delta x}{(x+\delta x)x}$$

$$\therefore \delta y = \frac{\delta x\left[(x+\delta x)x-1\right]}{(x+\delta x)x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x\left[x^2+x\delta x-1\right]}{(x+\delta x)x.\delta x}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{x^2 + x\delta x - 1}{(x+\delta x)x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

14. మూల సూత్రాల పద్ధతిన క్రింది ప్రమేయానికి అవకలజం కనుక్కోండి.

$$\frac{1+x}{1-x}$$

సాధన : $y = \frac{1+x}{1-x}$.

$$y + \delta y = \frac{1 + x + \delta x}{1 - (x + \delta x)}$$

$$y + \delta y - y = \frac{1 + x + \delta x}{1 - x - \delta x} - \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\delta y = \frac{(1 + x + \delta x) - (1 + x)(1 - x - \delta x)}{(1 - x - \delta x)(1 - x)}$$

$$= \frac{1 - x^2 + \delta x - x\delta x - \left(1 - x^2 - \delta x - x\delta x\right)}{(1 - x - \delta x)(1 - x)}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{x^2} + \delta x - \cancel{x\delta x} - \left(\cancel{1} - \cancel{x^2} - \delta x - \cancel{x\delta x}\right)}{(1 - x - \delta x)(1 - x)}$$

$$\delta y = \frac{2\delta x}{(1 - x - \delta x)(1 - x)}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{2\delta x}{(1-x-\delta x)(1-x).\delta x}=\frac{2}{(1-x-\delta x)(1-x)}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{2}{(1-x-\delta x)(1-x)}$$

$$=\frac{2}{(1-x-0)(1-x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{(1-x)^2}$$

15. డెల్టా పద్ధతిన కింది ప్రమేయానికి అవకలజం కనుక్కోండి. $f(x)=3\sqrt{x}$, $f'(2)$ కూడా కనుక్కోండి.

సాధన : $y=f(x)=3\sqrt{x}$

$$y+\delta y=3\sqrt{x+\delta x}$$

$$y+\delta y-y=3\sqrt{x+\delta x}-3\sqrt{x}$$

$$\delta y=3\left(\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}\right)$$

$$\delta y=\frac{3\left(\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}\times\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}$$ (లవాన్ని అకరణీయం చేయగా)

$$=\frac{3(x+\delta x-x)}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3\delta x}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{3\delta x}{\left(\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}\right).\delta x}=\frac{3}{\left(\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

16. $y = x^3 + 1$ రెండో తరగతి అవకలజాలను కనుక్కోండి.

సాధన : $y = x^3 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

మరియు $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$

$$= 3.2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

17. $y = \sqrt{x^2+1}$ రెండో తరగతి అవకలజాలను కనుక్కోండి.

సాధన : $y = \sqrt{x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} . \frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}.\frac{d}{dx}(x)-x.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}.1-x.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

18. $y=\left(x^2+1\right)(x-1)$, రెండవ తరగతి అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $\frac{dy}{dx}=\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}(x-1)+(x-1)\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$

$$=\left(x^2+1\right).1+(x-1).2x$$

$$=x^2+1+2x^2-2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-2x+1$$

మరియు $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(3x^2-2x+1\right)$

$$=3\times 2x-2\times 1$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=6x-2$$

19. $y=\frac{x^2+1}{x+1}$, రెండవ తరగతి అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1).2x-\left(x^2+1\right).1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x+1)^2.\frac{d}{dx}\left(x^2+2x-1\right)-\left(x^2+2x-1\right)\frac{d}{dx}(x+1)^2}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2\times(2x+2)-\left(x^2+2x-1\right).2(x+1).1}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2(x+1)\left[x^2+1+2x-x^2-2x+1\right]}{(x+1)^4}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{(x+1)^3}$$

20. మూలసూత్రం ద్వారా $2x^2+5$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y=2x^2+5$

$$y+\delta y=2(x+\delta x)^2+5$$

$$= 2\left(x^2 + \delta x^2 + 2x\delta x\right) + 5$$

$$y + \delta y - y = 2x^2 + 2\delta x^2 + 4x\delta x + 5 - 2x^2 - 5$$

$$= 2\delta x^2 + 4x\delta x$$

$$\delta y = 2\delta x\left(\delta x + 2x\right)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\delta x\left(\delta x + 2x\right)}{\delta x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\left(\delta x + 2x\right)}{1}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} 2\left(\delta x + 2x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\left(0 + 2x\right) = 4x$$

21. మూలసూత్రం నుండి $\sqrt{2x+1}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = \sqrt{2x+1}$

$$y + \delta y = \sqrt{2(x + \delta x) + 1}$$

$$y + \delta y - y = \sqrt{2x + 2\delta x + 1} - \sqrt{2x+1}$$

$$\delta y = \sqrt{2x + 2\delta x + 1} - \sqrt{2x+1}$$

$$\delta y = \frac{\sqrt{2x + 2\delta x + 1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x + 2\delta x + 1} + \sqrt{2x+1}} \times \sqrt{2x + 2\delta x + 1} + \sqrt{2x+1}$$

$$= \frac{2x + 2\delta x + 1 - \left(2x+1\right)}{\sqrt{2x + 2\delta x + 1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$\delta y = \frac{2\delta x}{\sqrt{2x + 2\delta x + 1} + \sqrt{2x+1}}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{2}{\sqrt{2x+2\delta x+1}+\sqrt{2x+1}}$$

$$\lim_{\delta y\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta y\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+2\delta x+1}+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

22. $y=\sqrt{x+1}$ కు రెండో తరగతి అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y=\sqrt{x+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

మరియు

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $f(x)=\dfrac{x\left(x^2+3\right)}{x-2}$, $[x\neq 2]$ అయితే $f'(x)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x)=\dfrac{x\left(x^2+3\right)}{x-2}=\dfrac{x^3+3x}{x-2}$

$$f'(x)=\frac{(x-2)\dfrac{d}{dx}\left(x^3+3x\right)-\left(x^3+3x\right)\dfrac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(x-2).\left(3x^2+3\right)-\left(x^3+3x\right).1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{3x^3-6x^2+3x-6-x^3-3x}{(x-2)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{2x^3-6x^2-6}{(x-2)^2}$$

2. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$, $[x\neq 3, x\neq 4]$ అయితే $f'(x)$ ను కనుక్కోండి.

సాధన : $u(x)=(x-1)(x-2)$

$v(x)=(x-3)(x-4)$ అనుకొనుము.

$$u'(x)=(x-1).\frac{d}{dx}(x-2)+(x-2)\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$=(x-1).1+(x-2).1$$

$$=x-1+x-2$$

$$u'(x)=2x-3$$

$$v(x)=(x-3)(x-4)$$

$$v'(x)=(x-3).\frac{d}{dx}(x-4)+(x-4)\frac{d}{dx}(x-3)$$

$$=(x-3).1+(x-4).1$$

$$=x-3+x-4$$

$$v'(x)=2x-7$$

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{v(x).u'(x)-u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$=\frac{(x-3)(x-4).(2x-3)-(x-1)(x-2).(2x-7)}{[(x-3)(x-4)]^2}$$

$$=\frac{(x^2-4x-3x+12)(2x-3)-(x^2-2x-x+2)(2x-7)}{[(x-3)(x-4)]^2}$$

$$=\frac{(x^2-7x+12)(2x-3)-(x^2-3x+2)(2x-7)}{(x-3)^2(x-4)^2}$$

$$=\frac{2x^3-14x^2+24x-3x^2+21x-36-2x^3+7x^2+6x^2-21x-4x+14}{(x-3)^2(x-4)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-4x^2+20x-22}{(x-3)^2(x-4)^2}$$

3. $y=\frac{3-v}{2+v},\ v=\frac{4x}{1-x^2}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుక్కోండి.

సాధన : $y=\frac{3-v}{2+v}$

$$\frac{dy}{dv}=\frac{(2+v)\frac{d}{dv}(3-v)-(3-v).\frac{d}{dv}(2+v)}{(2+v)^2}$$

$$=\frac{(2+v)(-1)-(3-v).1}{(2+v)^2}=\frac{-2-v-3+v}{(2+v)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dv}=\frac{-5}{(2+v)^2} \quad \ldots \text{(i)}$$

$$v=\frac{4x}{1-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{(1-x^2)\frac{d}{dx}(4x)-4x.\frac{d}{dx}(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-x^2).4-4x.(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{4-4x^2+8x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{4+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{4(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad \ldots \text{(ii)}$$

(i), (ii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{-5}{(2+v)^2}\times\frac{4\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-20\left(1+x^2\right)}{\left(2+\frac{4x}{1-x^2}\right)^2\times\left(1-x^2\right)^2}\qquad\left[\because v=\frac{4x}{1-x^2}\right]$$

$$=\frac{-20\left(1+x^2\right)}{\frac{\left(2-2x^2+4x\right)^2}{\left(1-x^2\right)^2}\times\left(1-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{-20\left(1+x^2\right)}{4\left(1-x^2+2x\right)^2}$$

$$=\frac{-5\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2+2x\right)^2}$$

4. $y=at^2,\ t=\frac{x}{2a}$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ కనుక్కోండి.

సాధన : $y=at^2$

$$\frac{dy}{dt}=2at\qquad\ldots\text{(i)}$$

$$t=\frac{x}{2a}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2a} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i), (ii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= 2at.\frac{1}{2a}$$

$$= t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a} \qquad \left(\because t = \frac{x}{2a}\right)$$

5. $y = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ప్రమేయానికి గుణకార నియమాన్ని ఉపయోగించి మరియు గుణకార విస్తరణ చేసి అవకలజాలను కనుక్కోండి. రెండు పద్ధతుల ద్వారా వచ్చిన సమాధానము ఒకటేయని సరిచూడండి.

సాధన : పద్ధతి-1 : $y = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \sqrt{x} \times -\frac{1}{2}.x^{-\frac{3}{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \ldots \text{(i)}$$

పద్ధతి-2 : $y = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$y = \sqrt{x} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + 1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) = (ii)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6. $f(x) = \dfrac{\left(x^3+1\right)\left(x-2\right)}{x^2}$ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = \dfrac{\left(x^3+1\right)\left(x-2\right)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2 . \dfrac{d}{dx}\left[\left(x^3+1\right)\left(x-2\right) - \left(x^3+1\right)\left(x-2\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]}{\left(x^2\right)^2}$$

$$= \frac{x^2 . \left[\left(x^3+1\right).1 + \left(x-2\right).3x^2\right] - \left(x^3+1\right)\left(x-2\right).2x}{x^4}$$

$$= \frac{x^2\left[x^3+1+3x^3-6x^2\right] - \left(x^3+1\right)\left(x-2\right)2x}{x^4}$$

$$= \frac{x\left(4x^3-6x^2+1\right) - 2\left(x^4-2x^3+x-2\right)}{x^3}$$

$$= \frac{4x^4-6x^3+x-2x^4+4x^3-2x+4}{x^3}$$

$$= \frac{2x^4-2x^3-x+4}{x^3}$$

$$\therefore f'(x) = 2x - 2 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

7. గొలుసు నియమాన్ని ఉపయోగించి క్రింది ప్రమేయానికి అవకలజం కనుక్కోండి.

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \left[\frac{(1-x).\frac{d}{dx}(1+x) - (1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \left[\frac{(1-x).1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \left[\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \times \frac{+2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{+1}{\sqrt{1+x}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

(లేదా)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+1}{(1-x)\sqrt{(1+x)(1-x)}}$$

$$= \frac{+1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

8. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ ప్రమేయానికి అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$=2\left(\sqrt{x}+x^{-\frac{1}{2}}\right).\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}.x^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$=2\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}$$

22

త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనం

గణితశాస్త్రంలోని భాగాలయిన కలన గణితం, సదిశలు, త్రిపరిమాణ నిరూపకజ్యామితి, సరళ మరియు హరాత్మక ప్రమేయాలు వగైరాలన్నింటిని అధ్యయనం చేసే అవకాశాన్ని త్రికోణమితి భాగం కలుగజేస్తుంది. ఇంకనూ, నిర్దేశించబడిన పరిధిలో విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల గురించి చదవడం కూడా సంభవమే.

ఇప్పటివరకు నేర్చుకుని యున్న అవకలన సూత్రాలన్ని త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు వర్తిస్తాయా అన్నది యిక్కడ ఉదయించే ప్రశ్న.

త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలకు సంబంధించిన అవకలన ప్రక్రియ, అవకలన సూత్రాలు, ఫలితాలు రాబట్టడమనే ప్రతిపాదనను యీ పాఠంలో అవలంబిస్తాం. యీ సందర్భంగా, త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను రేడియన్ మానంలోనే వ్యహరిస్తాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగలిగిన విషయాలు.

1. మూల సూత్రం నుండి త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనం.
2. గుణకార, భాగహార మరియు గొలుసు నియమాలను ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవకలనం.
3. రెండో తరగతి అవకలజాలు.

ముఖ్యాంశాలు

1. $i)\ \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\quad ii)\ \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ $\quad iii)$

$\frac{d}{dx}(Tanx) = \sec^2 x$

. $iv)\ \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$ $\quad v)\ \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

vi) $\frac{d}{dx}(co\sec x) = -\cos ecx \cot x$

2. x దృష్ట్యా అవకలనీయ ప్రమేయం అయితే..

i) $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$ ii) $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

iii) $\frac{d}{dx}(Tanu) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ iv) $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\cos ec^2 u \frac{du}{dx}$

v) $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ vi) $\frac{d}{dx}(\cos ecu) = -\cos ecu \cot u \frac{du}{dx}$

3. i) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ii) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

iii) $\frac{d}{dx}\left(Tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ iv) $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}$

v) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ vi) $\frac{d}{dx}\left(\cos ec^{-1}x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $\sin 2x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sin 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x.\frac{d}{dx}(2x) = \cos 2x \times 2 = 2\cos 2x$$

2. $y = Tan\sqrt{x}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = Tan\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 \sqrt{x}.\frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= \sec^2 \sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2 \sqrt{x}$$

3. $y = \sin x^2$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sin x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x.\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \cos x^2 \times 2x = 2x\cos x^2$$

4. $y = \pi \cot 3x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \pi \cot 3x$

$$\frac{dy}{dx} = -\pi \cot 3x \cos ec3x.\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= -3\pi \cot 3x \ \text{cosec}3x$$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$y = Tan\frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2\frac{x}{2}.\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

2. $y = \sqrt{\sin^3 x}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sqrt{\sin^3 x} = \left(\sin^3 x\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\sin^3 x\right)^{\frac{1}{2}-1}.\frac{d}{dx}\left(\sin^3 x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin^3 x\right)^{\frac{1}{2}}.3\sin^2 x.\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin^3 x}}.3\sin^2 x.\cos x$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{\sin x}.\cos x$$

3. $y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\times\sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\sin x}}$$

$$=\frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$y=\sec x-Tanx$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\sec xTanx-\sec^2 x$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+\sin x}$$

4. $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

$$\frac{dy}{dx} = f^1(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \times \frac{d}{dx}(\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cos 3x . \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{\sin 3x}} \cos 3x$$

5. $f(x) = x \sin x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $f(x) = x \sin x$

$$f^1(x) = x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x . \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x \cos x + \sin x \times 1$$

$$\therefore f^1(x) = x \cos x + \sin x$$

6. $y = \sin^3 x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sin^3 x$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \sin^2 x . \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 3 \sin^2 x \cos x$$

7. $y = Tan^4 x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = Tan^4 x$

$$\frac{dy}{dx} = 4Tan^3 x . \frac{d}{dx}(Tanx)$$

$$= 4Tan^3 x . \sec^2 x$$

8. $\cos^{-1} x^2$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \cos^{-1} x^2$ అనుకొనిన

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} \times \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \qquad \left(\because \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \times 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \left(\because \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} \times \frac{-1}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

10. $Tan^{-1}\left(\cos ecx - \cot x\right)$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = Tan^{-1}\left(\cos ecx - \cot x\right)$ అనుకొనిన

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\cos ecx - \cot x\right)^2} \times \frac{d}{dx}\left(\cos ecx - \cot x\right) \qquad \left(\because \frac{d}{dx}\left(Tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\cos ec^2 x + \cot^2 x - 2\cos ecx \cot x} \times \left(-\cos ecx \cot x + \cos ec^2 x\right)$$

$$= \frac{2}{2\cos ec^2 x - 2\cos ecx \cot x} \times \cos ecx\left(\cos ecx - \cot x\right)$$

$$= \frac{1}{2\cos ecx\left(\cos ecx - \cot x\right)} \times 2\cos ecx\left(\cos ecx - \cot x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

11. $\cos^{-1}\left(4x^3 - 3x\right)$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \cos^{-1}\left(4x^3 - 3x\right)$

$x = \cos\theta$ అనుకొనిన $\theta = \cos^{-1} x$

$$y = \cos^{-1}\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos 3\theta\right) = 3\theta$$

$$\therefore y = 3\cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

12. $\sin x$ యొక్క రెండవ తరగతి అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sin x$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

తిరిగి x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = \sin x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

13. $y = x^3 Tan^2 \frac{x}{2}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనండి.

సాధన: $y = x^3 Tan^2 \frac{x}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^3 \frac{d}{dx}\left(Tan^2 \frac{x}{2}\right) + Tan^2\left(\frac{x}{2}\right).\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$

$$= x^3 \times 2Tan\frac{x}{2}.\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} + Tan^2\left(\frac{x}{2}\right).3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^3 Tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2} + 3x^2 Tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

14.. $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ అయిన $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ కనుగొనండి.

సాధన: $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a^2\cos^2\theta\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$ (గొలుసు నియమము నుండి)

$$= 3a\sin^2\theta\cos\theta \times \frac{-1}{3a\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -Tan\theta$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. మూల సూత్రం నుండి $Tanx$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = Tanx$

$$y + \delta y = Tan\left(x + \delta x\right)$$

$$y+\delta y-y=Tan(x+\delta x)-Tanx$$

$$\delta y=\frac{\sin x(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin x(x+\delta x)\cos x-\cos(x+\delta x)\sin x}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$=\frac{\sin(x+\delta x-x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$=\frac{\sin\delta x}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\delta x}{\delta x\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}\times\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{cox(x+\delta x)\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx}=1\times\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(Tanx)=\sec^2 x$$

2. ప్రాథమిక సూత్రం నుండ $y=\cos 2x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y=\cos 2x$ అనుకొనుము

$$y+\delta y=\cos 2(x+\delta x)=\cos(2x+2\delta x)$$

$$y+\delta y-y=\cos(2x+2\delta x)=-\cos 2x$$

$$\delta y=-2\sin\left(\frac{2x+2\delta x+2x}{2}\right).\sin\left(\frac{2x+2\delta x-2x}{2}\right)$$

$$=-2\sin(2x+\delta x)\sin(\delta x)$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{-2\sin(2x+\delta x)\sin(\delta x)}{\delta x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\delta x}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\sin(2x+\delta x).\lim_{x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-2\sin 2x\times 1$$

$$\therefore\frac{d}{dx}(\cos 2x)=-2\sin 2x$$

3. మూల సూత్రం నుండి $\cot 2x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y=\cot 2x$ అనుకొనుము

$$y+\delta y=\cot(2x+\delta x)=\cot(2x+2\delta x)$$

$$y+\delta y-y=\cot(2x+2\delta x)-\cot 2x$$

$$\delta y=\frac{\cos(2x+2\delta x)}{\sin(2x+2\delta x)}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{\cos(2x+2\delta x)\sin 2x-\sin(2x+2\delta x)\cos 2x}{\sin(2x+2\delta x)\sin 2x}$$

$$=\frac{\sin(2x-(2x+2\delta x))}{\sin(2x+2\delta x).\sin 2x}$$

$$\delta y=\frac{\sin(-2.\delta x)}{\sin(2x+2\delta x).\sin 2x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{-\sin(2\delta x)}{\sin(2x+2\delta x).\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2\delta x)}{\sin(2x+2\delta x)\sin 2x\delta x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(2x+2\delta x)\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\delta x)}{2\delta x}\times 2$$

$$= -\frac{1}{\sin 2x.\sin 2x}\times 1\times 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(\cot 2x) = -2\cos ec^2 2x.$$

4. మూల సూత్రం నుండి $2\sin^2 x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = 2\sin^2 x$

$$y+\delta y - y = 2\sin^2(x+\delta x)$$

$$\delta y = 2\left(\sin^2(x+\delta x) - \sin^2 x\right)$$

$$= 2\sin(x+\delta x+x).\sin(x+\delta x-x)$$

$$= 2\sin(2x+\delta x)\sin\delta x$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{2\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\delta x}$$

$$= 2\lim_{\delta x\to 0}\sin(2x+\delta x).\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2.\sin 2x\times 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(2\sin^2 x\right) = 2\sin 2x$$

5. మూల సూత్రం నుండి $Tan^2 x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = Tan^2 x$ అనుకొనుము.

$$y+\delta y = Tan^2(x+\delta x)$$

$$y+\delta y-y=Tan^2(x+\delta x)-Tan^2x$$

$$\delta y=\frac{\tan^2(x+\delta x)}{\cos^2(x+\delta x)}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2(x+\delta x).\cos^2(x+\delta x)\sin^2 x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$=\frac{(\sin(x+\delta x)\cos x+\cos(x+\delta x)\sin x)x(\sin(x+\delta x)\cos x-\cos(x+\delta x)\sin x)}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin(x+\delta x+x).\sin(x+\delta x-x)}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$\delta y=\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{cox^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{cox^2(x+\delta x)\cos^2 x\times\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x\times\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin(2x+\delta x)}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}\times\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}$$

$$=\frac{\sin 2x}{\cos^2 x.\cos^2 x}\times 1$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{dy}{dx}=2\ Tanx.\sec^2 x$$ లేదా

$$\frac{d}{dx}\left(Tan^2x\right)=2Tanx.\sec^2 x$$

6. $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$ అయినా $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనండి.

సాధన: $x = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t)$

$$\frac{dx}{dt} = a(1 + \cos t), \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

గొలుసు నియమము నుండి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{a \sin t}{a(1 + \cos t)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = Tan \frac{t}{2}$$

7. $f(x) = \sin 2x \cos 3x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

$$f(x) = \sin 2x \cos 3x$$

$$f^1(x) = \sin 2x . \frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x . \frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= \sin 2x . \sin 3x \frac{d}{dx}(3x) + \cos 3x \times 2 \cos 2x \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= -3 \sin 2x . \sin 3x + 2 \cos 3x . \sin 2x$$

$$\therefore f^1(x) = 2 \cos 3x \sin 2x - 3 \sin 2x . \sin 3x$$

8. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ వద్ద $x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times (2 \times 1 + 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\left(2\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= -2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{6} \quad (\because \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

9. $y = \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)$ ప్రమేయానికి $x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x.\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x).\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-(1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

$x=\frac{\pi}{4}$ వద్ద

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)=2+\sqrt{2}$$

10. $\cos y=x\cos(a+y)$ అయిన $\frac{dy}{dx}=\cos^2\left(\frac{a+y}{\sin a}\right)$ అని చూపండి.

సాధన: $\cos y=x\cos(a+y)$ లేదా

$$x=\frac{\cos y}{\cos(a+y)}$$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా,

$$1=\frac{\left(\cos(a+y).(-\sin y)-\cos y.(-\sin(a+y))\right)}{\cos^2(a+y)}\frac{dy}{dx}$$

$$1=\left[\frac{-\sin y\cos(a+y)+\cos y\sin(a+y)}{\cos^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore 1=\frac{\sin(a+y-y)}{\cos^2(a+y)}.\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

11. మూల సూత్రం నుండి $\sin^{-1}x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y=\sin^{-1}x$ అనుకొనిన $x=\sin y$

$$\therefore x+\delta x=\sin(y+\delta y)$$

$$\delta x\to 0\Rightarrow \sin(y+\delta y)-\sin y$$

ఇరువైపుల δx తో భాగించగా

$$1=\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}\Rightarrow 1=\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}.\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$1=\lim_{\delta y\to 0}\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$1=\lim_{\delta y\to 0}\frac{2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta y}.\frac{dy}{dx}$$

$$=\lim_{\delta y\to 0}\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\times\lim_{\delta y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\left(\frac{\delta y}{2}\right)}.\frac{dy}{dx}$$

$$1 = \cos y \times 1 \times \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12. మూల సూత్రం నుండి $\sec^{-1} x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sec^{-1} x$ అనుకొనిన $x = \sec y$ మరియు

$$x + \delta x = \sec(y + \delta y)$$

$$\delta x \to 0 \Rightarrow \delta y \to 0$$

$$\delta x = \sec(y + \delta y) - \sec y$$

$$1 = \frac{\sec(y+\delta y) - \sec y}{\delta x}$$

$$= \frac{\sec(y+\delta y) - \sec y}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$1 = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sec(y+\delta y) - \sec y}{\delta y} \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta y \to 0} \frac{2\sin\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta y . \cos y \cos(y+\delta y)} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dx} \lim_{\delta y \to 0} \frac{2\sin\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta y . \cos y \cos(y+\delta y) . \delta y}$$

$$= \frac{dy}{dx} \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)}{\cos y . cox(y+\delta y)} \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\left(\frac{\delta y}{2}\right)}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\sin y}{\cos y . \cos y} \times 1$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \sec y, Tany$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y Tany} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

13. డెల్టా పద్ధతి ద్వారా $\sin^{-1}\sqrt{x}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ అనుకొనిన $\sin y = \sqrt{x}$

మరియు $\sin\left(y + \delta y\right) = \sqrt{x + \delta x}$

$$\sin\left(y + \delta y\right) = \sin(y + \delta y) - \sin y = \sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}$$

$$2\cos\left(y + \frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right) = \frac{\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}} \times \sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{\delta x}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{2\cos\left(y + \frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}}$$

లేదా $$\frac{\delta y}{\delta x} \frac{2\cos\left(y + \frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\left(\frac{\delta y}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}\lim_{\delta y\to 0}\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\lim_{\delta y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\left(\frac{\delta y}{2}\right)}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

$$(\because \delta x\to 0\Rightarrow \delta y\to 0)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\cos y.1=\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}\cos y}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\sqrt{x}\right)==\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

14. $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y=\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

$x=\cot\theta$ అనుకొనిన, $\theta=\cot^{-1}x$

$$\sqrt{1+x^2}+x=\sqrt{1+\cot^2\theta}+\cot\theta$$

$$=\cos ec\theta+\cot\theta$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore y=\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$y = \frac{\theta}{2}$$

$$y = \frac{\cot^{-1} x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right) = \frac{-1}{2\left(1+x^2\right)}$$

15. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ దృష్ట్యా. $Tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ యొక్క అవకలనం 1 అని చూపండి.

సాధన: $y = Tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ మరియు $z = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ అనుకొనుము.

$x = Tan\theta$ అనుకొనిన

$y = Tan^{-1}\left(\frac{2Tan\theta}{1-Tan^2\theta}\right)$ మరియు $z = \sin^{-1}\left(\frac{2Tan\theta}{1+Tan^2\theta}\right)$

$= Tan^{-1}\left(Tan2\theta\right)$ మరియు $z = \sin^{-1}\left(\sin 2\theta\right)$

$y = 2\theta$ మరియు $z = 2\theta$

$\therefore \frac{dy}{d\theta} = 2\times 1 = 2$ $\qquad$ $\frac{dz}{d\theta} = 2\times 1 = 2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}.\frac{d\theta}{dz}$ (గొలుసు నియమము ద్వారా)

$= 2.\frac{1}{2} = 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$

16. $Tan^{-1}x$ దృష్ట్యా $\dfrac{Tan^{-1}x}{1+Tan^{-1}x}$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y-\dfrac{Tan^{-1}x}{1+Tan^{-1}x}$ మరియు $Z=Tan^{-1}x$

$x=Tan\theta$ అయిన $\theta=Tan^{-1}x$

$\therefore y=\dfrac{\theta}{1+\theta}$ మరియు $Z=\theta$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\theta).1-\theta.1}{(1+\theta)^2},\frac{dz}{d\theta}=1$$

$$=\frac{1}{(1+\theta)^2}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{\left(1+Tan^{-1}x\right)^2}$$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dx}$ (గొలుసు నియమము ద్వారా)

$$=\frac{1}{\left(1+Tan^{-1}x\right)^2}\times 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(1+Tan^{-1}x\right)^2}.$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $y = \sin^{-1} x$ అయిన, $\left(1-x^2\right) y_2 - xy_1 = 0$ అని చూపండి. ఇందులో y_2 మరియు y_1లు x దృష్ట్యా రెండవ తరగతి మరియు మొదటి తరగతి అవకలజాలు.

సాధన: $y = \sin^{-1} x$ అనుకొనిన

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\left(1-x^2\right) {y_1}^2 = 0$$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\left(1-x^2\right) 2y_1 . \frac{d}{dx}(y_1) + (-2x).{y_1}^2 = 0$$

$$\left(1-x^2\right) 2y_1 y_2 - 2x{y_1}^2 = 0$$

$$\therefore \left(1-x^2\right) y_2 - xy_1 = 0$$

2. $y = x^2 Tan^{-1} x$ యొక్క రెండవ తరగతి అవకలజాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $y = x^2 Tan^{-1} x$ అయిన

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = x^2 . \frac{d}{dx}\left(Tan^{-1} x\right) + Tan^{-1} x . \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= x^2 . \frac{1}{1+x^2} + Tan^{-1} x (2x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1+x^2}+2xTan^{-1}x$$

తిరిగి x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(1+x^2\right)2x-x^2.(2x)}{\left(1+x^2\right)^2}+2\left(x.\frac{1}{1+x^2}+Tan^{-1}x.1\right)$$

$$=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}+2\left[\frac{x}{1+x^2}+Tan^{-1}x\right]$$

$$=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{2x}{1+x^2}+2Tan^{-1}x$$

$$=\frac{2x+2x+\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+2Tan^{-1}x$$

$$=\frac{4x+2x^3}{\left(1+x^2\right)^2}+2Tan^{-1}x$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x\left(2+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+2Tan^{-1}x$$

3. $y=\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x\right)^2$ అయిన $\left(1-x^2\right)y_2-xy_1=1$ అని చూపండి.

సాధన: $y=\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x\right)^2$ అయిన

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\times 2\sin^{-1}x.\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_1=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,y_1=\sin^{-1}x$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$\left(1-x^2\right){y_1}^2=\left(\sin^{-1}x\right)^2$$

$$\therefore\left(1-x^2\right){y_1}^2=2y$$

ఇరువైపుల x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\left(1-x^2\right)2y_1.y_2+{y_1}^2\left(-2x\right)=2y_1$$

$$\therefore\left(1-x^2\right)y_2-xy_1=1$$

4. $y=\sin\left(\sin x\right)$ అయిన $\frac{d^2y}{dx^2}+Tanx\frac{dy}{dx}+y\cos^2x=0$ అని చూపండి.

సాధన: $y=\sin\left(\sin x\right)$ ... (1)

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(\sin x\right)\times\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(\sin x\right).\cos x$$

$$\Rightarrow\cos\left(\sin x\right)=\frac{1}{\cos x}.\frac{dy}{dx}\ \ldots\ (2)$$

x దృష్ట్యా తిరిగి అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos(\sin x).\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x.\frac{d}{dx}(\cos(\sin x))$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos(\sin x)\sin x - \cos x.\sin(\sin x).\cos x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} \times \frac{1}{\cos x}\sin x - \left(\cos^2 x\right)y$$

($\because$ సమీకరణం 1,2 ల నుండి $y = \sin(\sin x)$, $\frac{1}{\cos x}.\frac{dy}{dx} = \cos(\sin x)$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -Tanx\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + Tanx\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$$

5. $y = \cos(\cos x)$ అయిన $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x.\frac{dy}{dx} + y\sin^2 x = 0$ అని చూపండి.

సాధన: $y = \cos(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\cos x) \times -\sin x$$

$$= \sin x \sin(\cos x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x.\frac{d}{dx}(\sin(\cos x)) + \sin(\cos x).\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \sin x.\cos(\cos x)(-\sin x) + \sin(\cos x).\cos x$$

$$= -\sin^2 x.y + \frac{dy}{dx} \times \frac{1}{\sin x}\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y\sin^2 x + \cot x.\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \frac{dy}{dx} + y\sin^2 x = 0$$

6. $y = Tan^{-1}x$ అయిన $\left(1+x^2\right)y_2 + 2xy_1 = 0$ అని చూపండి.

సాధన: $y = Tan^{-1}x$ అనుకొనిన,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \left(1+x^2\right)y_1 = 1$$

x దృష్ట్యా తిరిగి అవకలనం చేయగా

$$\left(1+x^2\right)y_2 + y_1(2x) = 0$$

$$\therefore \left(1+x^2\right)y_2 + 2xy_1 = 0$$

23

ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయముల అవకలనం

సామాన్యముగా జనాభా సంఖ్య పెరుగునని మనకు తెలుసు. మరికొన్ని విషయములలో తరుగుదలను కూడా గమనించగలము. చాలా విషయములలో పెరుగుదల మరియు తగ్గుదల అనునవి అవిచ్ఛినముగా ఉంటూ ఉండటాన్ని గమనించగలము. ఉదాహరణగా ఆర్థిక వ్యవస్థ, వ్యవసాయం మరియు వ్యాపారరంగం. వీటిలో అవిచ్ఛిన్నముగా పెరుగుదల మరియు తగ్గుదల ఉంటాయి. ప్రస్తుతం ఉన్న 10,00,000 బాక్టీరియాలు 10గంటలలో రెట్టింపు అవుతాయని అనుకొంటే, ఇవి 30,00,000 కావడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది అనే విషయం తెలుసుకోవాలనే సమస్యలకు జవాబును సంకలన పద్ధతి లేక గుణిజపద్ధతి కాకుండా మరియొక విధముగా తెలుసుకొనుటకు ఘాత ప్రమేయం ఉపయోగపడుతుంది. ఘాత ప్రమేయము సంవర్గ మాన ప్రమేయమునకు విలోమము.

ఈ పాఠ్యాంశము నందు ఘాత ప్రమేయము మరియు దాని యొక్క అవకలనములను గూర్చి తెలుసుకొందాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము నేర్చిన తరువాత, ఈ క్రింది విషయములను మీరు తెలుసుకొంటారు.

- ఘాత మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయముల నిర్వచనము మరియు అవకలజములు.
- బీజగణిత, త్రికోణమితీయ, ఘాత మరియు సంవర్గమాన ఘాత ప్రమేయముల అవకలజములు మరియు
- వాటి యొక్క రెండవ తరగతి అవకలజములు.

ముఖ్యాంశాలు :

- $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$
- $\frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right)=ae^{ax+b}$
- $\frac{d}{dx}\left(\log x\right)=\frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}\left[\log\left(ax+b\right)\right]=\frac{a}{ax+b}$
- $\frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=a^{x}\log a$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $e^{-\frac{7}{2}x}$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{7}{2}x}\right)=e^{-\frac{7}{2}x}.\frac{d}{dx}\left(-\frac{7}{2}x\right)$

$$=e^{-\frac{7}{2}x}\times-\frac{7}{2}\times1=-\frac{7}{2}e^{-\frac{7}{2}x}$$

2. $e^{x^2}+2x$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}+2x\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)+\frac{d}{dx}(2x)$

$$=e^{x^2}\times2x+2\times1=2xe^{x^2}+2$$

3. $y=5\sin x-2e^x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y=5\sin x-2e^x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[5\sin x-2e^x\right]$$

$$=5\frac{d}{dx}(\sin x)-2\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$

$$=5\cos x-2e^x\cdot$$

4. $y=\frac{1}{3}e^x-5e$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y=\frac{1}{3}e^x-5e$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}e^x-5e\right]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)-5.\frac{d}{dx}(e)$$

$$=\frac{1}{3}e^{x}-5\times 0 \quad (\because e = \text{స్థిరపదము})$$

$$=\frac{e^{x}}{3}$$

5. $y=e^{\sqrt{x+1}}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y=e^{\sqrt{x+1}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x+1}}\right)=e^{\sqrt{x+1}}.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$=e^{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$$

6. $y=\log\sqrt{x}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y=\log\sqrt{x}=\log x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\log x\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}.$$

7. $f(x)=5\sin x-2\log x$ ప్రమేయ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $f'(x)=\frac{d}{dx}\left[5\sin x-2\log x\right]$

$$=5\frac{d}{dx}(\sin x)-2\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= 5.\cos x - 2.\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x) = 5\cos x - \frac{2}{x}.$$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $f(x) = e^{x\sin^2 x}$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $f(x) = e^{x\sin^2 x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\sin^2 x}\right)$$

$$= e^{x\sin^2 x} \times \frac{d}{dx}\left(x\sin^2 x\right)$$

$$= e^{x\sin^2 x}\left[x.\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x\right) + \sin^2 x.\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= e^{x\sin^2 x}\left[x.2\sin x.\cos x + \sin^2 x \times 1\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x\sin^2 x}.\sin x\left(2x\cos x + \sin x\right)$$

2. $f(x) = (x-1)e^x$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $f(x) = (x-1)e^x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(x-1)e^x\right]$$

$$= (x-1)\frac{d}{dx}\left(e^x\right) + e^x.\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$= (x-1).e^x + e^x \times 1$$

$$= e^x\left(x-1+1\right)$$

$$\therefore f'(x) = xe^x.$$

3. $f(x) = e^{2x}.\sin^2 x$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x}.\sin^2 x\right)$

$$= e^{2x}.\frac{d}{dx}\left(\sin^2 x\right) + \sin^2 x.\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)$$

$$= e^{2x}.2\sin x\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) + \sin^2 x.e^{2x}.\frac{d}{dx}\left(2x\right)$$

$$= e^{2x}.2\sin x\cos x + \sin^2 x.e^{2x}\times 2$$

$$\therefore f'(x) = 2\sin x\, e^{2x}\left(\cos x + \sin x\right)$$

4. $y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+1}.\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) - e^{2x}.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}.e^{2x}\times 2 - e^{2x}\times\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\times 2x}{x^2+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}.\left(x^2+1\right) - xe^{2x}}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{e^{2x}\left(2x^2+2-x\right)}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5. $y = \log\left(\sec x + \tan x\right)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log(\sec x + \tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\log(\sec x + \tan x)\right]$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} . \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x}\left(\sec x \tan x + \sec^2 x\right)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \times \sec x(\tan x + \sec x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec x$$

6. $y = \log(\log x)$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log(\log x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\log(\log x)\right]$$

$$= \frac{1}{\log x} \times \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= \frac{1}{\log x} \times \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$$

7. $y = \log(\sin(\log x))$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = \log(\sin(\log x))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\log(\sin(\log x))\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(\log x)} \times \frac{d}{dx}\left[\sin(\log x)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(\log x)} \times \cos(\log x) \times \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= \cot(\log x) \times \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cot(\log x)}{x}$$

8. $y = e^{x^2}.\log x$ అవకలజం $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

సాధన : $y = e^{x^2}.\log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{x^2}.\log x\right]$$

$$= e^{x^2}.\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)$$

$$= e^{x^2} \times \frac{1}{x} + \log x.e^{x^2} \times 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x^2}\left(\frac{1}{x} + 2x\log x\right)$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $y = x^x$ ప్రమేయ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = x^x$

$$\log y = \log x^x$$

$$\log y = x\log x$$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x \log x)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \log x.1$$

$$\frac{dy}{dx} = y[1 + \log x]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^x (1 + \log x)$$

2. $y = 5^x$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = 5^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5^x)$$

$$= 5^x \log 5$$

3. $y = \sin(5^x)$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y = \sin(5^x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sin(5^x)\right]$$

$$= \cos(5^x).\frac{d}{dx}(5^x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(5^x).5^x.\log 5$$

4. $y=(\tan x)^x$ అవకలజం కనుగొనుము.

సాధన : $y=(\tan x)^x$

$$\log y=\log(\tan x)^x$$

$$\log y = x\log\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}[x\log\ \tan x]$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=x.\frac{d}{dx}(\log\tan x)+\log\tan x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x.\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x+\log\tan x.1$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{x}{\sin x\cos x}+\log\tan x\right]$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=(\tan x)^x\left[\frac{x}{\sin x\cos x}+\log\tan x\right]$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $x^y=e^{x-y}$ అయిన $\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$ అని చూపండి.

సాధన : $x^y=e^{x-y}$

$$\log x^y=\log e^{x-y}$$

$$y\log x=(x-y)\log e$$

$$=(x-y).1$$

$$y\log x + y = x$$

$$y(\log x + 1) = x$$

$$y = \frac{x}{1+\log x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+\log x}\right]$$

$$= \frac{(1+\log x).\frac{d}{dx}(x) - x.\frac{d}{dx}(1+\log x)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{(1+\log x).1 - x.\frac{1}{x}}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{1+\log x - 1}{(1+\log x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

2. $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\infty}}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ విలువ ఎంత?

సాధన : $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\infty}} = (\cos x)^y$

$$\log y = \log(\cos x)^y$$

$$= y\log(\cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\left[y.\log(\cos x)\right]$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = y.\frac{d}{dx}\left[\log\left(\cos x\right)\right] + \left(\log\cos x\right).\frac{dy}{dx}$$

$$= y.\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\left(\cos x\right) + \left(\log\cos x\right).\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \log\left(\cos x\right).\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\cos x}\left(-\sin x\right)$$

$$\left[\frac{1}{y} - \log\left(\cos x\right)\right].\frac{dy}{dx} = -y\tan x$$

$$\left(\frac{1 - y\log\cos x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -y\tan x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\tan x}{1 - y.\log\cos x}$$

3. $y = \left(\tan x\right)^{\cot x} + \left(\cot x\right)^{x}$ అవకలనము కనుక్కోండి.

సాధన : $y = \left(\tan x\right)^{\cot x} + \left(\cot x\right)^{x}$

$y_1 = \left(\tan x\right)^{\cot x}$, $y_2 = \left(\cot x\right)^{x}$ అనుకొనుము.

$$\therefore y = y_1 + y_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \qquad \text{.... (i)}$$

$$y_1 = \left(\tan x\right)^{\cot x}$$

$$\log y_1 = \log\left(\tan x\right)^{\cot x}$$

$$\log y_1 = \cot x.\log\left(\tan x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log y_1\right) = \frac{d}{dx}\left[\cot x.\log\left(\tan x\right)\right]$$

$$\frac{1}{y_1}.\frac{dy_1}{dx} = \cot x\frac{d}{dx}\left[\log\left(\tan x\right)\right] + \log\left(\tan x\right)\frac{d}{dx}\left(\cot x\right)$$

$$= \cot x.\frac{1}{\tan x}.\frac{d}{dx}(\tan x) + \log(\tan x)\left(-\text{cosec}^2 x\right)$$

$$= \frac{\cot x}{\tan x}.\sec^2 x - \text{cosec}^2 x.\log(\tan x)$$

$$= \text{cosec}^2 x - \text{cosec}^2 x.\log\tan x$$

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = \text{cosec}^2 x(1 - \log\tan x)$$

$$\therefore \frac{dy_1}{dx} = y_1\left[\text{cosec}^2 x(1 - \log\tan x)\right]$$

$$\therefore \frac{dy_1}{dx} = (\tan x)^{\cot x}.\text{cosec}^2 x.(1 - \log\tan x) \quad \ldots \text{(ii)}$$

$$y_2 = (\cot x)^x$$

$$\log y_2 = \log(\cot x)^x$$

$$\log y_2 = x.\log\cot x \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log y_2) = \frac{d}{dx}[x\log\cot x]$$

$$\frac{1}{y_2}.\frac{dy_2}{dx} = x.\frac{d}{dx}\left[\log(\cot x)\right] + \log(\cot x).\frac{d(x)}{dx}$$

$$= x.\frac{1}{\cot x}.\frac{d}{dx}(\cot x) + \log(\cot x).1$$

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx} = \frac{x}{\cot x}.\left(-\text{cosec}^2 x\right) + \log(\cot x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2\left[\frac{-x\text{cosec}^2 x}{\cot x} + \log\cot x\right]$$

$$= (\cot x)^x\left[-\frac{x}{\sin x\cos x} + \log\cot x\right]$$

(లేదా)

$$\therefore \frac{dy_2}{dx} = (\cot x)^x \left[-x \operatorname{cosec}^2 x . \tan x + \log \cot x \right] \qquad \ldots \text{(iii)}$$

$\therefore$ (i), (ii), (iii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\cot x} . \operatorname{cosec}^2 x (1 - \log \tan x) + (\cot x)^x \left[-x \operatorname{cosec}^2 x \tan x + \log \cot x \right]$$

4. $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$ అవకలజము కనుక్కోండి.

సాధన : $y_1 = x^{\tan x}$

$y_2 = (\sin x)^{\cos x}$ అనుకొనిన

$y = y_1 + y_2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \qquad \ldots \text{(i)}$$

$y_1 = x^{\tan x}$

$\log y_1 = \log x^{\tan x}$

$\log y_1 = \tan x . \log x$

$$\frac{1}{y_1} . \frac{dy_1}{dx} = \tan x . \frac{d}{dx}(\log x) + \log x . \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \tan x . \frac{1}{x} + \log x . \sec^2 x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \left[\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \log x \right]$$

$$\therefore \frac{dy_1}{dx} = x^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \log x\right] \quad \ldots \text{(ii)}$$

$$y_2 = (\sin x)^{\cos x}$$

$$\log y_2 = \log(\sin x)^{\cos x}$$

$$\log y_2 = \cos x.\log(\sin x)$$

$$\frac{d}{dx}(\log y_2) = \frac{d}{dx}[\cos x.\log\sin x]$$

$$\frac{1}{y_2}.\frac{dy_2}{dx} = \cos x.\frac{d}{dx}(\log\sin x) + \log\sin x.\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos x.\frac{1}{\sin x}.\frac{d}{dx}(\sin x) + \log\sin x.(-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}.\cos x - \sin x\log\sin x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log\sin x\right]$$

$$\therefore \frac{dy_2}{dx} = (\sin x)^{\cos x}[\cos x.\cot x - \sin x\log\sin x] \quad \ldots \text{(iii)}$$

$\therefore$ (i), (ii), (iii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\tan x}\left(\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x\log x\right) + (\sin x)^{\cos x}[\cos x\cot x - \sin x\log\sin x]$$

5. $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \ldots\infty}}}$ అయిన $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$ అని చూపండి.

సాధన : $y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+...\infty}}}$ అనుకొనిన

$$y=\sqrt{\log x+y}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా,

$$\therefore y^2=\log x+y$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(\log x+y\right)$$

$$2y.\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log x\right)+\frac{dy}{dx}$$

$$2y.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{dy}{dx}$$

$$2y.\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\left(2y-1\right).\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\left(2y-1\right)}$$

6. $y=e^{a\cos^{-1}x}$ అయిన $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$ అని చూపుము.

సాధన : $y=e^{a\cos^{-1}x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{a\cos^{-1}x}\right)$$

$$=e^{a\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}\left(a\cos^{-1}x\right)$$

$$=e^{a\cos^{-1}x}\left(\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{1-x^2}$$

$$\left(1-x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2y^2$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{d}{dx}\left(a^2y^2\right)$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 . \frac{d}{dx}\left(1-x^2\right) = a^2.2y.\frac{dy}{dx}$$

$$\left(1-x^2\right).2\frac{dy}{dx}.\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(-2x\right) = 2a^2y\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx}\left[\left(1-x^2\right).\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx}\right] = 2a^2y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = a^2y$$

$$\therefore \left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

7. $y = e^{\tan^{-1}x}$ అయిన $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(2x-1\right)\frac{dy}{dx} = 0$ అని చూపుము.

సాధన : $y = e^{\tan^{-1}x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\tan^{-1}x}\right)$$

$$= e^{\tan^{-1} x} . \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan^{-1} x} . \frac{1}{1+x^2} = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$$

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = y \quad \left(\because\ y = e^{\tan^{-1} x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] = \frac{dy}{dx}$$

$$\left(1+x^2\right).\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}.\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right) = \frac{dy}{dx}$$

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.2x = \frac{dy}{dx}$$

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(2x-1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

8. $\left(x^x\right)^x$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $\left(x^x\right)^x$

$y_1 = x^x$ అనుకొనిన, $\quad y = y_1^x \quad \ldots$ (i)

$$\log y_1 = \log x^x$$

$$= x \log x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log y_1\right) = \frac{d}{dx}\left(x \log x\right)$$

$$\frac{1}{y_1}.\frac{dy_1}{dx} = x.\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x.\frac{1}{x} + \log x.1$$

$$\frac{1}{y_1}.\frac{dy_1}{dx} = 1 + \log x$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1(1 + \log x)$$

$$\frac{dy_1}{dx} = x^x(1 + \log x) \qquad \ldots \text{(ii)}$$

(i) నుండి

$$y = y_1^x$$

$$\log y = \log y_1^x$$

$$\log y = x \log y_1$$

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x \log y_1)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}(\log y_1) + \log y_1.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x.\frac{1}{y_1}.\frac{dy_1}{dx} + \log y_1.1$$

$$= \frac{x}{x^x}.x^x(1 + \log x) + \log x^x$$

$$= x(1 + \log x) + x \log x$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x + 2x \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(x + 2x\log x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(x^x\right)^x.\left[x + 2x\log x\right]$$

9. $x^{\left(x^x\right)}$ అవకలనం కనుక్కోండి.

సాధన : $y = x^{\left(x^x\right)}$

$y_1 = x^x$ అనుకొనిన, $y = x^{y_1}$

$$\log y = \log x^{y_1}$$

$$\log y = y_1 \log x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log y\right) = \frac{d}{dx}\left(y_1 \log x\right)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = y_1.\frac{d}{dx}\left(\log x\right) + \log x.\frac{dy_1}{dx} \qquad \left(\because \frac{dy_1}{dx} = x^x\left(1 + \log x\right)\right)$$

$$= y_1.\frac{1}{x} + \log x.x^x\left(1 + \log x\right)$$

$$= \frac{x^x}{x} + x^x \log x\left(1 + \log x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[x^{x-1} + x^x \log x\left(1 + \log x\right)\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\left(x^x\right)}\left[x^{x-1} + x^x \log x\left(1 + \log x\right)\right].$$

10. $y = \left(\tan x\right)^{\log x} + \left(\cos x\right)^{\sin x}$ అవకలజం కనుక్కోండి.

సాధన : $y=(\tan x)^{\log x}+(\cos x)^{\sin x}$

$y_1=(\tan x)^{\log x}$, $y_2=(\cos x)^{\sin x}$ అనుకొనిన

$$y=y_1+y_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx} \qquad \ldots \text{(i)}$$

$$y_1=(\tan x)^{\log x}$$

$$\log y_1=\log(\tan x)^{\log x}$$

$$\log y_1=\log x.\log(\tan x)$$

$$\frac{d}{dx}(\log y_1)=\frac{d}{dx}\left[\log x.\log(\tan x)\right]$$

$$\frac{1}{y_1}.\frac{dy_1}{dx}=\log x.\frac{d}{dx}\left[\log(\tan x)\right]+\log(\tan x).\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\log x.\frac{1}{\tan x}.\frac{d}{dx}(\tan x)+\log(\tan x).\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\log x}{\tan x}.\sec^2 x+\frac{\log\tan x}{x}$$

$$\therefore \frac{dy_1}{dx}=y_1\left[\frac{\log x}{\sin x\cos x}+\frac{\log\tan x}{x}\right]$$

$$\therefore \frac{dy_1}{dx}=(\tan x)^{\log x}\left[2\operatorname{cosec} 2x.\log x+\frac{\log\tan x}{x}\right] \qquad \ldots \text{(ii)}$$

$$y_2=(\cos x)^{\sin x}$$

$$\log y_2=\log(\cos x)^{\sin x}$$

$$\log y_2=\sin x.\log\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\log y_2) = \frac{d}{dx}[\sin x \log\cos x]$$

$$\frac{1}{y_2}.\frac{dy_2}{dx} = \sin x.\frac{d}{dx}[\log\cos x] + \log\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \sin x.\frac{1}{\cos x}.\frac{d}{dx}(\cos x) + (\log\cos x)\cos x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}\times(-\sin x) + \cos x\log\cos x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2[-\sin x\tan x + \cos x\log\cos x]$$

$$= (\cos x)^{\sin x}.[-\sin x\tan x + \cos x\log\cos x] \quad \ldots \text{(iii)}$$

$\therefore$ (i), (ii), (iii) ల నుండి

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\cos x}\left[2\text{cosec}2x.\log x + \frac{\log\tan x}{x}\right] + (\cos x)^{\sin x}[-\sin x\tan x + \cos x\log\sin x]$$

24

స్పర్శ రేఖలు మరియు అభిలంబరేఖలు

"X – అక్షం ధన దిశతో అపసవ్యదిశలో L అనే ఊర్ధ్వేతర రేఖ θ కోణం చేస్తే, $\tan\theta$ ను ఆ సరళరేఖవాలు" అంటామని ఇంతకు ముందర పాఠ్యాంశాలలో నేర్చుకొని ఉన్నాము. ఊర్ధ్వంగా లేని సరళరేఖ వాలుని సాధారణంగా m తో సూచిస్తాం.

అదే విధముగా (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ వాలు, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ఈ పాఠ్యాంశములో ఒక వక్రానికి స్పర్శరేఖ నిర్వచనం, అవకలజానికి జ్యామితీయ వివరణ, రోల్ సిద్ధాంతం మరియు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం – వాటి అనువర్తనాల గురించి నేర్చుకుందాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము నేర్చుకొన్న, మీరు ఈ క్రింది విషయాలను నేర్చుకొంటారు.

- ఒక వక్రానికి ఒక బిందువు వద్ద గల స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖ.
- స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు.
- రోల్ సిద్ధాంతము మరియు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం.
- పై సిద్ధాంతములను ఉపయోగించుటకు కావలసిన నియమములు మరియు వాటిని ఉపయోగించి లెక్కలను సాధించుట.

ముఖ్యాంశాలు :

1. $y = f(x)$ వక్రంపై $p(a,b)$ ఒక బిందువు అనుకొందాం. అప్పుడు

   - P వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $= m = f'(a) = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}$
   - P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y - b = m(x - a)$
   - అభిలంబరేఖ వాలు = $\dfrac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}} = -\dfrac{1}{m}$

- P వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణం, $y-b=\frac{-1}{m}(x-a)$

2. $P(a,b)$ వద్ద $y=f(x)$ వక్రమునకు స్పర్శరేఖ
   - X –అక్షమునకు సమాంతరముగా నున్న యెడల, దాని సమీకరణము $y=b$ అగును.
   - Y – అక్షమునకు సమాంతరముగా నున్న, స్పర్శరేఖ సమీకరణం $x=a$ అగును.

3. **రోల్ సిద్ధాంతం :**

   $[a,b]$ పై నిర్వచించిన వాస్తవ ప్రమేయము అనుకొందాం.
   - $[a,b]$ పై f అవిచ్ఛిన్నము
   - (a,b) పై f అవకలనీయము
   - $f(a)=f(b)$

   అయిన యెడల $f'(c)=0$ అయ్యేటట్లుగా వివృతాంతరం (a,b) లో కనీసం ఒక బిందువు 'c' ఉంటుంది.

4. **లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం**

   $[a,b]$ పై నిర్వచింపబడిన వాస్తవ ప్రమేయము f.
   - $[a,b]$ పై f అవిచ్ఛిన్నము
   - (a,b) పై f అవకలనీయము. అప్పుడు $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ అయ్యేటట్లుగా, కనీసం ఒక $c,(a,b)$ లో ఉంటుంది.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. (x_1,y_1) **బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము వ్రాయండి.**

సాధన : $y-y_1=m(x-x_1)$ $(\because m \rightarrow$ స్పర్శరేఖ వాలు$)$

2. (x_1,y_1) **బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణము వ్రాయండి.**

సాధన : $y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $x^2+3y+y^2=5$ **కు** $(1,1)$ **వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖల వాలులను కనుగొనుము.**

సాధన : $x^2+3y+y^2=5$

అవకలనము చేయగా

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(3y)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$2x+3.\frac{dy}{dx}+2y.\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3+2y)\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{3+2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=\frac{-2x}{3+2y}=\frac{-2}{5}$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $=\frac{-2}{5}$

అభిలంబరేఖ వాలు $=\frac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}}=\frac{-1}{\frac{-2}{5}}=\frac{5}{2}$

2. $xy=6,(1,6)$ **వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల వాలులు కనుగొనండి.**

సాధన : $xy=6$

అవకలనం చేయగా,

$$x.\frac{dy}{dx}+y.1=6$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6-y}{x}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,6)}=\frac{6-6}{1}=0$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $= m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,6)} = 0$

$\therefore$ అభిలంబ రేఖ వాలు $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{0} = \infty$.

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1+\cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ **వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల వాలులు కనుగొనండి.**

సాధన : $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1+\cos\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta),\ \frac{dy}{d\theta} = a(-\sin\theta) = -a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\frac{-2\sin\theta}{2}\ \frac{\cos\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{-\cot\theta}{2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\cot\frac{\pi}{2\times 2} = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $= m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$

అభిలంబ రేఖ వాలు $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$.

2.. (am^2, am^3) **బిందువు వద్ద** $ay^2 = x^3$ **వక్రమునకు అభిలంబ రేఖా సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన : $ay^2 = x^3$

అవకలనం చేయగా

$$a.2y.\frac{dy}{dx}=3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2ay}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(am^2,am^3\right)}=\frac{3.\left(am^2\right)^2}{2a.am^3}$$

$$=\frac{3a^2m^4}{2a^2m^3}$$

$$=\frac{3m}{2}$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $=\frac{3m}{2}$

$\therefore$ అభిలంబ రేఖ వాలు = $\frac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}}=\frac{-1}{\frac{3m}{2}}=\frac{-2}{3m}$

$\therefore$ అభిలంబ రేఖ సమీకరణం

$$y-y_1=\frac{-1}{m}\left(x-x_1\right)$$

$$y-am^3=\frac{-2}{3m}\left(x-am^2\right)$$

$$3my-3am^4=-2x+2am^2$$

$$\therefore 2x+3my=2am^2+3am^4$$

(లేదా) $2x+3my-am^2\left(2+3m^2\right)=0$

3. $x^2+y^2=18$ **వక్రమునకు ఏ బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖ సరళరేఖ,** $x+y=3$ **కు సమాంతరముగా ఉండును.**

సాధన : $x^2+y^2=18$ ...(i)

అవకలనం చేయగా

$$2x+2y.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $m_1=\frac{-x}{y}$

సరళరేఖ $x+y=3 \quad \ldots(ii)$

వాలు = $m_2=\frac{-a}{b}=\frac{-1}{1}=-1$

స్పర్శరేఖ, సరళరేఖ సమాంతరంగా ఉన్న వాటి వాలులు సమానము

$\therefore m_1=m_2$

$$\frac{-x}{y}=-1 \Rightarrow x=y$$

$x=y$ విలువను (i) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x^2+x^2=18$$

$$2x^2=18$$

$$x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$\therefore y=x=\pm 3$$

$\therefore$ ఆ బిందువు $=(3,3),(-3,-3)$.

4. $y=x^4-6x^3+13x^2-10x+5$ **కు** $(0,5)$ **వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణములు కనుక్కోండి.**

సాధన : $y=x^4-6x^3+13x^2-10x+5$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4x^3-18x^2+26x-10$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,5)}=-10$$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $=m=-10$

$\therefore$ (0, 5) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు సమీకరణము

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -10(x - 0)$$

$$y - 5 = -10x$$

$$10x + y - 5 = 0$$

అభిలంబరేఖ వాలు = $\dfrac{-1}{\text{స్పర్శరేఖ వాలు}} = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{-10} = \dfrac{1}{10}$

$\therefore$ (0, 5) వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణము

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$$

$$10y - 50 = x$$

$$\therefore x - 10y + 50 = 0.$$

5. $8k^2 = 1$ **అయిన వక్రములు** $x = y^2$ **మరియు** $xy = k$ **లు పరస్పరము లంబముగా ఖండించుకొంటాయని చూపుము.**

సాధన : వక్ర సమీకరణాలు

$$x = y^2 \qquad \ldots(\text{i})$$

$$xy = k \qquad \ldots(\text{ii})$$

$$\therefore y^2.y = k$$

$$y^3 = k \Rightarrow y = k^{\frac{1}{3}}$$

y విలువను (i) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x = \left(k^{\frac{1}{3}}\right)^2 = k^{\frac{2}{3}}$$

$\therefore$ వక్రముల ఖండన బిందువు $\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)$

(i) ని అవకలనం చేయగా

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(y^2\right)$$

$$1 = 2y.\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$\therefore$ (i) వాలు $m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}}$ ...(iii)

(ii) నుండి $xy = k$ ను అవకలనం చేయగా,

$$x.\frac{dy}{dx} + y.1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

(ii) వాలు $m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(k^{\frac{2}{3}}, k^{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{-k^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}} = \frac{-1}{k^{\frac{1}{3}}}$ ...(iv)

$\therefore$ (iii), (iv) ల నుండి

$$m_1.m_2 = \frac{1}{2k^{\frac{1}{3}}} \times \frac{-1}{k^{\frac{1}{3}}}$$

$$m_1 m_2 = \frac{-1}{2k^{\frac{2}{3}}}$$

$$(m_1m_2)^3 = \left(\frac{-1}{2k^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = \frac{-1}{8k^2} = \frac{-1}{1} = -1 \quad (\because 8k^2 = 1 \text{ దత్తాంశము})$$

$$\therefore m_1m_2 = -1$$

$\therefore$ (i), (ii) లు పరస్పరము లంబముగా ఖండించుకొంటాయి.

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{3} + 2x,\ x \in [0,3]$ **ప్రమేయమునకు రోల్ సిద్ధాంతమును సరిచూడండి.**

సాధన : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{3} + 2x,\ x \in [0,3]$

(i) $f(x)$ సమాసము కావున (0, 3) పై అవిచ్ఛిన్నము.

(ii) $f(x), (0,3)$ పై అవకలనీయము.

(iii) $f(0) = 0$

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{5\times 3^2}{3} + 2\times 3 = 9 - 15 + 6 = 0$$

$$\therefore f(0) = f(3)$$

రోల్ సిద్ధాంతములోని అన్ని నియమములు తృప్తి చెందినవి

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{5\times 2x}{3} + 2$$

$$= x^2 - \frac{10x}{3} + 2$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow c^2 - \frac{10c}{3} + 2 = 0$$

$$3c^2 - 10c + 6 = 0$$

$$c = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\times 3\times 6}}{2\times 3}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$\therefore c$ యొక్క రెండు విలువలు వివృతాంతరం $(0,3)$లో ఉన్నవి.

2. $f(x) = \sin x + \cos x - 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **ప్రమేయమునకు రోల్ సిద్ధాంతమును సరిచూడండి.**

సాధన : దత్త ప్రమేయము త్రికోణమితీయ ప్రమేయము.

$\therefore$ ఇది $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ పై అవిచ్ఛిన్నము మరియు $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ పై అవకలనీయము.

$f(0) = \sin 0 + \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$\therefore f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

రోల్ సిద్ధాంతములోని అన్ని నియమములు తృప్తి చెందినవి.

$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(c) = 0 \Rightarrow \cos c - \sin c = 0$

$\sin c = \cos c$

$\tan c = 1$

$\therefore c = \frac{\pi}{4}$

$c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ లో ఉంటుంది.

$c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ కావున

$f'(c) = 0$ అయ్యేటట్లు $c \in (0, \pi)$ లో ఉన్నది.

3. $y=(x-3)^2$ **పరావయలంపై (3,0), (4,1) లు రెండు బిందువులు. ఈ బిందువులను కలిపే జ్యా వక్రంపై ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటుందో కనుక్కోండి.**

సాధన : $y=(x-3)^2$ ను అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx}=2(x-3)$$

$$\therefore m_1=2(x-3)$$

(3,0), (4,1) లను కలిపే జ్యా వాలు $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m_2=\frac{1-0}{4-3}=1$$

సమాంతర రేఖల వాలులు సమానము i.e., $m_1=m_2$

$$\therefore 2(x-3)=1$$

$$x-3=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}=3.5$$

$\therefore x=3.5\in(3,4)$ (లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము ప్రకారం)

$x=3.5$ అయిన

$$y=(x-3)^2$$

$$=(3.5-3)^2=(0.5)^2=0.25=\frac{1}{4}$$

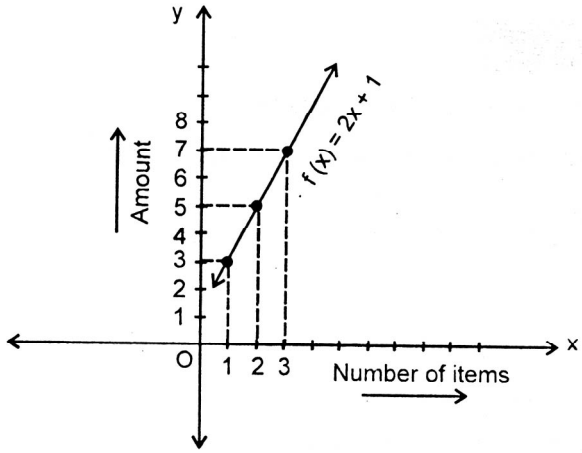
$\therefore$ వక్రంపై $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{4}\right)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమాంతరంగా ఉండును.

25

గరిష్ఠ - కనిష్ఠ విలువలు

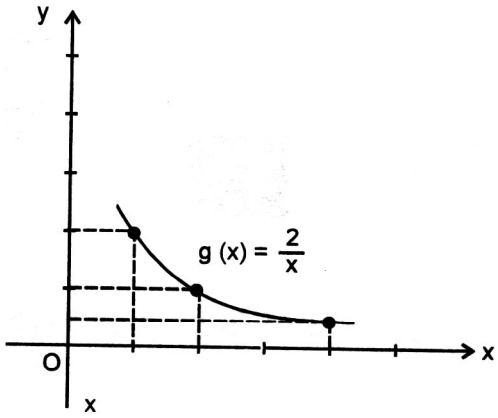
ఎలాంటి కొనుగోలులోనయినా, కొనే వస్తువుల సంఖ్య పెరిగిన కొలది చెల్లించాల్సిన మొత్తము పెరుగుతూ ఉంటుందని మనందరకు తెలుసు. $f(x) = 2x + 1,\ x > 0$ అనే ప్రమేయాన్ని పరిగణిద్దాం. 'x' కొనే వస్తువుల సంఖ్య అయినప్పుడు, $f(x)$ ప్రమేయము చెల్లించాల్సిన మొత్తాన్ని సూచిస్తుందనుకొందాం.

'x' విభిన్న విలువలకు $y = f(x) = 2x + 1, x > 0$ రేఖాచిత్రపటం పటం 25.1లో చూపబడింది.



పటం 25.1

పైరేఖాచిత్రాన్ని ఒకసారి పరిశీలిస్తే, x ధనాత్మక విలువలకు ప్రమేయం ఆరోహిస్తుండటాన్ని గమనించవచ్చు. x పెరిగినప్పుడు, ప్రమేయం విలువ తరగటాన్ని వేరే ఉదాహరణ ద్వారా ఊహించగలమా? అలాంటిదేదైనా కాలము, మానవశక్తికి సంబంధించినదై వుంటుంది. ఇవి విలోమానుపాతాన్ని సూచిస్తాయని మనం తెలుసుకోగలం. వేరే మాటల్లో చెప్పాలంటే పని చేసే వారి సంఖ్య తగ్గిపోతున్నప్పుడు, పని పూర్తయ్యే కాలం పెరుగుతుందని అర్థం చేసుకోగలం. అలాంటి ఒక ప్రమేయాన్ని $g(x) = \frac{2}{x},\ x > 0$ గా గ్రహించినప్పుడు 'x' విభిన్న విలువలకు $g(x)$ విలువలు పటం 25.2లో చిత్రీకరింపబడినాయి.



పటం 25.2

ఈ ఉదాహరణలను పరిశీలిస్తే, చలరాశులు విభిన్నములైనప్పటికీ ప్రమేయం ఆరోహిస్తుంది లేదా అవరోహిస్తుంది అనే ఉమ్మడి ధర్మాల గురించి తెలుసుకుంటాం. ఇంకా ప్రమేయాలు ఆరోహించే లేదా అధిరోహించే అంతరాలను చర్చిస్తూ, తద్వారా గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధిస్తాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠం చదివిన పిమ్మట మీరు నేర్చుకునే అంశాలు :

1. ఏకదిష్ట (ఆరోహణ మరియు అవరోహణ) ప్రమేయాన్ని నిర్వచించటం.
2. ఆరోహణ ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx} > 0$, అవరోహణ ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx} < 0$ అని తెలుసుకోవటం.
3. గరిష్ట, కనిష్ట బిందువులను నిర్వచించటం మరియు రేఖా చిత్రం ద్వారా ప్రమేయాల స్థానిక, గరిష్ట, కనిష్ట విలువల్ని గుర్తించటం.
4. మొదటి, రెండో తరగతి అవకలజాల ద్వారా ప్రమేయాలు గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను రాబట్టే ప్రక్రియను కనుక్కోవటం.
5. గరిష్ట, కనిష్ట విలువలపై సరళమైన సమస్యల్ని సాధించటం.

ముఖ్యాంశాలు

1. ఆరోహణ ప్రమేయం : $f(x)$ ప్రమేయము (a,b) అంతరంలో ఆరోహణ చెందితే ప్రతి $x_2 > x_1$ కి $d(x_2) > f(x_1)$ అవుతుంది.
2. అవరోహణ ప్రమేయం : $f(x)$ ప్రమేయము (a,b) అంతరంలో అవరోహణం చెందితే ప్రతి $x_2 > x_1$ కి

$d(x_2) < f(x_1)$ అవుతుంది.

3. ఒక అంతరంలో $x = a$ బిందువుకు ఎడమవైపు $f^1(x) > 0$, కుడివైపు $f^1(x) < 0$ అయితే $x = a$, $f(x)$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్టం ఉంటుంది.

4. ఒక అంతరంలో $x = a$ బిందువుకు ఎడమవైపు $f^1(x) < 0$, కుడివైపు $f^1(x) > 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్టం ఉంటుంది.

5. రెండో తరగతి అవకలన పరీక్ష :

1) $f^1(a) = 0, f^{11}(a) < 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్టం ఉంటుంది.

2) $f^1(a) = 0,\ f^{11}(a) > 0$ అయితే $x = a$ వద్ద $f(x)$ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్టం ఉంటుంది.

3) $f^1(a) = 0, f^{11}(a) = 0$ అయిన సందర్భంలో $x = a$ వద్ద గరిష్ట, కనిష్టలను నిర్ణయించడానికి x విలువ a ద్వారా పోయినప్పుడు $f^1(x)$ లో వచ్చే గుర్తు మార్పును పరిశీలిస్తాం.

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. ప్రతి $x \in R$ లకు $f(x) = 4x + 7$ ఏక దిష్ట ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన : x యొక్క రెండు విలువలు $x_1, x_2 \in R$ లు

$x_2 > x_1$ అయ్యేలా ఉన్నయనుకుందాం. ... (1)

(1)ని 4చే గుణించగా, $4x_2 > 4x_1$ ... (2)

(2)కు ఇరువైపులా 7 కూడగా $4x_2 + 7 > 4x_1 + 7$

అంటే $f(x_2) > f(x_1)$

అంటే $x_1 > x_1$ కి $f(x_2) > f(x_1)$ అయిందన్నమాట.

$\therefore f(x) = 4x + 7$ ఏకదిష్ట ప్రమేయం (ఆరోహిత ప్రమేయం.)

2. అన్ని $x \in R$ లకు $f(x) = 7 - 2x$ ప్రమేయము ఏకదిష్ట అవరోహణమవుతుందని చూపండి

సాధన: x యొక్క రెండు విలువలు $x_1, x_2 \in R$ లు

$x_2 > x_1$ అయ్యేలా ఉన్నాయనుకుందాం ... (1)

(1) ని -2చే గుణించగా $-2x_2 < -2x_1$ .. (2)

(2) కు ఇరువైపులా 7 కలుపగా $7-2x_2 < 7-2x_1$

అంటే $f(x_2) < f(x_1)$

అంటే $x_2 > x_1$ కి $f(x_2) < f(x_1)$ అయిందన్నమాట.

$\therefore f(x) = 7-2x$ ఏకదిష్ట అవరోహణ ప్రమేయం.

3. అన్ని $x < 0$ లకు $f(x) = x^2$ కచ్చిత అవరోహణ ప్రమేయమని చూపండి.

సాధన: x యొక్క ఏ రెండు విలువలకు అయిన, $x_1 > x_2$ గా గ్రహించి.. (1)

$x_2.x_2 < x_1, x_2$ (x^2 చే ఇరువైపులా గుణిస్తే)

$x_2{}^2 < x_1.x_2$ ...(2)

ఇంకనూ $x_1.x_2 < x_1.x_1$ (x_1 చే ఇరువైపులా గుణిస్తే)

$x_1x_2 < x_1{}^2$ ... (3)

(2), (3)ల నుండి $x_2{}^2 < x_1x_2 < x_1{}^2$

$\Rightarrow x_2{}^2 < x_1{}^2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

$\therefore$(1), (4)ల నుండి $x_2 > x_1$ కి $f(x_2) < f(x_1)$ కావున

అన్ని $x < 0$ లకు $f(x)$ కచ్చిత అవరోహణ ప్రమేయం.

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. x యొక్క మే విలువల వద్ద $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ప్రమేయం ఆరోహణం లేదా అవరోహణం అయ్యేది కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = x^2 - 6x + 8$

$f^1(x) = 2x - 6$

ఆరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x) > 0$

$\Rightarrow 2x - 6 > 0$

$\Rightarrow 2(x-3)>0$

$\therefore x-3>0$ కి $\Rightarrow x-3>0$ లేదా $x>3$

$f^1(x)<0$ ఆరోహణం

అవరోహణ ప్రమేయానికి $\Rightarrow 2x-6<0$

$\Rightarrow 2(x-3)<0$

$\Rightarrow x-3<0$ లేదా $x<3$

$\therefore x<3$ లేదా $f(x)$ అవరోహణం

2. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ ప్రమేయం ఆరోహణం లేదా అవరోహణం కాగల అంతరాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$

$f(x)=6x^2-6x-12$

$=6\left(x^2-x-2\right)$

$=6(x-2)(x+1)$

ఆరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x)>0$

$\Rightarrow 6(x-2)(x+1)>0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)>0$

రెండు కారణాంకాల లబ్ధం ధనాత్మకమైనపుడు, ఆ కారణాంకాలు రెండునూ ధనాత్మకం లేదా రుణాత్మకం అయి ఉండాలి.

అంటే $(x-2)>0$ మరియు $x+1>0$ మరియు $x-2<0$ మరియు $x<-1$

$\Rightarrow x>2, x>-1$ లేదా $x<2, x<-1$

$\Rightarrow x>2, x>-1$ లేదా $x<-1, x<2$

$\therefore x>2$ మరియు $x<-1$

$\therefore f(x)$ ఆరోహించే అంతరం $x>2, x<-1$

ఆరోహణ ప్రమేయానికి, $f^1(x) < 0$

$\Rightarrow 6(x-2)(x+1) < 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$

రెండు కారణాంకాల లబ్ధం రుణాత్మకమైనపుడు, ఆ కారణాంకాల్లో ఒకటి ధనాత్మకం, రెండోది రుణాత్మకం అయి ఉండాలి.

$x-2>0$ మరియు $x+1<0$ లేదా

$x-2<$ మరియు $x+1>0$

$\Rightarrow x>2, x<-1$ లేదా $x<2, x>-1$

$x>2$ మరియు $x<-1$ అనేది ఒకేసారి సంభవం కాదు.

$x>2, x>-1$ అంటే $x<2, -1<x$

కాబట్టి దీనిని $-1<x<2$ గా రాయవచ్చు.

$\therefore f(x)$ అవరోహించే అంతరం : $-1<x<2$

3. ప్రమేయము $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ ఆరోహించే లేదా అవరోహించే అంతరాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$

$f^1(x) = 3x^3 - 12x^2 - 36x + 7 = 3\left(x^2 - 4x - 12\right)$

$= 3(x-6)(x+2)$

ఆరోహణ ప్రమేయానికి, $f^1(x) > 0$

$\Rightarrow 3(x-6)(x+2) > 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+2) > 0$

రెండు కారణాంకాల లబ్ధం ధనాత్మకమైనప్పుడు, ఆ కారణాంకాలు రెండునూ ధనాత్మకం లేదా రుణాత్మకం అయి ఉండాలి.

$(x-6)>0$ మరియు $x+2>0$ లేదా $x-6<0$ మరియు $x+2<0$

$\Rightarrow x>6, x>-2$ లేదా $x<6, x<-2$

$\Rightarrow x > 6, x > -2$ లేదా $x < -2, x < 6$

$\therefore f(x)$ మరియు $x > 6, x < -2$

$\therefore x > 6$ మరియు $x < -2$

$\therefore f(x)$ ఆరోహించే అంతరము $x > 6, x < -2$

అవరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x) < 0$

$\Rightarrow 3(x-6)(x+2) < 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+2) < 0$

రెండు కారణాంకాల లబ్ధం రుణాత్మమైనప్పుడు, ఆ కారణాంకాల్లో ఒకటి ధనాత్మకం, రెండోది రుణాత్మకం అయి ఉండాలి. అంటే

$x - 6 > 0$ మరియు $x + 2 < 0$ లేదా $x - 6 < 0$ మరియు $x > -2$

$x > 6$, $x < -2$ లేదా $x < 6$, $x > -2$

$\therefore x < 6, x < -2$ ఒకేసారి సంబవం కాదు.

$\Rightarrow -2 < x < 6$

$\therefore f(x)$ అవరోహించే అంతరం $-2 < x < 6$

4. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x \neq 0$ ప్రమేయం ఆరోహించే లేదా అవరోహించే అంతరాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

అన్ని వాస్తవ x లకు x^2 ధనాత్మకం.

ఆరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x) > 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$

$\Rightarrow (x-2) > 0, x+2 > 0$ లేదా $\Rightarrow x - 2 < 0, x + 2 < 0$

$\Rightarrow x > 2, x > -2$ లేదా $x < 2, x < -2$

$\Rightarrow x > 2$ మరియు $x < -2$ లకు ప్రమేయం ఆరోహణం

అవరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x) < 0$

$(x-2)(x+2) < 0$

$\Rightarrow x-2 > 0, x+2 < 0$ లేదా $x-2 < 0, x+2 > 0$

$\Rightarrow x > 2, x < -2$ లేదా $x < 2, x > -2$

$\Rightarrow x > 2, x < -2$ లేదా $x < 2, -2 < x$

$\therefore -2 < x < 2$ లకు ప్రమేయం అవరోహణం

5. $f(x) = x^4 - 2x^2$ ప్రమేయం ఆరోహణ లేదా అవరోహణ అంతరాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = x^4 - 2x^2$

$f^1(x) = 4x^2 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right)$

$= 4x(x-1)(x+1)$

$x > 1 \Rightarrow f^1(x) > 0$

$-1 < x < 0 \Rightarrow f^1(x) > 0$

$\therefore x > 1, -1 < x < 0$ లో $f(x)$ ఆరోహణం

$x > -1 \Rightarrow f^1(x) < 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow f^1(x) < 0$

$\therefore x > -1, 0 < x < 1$ లో $f(x)$ అవరోహణం.

6. $y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}, x \neq 0$ ప్రమేయం ఆరోహణ లేదా అవరోహణ అంతరాలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$

$$f^1(x) = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{4x^2}$$

అన్ని వాస్తవ x లక $4x^2$ ధనాత్మకం

ఆరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x) > 0$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 16\right) > 0$$

$$(x-4)(x+4) > 0$$

$\Rightarrow x - 4 > 0, x + 4 > 0$ లేదా $x - 4 < 0, x + 4 < 0$

$\Rightarrow x > 4, x > -4$ లేదా $x < 4, x < -4$

$\Rightarrow x > 4$ మరియు $x < -4$ లకు ప్రమేయం ఆరోహణం

అవరోహణ ప్రమేయానికి $f^1(x) < 0$

$$\Rightarrow (x-4)(x+4) < 0$$

$\Rightarrow x - 4 > 0, x + 4 < 0$ లేదా $x - 4 < 0, x + 4 > 0$

$\Rightarrow x > 4, x < -4$ లేదా $x < 4, x > -4$

$\Rightarrow x > 4, x < -4$ లేదా $x < 4, -4 < x$

$\Rightarrow -4 < x < 4$ లకు ప్రమేయం అవరోహణం.

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ప్రమేయానికి గరిష్ట (స్థానిక గరిష్ట) మరియు కనిష్ట (స్థానిక కనిష్ట) విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$$f^1(x) = 3x^2 - 3x - 9$$

సోపానం 1: $f^1(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\Rightarrow (x-3)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=3,-1$

$\therefore$ నిశ్చల బిందువులు $x=3,-1$

సోపానం2: $x<3 \Rightarrow f^1(x)<0$ మరియు

$x>3 \Rightarrow f^1(x)>0$

$\therefore 3$ సమీపతలో $f^1(x)$ గుర్తు రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore x=3$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ఠ విలువ పొంది ఉన్నది.

సోపానం3: $x<-1 \Rightarrow f^1(x)>0$ మరియు

$x>-1 \Rightarrow f^1(x)<0$

$\therefore -1$ సమీపతలో $f^1(x)$ గుర్తు ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore x=-1$ వద్ద $f(x)$ గరిష్ఠ విలువ పొంది ఉన్నది.

$\therefore x=-1, x=3$ లు ప్రమేయానికి గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ బిందువులు.

$\therefore$ గరిష్ఠ విలువ $=f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)$

$=-1-3+9=5$

కనిష్ఠ విలువ $f(3)=3^3-3(3)^2-9(3)=-27$

$\therefore (-1,5),(3,-27)$ లు స్థానిక గరిష్ఠ, కనిష్ఠ బిందువులై ఉన్నవి.

2. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$ ప్రమేయానికి గల అన్ని స్థానిక గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువల్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$

$f^1(x)=6x^2-6x-12$

$=6\left(x^2-x-2\right)$

$f^1(x)=6(x+1)(x-2)$

$f^1(x)=0 \Rightarrow 6(x+1)(x-2)=0$

$\Rightarrow x=-1, x=2$

$\therefore x=-1, x=2$ ల వద్ద $f^1(x)=0$

ఈ బిందువులు స్థానిక గరిష్ట లేదా స్థానిక కనిష్ట లేదా యేదీకాదు అనేది పరిశీలిద్దాం.

$x=-1$ ఎడమవైపు $x=-1.1$ మరియు కుడివైపు విలువ $x=-0.9$ వద్ద $f^1(x)=0$ పరిశీలిద్దాం.

$f^1(-1.1)=6(-1.1+1)(-1.1-2)$

$\Rightarrow f^1(x)>0$

$f^1(-0.9)=6(0.9+1)(-0.9-2) \Rightarrow f^1(x)<0$

$\therefore x=-1$ వద్ద స్థానిక గరిష్టం ఉన్నది.

$x=2$ కు ఎడమ వైపు విలువ $x=1.9$ మరియు కుడివైపు విలువ $x=2.1$ వద్ద

$f^1(1.9)=6(1.9+1)(1.9-2)<0$

$\therefore f^1(1.9)<0$

$f^1(2.1)=6(2.1+1)(2.1-2)>0$

$\Rightarrow f^1(2.1)>0$

ఈ రెండిటి నుంచి $x=2$ అనేది స్థానిక గరిష్ట బిందువు.

$f(-1)=-2-3+12+8=15$

$f(2)=2(8)-3(4)-12(2)+8=-12$

$f^1(x)$ గుర్తు

$x=-1$ బిందువు		$x=2$ బిందువు	
-1 కి ఎడమ ధనాత్మకం	-1 కి కుడి రుణాత్మకం	2 కి ఎడమ రుణాత్మకం	2 కి కుడి ధనాత్మకం
స్థానిక గరిష్టం		స్థానిక కనిష్టం.	

3. $-< x < \frac{\pi}{2}$ కి $f(x) = \sin x + \cos x$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = \sin x + \cos x$

$f^1(x) = \cos x - \sin x$

$f^1(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow Tanx = 1$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద $x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x$

$\Rightarrow f^1(x) = \cos x - \sin x > 0$

$x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x - \sin x < 0$

$\Rightarrow f^1(x) = \cos x - \sin x < 0$

$\therefore \frac{\pi}{4}$ సమీపతలో $f^1(x)$ ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకంగా మారుతుంది. కావున $x = \frac{\pi}{4}$ అనేది స్థానిక గరిష్ట బిందువు మరియు

గరిష్ట విలువ $= f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ స్థానిక గరిష్ట బిందువు $= \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

4. $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ ప్రమేయానికి స్థానిక గరిష్ట మరియు కనిష్ట బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువుల వద్ద స్థానిక గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువల్ని కూడా కనుక్కోండి.

సాధన : $f(x) = (x-1)(x+2)^2$

$f'(x) = (x-1)2(x+2) + (x+2)^2_{.1}$

$= (x+2)(2x-2+x+2)$

$= 3x(x+2)$

సోపానం1: $f^1(x) = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, -2$

$\therefore$ నిశ్చల బిందువులు $x = 0, -2$

సోపానం 2: $x < 0 \Rightarrow f^1(x) < 0$

$x. > \Rightarrow f^1(x) > 0$

$\therefore$ 0 సమీపతలో $f(x)$ గుర్తు రుణాత్మకం నుండి ధనాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore x = 0$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ట విలువ పొంది ఉన్నది.

సోపానం 3: $x < -2 \Rightarrow f^1(x) > 0$

$x > -2 \Rightarrow f^1(x) < 0$

-2 సమీపతతో $f(x)$ గుర్తు ధనాత్మకం నుండి రుణాత్మకం అవుతుంది.

$\therefore -2$ వద్ద $f(x)$ గరిష్ట విలువ పొంది ఉన్నది.

$\therefore x = -2$, -2లు ప్రమేయానికి కనిష్ట మరియు కనిష్ట బిందువులై ఉన్నవి.

$\therefore$ కనిష్ట విలువ $= f(0) = -1(2)^2 = -4$

గరిష్ట విలువ $= f(-2) = -1(0) = 0$

$\therefore (0,-4), (-2,0)$ లు స్థానిక కనిష్ట, స్థానిక గరిష్ట బిందువులై ఉన్నవి.

5. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ ప్రమేయానికి స్థానిక కనిష్ట విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ అనుకుందాం.

$f^1(x) = 6x^2 - 42x + 36$

$= 6\left(x^2 - 7x + 6\right)$

$= 6(x-1)(x-6)$

స్థానిక కనిష్ట లేదా గరిష్టకు $f^1(x) = 0$

$\Rightarrow 6(x-1)(x-6) = 0$

$\Rightarrow x = 1, 6$

$f^{11}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^1(x)\right)$

$= \frac{d}{dx}\left[6\left(x^2 - 7x + 6\right)\right]$

$= 6(2x-7) = 12x - 42$

$x = 1 \Rightarrow f^{11}(1) = 6(2.1-7) = -30 < 0$

$\therefore x = 1$ అనేది స్థానిక గరిష్ట బిందువు.

$f(1) = 2(1)^3 + 21(1)^2 + 36(1) - 20 = 3$ స్థానిక గరిష్ట విలువ

$x = 6 \Rightarrow f^{11}(6) = 6(2.6-7) = 30 > 0$

$\therefore x = 6$ అనేది స్థానిక కనిష్ట బిందువు.

$\therefore f(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 36(6) - 20 = -128$ స్థానిక కనిష్ట విలువ

6. *a*) $[-3,-1]$ అంతరంలో $2x^3 - 24x + 107$ యొక్క గరిష్ట విలువను కనుక్కోండి.

b) $[1,3]$ అంతరంలో పై ప్రమేయానికి కనిష్ట విలువను కనుక్కోండి.

సాధన: *a*) $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$ అనుకుంటే..

$f'(x) = 6x^2 - 24$

గరిష్ట, కనిష్టలక $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x = -2, 2$

-2 విలువ $[-3,-1]$ అంతరంలో వుంటుంది. కావున $x = -2$ వద్ద మాత్రమే గరిష్టం వుంటుంది.

$f''(x) = 12x$

$f''(-2) = 12(-2) = -24 < 0$

$\therefore x = -2$ వద్ద గరిష్టం ఉంటుంది.

$\therefore$ గరిష్ట విలువ $= 2(-2)^3 - 24(-2) + 107 = 139$

ఈ విధంగా, గరిష్ట బిందువు -2 లేదా $[-3,-1]$ అంతరానికి చెందినవై, గరిష్ట విలువ 139కలిగి ఉన్నది.

$b)$ $f''(x) = 12x$

$[1,3]$ అంతరంలో 2వుంటుంది. కాబట్టి

$f''(2) = 12(2) = 24 > 0$

$\therefore x = 2$ వద్ద $f(x)$ కనిష్ట విలువను కలిగి ఉంటుంది.

కనిష్ట విలువ $= 2(2)^3 - 24(2) + 107 = 75$

7. $(0,\pi)$ లో $f(x) = \sin x(1+\cos x)$ ప్రమేయానికి గల గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువల్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

$f'(x) = \cos x(1+\cos x) + \sin x(-\sin x)$

$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos x + \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right)$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1\cdot$

నిశ్చల బిందువులకు $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1.\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \pi, \frac{\pi}{3}$$

$$f''(x) = 4\cos x(-\sin x) - \sin x$$

$$= -4\cos x \sin x - \sin x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= 4.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద గరిష్ట విలువ ఉంటుంది.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f''(0) = 0, f''(\pi) = 0$$

$$f(0) = 0, f(\pi) = 0$$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ వద్ద $f(x)$ గరిష్ట విలువ $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = 0, \pi$ ల వద్ద కనిష్ట విలువ $= 0$.

8. $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 5$ ప్రమేయానికి రెండో తరగతి అవకలజాలను ఉపయోగించి స్థానిక గరిష్ట మరియు స్థానిక కనిష్ట విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 5$

$f'(x) = -3x^2 + 24x = -3x(x-8)$

స్థానిక గరిష్ట లేదా కనిష్టకు, $f'(x) = 0$.

$\Rightarrow -3x(x-8) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 8$

$f''(x) = -6x + 24$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = 24 > 0$

$\therefore x = 0$ అనేది స్థానిక కనిష్ట బిందువు.

$f(0) = -0^3 + 12 \times 0^2 - 5 = -5$ స్థానిక కనిష్ట విలువ

$x = 8 \Rightarrow f''(8) = -6 \times 8 + 24 = -48 + 24 = -24 < 0$

$x = 8$ అనేది స్థానిక గరిష్ట విలువ

$f(8) = -8^3 + 12 \times 8^2 - 5 = -512 + 768 - 5 = 251$ స్థానిక గరిష్ట విలువ.

9. $f(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ రెండో తరగతి అవకలజాలను ఉపయోగించి స్థానిక గరిష్ట మరియు స్థానిక కనిష్ట విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

నిశ్చల బిందువులకు, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow Tanx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4}$ ε $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$f''(x) = \frac{d}{dx}(\cos x - \sin x)$

$= -\sin x - \cos x$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} < 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద స్థానిక గరిష్ట విలువ.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద గరిష్ట విలువ $\sqrt{2}$.

10. మొత్తం 70 మరియు లబ్ధం గరిష్టం అయ్యే రెండు ధనరాశుల్ని కనుక్కోండి.

సాధన: ఒక రాశి x అనుకుందాం.

రెండు రాశుల మొత్తం 70 కాబట్టి రెండోరాశి $70 - x$ అవుతుంది. ఈ రెండునూ ధనరాశులు కావున అవి $x > 0, (70 - x) > 0$ అవుతాయి.

$70 - x > 0 \Rightarrow x < 70$

$0 < x < 70$

వీటి లబ్ధం $f(x)$ అనుకుంటే

$f(x) = x(70 - x) = 70x - x^2$

$\Rightarrow f'(x) = 70 \times 1 - 2x = 70 - 2x$

గరిష్టం కొరకు $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 70 \times 1 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 35$

$f''(x) = \frac{d}{dx}(70 - 2x)$

$f''(x) = -2$

$f''(35) = -2 < 0$

$\therefore x = 35$ వద్ద $f(x)$కు గరిష్టం ఉంటుంది.

$70 - x = 70 - 35 = 35$ రెండో సంఖ్య అవుతుంది.

కావాల్సిన రాశులు లేదా సంఖ్యలు $35, 35$

11. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 15 అయి, ఒక దాని వర్గము మరియు రెండో దాని ఘనముల లబ్ధము గరిష్టమైతే ఆ సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

సాధన: ఒక రాశి x అనుకుందాం.

రెండు రాశుల మొత్తం 15 అయిన రెండవ రాశి $15 - x$ అవుతుంది.

$\therefore f(x) = x^2 (15 - x)^3$ అనుకొనుము

$$f'(x) = x^2.3 \times (15 - x)^2 (-1) + (15 - x)^3 .2x$$

$$= x(15 - x)^2 \left[-3x + 2(15 - x)\right]$$

$$= x(15 - x)^2 (30 - 5x)$$

నిశ్చల బిందువులకు $f'(x) = 0 \Rightarrow x(15 - x)^2 (30 - 5x) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 15, 6$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[(15 - x)^2 \left(30x - 5x^2\right)\right]$$

$$= \left(15 - x^2\right)(30 - 10x) + \left(30x - 5x^2\right) \times 2(15 - x)(-1)$$

$$= 10\left(15 - x^2\right)(3 - x) - 2x(30 - 5x)(15 - x)$$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = 10 \times 15 \times 3 - 2 \times 0 = 450 > 0$

$\therefore x = 0$ వద్ద కనిష్ట విలువ

$x = 15 \Rightarrow f''(15) = 0$

$x = 15$ వద్ద కనిష్ట, గరిష్ట విలువలు రెండు లేవు.

$x = 6 \Rightarrow f''(6) = 10(15-6)^2(3-6) - 2\times 6(30-6)(15-6)$

$= 10\times 81\times(-3) - 12\times 24\times 9$

$= -2430 - 2592$

$= -5022$

$\therefore f''(6) < 0$

$x = 6$ వద్ద $f(x)$ గరిష్టం.

$x = 6$ అయిన $15 - x = 15 - 6 = 9$ రెండవ రాశి

ఆ రెండు సంఖ్యలు $6, 9$.

12. దత్త వైశాల్యం గల దీర్ఘచతురస్రానికి కనిష్ట చుట్టు కొలతను కలిగి ఉండేది. చతురస్రమని చూపండి.

సాధన: దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు, వెడల్పులు x, y అనుకుందాం.

$\therefore$ వైశాల్యం $A = xy$

$$y = \frac{A}{x} \quad \ldots (1)$$

దీర్ఘ చతుర్రస్రం చుట్టు కొలత $P = 2(x+y)$

$$P = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)$$

కనిష్టకు $\frac{dp}{dx} = 0$

$$\Rightarrow 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow A = x^2$ లేదా $x = \sqrt{A}$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)\right]$$

$$= 2 \times \frac{-(-2A)}{x^3}$$

$= \frac{4A}{x^3}$ ఇది ధనాత్మకం.

$\therefore x = \sqrt{A}$ అయినప్పుడు చుట్టుకొలత కనిష్టం.

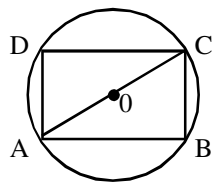
$$y = \frac{A}{x} = \frac{x^2}{x} = x \qquad \left(\because A = x^2\right)$$

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రం అనేది కనిష్ట చుట్టుకొలతకు చతురస్రం అవుతుంది.

13. దత్త వృత్తంలో అంతర్లిఖించబడిన గరిష్ట దీర్ఘ చతురస్రం చతురస్రం అవుతుందని చూపండి.

సాధన: 'r' వ్యాసార్థం గల వృత్తంలో $ABCD$ దీర్ఘ చతురస్రం అంతర్లిఖించబడిందనుకుందాం.

పటంలో, వృత్తవ్యాసం $AC = 2r$



$AB = x, BC = y$ అనుకుంటే

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ లేదా $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2 \ldots (1)$

దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం $A = xy$

$$A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} + \sqrt{4r^2 - x^2} \times 1$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

గరిష్ట, కనిష్టలకు $\frac{dA}{dx} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{4r^2-2x^2}{\sqrt{4r^2-x^2}}=0 \Rightarrow 4r^2-2x^2=0$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{2}-r$$

$$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{\sqrt{4r^2-x^2}\,(-4x)-\left(4r^2-2x^2\right)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{4r^2-x^2}}}{\left(\sqrt{\left(4r^2-x^2\right)}\right)^{-2}}$$

$$=\frac{-4x\left(4r^2-x^2\right)+x\left(4r^2-2x^2\right)}{\left(4r^2-x^2\right)^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}\left(2r^2\right)+0}{\left(2r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{-8\sqrt{2}r^3}{2\sqrt{2}r^3}=-4<0$$

$\therefore x=\sqrt{2}r$ అయితే గరిష్టం.

(1) నుండి $y=\sqrt{4r^2-2r^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore$ దీర్ఘచతురస్రం $ABCD$ ఒక చతురస్రము

14. కొంత ఉపరితలాన్ని మరియు గరిష్ట ఘనపరిమాణాన్ని కలిగిన మూతగల లంబ వృత్తాకార స్థూపం ఎత్తు, దాని భూవ్యాసానికి సమానమని చూపండి.

సాధన: స్థూపం ఉపరితలం 'S', ఘనపరిమాణం 'V', ఎత్తు 'h', భూవ్యాసార్థం 'r' అనుకొనుము.

$\therefore S=2\pi rh+2\pi r^2 \quad \ldots (1)$

$V=\pi r^2 h$

$$V = \pi r^2 \left(\frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r} \right)$$

$$= \frac{r}{2}\left(s - 2\pi r^2\right)$$

$$V = \frac{sr}{2} - \pi r^3$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{s}{2} - \pi\left(3r^2\right)$$

గరిష్ట లేదా కనిష్టకు $\frac{dv}{dr} = 0$

$$\frac{s}{2} - \pi\left(3r^2\right) = 0$$

$$S = 6\pi r^2$$

(1) నుండి

$$6\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$4\pi r^2 = 2\pi rh$$

$$2r = h \ \ldots \ (2)$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{s}{2} - 3\pi r^2\right)$$

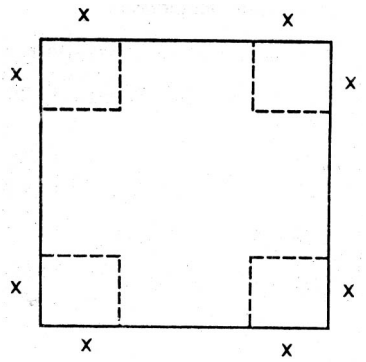
$$= -6\pi r \qquad \left[\because \frac{d}{dr}\left(\frac{s}{2}\right) = 0\right]$$

$$\therefore \frac{d^2v}{dr^2} < 0$$

$\therefore$ లంబ వృత్తాకార స్థూప గరిష్ట ఘనపరిమాణానికి ఎత్తు = భూవ్యాసం. అంటే $h = 2r$

15. 48సెం.మీ. భుజము కొలత గల చతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుండి నాలుగు చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్టం అయితే కత్తిరించిన చతురస్రాకారపు ముక్క భుజం కొలత కనుక్కోండి.

సాధన: కత్తిరించిన ముక్క భుజం కొలత x అనుకుంటే, పెట్టె ప్రతి భుజము పొడవు $(48-2x)$ మరియు ఎత్తు x అవుతుంది.



$x>0, 48-2x>0 \Rightarrow x<24$

ఇంకా $0<x<24$

పెట్టె ఘనపరిమాణం $V = lbh$

$=(48-2x)(48-2x)(x)$

$V=(48-2x)^2 x$

$\frac{dv}{dx}=(48-2x)^2\times 1+x.2(48-2x)(-2)$

$=(48-2x)(48-6x)$

గరిష్ట లేదా కనిష్టకు, $\frac{dv}{dx}=0$

$\Rightarrow (48-2x)(48-6x)=0$

$\Rightarrow x=24$ లేదా $x=8$

$0<x<24$ కాబట్టి $x=8$ పరిగణిద్దాం.

$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[(48-2x)(48-2x)\right]$

$=(48-2x)(-6)+(48-6x)(-2)$

$=24x-384$

$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=8}=24\times 8-384$

$=-192<0$

$\therefore x=8$కు ఘనపరిమాణం గరిష్టం.

$\therefore$ కత్తిరించిన చతురస్రాకారపు ముక్క కొలత 8సెం.మీ.

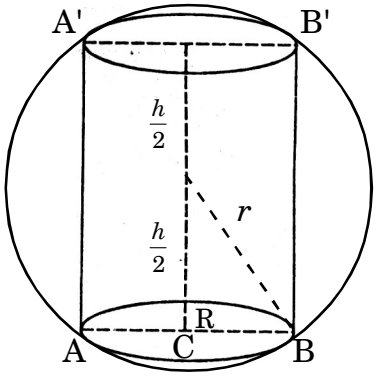
16. r సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల గోళంలో అంతర్లిఖించబడిన గరిష్ట స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుక్కోండి.

సాధన: అంతర్లిఖించబడిన స్థూపం ఎత్తు 'h, భూ వ్యాసార్థం 'R', ఘనపరిమాణం 'V' అనుకుంటే

$V = \pi R^2 h \cdots$ (1)

త్రిభుజము OCB నుంచి

$r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2$ ... (2) $\left(\because OB^2 = OC^2 + BC^2\right)$



$R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$

$V = \pi\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$

$\therefore \frac{dv}{dh} = \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$

గరిష్ట, కనిష్టకు $\frac{dv}{dh} = 0$.

$\pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$

$\Rightarrow h^2 = \frac{4r^2}{3} \Rightarrow h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

$\frac{d^2v}{dh^2} = \frac{-3\pi h}{2}$

$\therefore \left(\frac{d^2v}{dh^2}\right)_{\left(h=\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-3\pi \times 2r}{2 \times \sqrt{3}}$

$= -\sqrt{3}\pi r < 0$

$h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ అయితే V గరిష్టం.

$h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$R^2 = r^2 - \frac{4r^2}{4 \times 3} = \frac{2r^2}{3}$$

$$\therefore R = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$$

$\therefore$ స్థూపం గరిష్ట ఘనపరిమాణం $= \pi R^2 h$

$$= \pi\left(\frac{2}{3}r^2\right)\frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}\, cm^3$$

17. 100 ఘ.సెం.మీ. ఘనపరిమాణం ఉన్న మూత గల లంబ వృత్తాకార స్థూపానికి కనిష్ట సంపూర్ణతల వైశాల్యం ఉంటే భూవ్యాసార్థం కనుక్కోండి.

సాధన: స్థూప ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h = 100$

$$h = \frac{100}{\pi r^2}$$

మూతగల స్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= T = 2\pi r(r + h)$

$$\therefore T = 2\pi r\left(r + \frac{100}{\pi r^2}\right)$$

$$= 2\pi r\left(\frac{\pi r^3 + 100}{\pi r^2}\right)$$

$$= \frac{2}{r}\left(\pi r^3 + 100\right)$$

$$T = 2\pi r^2 + \frac{200}{r}$$

$$\frac{dT}{dr} = 4\pi r - \frac{200}{r^2}$$

గరిష్ట / కనిష్ట విలువలకు $\frac{dT}{dr} = 0$

$$4\pi r - \frac{200}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\left(\pi r^3 - 50\right) = 0$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{50}{\pi} = \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(4\pi r - \frac{200}{r^2}\right) = 4\pi - \frac{2\times 200}{r^3}$$

$$= 4\pi - \frac{400}{\frac{50}{\pi}} = 4\pi - 8\pi = -4\pi < 0$$

$\therefore$ సంపూర్ణతల వైశాల్యం గరిష్టం.

$\therefore$ భూ వ్యాసార్థం $= r = \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$, ఎత్తు $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$,

---

26

సమాకలనం

అవకలన ప్రమేయం యొక్క భావనను పూర్వ పాఠ్య భాగాంశాలలో నేర్చుకొన్నాం. అవకలజాల అనువర్తనాలను వివిధ సందర్భాలలో నేర్చుకొన్నాం.

అవకలజం ఇవ్వబడినప్పుడు (ప్రమేయ రూపంలో ఆ ప్రమేయం యొక్క విలోమ పద్ధతిని పరిశీలిద్దాం. అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియయే సమాకలనం. సమాకలన వివిధ పద్ధతులను, ప్రమాణిక రూపాలను చదువుకొందాం

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము అభ్యసించిన తరువాత, నీవు గమనించగల విషయాలు :

- అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియ (ప్రత్యవకలజం)గా సమాకలనం అని విశదపరచగలవు.
- $x^n, \sin x, \cos x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \tan x, \operatorname{cosec} x \cot x, \frac{1}{x} e^x$
- మొ॥ సరళ ప్రమేయాల సమాకలనాలను తెలుసుకొనెదవు.
- ఈ క్రింది ఫలితాలను వివరించడం

  (i) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

  (ii) $\int [\pm kf(x)]dx = \pm k \int f(x)dx$
- బీజీయ, త్రికోణమితీయ, విలోమ త్రికోణమితీయ, ఘాతిక ప్రమేయాల సమాకలనులను కనుక్కోవడం.
- ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా ప్రమేయాల సమాకలనం కనుక్కోవడం.
- ఈ మాదిరి సమాకలనులను గణించండి

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}, \int \frac{dx}{a^2 - x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \frac{(px+q)dx}{ax^2 + bx + c}, \int \frac{(px+q)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = dx$$

- వ్యుత్పన్న ఫలితాన్ని ఉపయోగించడం

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

- విభాగ సమాకలన పద్ధతిని వివరించి, ఉపయోగించడం.
- ఈ క్రింది రూపంలో ఉన్న సమాకలనులను గణించటం

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx,\ \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,\ \int e^{ax} \sin bx\, dx,\ \int e^{ax} \cos\ bx\, dx,$$

$$\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx,\ \int \sin^{-1} x\, dx,\ \int \cos^{-1} x\, dx,$$

$$\int \sin^n x\ \cos^m x\, dx,\ \int \frac{dx}{a+b\sin x},\ \int \frac{dx}{a+b\cos x}$$

- వ్యుత్పన్నం చేసిన ఫలితాన్ని ఉపయోగించడం

$\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x . f(x) + c$ మరియు పాక్షిక భిన్నాలను ఉపయోగించి అకరణీయ సమాసాల సమాకలనం చేయడం.

ముఖ్యాంశాలు :

అవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియగా సమాకలనం.

అనిశ్చిత సమాకలనుల కొన్ని ప్రాథమిక రూపాలు.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ (n \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$
3. $\int \sin x\ dx = -\cos x + c$
4. $\int \cos x\ dx = \sin x + c$
5. $\int \sec^2 x\ dx = \tan x + c$
6. $\int \operatorname{cosec}^2 x\ dx = -\cot x + c$
7. $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + c$
8. $\int \operatorname{cosec} x \cot x\ dx = -\operatorname{cosec} x + c$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

12. $\int e^x dx = e^x + c$

13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c \qquad (a > 0, \text{ and } a \neq 1)$

అనిశ్చిత సమాకలనుల ధర్మాలు

1. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

3. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)} + c \qquad (n \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c$

5. $\int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$

6. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$

7. $\int \sec^2(ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$

8. $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cot(ax+b) + c$

9. $\int \sec(ax+b) \tan(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sec(ax+b) + c$

10. $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b)+c$

11. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$

13. $\int \tan x\ dx = -\log|\cos x|+c = \log|\sec x|+c$

14. $\int \cot x\ dx = \log|\sin x|+c$

15. $\int \sec x\ dx = \log|\sec x+\tan x|+c$

16. $\int \operatorname{cosec} x\ dx = \log|\operatorname{cosec} x-\cot x|+c$

17. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

18. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

19. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

23. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

24. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

25. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{a^2-x^2}\right| + c$

26. $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx = e^x f(x) + c$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $\int \sqrt[3]{x}\ dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c$ $\left(\because \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

$= \frac{x^{4/3}}{\left(\frac{4}{3}\right)} + c = \frac{3}{4}x^{4/3} + c$

2. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \int \cot\theta.\text{cosec}\theta.d\theta$

$= -\text{cosec}\ \theta + c$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

4. $\int \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta = \int \operatorname{cosec}^2\theta \, d\theta = -\cot\theta + c$

5. $\int x^{-7} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = \frac{x^{-6}}{-6} + c$

6. $\int \sin(4-5x)\, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sin(4-5x)\, dx = \frac{-\cos(4-5x)}{5} + c$

7. $\int \sec(3x+5)\tan(3x+5)\, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sec(3x+5)\tan(3x+5)\, dx = \frac{\sec(3x+5)}{3} + c$

8. $\int e^{5x+7} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int e^{5x+7} dx = \int e^t \frac{dt}{5}$ $\quad (\because 5x+7 = t \Rightarrow 5dx = dt \quad dx = \frac{dt}{5})$

$$= \frac{1}{5} e^t + c$$

$$= \frac{1}{5} e^{5x+7} + c$$

9. $\int \frac{1}{x+1} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1) + c$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx$ గణించండి.

సాధన : $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int \sqrt{x}\ dx$

$$= \int x^{\frac{-1}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

2. $\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ గణించండి.

సాధన : $\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= \tan^{-1} x - \sin^{-1} x + c$$

3. $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$ గణించండి.

సాధన : $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x} dx$ $\left(\begin{array}{l} \because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \end{array} \right)$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x\, dx \qquad \left(\because \int \sec^2 x\, dx = \tan x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tan x + c$$

4. $\int \frac{1}{1-\cos 2x} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{1}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{1}{2\sin^2 x} dx \qquad \left(\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\right)$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \frac{-1}{2}\cot x + c \qquad \left(\because \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x\right)$$

5. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx$

$$= \sqrt{2}.\int \cos x\, dx$$

$$= \sqrt{2}\sin x + c$$

6. $\int \tan^2 x\, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + c$$

7. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

సాధన : $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx \qquad \left(\begin{aligned} \because x^4 - 1 &= \left(x^2\right)^2 - 1^2 \\ &= \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) \end{aligned}\right)$

$$= \int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int \left(x^2 - 1\right) dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + c$$

8. $\int \cos^2 x \, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$

$$= \frac{1}{2}\int 1 dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.\frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

9. $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int \left(1+\tan^2 x\right)\left(1+\cot^2 x\right) dx$ $\left(\begin{array}{l} \because \sec^2 x = 1+\tan^2 x \\ \operatorname{cosec}^2 x = 1+\cot^2 x \end{array}\right)$

$$= \int \left(1+\tan^2 x + \cot^2 x + \tan^2 x \cot^2 x\right) dx$$

$$= \int \left(1+\tan^2 x + \cot^2 x + 1\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x\right) dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

10. $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sin 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(3x-2x\right) - \cos\left(3x+2x\right)\right] dx$

$$\left[\because 2\sin A \sin B = \cos\left(A-B\right) - \cos\left(A+B\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 5x}{5}\right] + c$$

11. $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+3} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $x^3+3x+3 = t \Rightarrow (3x^2+3)dx = dt$

$$(x^2+1)dx = \frac{dt}{3}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x^3+3x+3} dx = \int \frac{1}{t} \times \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\log t + c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left(x^3+3x+3\right) + c$$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(5+\sqrt{x}\right)} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $5+\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(5+\sqrt{x}\right)} dx = \int \frac{1}{t}.2dt = 2\int \frac{1}{t} dt$$

$$= 2\log t + c = 2\log\left(5+\sqrt{x}\right) + c$$

13. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $e^x - e^{-x} = t \Rightarrow \left(e^x+e^{-x}\right)dx = dt$

$$\therefore \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log t + c$$

$$= \log\left(e^x - e^{-x}\right) + c$$

14. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{-x}\left(e^{2x} - 1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x} + 1\right)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$e^x + e^{-x} = t \Rightarrow \left(e^x - e^{-x}\right) dx = dt$$

$$\therefore \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log t + c$$

$$= \log\left(e^x + e^{-x}\right) + c$$

15. $\int \sec x \, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x\left(\sec x + \tan x\right)}{\sec x + \tan x} dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \ \tan x}{\sec x + \tan x} .dx$$

$$\sec x + \tan x = t \Rightarrow \left(\sec x \tan x + \sec^2 x\right) dx = dt$$

$$\therefore \int \sec x \, dx = \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \log t + c$$

$$= \log(\sec x + \tan x) + c$$

16. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$\cos x + \sin x = t$ అనుకొనిన $(-\sin x + \cos x) dx = dt$

$$\therefore \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx = \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \log|t| + c$$

$$= \log|\cos x + \sin x| + c$$

17. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{1}{t^2+1} dt$ $(e^x = t$ అనుకొనిన $e^x.dx = dt)$

$$= \tan^{-1} t + c$$

$$= \tan^{-1} e^x + c$$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{1}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - x^2}} dx$

$$= \frac{1}{3}.\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{4}{3}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}.\sin^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + c$$

19. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{1+t^2}.\frac{dt}{2}$ $\left(\because x^2 = t \Rightarrow 2x\ dx = dt\right.$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt$ $\left. xdx = \frac{dt}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} t + c$

$\therefore \int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x^2\right) + c$

20. $\int e^x \left[\frac{1+x\log x}{x}\right]dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int e^x \left[\frac{1+x\log x}{x}\right]dx = \int e^x \left[\frac{1}{x} + \log x\right]dx$

$= \int e^x \left[\log x + \frac{d}{dx}(\log x)\right]dx$

$\left[\because \int e^x \left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x) + c\right]$

$= e^x \log x + c$

21. $\int e^x \sec x\left[1+\tan x\right]dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int e^x \sec x\left[1+\tan x\right]dx = \int e^x \left[\sec x + \sec x \tan x\right]dx$

$= \int e^x \left[\sec x + \frac{d}{dx}(\sec x)\right]dx$

$= e^x \sec x + c$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=\int\left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}+\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)dx$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\cos x\sin x}}dx$$

$\sin x-\cos x=t\Rightarrow\left(\cos x+\sin x\right)dx=dt$

$\left(\sin x-\cos x\right)^2=t^2\Rightarrow\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=t^2$

$$1-2\sin x\cos x=t^2$$

$$1-t^2=2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow\frac{1-t^2}{2}=\sin x\cos x$$

$$\therefore\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}}dt$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\sqrt{2}\sin^{-1}|t|+c$$

$\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=\sqrt{2}\sin^{-1}\left|\sin x-\cos x\right|+c$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ **గణించండి.**

సాధన : $3-2x-x^2=3-\left(2x+x^2\right)$

$$=3-\left(x^2+2.x.1+1-1\right)$$

$$= 4-(x+1)^2$$

$$= 2^2-(x+1)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c \qquad \left(\because \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}dx$ **సాధించండి.**

సాధన : $\int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x^2-2ax)}}dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2-(x^2-2ax)}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+c \qquad \left(\because \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}dx$ **గణించండి.**

సాధన : $8+3x-x^2 = 8-(x^2-3x)$

$$= 8-\left(x^2-2.x.\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)$$

$$=8-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

$$=\frac{41}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

$$=\sin^{-1}\left[\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{41}}{2}}\right]+c$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+c$$

5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{t}}.\frac{dt}{2}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c \qquad (\because x^2+1=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$$

$$xdx=\frac{dt}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}dt}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

$$\therefore \int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

6. $\int x\sin x\ dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int x\sin x\ dx=x\int\sin x\ dx-\int\left(\frac{d}{dx}(x).\int\sin x\ dx\right)dx+c$

$$=x(-\cos x)-\int-\cos x\ dx+c$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\ dx+c$$

$$\therefore \int x\sin x\ dx=-x\cos x+\sin x+c$$

7. $\therefore \int\frac{\log x}{x^n}dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int\frac{\log x}{x^n}dx=\int(\log x)x^{-n}dx$

$$=\log x.\int x^{-n}dx-\int\left(\frac{d}{dx}(\log x)\int x^{-n}dx\right)dx$$

$$=\log x.\frac{x^{-n+1}}{-n+1}-\int\frac{1}{x}.\frac{x^{-n+1}}{-n+1}dx$$

$$=\frac{x^{1-n}}{1-n}.\log x-\left(\frac{1}{1-n}\right).\int x^{-n}dx$$

$$= \frac{x^{1-n}}{1-n}.\log x - \left(\frac{1}{1-n}\right).\frac{x^{-n+1}}{(-n+1)} + c$$

$$\therefore \int \frac{\log x}{x^n} dx = \frac{x^{1-n}}{1-n}.\log x - \frac{x^{1-n}}{(1-n)^2} + c$$

8. $\int x(\log x)^2 \, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int x(\log x)^2 \, dx = \int (\log x)^2 .x \, dx$

$$= (\log x)^2 .\int x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x)^2 \int x dx\right] dx + c$$

$$= (\log x)^2 .\frac{x^2}{2} - \int 2\log x \times \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2} dx + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x \log x \, dx + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \log x.\int x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x)\int x \, dx\right] dx + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - (\log x)\frac{x^2}{2}\int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2} dx + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x \, dx + c$$

$$\therefore \int x(\log x)^2 \, dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$$

9. $\int \sec^3 x \, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\mathrm{I} = \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x.\sec^2 x \, dx$

$$\mathrm{I} = \sec x.\int \sec^2 x \, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\sec x)\int \sec^2 x \, dx\right) dx$$

$$= \sec x.\tan x - \int \sec x \tan x.\tan x \, dx$$

$$= \sec x.\tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

$$= \sec x.\tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)\, dx$$

$$= \sec x.\tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$\mathrm{I} = \sec x \tan x - \mathrm{I} + \log|\sec x + \tan x| + c$$

$$\therefore \mathrm{I} + \mathrm{I} = 2\,\mathrm{I} = \sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x| + c$$

$$\therefore\ \mathrm{I} = \frac{1}{2}\left[\sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x|\right] + c$$

10. $\int e^x \sin 2x\, dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\mathrm{I} = \int e^x \sin 2x\, dx = e^x.\int \sin 2x\, dx - \int\left(e^x.\int \sin 2x\, dx\right)dx + c$

$$\mathrm{I} = e^x.\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int e^x.\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)dx + c$$

$$= -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx + c$$

$$= -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left[e^x.\int \cos 2x\, dx - \int\left(e^x.\int \cos 2x\, dx\right)dx\right] + c$$

$$= -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left[e^x.\frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{e^x.\sin 2x}{2}dx\right] + c$$

$$= -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^x \sin 2x}{2} - \frac{1}{2}.\mathrm{I}\right] + c$$

$$\mathrm{I} = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{e^x \sin 2x}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{I} + c$$

$$\mathrm{I} + \frac{1}{4}\mathrm{I} = \frac{-e^x \cos 2x}{2} + \frac{e^x \sin 2x}{2} + c$$

$$\frac{5I}{4} = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{e^x \sin 2x}{2} + c$$

$$\therefore I = \frac{4}{5}\left[\frac{-e^x \cos 2x}{2} + \frac{e^x \sin 2x}{2}\right] + c$$

$$= \frac{2}{5}\left[-e^x \cos 2x + e^x \sin 2x\right] + c$$

$$\therefore I = \frac{2e^x}{5}\left[\sin 2x - \cos 2x\right] + c$$

11. $\int \sqrt{1+x-2x^2}\,dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sqrt{1+x-2x^2} = \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-x^2 dx}$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{1}{2}-\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}.\left(\frac{x-\frac{1}{4}}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{9}{16\times 2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right) + c$$

$$\left(\because \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{4x-1}{8}\sqrt{\frac{9}{16}-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{9}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{3}\right)\right] + c$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{4x-1}{8}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x-2x^2} + \frac{9}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{3}\right)\right] + c$$

$$= \frac{4x-1}{8}\sqrt{1+x-2x^2} + \frac{9\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{3}\right) + c$$

12. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **ను** x **దృష్ట్యా సమాకలనం చేయండి.**

సాధన : $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$

$$= \int (\sec x \tan x + \operatorname{cosec} x \ \cot x)\, dx$$

$$= \sec x - \operatorname{cosec} x + C$$

13. $\dfrac{2\cos^2 x}{1-\cos 2x}$ **ను** x **దృష్ట్యా సమాకలనం చేయండి.**

సాధన : $\displaystyle\int \frac{2\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x} dx = \int \cot^2 x \, dx$

$$= \int \left(\operatorname{cosec}^2 x - 1\right) dx$$

$$= -\cot x - x + C$$

14. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \qquad \left(\begin{array}{l} \because \tan x = t \\ \Rightarrow \sec^2 x \, dx = dt \end{array}\right)$

$$= \int t^{-1/2} dt$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

$$= 2\sqrt{\tan x} + C$$

15. $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - x^2}\;dx$

$$= \frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - x^2}}{2} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{5}{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{x\times 3\sqrt{25-9x^2}}{2} + \frac{25}{18}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + C$$

$$= \frac{x\sqrt{25-9x^2}}{2} + \frac{25}{18}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) + C$$

16. $\int \frac{x^2}{x^2-a^2}\,dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{x^2}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{x^2-a^2+a^2}{x^2-a^2}dx$

$$= \int 1dx + a^2\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$$

$$= x + a^2.\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$= x + \frac{a}{2}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

17. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}\,dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}\,dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$

$$\left(\because 1+\sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2\right)$$

$$= \int \frac{1}{t^2} dt \qquad \begin{pmatrix} \because \sin x + \cos x = t \\ \Rightarrow (\cos x - \sin x)\, dx = dt \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{t} + C$$

$$= -\frac{1}{(\sin x + \cos x)} + C$$

18. $\int e^x \left[\cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int e^x \left[\cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int e^x \left[\cos^{-1} x + \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) \right] dx$

$$= e^x \cos^{-1} x + c \qquad \left[\because \int e^x \left(f(x) + f'(x) \right) dx = e^x f(x) \right]$$

19. $\int e^x (1+x) \log(xe^x) dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int e^x (1+x) \log(xe^x) dx$

$$\begin{bmatrix} \because xe^x = t \\ \left(xe^x + e^x\right) dx = dt \\ e^x (1+x)\, dx = dt \end{bmatrix}$$

$$= \int \log t . dt = \int (\log t) . 1 dt$$

$$= \log t \int 1 dt - \int \left(\frac{1}{t} . \int 1 dt \right) dt$$

$$= (\log t) t - \int \frac{1}{t} . t \; dt$$

$$= t \log t - \int 1 \; dt = t \log t - t + C$$

$$= xe^x \left[\log\left(xe^x\right) - 1 \right] + C$$

20. $\int \sqrt{x} . \log x \; dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \sqrt{x} . \log x \; dx = \log x . \int \sqrt{x} dx - \int \left(\frac{1}{x} . \int \sqrt{x} dx \right) dx$

$$= \log x.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{1}{x}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}(\log x)x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\log x\right) - \frac{2}{3}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\log x\right) - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$$

21. $\int \frac{\sec^2 x}{a+b\tan x}dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\int \frac{\sec^2 x}{a+b\tan x}dx = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{b}$ $\left(\because a+b\tan x = t,\ b\sec^2 x\, dx = dt,\ \sec^2 x\, dx = \frac{dt}{b}\right)$

$$= \frac{1}{b}\log t + C$$

$$= \frac{1}{b}\log(a+b\tan x) + C$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $\int \sqrt{3-2x-2x^2}\,dx$ **గణించండి.**

సాధన : $3-2x-2x^2 = 2\left(\frac{3}{2}-\left(x^2+x\right)\right)$

$$= 2\left[\frac{3}{2}-\left(x^2+2.x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=2\left[\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

$$=2\left[\frac{7}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$\therefore \int\sqrt{3-2x-2x^2}\,dx=\int\sqrt{2\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}{2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)\right]+c$$

$$=\sqrt{2}\left[\left(\frac{2x+1}{4}\right).\frac{\sqrt{3-2x-2x^2}}{\sqrt{2}}+\frac{7}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)\right]+c$$

$$=\frac{(2x+1)}{4}\sqrt{3-2x-2x^2}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+c$$

2. $\int\frac{x}{x^2-16}\,dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\frac{x}{x^2-16}=\frac{x}{(x+4)(x-4)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-4}$ ...(1)

$$\therefore \quad x = A(x-4) + B(x+4)$$

$x = 4$ అయిన $4 = A \times 0 + B \times 8$

$$8B = 4$$

$$B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$x = -4$ అయిన $-4 = A(-4-4) + B \times 0$

$$-4 = -8A$$

$$\therefore A = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}$ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{x}{(x+4)(x-4)} = \frac{1}{2(x+4)} + \frac{1}{2(x-4)}$$

$$\therefore \int \frac{x}{x^2-16}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x+4) + \frac{1}{2}\log(x-4) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(x+4) + \log(x-4)\right] + c$$

3. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx$ **గణించండి.**

సాధన : $\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \qquad \ldots(1)$

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\therefore 2x^2+x+1 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

$x=1$ అయిన, $2.1^2+1+1=A\times 0+B(1+2)+C\times 0$

$$4=3B\Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

$x=-2$ అయిన

$$2(-2)^2+(-2)+1=A\times 0+B\times 0+C(-2-1)^2$$

$$8-1=C\times 9$$

$$7=9C$$

$$C=\frac{7}{9}$$

x^2 గుణకాలను పోల్చగా,

$$A+C=2$$

$$A+\frac{7}{9}=2\Rightarrow A=2-\frac{7}{9}=\frac{11}{9}$$

$\therefore$ (1) నుండి

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{11}{9(x-1)}+\frac{4}{3(x-1)^2}+\frac{7}{9(x+2)}$$

$$\int\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{11}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{7}{9}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{11}{9}\log(x-1)-\frac{4}{3}\times\frac{1}{(x-1)}+\frac{7}{9}\log(x+2)+C$$

4. $\int\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\cos x)}dx$

సాధన : $\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{A}{\cos x}+\frac{B}{1+\cos x}$

$$1-\cos x=A(1+\cos x)+B\ \cos x$$

గుణకాలను పోల్చగా

$A = 1, \quad A + B = -1$

$1 + B = -1$

$B = -2$

$$\therefore \frac{1-\cos x}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{\cos x} - \frac{2}{1+\cos x}$$

$$\int \frac{1-\cos x}{\cos x(1+\cos x)} dx = \int \frac{1}{\cos x} dx - 2\int \frac{1}{1+\cos x} dx$$

$$= \int \sec x \, dx - 2\int \frac{1}{2\cos^2 x/2} dx$$

$$= \log|\sec x + \tan x| - \int \sec^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \log|\sec x + \tan x| - \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \log|\sec x + \tan x| - 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

5. $\int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta} d\theta$ **గణించండి.**

సాధన : $I = \int \frac{\tan\theta + \tan^3\theta}{1+\tan^3\theta} = \int \frac{\tan\theta(1+\tan^2\theta)}{1+\tan^3\theta} d\theta = \int \frac{\tan\theta \sec^2\theta}{1+\tan^3\theta} d\theta$

$\tan\theta = t$ అయిన $\sec^2\theta \, d\theta = dt$

$$\therefore I = \int \frac{t \, dt}{1+t^3} = \int \frac{t \, dt}{(1+t)(1-t+t^2)}$$

$$\frac{t}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2}$$

అయితే $t = A\left(1-t+t^2\right)+\left(Bt+C\right)\left(1+t\right)$

t యొక్క గుణకాలను పోలిస్తే,

$A + B = 0,\ -A + B + C = 1,\ \ A + C = 0$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}$

$$\therefore I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{1-t+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{6}\int \frac{2t+2}{t^2-t+1}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{6}\int \frac{(2t-1)+3}{t^2-t+1}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+t| + \frac{1}{2}\log\left|t^2-t+1\right| + \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\log|1+t| + \frac{1}{2}\log\left|t^2-t+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\therefore \int \frac{\tan\theta+\tan^3\theta}{1+\tan^3\theta} = \frac{1}{3}\log|1+\tan\theta| + \frac{1}{2}\log\left|\tan^2\theta-\tan\theta+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

27

నిశ్చిత సమాకలనం

పూర్వ పాఠ్యాంశము నందు ప్రత్యవకలజం అంటే ఒక ప్రమేయం యొక్క సమాకలనం గురించి చర్చించియున్నాం. సమాకలనం అనే పదం యొక్క అర్థము ఫలితాల కూడిక లేదా మొత్తము చేయుట.

ఇక్కడ గణిత శాస్త్రములోని ఈ విభాగాన్ని ఎందుకు చదవాలి అనే ప్రశ్న ఉదయిస్తుంది. వైశాల్యాల మొత్తం తాలూకు అవధి యొక్క సమాకలనం కనుగొనుటకు ఇది ఉపకరించును. అదే విధంగా సాంఖ్యక శాస్త్రము, భౌతిక శాస్త్రము, జీవ శాస్త్రము, వాణిజ్య శాస్త్రము మొదలగు అనేక శాస్త్రముల అనువర్తనముల యందు ఉత్పన్నమయ్యే వివిధ సమస్యల పరిష్కారానికి ఈ శాస్త్రము ఎంతగానో ఉపకరిస్తుంది.

ఈ పాఠ్యాంశంనందు నిశ్చిత సమాకలనం, రేఖాగణిత ఆధారంగా, నిర్వచించి విశదీకరిస్తాం. అదే విధంగా వాటి యొక్క ధర్మాలననుసరించి, మరియు వాటిని ఉపయోగించి నిశ్చిత సమాకలనం ద్వారా వైశాల్యాలను గణించవచ్చు.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగలిగిన విషయాలు.

1. రేఖీయంగా నిశ్చిత సమీకలనం అనగా వైశాల్యాలు మొత్తం తాలుకు అవధిగా నిర్వచిస్తాం.
2. సమీకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని వివరించవచ్చు.

   నిశ్చిత సమాకలన ధర్మాలను గణించడానికి ఈ క్రింది వాటిని ఉపయోగించి వ్రాయండి.

   i) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

   ii) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

   iii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

   iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

v) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$

vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x),\ \text{if}\,(2a-x) = f(x)$

$= 0, if\ \ f(2a-x) = -f(x)$

vii) $\int_{-a}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx, x$ యొక్క సరి ప్రమేయం f అయితే

$0 = 0, f$ బేసి ప్రమేయమయితే.

పరిబద్ధ ప్రదేశం (భాగం) యొక్క వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి నిశ్చిత సమాకలనాన్ని ఉపయోగించండి.

ముఖ్యాంశాలు:

1. $[a,b]$లో f అవిచ్ఛిన్నం మరియు F ని f కి ప్రత్యవకలజం ఉంటాం. అప్పుడు

   $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

2. $[a,b]$లో f, g లు అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు C స్థిర సంఖ్య అప్పుడు

   i) $\int_a^b cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$

   ii) $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3. వక్రం $y = f(x), x$ అక్షం, $x = a, x = b$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం

   $\int_a^b f(x)\,dx\ or\ \int_a^b y\,dx$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $\int_{-1}^{1} e^x dx$ గణించండి.

సాధన: $\int_{-1}^{1} e^x dx = \left|e^x\right|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2-1}{e}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ గణించండి.

సాధన: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = |\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

3. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ గణించండి.

సాధన: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left|\tan^{-1} x\right|_0^1 = Tan^{-1}1 - Tan^{-1}0$

$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$ గణించండి.

సాధన: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$= |-\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + |\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$

$= -(0-1) + (1-0)$

$= 1 + 1 = 2$

2. $\int_0^5 (x+1)\, dx$ గణించండి.

సాధన: $\int_0^5 (x+1)\, dx = \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^5 + |x|_0^5$

$$=\frac{1}{2}\left(5^2-0\right)+(5-0)$$

$$=\frac{25}{2}+5=\frac{35}{2}$$

3. $y=x$ వక్రంతోను, x – అక్షం, $x=0, x=2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వక్రంతోను x – అక్షం, $x=0, x=2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం $=\int_0^2 xdx$

$$=\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^2$$

$=2-0=2$ చ.యూ.

4. $y=e^{2x}$ వక్రంతోనూ, x – అక్షం, $x=0, x=a, a>0$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశము వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన ప్రదేశ వైశాల్యం $=\int_0^a e^{2x}dx$

$$=\left|\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^a$$

$$=\left(\frac{e^{2a}-e^0}{2}\right)=\left(\frac{e^{2a}-1}{2}\right)$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx$ ను గణించండి.

సాధన : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin o)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

6. $\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ గణించండి.

సాధన: $$\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} \right|^2$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1} 1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1} 0$$

$$= \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $\int_{-3}^{3} |x+1|\, dx$ గణించండి.

సాధన: $$|x+1| = \begin{cases} x+1 & if \quad x \geq -1 \\ -x-1 & if \quad x < -1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{3} |x+1|\, dx = \int_{-3}^{-1} |x+1|\, dx + \int_{-1}^{3} |x+1|\, dx$$

$$= \int_{-3}^{-1}(-x-1)\,dx + \int_{-1}^{3}(x+1)\,dx$$

$$= \left|\frac{-x^2}{2} - x\right|_{-3}^{-1} + \left|\frac{-x^2}{2} - x\right|_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1$$

$$= 10$$

2. $\int_{-a}^{a} \frac{xe^{x^2}}{1+x^2}\,dx$ గణించండి.

సాధన: $f(x) = \frac{xe^{x^2}}{1+x^2}$

$$f(-x) = \frac{-xe^{x^2}}{1+x^2} = -f(x)$$

$f(x), x$ యొక్క బేసి ప్రమేయము.

$$\therefore \int_{-a}^{a} \frac{xe^{x^2}}{1+x^2}\,dx = 0$$

3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+cox^2 x}\,dx$

సాధన: $\cos x = t$ అనుకొనిన $-\sin x dx = dt$ $\Rightarrow \sin x dx = -dt$

$x = 0$ అయితే $t = \cos 0 = 1$

మరియు $x = \frac{\pi}{2}$ అయితే $t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+cox^2 x}\,dx = \int_{1}^{0} \frac{1}{1+t^2} \times (-dt)$$

$$= -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\left|Tan^{-1}t\right|_1^0$$

$$= -\left|Tan_0^{-1} - Tan^{-1}1\right|$$

$$= -\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+cox^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

4. $xy = c^2, x = a, x = b, a > b > 0$ $X-$అక్షం నిరూపకాలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశము వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వక్రము $xy = c^2 \Rightarrow y = \frac{c^2}{x}; x = a, x = b, a > b$

కావలసిన వైశాల్యం $= \int_b^a y\,dx \qquad (\because a > b)$

$$= \int_b^a \frac{c^2}{x}\,dx$$

$$= c^2 \int_b^a \frac{1}{x}\,dx$$

$$= c^2 \left|\log x\right|_b^a$$

$$= c^2 \left|\log a - \log b\right|$$

$$= c^2 \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

5. మొదటి పాదంలో $X-$అక్షం, $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తాలతో ఆ వృత్తమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వక్రం $x^2 + y^2 = a^2$ ఒక వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. దాని కేంద్రం, వ్యాసార్థాలు వరసుగా $(0,0)$ మరియు $'a'$

కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^a y dx$

$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($\because$ మొదటి పాదంలో y ధనాత్మకం)

$= \left| \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right|_0^a$

$= 0 + \frac{a^2}{2} \sin_1^{-1} - 0 - \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 0$ $\left(\because \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}, \sin^{-1} 0 = 0 \right)$

$= \frac{a^2}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$ చ.యూ.

6. $x = y$ వక్రంతోనూ Y – అక్షం $y = 0, y = 3$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశము వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వక్రము $x = y$,

ఆ వక్రం, Y – అక్షం $y = 0, y = 3$ సరళరేఖలతో పరిబద్ధమైన వైశాల్యం.

$= \int_0^3 x dy$

$= \int_0^3 y dy$

$= \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^3$

$= \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$ చ.యూ.

7. $x = y^2$ వక్రంతోనూ Y – అక్షం $y = 0, y = 2$ రేఖలతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: వక్రం సమీకరణం $x = y^2$.

ఆ వక్రం, Y – అక్షం, $y = 0, y = 2$ రేఖల మధ్య పరిబద్ధమైన వైశాల్యం $= \int_0^2 x dy$

$= \int_0^2 y^2 dy$

$$= \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$ చ.యూ.

8. $x^2 + y^2 = a^2$ అనువృత్తంతోను, మొదటి పాదంలో Y – అక్షంతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వక్రం $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది. దాని కేంద్రం $(0,0)$ మరియు వ్యాసార్థం 'a'

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^a x dy$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$$

(మొదటి పాదంలో x ధనాత్మకం)

$$= \left(\frac{y\sqrt{a^2 - y^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) \right)_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 1 - 0 - \frac{a^2}{2} \sin^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}$$ చ.యూ.

9. $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$ గణించండి.

సాధన: $\int_0^1 \sin^{-1} x dx = \int_0^1 \left(\sin^{-1} x\right).1 dx$

$$= \left| \sin^{-1} x . \int 1 dx - \left(\int \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) . \int 1 dx \right) dx \right|_0^1$$

$$= \left| x \sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \times x dx \right|_0^1$$

$$= \left| x\sin^{-1}x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{dt}{-2} \right|_0^1 \qquad 1-x^2 = t \text{ అనుకొనిన } -2xdx = dt \therefore \; xdx = \frac{-dt}{2}$$

$$= \left| x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int t^{\frac{-1}{2}} \right|_0^1$$

$$= \left| x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}.\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_0^1$$

$$= \left| x\sin^{-1}x + \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right|_0^1 = \sin^{-1}1 - \sin^{-1}0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+Tanx)\,dx$ గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+Tanx)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+Tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\frac{1-Tanx}{1+Tanx}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1+Tanx}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+Tanx)\,dx$$

$$I = \log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dx - I$$

$$2I = \log 2\left|x\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \log 2\left(\frac{\pi}{4}-0\right)$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{8}\log 2$$

11. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ గణించండి.

సాధన: $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad (\because \sin(\pi - x) = \sin x,\ \cos(\pi - x) = -\cos x)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

$$2I = \pi\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}(-dt) \qquad \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$$

$$x = \pi \Rightarrow t = \cos\pi = -1$$

$$\therefore I = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{-\pi}{2}\left|Tan^{-1}t\right|_1^{-1}$$

$$= \frac{-\pi}{2}\left(Tan^{-1}(-1) - Tan^{-1}1\right)$$

$$= \frac{-\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\times\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^x}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ యొక్క మొత్తం (సంపూర్ణ) ప్రదేశం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

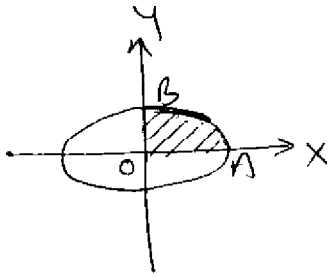
సాధన: దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

దీర్ఘవృత్తం రెండు అక్షాలకు సౌష్టవంగా ఉంది.

$\therefore$ మొదటి పాదంలోని వైశాల్యాన్ని 4 రెట్లుగా పెంచితే దీర్ఘవృత్తం మొత్తం ప్రదేశం వైశాల్యం వస్తుంది.

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం మొత్తం ప్రదేశ వైశాల్యం

$= 4\times OAB$ వై॥



మొదటి పాదంలో

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

OAB వైశాల్యంలో, x హద్దు 0 నుంటి a కు,

$$\therefore OAB \text{ వై॥} = \int_0^a y\,dx$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$=\frac{b}{a}\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1-0-\frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right]$$

$$=\frac{b}{a}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{\pi}{2} \qquad \left(\because \sin^{-1}1=\frac{\pi}{2},\ \sin^{-1}0=0\right)$$

$$=\frac{\pi ab}{4}$$

$\therefore$ దీర్ఘ వృత్తం మొత్తం వైశాల్యం

$= 4 \times \frac{\pi ab}{4}$

$= \pi ab$ చ.యూ.

2. $y = x^2, y = x + 6$ వక్రాలతో ఆ వృత్తమైన ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: $y = x + 6$ సరళరేఖా సమీకరణం $y = x^2$ పరావలయాన్ని Y – అక్షం మరియు మూల బిందువు వద్ద సౌష్ఠవంగా ఉన్నది. మరియు X – అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తూ x, y అక్షాలతో వరుసగా -6 మరియు 6ల మధ్య అంతర ఖండం చేస్తున్నది.

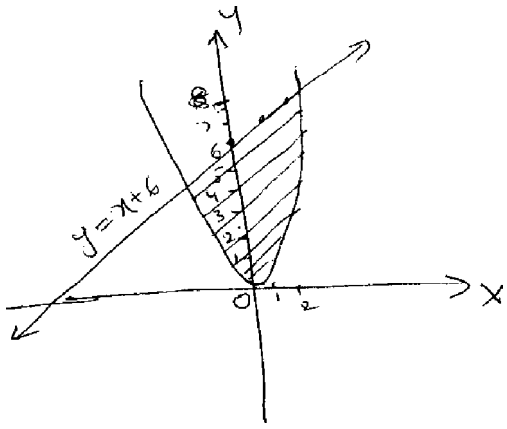
దిగువ హద్దు $y = x^2$ మరియు ఎగువ హద్దు $y = x + 6$ ల ల మధ్య ఆ ప్రదేశము ఉన్నది.

A, B ల వద్ద రెండు వక్రాలు ఖండించుకొంటాయి. ఆ రెండు సమీకరణాలు సాధించగా

$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 3, -2$



$x = 3$ అయిన $y = a$ మరియు

$x = -2$ అయితే $y = 4$

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం $= \int_{-2}^{3} \left[(x+6) - x^2 \right] dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{3}$

$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9 \right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3} \right)$

$= \frac{27}{2} - \left(\frac{-22}{3} \right)$

$= \frac{81 + 44}{6} = \frac{125}{6}$ చ.యూ.

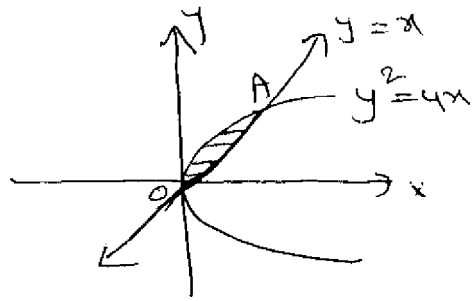
3. $y^2 = 4x$ మరియు $y = x$ వక్రాలతో పరిబద్ధమైన వైశాల్యం కనుక్కోండి.

సాధన: $y^2 = 4x$ పరావలయ సమీకరణం మూలబిందువు వద్ద X – అక్షం వద్ద సౌష్టవంగా ఉన్నది.

సరళరేఖా సమీకరణం $y = x$ మూల బిందువు గుండా పోతూ, X – అక్షంతో 45^0 కోణం చేస్తున్నది.

పటంలో $y = x$ దిగువ హద్దును, $y^2 = 4x$ ఎగువ హద్దును సూచిస్తున్నది.

ఈ రెండు వక్రాలు O మరియు A వద్ద ఖండించుకొంటున్నాయి. ఈ రెండు సమీకరణాలు సాధించగా



$$\frac{y^2}{4} - y = 0$$

$$y(y-4) = 0$$

$$y = 0, 4$$

$y = 0$ అయిన $x = 0$

మరియు $y = 4$ అయిన $x = 4$

$$f(x) = (4x)^{\frac{1}{2}}, g(x) = x.a = 0, b = 4$$

$\therefore$ కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx$

$$= \left| 2.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right|_0^4$$

$$= \frac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) - \frac{1}{2}\left(4^2 - 0\right)$$

$$= \frac{4}{3} \times 8 - 8$$

$= \frac{8}{3}$ చ.యూ.

4. $x^2 = 4ay$ మరియు $y^2 = 4ax$ రెండు పరావలయాల మధ్య ఉమ్మడి ప్రదేశం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

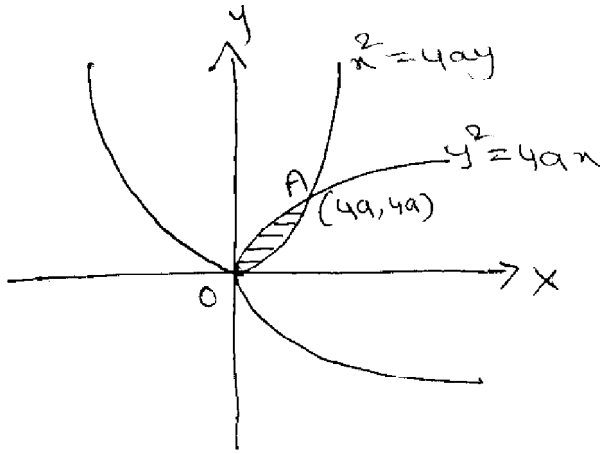
సాధన: $y^2 = 4ax$ మరియు $x^2 = 4ay$ లు పరావలయ సమీకరణాలు. అవి X – అక్షం, Y – అక్షాల వద్ద సౌష్ఠవంగా ఉన్నాయి. ఆ రెండు పరావలయాల శీర్షాలు మూల బిందువు వద్ద ఉంటాయి.

దిగువ హద్దు $x^2 = 4ay$,

ఎగువ హద్దు $y^2 = 4ax$ లుగా గల్గిన ప్రదేశాన్ని పటంలో చూడగలం.

ఆ రెండు వక్రాలు O, A అను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకొంటాయి.

ఈ రెండు సమీకరనాలను సాధించగా



$$\frac{x^2}{16a^2} = 4ax$$

$$\Rightarrow x\left(x^3 - 64a^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 4a$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 4a \Rightarrow y = 4a$$

బిందువులు $(0,0)$ మరియు $(4a, 4a)$

$$f(x) = \sqrt{4ax}, g(x) = \frac{x^2}{4a}, a = 0, b = 4a$$

కావలసిన వైశాల్యం $= \int_0^{4a} \left(\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right) dx$

$$= \left| 2\sqrt{a}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4a}.\frac{x^3}{3} \right|_0^{4a}$$

$$= \left| \frac{4\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12a} x^3 \right|_0^{4a}$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3}$$

$$= \frac{16}{3} a^2 \text{ చ.యూ.}$$

28

అవకలన సమీకరణాలు

అవకలనం, సమాకలనం భావనను బాగుగా చదివిన స్థితిలో, వాటి అనువర్తనాలను ఏవిధంగా ఉపయోగించవలెననే ప్రశ్న మనకు ఎదురవుతుంది.

అంతరిక్షం (ఆకాశం)లో రాకెట్‌ను కక్ష్యలోకి ప్రవేశపెట్టుటకు సంబంధించిన సాంకేతిక పరిజ్ఞానమునకు, ఖచ్చితమైన కక్ష్యలో పయనించు వేగము, ప్రవేశపెట్టు కోణము,

అభిబలము లాంటి వాటికి ఈ భావాలు వాస్తవంగా మనకు సహాయపడుతుంది.

అంతేగాక భౌతిక శాస్త్రము, జీవశాస్త్రమునకు సంబంధించిన కొన్ని సమస్యలు, అందులో వచ్చు (వ్యుత్పన్నాలు)అవకలనాలు ఈ పాఠ్యాంశంలో వస్తాయి.

తత్సంబంధమైనది $\frac{ds}{dt}=4.9t^2$. ఇందులో s దూరమును, t కాలమును తెలియచేయును. కావున $\frac{ds}{dt}$ ఒక t కాలంలో వేగమును (దూరములో మార్పురేటు) సూచించును.

అవకలజాలు పదాలుగా కలిగిన సమీకరణములను, పదములను, అవకలన సమీకరణములని పిలుస్తాం. ఈ పాఠ్యాంశము నందు అటువంటి సమీకరణాలకు సంబంధించిన ఫలితాలు, ఉపయోగించు విధానాలు నేర్చుకుందాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, తెలుసుకోగలిగిన విషయాలు.

1. అవకలన సమీకరణ నిర్వచనం, దాని పరిమాణం మరియు తరగతి.
2. అవకలన సమీకరణాల పరిమాణం మరియు తరగతిని కనుగొనము.
3. అవకలన సమీకరణాల "సాధారణ సాధన" మరియు "ప్రత్యేక సాధన"లు ఉదాహరణల ద్వారా వివరించుట.
4. క్రింది రూపంలో ఉన్న అవకలన సమీకరణాలను విశదపరచండి.

$i)\quad \frac{dy}{dx}=f(x)$ $\qquad ii)\quad \frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ $\qquad iii)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{d(x)}$

$iv)\quad \frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ $\qquad v)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$

ముఖ్యాంశాలు

1. ఒక అస్వతంత్ర చలరాశి, ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశుల దృష్ట్యా కలిగిన దాని అవకలజాలతో ఏర్పడిన సమీకరణాన్ని అవకలన సమీకరణం అంటాం.

2. ఒక అవకలన సమీకరణంలోని అత్యధిక పరిమాణం ఉన్న అవకలజ పరిమాణాన్నే అవకలన సమీకరణ పరిమాణం అంటాం.

3. బహుపది సమీకరణంలో గరిష్ట పరమాణువు అవకలజపు గరిష్ట ఘాతాన్ని ఆ అవకలన సమీకరణపు తరగతి అంటాం.

4. అవకలన సమీకరణ సాధనలో యాధృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య అవకలన సమీకరణ పరిమాణానికి సమానమైన ఆ సాధనను సాధారణ సాధన అంటాం.

5. సాధారణ సాధనలో యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలకు ప్రత్యేక విలువలు ప్రతిక్షేపించడం వల్ల వచ్చే సాధనను ప్రత్యేక సాధన అంటాం.

6. $\frac{dy}{dx} = f(x)$ రూపంలో ఉండే అవకలన సమీకరణాన్ని రెండు వైపులా సమాకలనం చేస్తే దాని సాధనను రాబట్టవచ్చు.

7. సమాజాతీయ అవకలన సమీకరణం సాధించడానికి $y = vx$ లేదా $x = vy$ ని ప్రతిక్షేపించి, చలరాశులను విభజించి, సమాకలనం చేస్తే దాని సాధన వస్తుంది.

8. ప్రథమ పరిమాణా ఏకజాతీయ సమీకరణం $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ రూపంలో ఉంటే దాని సాధన.

   $ye^{\int pdx} = \int \left(Qe^{\int pdx}\right)dx + c$, ఇచ్చట C ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య.

9. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ రూపంలో ఉండే 2వ పరిమాణం గల అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించాలంటే, ఆ సమీకరణాన్ని 2 సార్లు సమాకలనం చేయాలి మరియు దాని సాధారణ సాధనలోకి రెండు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు ఉంటాయి.

I. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. క్రింది అవకలన సమీకరణం పరిమాణం మరియు తరగతి కనుక్కోండి.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=0$$

సాధన: ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=0 \text{ లేదా}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ పదం భిన్నాంక సూచికను కలిగి ఉన్నది.

$\therefore$ భిన్నాంక సూచికను తొలగించడానికి మొట్టమొదటగా ఇరువైపులా వర్గము చేయగా

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

$\therefore$ అవకలన సమీకరణం పరిమాణం $=2$, తరగతి $=2$

2. $y=2x\frac{dy}{dx}+x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ అవకలన సమీకరణ పరిమాణం. తరగతి కనుక్కోండి.

సాధన: $y=2x\frac{dy}{dx}+x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$y-2x\frac{dy}{dx}=x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\left(y-2x\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$\therefore$ పరిమాణం $=1$ $\therefore$ తరగతి $=2$

3. అవకలన సమీకరణం $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ పరిమాణం, తరగతి కనుక్కోండి.

సాధన: $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

$$y=\frac{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$y\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$$

$\therefore$ పరిమాణం $=1$

$\therefore$ తరగతి $=2.$

4. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=x$ సాధించండి.

సాధన: $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+x^2}$$

$$dy = \frac{x}{1+x^2}dx$$

సమకలనం చేయగా

$$\int dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx \qquad \left(\because 1+x^2 = t,\ 2xdx = dt,\ xdx = \frac{dt}{2}\right)$$

$$= \int \frac{1}{t}.\frac{dt}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\log t + C$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C$$

5. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^{-y}.x^2$ సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^{-y}.x^2$

$$= e^x e^{-y} + e^{-y}.x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left(e^x + x^2\right)$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = \left(e^x + x^2\right)dx$$

$$e^y dy = e^x dx + x^2 dx$$

సమకలనం చేయగా

$$\int e^y dy = \int e^x dx + \int x^2 dx$$

$$\therefore e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + C$$

6. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ అవకలన సమీకరణ పరిమాణం, తరగతి కనుక్కోండి.

సాధన: $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$

పరిమాణం $=2$, తరగతి $=2$

7. $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = a\frac{d^2y}{dx^2}$

సాధన: $\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = a\frac{d^2y}{dx^2}$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 = \left(a\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 = a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

పరిమాణం $=2$, తరగతి $=2$

8. $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ అవకలన సమీకరణ పరిమాణం, తరగతి కనుక్కోండి.

సాధన: $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

పరిమాణం $= 1$, తరగతి $= 2$

9. $y = ax^2 + bx + c$ లో a, b, c లను తొలగిస్తు కావలసిన అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. దాని పరిమాణాన్ని తరగతిని కనుక్కోండి.

సాధన: $y = ax^2 + bx + c$ అవకలం చేయగా a, b, c లు యాదృచ్ఛిక స్థిర రాశులు

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

తిరిగి అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$$

మళ్ళీ అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

ఇది కావలసిన అవకలన సమీకరణం

దీని పరిమాణం $= 3$, తరగతి $= 1$

II. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $y = a\cos(x + b)$ అను వక్రాల కుటుంబానికి అనుగుణంగా అవకలన సమీకరణాన్ని రాబట్టండి.

సాధన: $y = a\cos(x + b)$ ... (1)

రెండు వైపులా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x + b) \quad \ldots (2)$$

మళ్ళీ అవకలనం చేస్తే

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \qquad \ldots (3)$$

(1), (3) ల నుండి

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad \text{లేదా}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$ మనకు కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

2. a ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య అయితే $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ కు అనుగుణంగా వచ్చే అవకలన సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $y^2 - 2ay + x^2 = a^2 \qquad \ldots (1)$

a యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య అవకలనం చేయగా

$$2y\frac{dy}{dx} - 2a\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$(y-a)\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$y - a = \frac{-x}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\therefore a = y + \frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$a = \frac{y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

a విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$y^2 - 2\left(\frac{y\frac{dy}{dx}+x}{\frac{dy}{dx}}\right)y + x^2 = \left(\frac{y\frac{dy}{dx}+x}{\frac{dy}{dx}}\right)^2$$

$$\frac{y^2\frac{dy}{dx} - 2y^2\frac{dy}{dx} - 2xy + x^2\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\left[-y^2\frac{dy}{dx} - 2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} = y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$$

$$\left(x^2 - 2y^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$$

3. A, B లు యాదృచ్ఛిక స్థిరసంఖ్యలు అయితే $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ కు అనుగుణంగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ --- (1)

A, B లు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు అవకలనం చేయగా,

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x} \quad \ldots (2)$$

మళ్ళీ అవకలనం చేయగా,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + 9Be^{-3x} \quad .. (3)$$

(1), (2), (3) సమీకరణాలను సాధించగా

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -y \\ 2 & -3 & \frac{-dy}{dx} \\ 4 & 9 & -\frac{d^2y}{dx^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$1\left(3\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}\right)-1\left(-2\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}\right)-y(18+12)=0$$

$$5\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-30y=0$$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$, కావలసిన అవకలన సమీకరణం.

4. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$

సాధన $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$

$$\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

ఇది ఒక సమఘాత సమాసము

$\therefore y=vx$ అనుకొనిన

$$\frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x^2+v^2x^2}{2x^2v}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1-v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

సమకలనం చేయగా

$$\int\frac{2v}{1-v^2}dv=\rightarrow\int\frac{dx}{x}$$

$$-\log\left(1-v^2\right)=\log x+\log c$$

$$\log x+\log\left(1-v^2\right)+\log c=0$$

$$\log\left(x\left(1-v^2\right)c\right)=0$$

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)C=e^0$$

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)}{x}C=1$$

$$\therefore\left(x^2-y^2\right)c=x$$

5. $\left(x^2-yx^2\right)\frac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0$ ను సాధించండి.

సాధన: $\left(x^2-yx^2\right)\frac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0$

$$x^2(1-y)\frac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0$$

$$x^2(1-y)\frac{dy}{dx}+y^2(1+x)=0$$

$$\left(\frac{1-y}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1+x}{x^2}\right)dx=0$$

$$\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=0$$

సమకాలనం చేయగా

$$\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=0$$

$$-\frac{1}{y}-\log y-\frac{1}{x}+\log x=c$$

$\therefore \log\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+c$, కావలసిన సాధారణ సమీకరణం.

6. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{-x}$ ను సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{-x}$ ... (1)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+P.y=Q$$

ఇచ్చట $P=\frac{1}{x}, Q=e^{-x}$

$$\therefore \text{I.F.}=e^{\int pdx}=\int e^{1/x}dx=e^{\log x}=x\,(x>0)$$

(1) కి ఇరువైపులా సమీకరణాన్ని I.F. తో గుణిస్తే

$$x\frac{dy}{dx}+9y=xe^{-x}$$

$$d(yx)=xe^{-x}$$

సమకలనం చేయగా

$$\int d(yx) = \int xe^{-x}dx + c$$

$$xy = x.\int e^{-x}dx - .\int\left(1.\int e^{-x}dx\right)dx$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx + c$$

$\therefore xy = -xe^{-x} - e^{-x} + c$ లేదా

$$y = -\frac{(x+1)}{x}e^{-x} + \frac{c}{x}$$

7. $\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x\cos x$ ను సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం

$$\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\sin x\cos x \qquad \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

$$P = \cot x,\ Q = 2\sin x\cos x$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int pdx} = e^{\int \cot xdx} = e^{\log\sin x} = \sin x$$

(1) ని ఇరువైపులా IF తో గుణిస్తే

$$\sin x\left(\frac{dy}{dx} + y\cot x\right) = 2\sin^2 x\cos x$$

$$\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(y\cos x) = 2\sin^2 x\cos x$$

ఇరువైపులా సమకాలనం చేస్తే

$$\int \frac{d}{dx}(y\sin x) = \int 2\sin^2 x\cos x dx + c$$

$$\therefore y\sin x = \frac{2\sin^3 x}{3} + c$$

ఇది దత్త సమీకరణానికి సాధన.

8. $\left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy} = Tan^{-1}y - x$ ను సాధించండి.

సాధన: $\left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy} = Tan^{-1}y - x$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Tan^{-1}y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{Tan^{-1}y}{1+y^2} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + Px = Q.$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int p dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{Tan^{-1}y}$$

(1)ని ఇరువైపులా $IF = e^{Tan^{-1}y}$ తో గుణిస్తే

$$e^{Tan^{-1}y}\frac{dx}{dy} + e^{Tan^{-1}y}\frac{x}{1+y^2} = \frac{Tan^{-1}y}{1+y^2}.e^{Tan^{-1}y}$$

$$\frac{d}{dy}\left(xe^{Tan^{-1}y}\right) = \frac{Tan^{-1}y}{1+y^2}.e^{Tan^{-1}y}$$

ఇరువైపులా సమకలనం చేయగా

$$e^{Tan^{-1}y}.x = \int e^t.tdt + c \qquad \left(\because t = Tan^{-1}y,\ dt = \frac{1}{1+y^2}dy\right)$$

$$e^{Tan^{-1}y}x = te^t - \int e^t.dt + c$$

$$= te^t - e^t + c$$

$$= e^t(t-1) + c$$

$$e^{Tan^{-1}y}x = e^{Tan^{-1}y}\left(Tan^{-1}y - 1\right) + c$$

లేదా $x = Tan^{-1}y - 1 + c\ e^{Tan^{-1}y}$

9. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + y = Tan^{-1}x$ ను సాధించండి.

సాధన: $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + y = Tan^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}y = \frac{Tan^{-1}x}{1+x^2} \quad \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$$

$$P = \frac{1}{1+x^2}, Q = \frac{Tan^{-1}x}{1+x^2}$$

$$IF = e^{\int pdx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx} = e^{Tan^{-1}x}$$

(1)ని $IF = e^{Tan^{-1}x}$ తో గుణించగా

$$e^{Tan^{-1}x}\frac{dy}{dx} + e^{Tan^{-1}x}\frac{y}{1+x^2} = e^{Tan^{-1}x}.\frac{Tan^{-1}x}{1+x^2}$$

$$d\left(ye^{Tan^{-1}x}\right) = e^{Tan^{-1}x}.\frac{Tan^{-1}x}{1+x^2}$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా

$$\int d\left(y\tan^{-1}x\right) = \int e^{\tan^{-1}x}\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx + c$$

$$ye^{Tan^{-1}x} = \int e^t.tdt + c \qquad \left(\because t = Tan^{-1}x,\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx\right)$$

$$ye^{Tan^{-1}x} = t.\int e^t dt - \int\left(1.\int e^t dt\right)dt + c$$

$$= t.e^t - \int e^t dt + c$$

$$= t.e^t - e^t + c$$

$$= e^t\left(t-1\right) + c$$

$$ye^{Tan^{-1}x} = e^{Tan^{-1}x}\left(Tan^{-1}x - 1\right) + c$$

లేదా $y = Tan^{-1}x - 1 + Ce^{-Tan^{-1}x}$

10. $(1-\cos 2x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1+\cos 2x$ అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సాధన: $(1-\cos 2x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1+\cos 2x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cot^2 x \qquad \ldots (1)$$

(1)ని ఇరువైపుల సమకాలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \int \cot^2 x dx + C_1$$

$$= \int\left(\cos ec^2 x - 1\right)dx + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot x - x + C_1 \qquad \ldots (2)$$

(2)ను ఇరువైపులా సమకలనం చేయగా

$$y = \int (-\cot x - x + c_1)\, dx + c_2$$

$$= -\int \cot x dx - \int x dx + c_1 \int 1 dx + c_2$$

$$\therefore y = -\log \sin x - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

కావలసిన సాధారణ సాధన.

11. $\frac{d^3y}{dx^3} = x^2 + e^x$ అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సాధన: $$\frac{d^3y}{dx^3} = x^2 + e^x \qquad \ldots (1)$$

(1)ని ఇరువైపుల సమాకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int \left(x^2 + e^x\right) dx + c_1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^3}{3} + e^x + c_1 \qquad \ldots (2)$$

(2)ని ఇరువైపుల సమకాలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \int \left(\frac{x^3}{3} + e^x + c_1\right) dx + c_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{12} + e^x + c_1 x + c_2 \quad .. (3)$$

(3) ని ఇరువైపులా సమకాలనం చేయగా

$$y = \int \left(\frac{x^4}{12} + e^x + c_1 x + c_2\right) dx + c_3$$

$$y = \frac{x^5}{60} + e^x + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

కావలసిన సాధారణ సాధన.

12. $y = Tan^{-1}x$ అయితే $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $y = Tan^{-1}x$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

ఇరువైపులా అవకలనం చేస్తే

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

13. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} - 4x = 3\cot^{-1}x$ ను సాధించండి.

సాధన: $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} - 4x = 3\cot^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cot^{-1}x + 4x}{1+x^2}$$

$$dy = \left(\frac{3\cot^{-1}x}{1+x^2} + \frac{4x}{1+x^2}\right)dx$$

ఇరువైపుల సమకాలనం చేయగా,

$$\int dy = 3\int \frac{\cot^{-1}x}{1+x^2}dx + \int \frac{4x}{1+x^2}dx$$

$$y = 3\int \theta \times (-d\theta) + \int \frac{2}{\phi}.d\phi$$

$$\left(\because \theta = \cot^{-1}x \Rightarrow d\theta = \frac{-1}{1+x^2}dx,\ \phi = 1+x^2 \Rightarrow d\phi = 2xdx\right)$$

$$= -3\frac{\theta^2}{2} + 2\log\phi + c$$

$$\therefore y == \frac{-3}{2}\left(\cot^{-1}x\right)^2 + 2\log\left(1+x^2\right) + c$$

14. $(1+y)\,xydy = \left(1-x^2\right)(1-y)\,dx$

సాధన: $$\frac{(1+y)\,ydy}{1-y} = \left(\frac{1-x^2}{x}\right)dx$$

$$\left[\frac{y}{1-y} + \frac{y^2}{1-y}\right]dy = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$-\left[\frac{(1-y-1)}{1-y} + \frac{1-y^2-1}{1-y}\right]dy = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$\left[1 - \frac{1}{1-y} + 1 + y - \frac{1}{1-y}\right]dy = \left(-\frac{1}{x} + x\right)dx$$

$$\left[2 + y - \frac{2}{1-y}\right]dy = \left(\frac{-1}{x} + x\right)dx$$

ఇరువైపులా సమకాలనం చేయగా,

$$\int\left(2 + y - \frac{2}{1-y}\right)dy = \int\left(\frac{-1}{x} + x\right)dx + c$$

$$2y + \frac{y^2}{2} - \frac{2\log(1-y)}{-1} = -\log x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$2y + \frac{y^2}{2} - 2\log(1-y) = -\log x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\therefore \log x + 2\log(1-y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 2y + c$$

15. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

$= e^{-y}\left(e^x + x^2\right)$

$\frac{dy}{e^{-y}} = \left(e^x + x^2\right)dx$

$e^y dy = \left(e^x + x^2\right)dx$

ఇరువైపుల సమకాలనం చేయగా,

$\int e^y dy = \int \left(e^x + x^2\right)dx$

$\therefore e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

16. $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x \sin y}{\cos y} = 0$ సాధించండి.

సాధన: $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x \sin y}{\cos y} = 0$

$\frac{\cos y}{\sin y} dy + \cos x dx = 0$

$\cot y dy + \cos x dx = 0$

ఇరువైపుల సమాకలనం చేయగా,

$\int \cot y dy + \int \cos x dx = 0$

$\therefore \log \sin y + \sin x = \log c$

$\log \sin y - \log c = -\sin x$

$\log\left(\frac{\sin y}{c}\right) = -\sin c$

$\frac{\sin y}{c} = e^{-\sin x}$

$\therefore \sin y = ce^{-\sin x}$

III. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-m^2y=0$ యొక్క సాధన $y=e^{m\sin^{-1}x}$ అని ధృవీకరించండి.

సాధన: $y=e^{m\sin^{-1}x}$ అనుకొనుము .. (1)

(1)ని x దృష్ట్యా అవకలనం చేస్తే

$$\frac{dy}{dx}=\frac{me^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{my}{\sqrt{1-x^2}}$$

లేదా $\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}=my$

ఇరువైపులా వర్గం చేస్తే

$$\left(1-x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2y^2$$

ఇరువైపులా అవకలనం చేస్తే

$$-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}=2m^2y\frac{dy}{dx}$$

$$-x\frac{dy}{dx}+\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}=m^2y$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$$

$\therefore\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$ యొక్క సాధన $y=e^{m\sin^{-1}x}$ అవుతుంది.

2. $x=1$ అయినప్పుడు $y=1,\frac{dy}{dx}=-1$ అయ్యే $\frac{d^2y}{dx^2}=\log x$ అనే అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సాధన: దత్త అవకలన సమీకరణం

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \log x \qquad .. \ (1)$$

ఇరువైపుల సమకలనం చేయగా

$$\frac{dy}{dx} = \int (\log x) 1 dx$$

$$= \log x . \int 1 dx - \int \frac{1}{x} . x dx + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x \log x - x + c_1 \qquad .. \ (2)$$

ఇరువైపులా తిరిగి సమకలనం చేయగా

$$y = \int (x \log x - x + c_1) dx + c_2$$

$$= \log x \int x dx - \frac{1}{2} \int x dx - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4} x^2 + c_1 x + c_2 \qquad .. \ (3)$$

$x = 1, \frac{dy}{dx} = -1$ లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా $c_1 = 0$

$c_1 = 0, x = 1, y = 1$ లను (3)లో ప్రతిక్షేపించగా $c_2 = \frac{7}{4}$

$\therefore y = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{4}$ ప్రత్యేక సాధన అవుతుంది.

మాడ్యూల్ - VI

29

విభజన కొలతలు

మనము ఇంతకు ముందు కేంద్ర స్థాన కొలతల గురించి నేర్చుకొని యున్నాము. కేంద్ర స్థాన కొలతల యొక్క సూత్రాల వల్ల ఇచ్చిన దత్తాంశము ఒకే ఒక విలువ లాగా సూచింపవీలవుతుంది.

కేంద్ర స్థాన కొలతలు ఇవ్వబడ్డ దత్తాంశాన్ని సంపూర్ణంగా వివరిస్తాయా? లేదా?

పై విషయాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ కింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా : రెండు కర్మాగారాలలోని కార్మికుల వేతనాలు ఈ కింది విధంగా ఉన్నాయి.

కర్మాగారము A:	35	45	50	65	70	90	100
కర్మాగారము B :	60	65	65	65	65	65	70

పై రెండు దత్తాంశాలను పరిశీలించగా రెండు గ్రూపుల మధ్యమాలు (సరాసరులు) సమానము, అది 65.

1. గ్రూపు A లోని విషయాలు మధ్యమానికి దూరంగా నున్నవి.
2. గ్రూపు B లోని విషయాలు మధ్యమానికి దాదాపుగా సమీపంలో నున్నవి.

కావున పై రెండు గ్రూపుల మధ్యమాలు సమానంగా నున్ననూ, ఆ రెండు గ్రూపుల వేతనాలలో బేధము కలదు.

అందువల్ల, పై రెండు గ్రూపుల వ్యత్యాసాలు తొలగించుటకు మరియు మధ్యమానికి దూరంగా నున్న విషయాలను పరిగణనలోకి తీసుకొనుటకు ఇంకొక కొలతలు (సూత్రాలు) లేదా పద్ధతులు అవసరమవుతాయి. వీటినే 'విభజన కొలతలు' అంటారు.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన పిమ్మట నీకు ఈ క్రింది విషయాలు అవగతమవుతాయి.

1. ఉదాహరణల ద్వారా విభజన అర్థమును వివరించగలుగుతావు.

2. వేరు వేరు విభజన కొలతలను నిర్వచించగలుగుతావు. అవే వ్యాప్తిమధ్యమ విచలనము, విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనములు.

3. వర్గీకరించని మరియు వర్గీకరించిన దత్తాంశములకు మధ్యమ విచలనములు కనుగొంటావు.

4. అదేవిధంగా విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాల ధర్మాలను ఉదహరిస్తావు.

ముఖ్యాంశాలు

1. వ్యాప్తి : ఇచ్చిన దత్తాంశములో అతిపెద్ద, అతి చిన్న విలువల భేదము.

2. మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనము $(MD) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left|xi - \bar{x}\right|\right]}{N}$,

$\because N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)$

3. విస్తృతి : $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(xi - \bar{x}\right)^2}{n}$ (వర్గీకరించని దత్తాంశమునకు)

4. క్రమ విచలనము $(\sigma) = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$

5. వర్గీకరించిన దత్తాంశమునకు విస్తృతి $\sigma^2_g == \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_i - \bar{x}\right)\right)^2}{N}$, $x_i =$ తరగతి మధ్య విలువ.

అలాగే $\sigma^2 x = h^2\sigma_u^2$ మరియు $\sigma_u^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\left(f_i\left(u_i - \bar{u}\right)^2\right)$,

$\because N = \sum_{i=1}^{K} f_i$ లేదా $\sigma^2_u = \dfrac{\sum\left[f_i u_i^2\right] - \left[\sum_{i=1}^{K}(f_i u_i)\right]}{N} : N = \sum_{i=1}^{K} f_i$

వర్గీకరించిన దత్తాంశమునకు క్రమవిచలనము $\sigma g = \sqrt[+]{\sigma g^2}$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. 10 మంది విద్యార్థినుల వయస్సులు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి.

3 5 7 8 9 10 12 14 17 18 అయిన వ్యాప్తి ఎంత?

సాధన : వ్యాప్తి = గరిష్ట సంఖ్య − కనిష్ట సంఖ్య

$= 18 - 3 = 15$

2. 9 మంది XII తరగతి విద్యార్థుల బరువులు (కేజీలలో) ఈ కింద ఇవ్వబడినవి.

45 49 55 52 40 62 47 61 58 అయిన వ్యాప్తి ఎంత?

సాధన: వ్యాప్తి = గరిష్ఠ సంఖ్య − కనిష్ఠ సంఖ్య

$= 62 - 40 = 22$

II. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. ఈ కింది వర్గీకరణ యొక్క మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును కనుగొనము.

అంశాల సైజులు	(x_i):	4	6	8	10	12	14	18
పౌన: పున్యం	(f_i):	2	5	5	3	2	1	4

సాధన : (మధ్యమము $= 10$)

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)$
4	2	−5.7	5.7	11.4
6	5	−3.7	3.7	14.8
8	5	−1.7	1.7	8.5
10	3	0.3	0.3	0.9
12	2	2.3	2.3	4.6
14	1	4.3	4.3	4.3
18	4	6.3	6.3	25.2
	22			69.7

మధ్యయము యొక్క మధ్యమ విచలనము

$$\frac{\sum\left[f_i\left|x_i-\bar{x}\right|\right]}{N}=\frac{69.7}{22}=3.319$$

2. ఈ కింది వర్గీకరణ యొక్క మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును కనుగొనము?

మార్కులు :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
విద్యార్థుల సంఖ్య :	5	8	15	16	6

(మధ్యమము $=27$)

సాధన:

మార్కులు	మధ్యమ విచలనం x_i	f_i	$x_i-\bar{x}$	$\left\|x_i-\bar{x}\right\|$	$f_i\left\|x_i-\bar{x}\right\|$
0–10	5	5	–22	22	110
10–20	15	8	–12	12	96
20–30	25	15	–2	2	30
30–40	35	16	8	8	128
40–50	45	6	15	15	108
		50			472

మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనము $=\frac{\sum\left[f_i\left|x_i-\bar{x}\right|\right]}{N}=\frac{472}{50}=9.44$

3. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనమును కనుగొనము?

జీతము (రూ॥లలో)	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
ఉద్యోగుల సంఖ్య :	4	6	8	12	7	6	4	3

(మధ్యమము రూ. 57.2గా ఇవ్వబడినది).

సాధన:

మార్కులు	మధ్యమ విచలనం x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
20–30	25	4	−32.2	32.2	128.8
30–40	35	6	−22.2	22.2	133.2
40–50	45	8	−12.2	12.2	97.6
50–60	55	12	−2.2	2.2	26.4
60–70	65	7	7.8	7.8	54.6
70–80	75	6	17.8	17.8	106.8
80–90	85	4	27.5	27.8	111.2
90–100	95	3	37.8	37.8	113.4
		50			772.0

$\therefore$ మాధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనము $= \dfrac{\sum\left[f_i \left|x_i - \bar{x}\right|\right]}{N} = \dfrac{772}{50} = 15.44$

4. 100 మంది విద్యార్థుల బరువుల వివరాలు పట్టికలో ఇవ్వబడినవి? వాని మధ్యమ విచలనము కనుగొనము.

బరువులు (కి.గ్రా.లలో):	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
విద్యార్థుల సంఖ్య :	5	13	35	25	17	5

సాధన:

బరువులు(కి.గ్రాలలో)	x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
50–55	52.5	5	−12.5	12.5	62.5
55–60	57.8	13	−7.5	7.5	84.5
60–65	35	−2.5	2.5	2.5	87.5
65–70	67.5	2.5	2.5	2.5	62.5
70–75	72.5	17	7.5	7.5	127.5
75–80	77.5	5	12.5	12.5	62.5
	390	100			487.0

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{6} = \frac{390}{6} = 65$$

మధ్యమ విచలనము $= \dfrac{\sum\left[f_i\left|x_i - \bar{x}\right|\right]}{N} = \dfrac{487}{100} = 4.87$

5. కింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశపు మధ్యమము యొక్క మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము (వర్గీకరించని).

45 55 63 76 67 84 75 48 62 65

(మధ్యమములు 64గా ఇవ్వబడినది)

సాధన:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$
45	−19	19
55	−9	9
63	−1	1
76	12	12
67	3	3
84	20	20
75	11	11
48	−16	16
62	−2	2
65	1	1
		94

$\bar{x} = 64;\ n = 10$

$\therefore$ మధ్యమ విచలనము $= \dfrac{\sum\left|x_i - \bar{x}\right|}{n} = \dfrac{94}{10} = 9.4$

6. సెక్షన్ A లోని 10 మంది విద్యార్థులకు ఇంగ్లీషు నికషలో వచ్చిన మార్కులు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి. అవి

7 10 12 13 15 20 21 28 29 35

అయినా విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనము?

సాధన: ఇక్కడ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = \frac{190}{10} = 19$

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
7	−12	144
10	−9	81
12	−7	49
13	−6	36
15	−4	13
20	2	4
28	9	81
29	10	100
35	16	256
	0	768

విస్తృతి $\sigma^2 = \frac{768}{10} = 76.8$

మరియు క్రమవిచలనం, $\sigma = \sqrt{76.8} = 8.76$ (సుమారుగా)

7. ఈ క్రింది దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలను కనుగొనము?

4 6 8 10 12 14 16

సాధన:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
4	−6	36
6	−4	16
8	−2	4
10	0	0
12	2	4
14	4	16
16	6	36
	0	112

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{70}{7} = 10$$

విస్తృతి = $\sigma^2 = \frac{112}{7} = 16$

క్రమవిచలన = $\sigma = \sqrt{16} = 4$

8. ఈ కింది దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలు కనుగొనము?

4 7 9 10 11 13 16

సాధన:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
4	−6	36
7	−3	9
9	−1	1
10	0	0
11	1	1
13	3	9
16	6	36
	0	92

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{70}{7} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{92}{7} = 13.14$$

$$\sigma = \sqrt{13.14} = 3.62$$

9. ఈ కింది దత్తాంశపు విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనము?

40 40 40 60 65 65 65 70 70 75 75 75

80 85 90 90 100

సాధన:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
40	−30	900
40	−30	900
40	−30	900
60	−10	100
65	−5	25
65	−5	25
70	0	0
70	0	0
75	5	25
75	5	25
75	5	25
80	10	100
85	15	225
90	20	400
90	20	400
100	30	900
	0	4850

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1120}{16} = 70$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{4856}{16} = 303.216$$

$$\sigma = \sqrt{303.216} = 17.6$$

10. ఒక కర్మాగారములోని 50 మంది కార్మికుల వేతనాలు ఈ కింది దత్తాంశములో ఇవ్వబడినవి. వాని మధ్యమ విచలనమును కనుగొనుము?

వేతనాలు (రూ॥లలో)	1200	1300	1400	1500	1600	1800
కార్మికుల సంఖ్య :	4	7	15	12	7	5

సాధన:

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
1200	4	−233	233	932
1300	7	−133	133	931
1400	15	−33	33	495
1500	12	67	67	804
1600	7	167	167	1169
1800	5	367	367	1835
8800	50			6166

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{8800}{6} = 1433.3 = 1433$$

$$N = 50$$

మధ్యమ విచలనము $= \dfrac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N} = \dfrac{6166}{50} = 123.32$

11. 10 మంది విద్యార్థులు లెక్కల పరీక్షలోని మార్కులు ఈ కింద ఇవ్వబడినవి అయిన వాని విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలను కనుగొనము?

6 10 12 13 15 20 24 28 30 32

సాధన:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
6	−13	169
10	−9	81
12	−7	49
13	−6	36
15	−4	16
20	1	1
24	5	25
28	9	81
30	11	121
32	13	169
190		748

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{190}{10} = 19$$

విస్తృతి $= \sigma^2 = \dfrac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = \dfrac{748}{10} = 74.8$

క్రమ విచలనము $= \sigma = \sqrt{74.8} = 8.6$

III. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. ఒక పరిశోధనలోని నూతన వంగడముపై జరిగిన పరీక్షలో 50 పరీక్షా క్షేత్రాలలో గోధుమలపై నిర్వహించిన అధ్యయనంలో ఈ కింది ఫలితాలు నమోదు అయినాయి.

ఒక హెక్టారుకు వచ్చిన దిగుబడి	క్షేత్రాల సంఖ్య
31–35	2
36–40	3
41–45	8
46–50	12
51–55	16
56–60	5
61–65	2
66–70	2

పై క్షేత్రాలలోని సరాసరిగా వచ్చిన దిగుబడి 50 క్వింటాళ్ళు అయిన వాని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనండి.

సాధన:

హైక్టారుకు పొందిన దిగుబడి	క్షేత్రాల సంఖ్య	తరగతి మధ్య విలువ	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
31–35	2	33	−17	289	578
36–40	3	38	−12	144	432
41–45	8	43	−7	49	392
46–50	12	48	−2	4	48
51–55	16	53	3	9	144
56–60	5	58	8	64	320
61–65	2	63	13	169	338
66–70	2	68	18	324	648
	50				2900

$$\therefore \overset{\sigma^2}{g} == \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right)}{N} = \frac{2900}{50} = 58$$

మరియు $\overset{\sigma}{g} = +\sqrt{\overset{\sigma^2}{g}} = +\sqrt{58} = 7.61$

2. ఒక పరిశోధనలో ఒక రోగుల సమూహాముపై ఒకానొక ఔషధము యొక్క ప్రభావము, ఈ కింది విధమైన ఫలితాలనిచ్చింది.

ఉపశమనాల శాతము:	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100
రోగుల సంఖ్య :	10	10	25	15	40

అయిన విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాలను కనుగొనము?

సాధన: **పద్ధతి** $\rightarrow$ **1**

ఉపశమనాల శాతము	రోగుల సంఖ్య f_i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)$
0–20	10	10	–40	1600	16000
20–40	10	30	–20	400	4000
40–60	25	50	0	0	0
60–80	15	70	20	400	6000
80–100	40	90	40	1600	64000
	100		250		90000

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{250}{5} = 50,\ N = 100$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)}{N} = \frac{90000}{100} = 900$$

$$\sigma = \sqrt{900} = 30 \cdot$$

పద్ధతి $\rightarrow$ 2

ఉపశమనాల శాతము	రోగుల సంఖ్య f_i	x_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
0–20	10	10	100	100	1000
20–40	10	30	300	900	9000
40–60	25	50	1250	2500	62500
60–80	15	70	1050	4900	73500
80–100	40	90	3600	8100	324000
	$N = 100$		6300		470000

$$\therefore \sigma_g^2 == \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i x_i^2\left(\frac{\Sigma f_i x_i}{\mathrm{N}}\right)\right)^2}{N} = \frac{470000 - \frac{(6300)^2}{100}}{100}$$

$$\frac{470000 - 396900}{100} = \frac{73100}{100} = 731$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{731} = 27$$

3. 30 మంది కార్మికుల రోజువారి వేతనాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి.

రోజవారి వేతనం :	0–50	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300
కార్మికుల సంఖ్య :	3	4	5	7	8	3

అయిన పై దత్తాంశపు విస్తృతి, క్రమ విచలనాలను కనుగొనుము?

సాధన: **పద్ధతి -1**

రోజువారి వేతనం	కార్మికుల సంఖ్య	x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
0-50	3	25	-125	15625	46875
50-100	4	75	-75	5625	22500
100-150	5	125	-25	625	3125
150-200	7	175	25	625	4375
200-250	8	225	75	75	45000
250-300	3	275	125	15625	46875
	30			43750	168750

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{300}{6} = 150, N = 30$$

విస్తృతి $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)}{N} = \dfrac{168750}{30} = 5625$

క్రమవిచలనం $= \sigma_g = \sqrt{\sigma_g^2} = \sqrt{5625} = 75$

పద్ధతి - 2

రోజువారి	వేతనం కార్మికుల సంఖ్య	x_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
0-50	3	25	75	625	1875
50-100	4	75	300	5625	22500
100-150	5	125	625	15625	78125
150-200	7	175	1225	30625	214375
200-250	8	225	825	50625	405000
250-300	3	275	825	75625	226875
	$N = 30$		4850		948750

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}{N} = \frac{948750 - \frac{(4850)^2}{30}}{30}$$

$$\sigma_g^2 = \frac{948750 - 784083.3}{30} = 5488.89 = 5489$$

$$\sigma_g = \sqrt{5489} = 74.1$$

4. ఒక పరిశోధనలోని నూతన వంగడముపై జరిగిన పరీక్షలో 50 పరీక్షా క్షేత్రాలలో గోధములపై నిర్వహించిన అధ్యయనంలో ఈ కింది ఫలితాలు నమోదు అయినాయి.

ఒక హెక్టారుకు వచ్చిన దిగుబడి	క్షేత్రాల సంఖ్య
31 - 35	2
36 - 40	3
40 - 45	8
46 - 50	12
50 - 55	16
56 - 60	5
60 - 65	2
65 - 70	2

పై క్షేత్రాలలోని సరాసరిగా వచ్చిన దిగుబడి 50 క్వింటాళ్ళు అయిన వాని విస్తృతి మరియు క్రమవిచలనాను కనుగొనుము.

సాధన:

హైక్టారుకు పొందిన దిగుబడి (క్విం.లలో)	క్షేత్రాల సంఖ్య	మధ్య విలువ	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
31 – 35	2	33	–3	–6	9	18
36 – 40	3	38	–2	–6	4	12
41 – 45	8	43	–1	–8	1	08
45 – 50	12	48	0	0	0	0
51 – 55	16	53	1	16	1	16
56 – 60	5	58	2	10	4	20
61 – 65	2	63	3	6	9	18
66 – 70	2	68	4	8	16	32
	50			20		124

$h = 5, a = 48$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i y_i)^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(f_i y_i)^2\right]}{N}}{N} = \frac{124 - \frac{(20)^2}{50}}{50} = \frac{124-8}{50} = \frac{58}{25}$$

$\therefore$ విస్తృతి $= \sigma_x^2 = h^2\sigma_y^2 = 25 \times \frac{58}{25} = 58$ (సుమారుగా)

క్రమ విచలనం $= \sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{58} = 7.61$ (సుమారుగా)

5. ఈ క్రింది విభజనలో ఇచ్చిన 230 వేతనాల విస్తృతి, క్రమ విచలనాలకు కనుగొనము?

వేతనాలు	వ్యక్తుల సంఖ్య
70 – 80	12
80 – 90	18
90 – 100	35
100 – 110	42
110 – 120	50
120 – 130	45
130 – 140	20
140 – 150	08

సాధన:

వేతనాలు (రూ॥లో)	వ్యక్తుల సంఖ్య f_i	తరగతి మధ్య x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
70 – 80	12	75	–3	–36	9	108
80 – 90	18	85	–2	–36	4	72
90 – 100	35	95	–1	–01	1	35
100 – 110	42	105	0	0	0	0
110 – 120	50	115	1	50	1	50
120 – 130	45	125	2	90	4	180
130 – 140	20	135	3	60	9	180
140 – 150	08	145	4	32	16	128
	230			125		753

$h = 10, a = 105$

$$\therefore \sigma^2 = h^2\left(\frac{\sum f_i u_i^2 - \frac{\left(\sum f_i u_i\right)^2}{N}}{N}\right)$$

$$= 10^2\left[\frac{753 - \frac{(125)^2}{230}}{230}\right]$$

$$= 100\left[\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)^2\right]$$

$\therefore$ విస్తృతి $\sigma^2 = 100(3.27 - 0.29) = 298$

క్రమ విచలనం $= \sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{298} = 17.3$ (సుమారుగా).

6. ఒక పట్టణములోని ఒక పాఠశాలలో పనిచేయుచున్న ఉపాధ్యాయుల వయస్సుల పట్టిక ఈ కింద ఇవ్వబడినది.

వయస్సు(సం॥లలో):	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య:	25	110	75	120	100	90	50	30

అయినా సోపాన విచలన పద్ధతిన విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలు కనుగొనము?

సాధన:

వయస్సు	ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య	x_i	u_i	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
20 – 25	25	22.5	–3	–75	9	225
25 –30	110	27.5	–2	–220	4	440
30 – 35	75	32.5	–1	–75	1	75
35 – 40	120	37.5	0	0	0	0
40 – 45	100	42.5	1	100	1	100
45 – 50	90	47.5	2	180	4	360
50 – 55	50	52.5	3	150	9	450
55 – 60	30	57.5	4	120	16	480
	600			180		2130

$h = 5,\ a = 37.5$

$$\therefore \sigma^2 = h^2\left(\frac{\sum f_i u_i^2 - \frac{\left(\sum f_i u_i\right)^2}{N}}{N}\right)$$

$$= 5^2\left(\frac{2130 - \frac{(180)^2}{600}}{600}\right)$$

$$= 25\frac{(2130-54)}{600} = \frac{2016}{24} = 86.5$$

$\therefore$ విస్తృతి $= \sigma^2 = 86.5$

క్రమ విచలనము $= \sigma = +\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{86.5} = 9.3$

7. ఈ కింది దత్తాంశమునకు సోపాన విచలన పద్ధతిన విస్తృతి మరియు క్రమ విచలనాలు గణించుము.

వయస్సు (సం॥లలో):	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55
వ్యక్తుల సంఖ్య :	70	51	47	31	29	22

వయస్సు (సం॥లలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య f_i	x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{u}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
25 – 30	70	27.5	–2	–140	4	280
30 – 35	51	32.5	–1	–51	1	51
35 – 40	47	a	0	0	0	0
40 – 45	31	42.5	1	31	1	31
45 – 50	29	47.5	2	58	4	116
50 – 55	22	52.5	3	66	9	198
	250			–36		676

$h = 5, a = 37.5$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum f_i u_i^2 - \frac{\left(\sum f_i u_i\right)^2}{N}}{N}$$

$$= \frac{676 - \frac{(-36)^2}{250}}{250}$$

$$= \frac{676 - 5.184}{250} = \frac{670.816}{250} = 2.683$$

$\therefore \sigma_x^2 = h^2.\sigma_u^2 = 67.075 = 67.08$

$\therefore$ విస్తృతి $\sigma_x^2 = 67.075 = 67.08$

క్రమ విచలనము $\sigma_x = \pm\sqrt{\sigma_x^2} = +\sqrt{67.075} = 8.19$

30

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలు మరియు ఘటనలు

దైనందిన జీవితములో క్రికెట్ మ్యాచ్‌లో ఇరువురు సారథులు టాస్ వేస్తారు. టాస్ వేయడం అనేది చర్యలో బొమ్మ, బొరుసు అనేది రెండు అవకాశాలు. ఇక్కడ నాణెము నిటారుగా పడడం జరగదు.

మరో ఉదాహరణగా పాచిక వేయడాన్ని తీసుకొందాము ఇక్కడ ఆరు అవకాశాలు వున్నాయి. అవి : 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6 (ఇక్కడ ప్రతి ముఖముపై ఒక్కొక్క సంఖ్య గలదు.)

ఏదైనా ఫలితము నిచ్చు పనిని ప్రయోగము అంటాము. సాధారణంగా ఒక ప్రయోగానికి వివిధ రకాల ఫలితములు రావడానికి అవకాశముంది. ప్రతి ఫలితము సంబవించడానికి సమాన అవకాశాలు గలవు. ఈ పాఠ్య భాగములో మనము వివిధ ప్రయోగాలు వాటి ఫలితాల గురించి విశ్లేషిస్తాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్య భాగము చదివిన తర్వాత మీరు.

- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క అర్థాన్ని మరియు ఉదాహరణలు ఇవ్వగలుగుతారు.
- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలలో అవకాశాల యొక్క ప్రాముఖ్యతను వివరించగలుగుతారు.
- ఒక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణను నిర్వచించగలుగుతారు.
- ఇచ్చిన ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణను రాయగలుగుతారు.
- వివిధ రకాల ఘటనలు అనగా పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు, సమసంబన ఘటనలు, పూర్ణఘటనలు.
- స్వతంత్ర మరియు అస్వతంత్ర ఘటన మధ్య వ్యత్యాసాన్ని గుర్తించగలుగుతారు.

ముఖ్యాంశాలు :

- ఏదైనా ఫలితము నిచ్చే కృతములను ప్రయోగము అంటాము.
- ఒకే విధమైన పరిస్థితులలో ఆ ప్రయోగాన్ని ఎన్ని సార్లయిన చేయడానికి వీలుండి ఏ ఫలితము వస్తుందో ముందే చెప్పలేనిదై ఉండే ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటాము.
- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క లఘు ఘటనల సమితిని శాంపుల్ ఆవరణ అంటాము. దాని మూలకాలను శాంపుల్ బిందువులు అంటాము.
- శాంపుల్ ఆవరణలోని కొన్ని లఘు ఘటనలు ఇచ్చిన నియమాలను తృప్తిపరిస్తే దానిని ఘటన అంటాము. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఏదైన ఒక ఘటన మిగతా ఘటనల కంటే ఎక్కువగా సంభవిస్తుంది

అనడానికి కారణం ఏమిలేక పోతే అటువంటి ఘటనలను సమవిభజన ఘటనలు అంటాము.

- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఏదైన ఒక ఘటన సంభవించడం మిగతా ఘటనల సంభవాన్ని నిరోధించేటట్లు ఉంటే అటువంటి ఘటనలకు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అంటాము.
- ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఆ ప్రయోగ ఫలితం వాటిలో ఒక దానికైన చెందేటట్లు ఉంటే అటువంటి ఘటనలను పూర్ణఘటనలు అంటాము.
- ఘటనల సముదాయంలో ఒక ఘటన ప్రభావము ఇతర ఘటనలపై లేనట్టయితే అలాంటి ఘటనలను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాము. లేనిచో అస్వతంత్ర ఘటనలు అంటాము.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. ఒక నాణాన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేసి ప్రతిసారి ఫలితాన్ని శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

సాధన: S = {TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH}

శాంపుల్ ఆవరణలోని మూలకాల సంఖ్య = 2 × 2 × 2 = 8

2. అయిదుగురు ఆటగాళ్ళు A, B, C, D మరియు E నుండి ఇద్దరు ఆటగాళ్ళను మ్యాచ్ కొరకు ఎన్నుకునే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

సాధన: S = {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE}

$\therefore n(S) = 10.$

3. ఆరు విత్తనాలు వేయండి ఎన్ని విత్తనాలు మొలకెత్తాయో రాయండి.

సాధన: S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

$n(S) = 7$

4. మూడు నాణాలను ఒకేసారి ఎగురవేసే ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణను రాయండి.

బొమ్మ-H, బొరుసు-T

సాధన: S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

5. 6 ఎర్ర బంతులు, 4 తెల్ల బంతులు మరియు 5 నీలి బంతులు కలిగిన పెట్టెలో నుండి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినవి. ఈ ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణలో ఎన్ని మూలకాలు ఉంటాయి?

సాధన: మూలకాల సంఖ్య = బంతుల సంఖ్య

= 6+4+5 = 15

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. పాఠశాల నుండి ఒక విద్యార్థిని నిష్పాక్షికంగా తీసుకోవడం ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అని నిరూపించండి.

సాధన: ఎ) ఈ ప్రయోగాన్ని ఎన్నిసార్లయినా చేయడానికి వీలుంది.

బి) ఒక విద్యార్థిని తీసుకునే ప్రయోగంలో ఏ విద్యార్థికైనా సమాన అవకాశం ఉంది. కావున ఫలితము ముందే చెప్పలేనిదై ఉంటుంది. కావున ఇది ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం.

2. గణన పరికరము మీద రెండు సంఖ్యలను కూడడం యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం కాదు. నిరూపించండి.

సాధన: రెండు సంఖ్యలు కూడడం ఎన్నిసార్లయినా చేయడానికి వీలున్నప్పటికీ దాని ఫలితము ఊహించబడగలదు. కావున ఇది యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం కాదు.

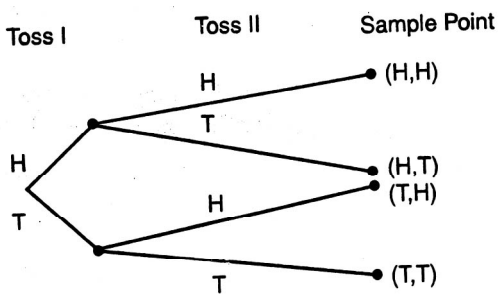
3. ఒకేసారి రెండు పాచికలను దొర్లించే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

సాధన: పాచికను దొర్లించినపుడు వచ్చే లఘు ఘటనలు 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\therefore$ రెండు పాచికలను దొర్లించే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1,6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

4. ఒక నాణాన్ని రెండుసార్లు ఎగురవేసే ప్రయోగంలో శాంపుల్ ఆవరణను రాయండి.

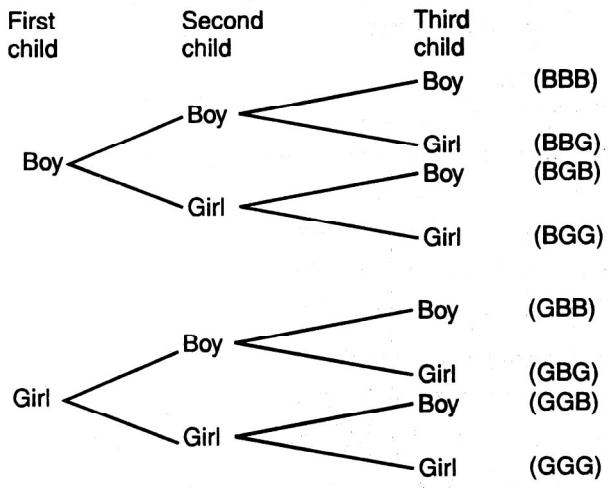
సాధన: H ను బొమ్మతో T ని బొరుసుతో సూచిస్తాము.



S = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}

5. ముగ్గురు పిల్లలున్న వేరు వేరు కుటుంబాలను తీసుకొందాము. ఈ ప్రయోగములో మొదటి, రెండవ మరియు మూడవ బిడ్డల లింగత్వాన్ని ప్రశ్నించే శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

సాధన : అబ్బాయిని H మరియు అమ్మాయిని G అనుకుంటే ఈ కింది పటము నిర్మిద్దాము.



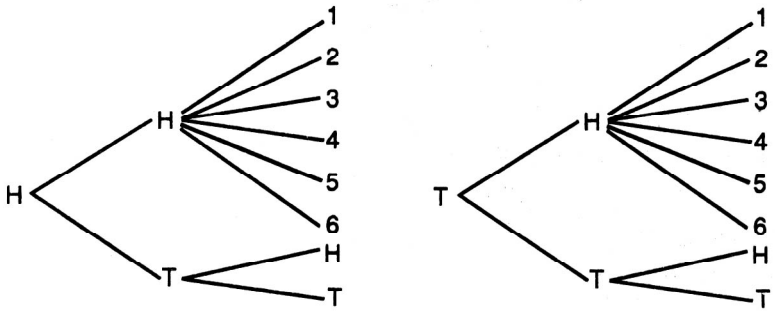
శాంపుల్ ఆవరణ

$$S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBG, GGB, GGG\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

6. ఒక నాణాన్ని రెండు సార్లు ఎగురవేయండి రెండవ సారి బొమ్మ వచ్చినచో పాచికను దొర్లించండి లేనిచో మళ్ళీ నాణాన్ని ఎగుర వేయండి.

సాధన : ఈ ప్రయోగాన్ని వృక్షపటము ద్వారా ఈ కింది విధంగా చూపగా



$$S = \{HH1, HH2, HH3, HH4, HH5, HH6, HTH, HTT,$$
$$TH1, TH2, TH3, TH4, TH5, TH6, TTH, TTT\}$$

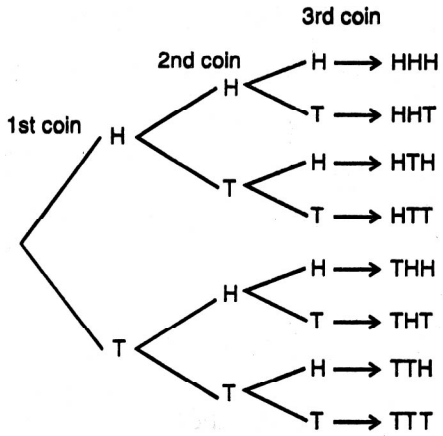
ఈ ప్రయోగానికి 16 లఘు ఘటనలు ఉన్నాయి.

7. ఒకే సమయంలో మూడు నాణాలను ఎగురవేసే ప్రయోగాన్ని E అనుకొందాము. ఈ కింది నియమాలను తృప్తిపరిచే ఘటనలను మరియు లఘు ఘటనలను రాయండి.

(i) బొరుసుల కంటే బొమ్మలు ఎక్కువగా ఉండటానికి

(ii) రెండు బొమ్మలు రావడానికి

సాధన :



$\therefore$ శాంపుల్ ఆవరణ S

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

బొమ్మలు, బొరుసుల కంటే ఎక్కువ ఉండే ఘటనను E_1 అనుకొంటే రెండు బొమ్మలు ఉండే ఘటనను E_2 అనుకొందాము.

$$E_1 = \{W1, W2, W3, W5\}$$

$$E_2 = \{W2, W3, W5\}$$

8. ఒక టీ పెట్టెలో 4 కప్పులు మరియు 4 సాసర్‌లు ఉన్నాయి. కప్పులను తీసుకెళ్ళి సాసర్‌లపై ఉంచే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

సాధన : కప్పులను C_1, C_2, C_3, C_4 గా

సాసర్‌లను S_1, S_2, S_3, S_4 గా అనుకుంటే

శాంపుల్ ఆవరణ = $\{C_1S_1, C_1S_2, C_1S_3, C_1S_4, C_2S_1, C_2S_2, C_2S_3, C_2S_4, C_3S_1, C_3S_2, C_3S_3, C_3S_4, C_4S_1, C_4S_2, C_4S_3, C_4S_4\}$

9. నాలుగు నాణాలను ఎగురవేసే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణ రాయండి.

సాధన: బొమ్మను H, బొరుసును T అనుకుంటే నాలుగు నాణాలను ఎగురవేసే శాంపుల్ ఆవరణలో $2^4 = 16$ లఘు ఘటనలు ఉంటాయి. అవి :

S = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, HHTT, HTHT, HTTH,
HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT TTTH, TTTT }

10. *n* నాణాలను ఎగురవేసే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణలో ఎన్ని బిందువులు ఉంటాయి?

సాధన: ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసిన బొమ్మ (H), బొరుసును (T) రెండు బిందువులు ఉంటాయి. *n* నాణాలను ఎగురవేసే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణలో

$= 2 \times 2 \times 2 \times \ldots\ldots$ *n* సార్లు

$= 2^n$ బిందువులు ఉంటాయి.

11. ఒకేసారి రెండు పాచికలను దొర్లించే ప్రయోగపు శాంపుల్ ఆవరణలో ఎన్ని శాంపుల్ బిందువులు ఉంటాయి?

సాధన: ఒక పాచికను దొర్లించిన 1, 2, 3, 4, 5, 6 లఘు ఘటనలు (అనగా 6) ఉంటాయి.

$\therefore$ ఒకేసారి రెండు పాచికలను దొర్లించిన శాంపుల్ బిందువులు $= 6 \times 6 = 6^2 = 36$.

31

సంభావ్యత

మన నిత్యజీవితంలో ఎదుర్కొనే కొన్ని దృగ్విషయాలను కొన్నింటిని పరిశీలించుదాం. ఈ రోజు వర్షం రావచ్చును. లేదా 'భారతదేశం క్రికెట్ మ్యాచ్ గెలుపొందవచ్చు' లేదా ఒక ఉద్యోగానికి నేను ఎంపిక కావచ్చు మొదలగునవి అనిశ్చితాలు. వీటిని మాపనము చేయడం ఎలా? ఈ అనిశ్చితిని మాపనము చేయుటకు గణితశాస్త్రంలో ఒక విభాగం ఉన్నది. దానినే సంభావ్యతావాదం అంటాం. సంభావ్యతా వాదం. ఇచ్చిన ఘటన యొక్క సంభవాన్ని మాపనము చేయుటకు రూపొందించబడినది. అంటే సంభావ్యత అనిశ్చితికి మాపనం అన్నమాట. ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ సంభవించవచ్చు లేదా సంభవించకపోవచ్చు. అదేవిధముగా ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 6గల ముఖము పైకి రావచ్చును లేదా రాకపోవచ్చును.

ఈ పాఠంలో మనము సంభావ్యతకు సంబంధించిన కొన్ని మౌలిక భావనలను మరియు సంభావ్యతా సంకలన మరియు లబ్ధ సిద్ధాంతాలను అనువర్తించుట నిత్యజీవితంలో తెలుసుకుంటాం.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యాంశము చదివిన తరువాత, మీరు ఈ క్రింది విషయాలకు సంబంధించిన అవగాహన పొందగలరు.

1. ఒక ఘటన సంభవించుటకు సంభావ్యతను నిర్వచించగలరు.
2. ఏ ఘటన సంభావ్యతయైననూ 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉండునని ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకొనగలరు.
3. సంభావ్యతలో సమస్యలు సాధించుటకు ప్రస్తారాలు మరియు సంయోగాలకు సంబంధించిన జ్ఞానము అవసరము.
4. సంభావ్యతపై సంకలన సిద్ధాంతమును నిర్వచించుట, ఋజువు చేయుట మరియు వివిధ నియామకాలకు సిద్ధాంతము పొందే రూపాలను గురించి తెలుసుకొనగలరు.
5. పరస్పర వివర్జిత ఘటనలకు సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతంను సాధారణీకరించగలరు.
6. ఏవైన రెండు ఘటనలకు, సంభావ్యతా లబ్ధ సిద్ధాంతమును ప్రవరించుట గురించి తెలుసుకుంటారు.
7. స్వతంత్ర ఘటనలకు, సంభావ్యతా లబ్ధ సిద్ధాంతమును ప్రవరించగలరు.
8. సంభావ్యతా సంకలన మరియు లబ్ధ సిద్ధాంతములనుపయోగించి సమస్యలను సాధించగలరు.
9. ఒక ఘటన యొక్క నియత సంభావ్యతను నిర్వచించగలరు.
10. నియత సంభావ్యతనుపయోగించి సమస్యలను సాధించగలరు.

ముఖ్యాంశాలు

1. **సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతం :** శాంపుల్ ఆవరణం S లో A మరియు B లు రెండు ఘటనలు అయితే

$$P(A \text{ లేదా } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ మరియు } B)$$

2. **పరస్పర వివర్జిత ఘటనలకు సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతము :** A మరియు B లు రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అయితే

$$P(A \text{ లేదా } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. **పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు :** రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలలో ఏ ఘటన సంభవమైనా, మిగతా ఘటనలలో మరో దాని సంభవాన్ని నిరోధించేటట్లుగా ఉంటే, అటువంటి ఘటనల సమితిని పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అంటాం.

4. **స్వతంత్ర ఘటనలు :** రెండు ఘటనలు A, B లలో ఒక ఘటన సంభవించడం లేదా సంభవించకపోడం, రెండో ఘటన సంభవించడం లేదా సంభవించకపోవడంపై ప్రభావమేమి లేకపోతే A, B లను స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాం.

5. A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

6. A మరియు B రెండు ఘటనలకు $P(A \cap B) = P(A)\, P(A/B),\ P(A) > 0$

   లేదా $P(A \cap B) = P(A)\ P(A/B), P(B) > 0$

   ఇక్కడ $P(B/A)$ అనగా A జరిగినప్పుడు B నియత సంభావ్యత,

   $P(A/B)$ అనగా B జరిగినప్పుడు A నియత సంభావ్యత అని అర్థం

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1 పాచికను ఒకసారి దొర్లించడమైనది అయితే 5 వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: పాచికను దొర్లించినపుడు 6 ముఖాలతో ఏ ముఖమైన పైకి రావచ్చును. వీటిలో ఒకటి మాత్రమే అనుకూల ఘటన

$$P(5) = \frac{1}{6}$$

2. ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ (H) రావడం సంభావ్యత ఎంత?

సాధన: ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ (H) లేదా బొరుసు (T) పడే అవకాశమున్నది. వీటిలో ఒకటి మాత్రమే అనుకూల ఘ.ఘ

$$\therefore P(H) = \frac{1}{2}$$

3. ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు, ప్రధాన సంఖ్య దొర్లించగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన: ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 6 ముఖాలలో ఏ ముఖమైన దొర్లవచ్చును. వీటిలో 2,3 మరియు 5లు మాత్రమే సఫలాలు.

$$\therefore P(\text{ప్రధాన సంఖ్య}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు, 5 గల ముఖం పైకి వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 6 ముఖాలలో ఏ ముఖమైన దొర్లవచ్చును. వీటిలో 5 ఒకసారి మాత్రమే వచ్చును.

$$\therefore P(5) = \frac{1}{6}$$

5. రెండు నాణేలను ఒకసారి ఎగువేసినపుడు, కనీసం ఒక బొరుసు వచ్చే ఘటన సంభావ్యతను కనుగొనము.

సాధన: రెండు నాణేలను ఎగురవేసినపుడు లఘు ఘటనలు $= 2^2 = 4$. అవి $HH, HT, TH, TT...$ కనీసం ఒక బొరుసును వచ్చే ఘటన సఫలాల సంఖ్య $= 3$

$$\therefore P = \frac{3}{4}$$

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

1. ఒక సంచిలో 15 ఎర్రని బంతులు మరియు 10 నల్ల బంతులు గలవు. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీస్తే అది 1) ఎర్రని బంతి, 2) నల్లని బంతి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: సంచిలో గల బంతుల సంఖ్య $= 15 + 10 = 25$

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $25C_1 = 25$

1) ఎర్రని బంతుల సంఖ్య $= 15$

$\therefore P$ (ఎర్రని బంతి) $= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

2) నల్లని బంతుల సంఖ్య $= 10$

$\therefore P$ (నల్లని బంతి) $= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

2. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు వాటి ముఖలపై గల అంకెల మొత్తం 1) 6, 2) 12 అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనము.

సాధన: రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $= 6 \times 6 = 36$.

1) వీటిలో మొత్తము 6 అయ్యే ఘటనలు $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$

$\therefore P$ (మొత్తం 6) $= \frac{5}{36}$

2) మొత్తము 12 అయ్యే ఘటన $(6,6)$

$\therefore P$ (మొత్తం 12) $= \frac{1}{36}$

3. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు వాటి ముఖాలపై వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 3 లేదా 4చే భాగింపబడే సంఖ్య అగుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $= 6 \times 6 = 36$

వీటిలో మొత్తం 3 లేదా 4 చే భాగింపబడే ఘటనలు

$= (1,2),(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(3,6),(4,2),(4,4),(4,5)$

$(5,1),(5,3),(5,4),(6,2),(6,3),(6,6) = 20$

$\therefore P = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

4. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు వాటి ముఖాలపై వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 10 కంటే ఎకుకవ అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు లఘు ఘటనలు $= 6 \times 6 = 36$

వాటి ముఖాలపై 10 కంటె ఎక్కువ అయ్యే ఘటనలు $= (5,6),(6,5) = 2$

$\therefore P(>10) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

5. బాగా కలిపిన 52 చీట్ల పేకముక్కల కట్ట నుంచి ఒక ముక్కను తీస్తే అది ఎర్రని ముక్క అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: పేక ముక్కలు $= 52$

ఎర్రని ముక్కలు $= 26$

P (ఎర్రని) $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

6. బాగా కలిపిన 52 చీట్ల పేక ముక్కల కట్ట నుంచి ఒక ముక్కను తీస్తే అది 1) ఇస్పేటు, 2) రాజు, 3) ఇస్పేటులోని రాజు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనము.

సాధన: పేకముక్కలు $= 52$

ఇస్పేటులు $= 13$

రాజు $= 4$

ఇస్పేటులోని రాజు $= 1$

$\therefore$ 1) ఇస్పేటు అయ్యే సంభావ్యత $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

2) రాజు అయ్యే సంభావ్యత $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

3) ఇస్పేటులోని రాజు అయ్యే సంభావ్యత $= \frac{1}{52}$

7. ఒక జత పాచికలను దొర్లించినపుడు వాటి ముఖాలపై గల సంఖ్యల మొత్తం 1) ప్రధాన సంఖ్య, 2) రెండు పాచికల ముఖాలపై ఒకే సంఖ్య, 3) ఒక పాచిక ముఖముపై 2 యొక్క గుణిజం మరొక పాచిక ముఖముపై 3 యొక్క గుణిజం వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: ఒక జత పాచికలను దొర్లించినపుడు లఘు ఘటనలు $= 6 \times 6 = 36$

1) ముఖంపై గల సంఖ్యల మొత్తం ప్రధాన సంఖ్యలు అయ్యే ఘటనలు $(1,1),(1,2),(1,4),(1,6)$

$(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5) = 15$

$\therefore P$ (మొత్తం ప్రధాన సంఖ్య) $= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

2) రెండు పాచికల ముఖాలపై ఒకే సంఖ్య వచ్చే ఘటనలు $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6) = 6$

$\therefore P$ (ఒకే సంఖ్య) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3) ఒక పాచిక ముఖంపై 2 యొక్క గుణిజం, రెండవ పాచిక ముఖంపై 3 యొక్క గుణిజం వచ్చే ఘటనలు

$= (2,3),(2,6),(4,3),(4,6),(6,3),(6,6) = 6$

$\therefore \mathrm{P} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

8. టీము A లీగు మ్యాచ్‌లో గెలవడానికి సంఘటన ప్రతికూల్యత 5 నుండి 7 అయిన లీగు మ్యాచ్‌లో టీము A గెలిచే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: మొత్తం అనుకూల సంఘటనలు లేదా ఘటనలు జరగడానికి వీలున్నవి $= 12$

ప్రతికూల్యత కల్గినవి $= 7$

గెలిచే సంభావ్యత $= \frac{7}{12}$

9. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్ట నుంచి రెండు ముక్కల తిరిగి చేర్చే విధముగా తీసినారు. అయినా ఆ రెండు ముక్కలు నల్లనివి లేదా ఎర్రనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: 52 ముక్కలలో నల్లనివి 26 ముక్కలు, ఎర్రనివి 26 ముక్కలు ఉండును.

నల్లనివి వచ్చే సంభావ్యత $= \frac{{}^{26}C_1}{{}^{52}C_1} = \frac{1}{2}$

లేదా ఎర్రనివి వచ్చే సంభావ్యత $= \frac{{}^{26}C_1}{{}^{52}C_1} = \frac{1}{2}$

10. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించారు. మొత్తం 5 లేదా 7 అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: పాచికలపై సంఖ్యల మొత్తం 5 రావడానికి ఘటన (E_1) అనుకొనుము.

సంఖ్యల మొత్తం 7 రావడానికి ఘటన (E_2) అనుకొనుము.

$\therefore P(E_1)=\frac{4}{36}; P(E_2)=\frac{6}{36};$

5 లేదా 7 రావడానికి సంభావ్యత $=\frac{4}{36}+\frac{6}{36}=\frac{5}{18}$.

11. $P(A)=0.3$ **మరియు** $P(B)=0.4$, A,B **లు రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అయిన** P (A **లేదా** B) **కనుగొనుము.**

సాధన: A,B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు కావున

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$P(A\cup B)=0.3+0.4$$

$$P(A\cup B)=0.7.$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. మూడు నాణాలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు 1) బొమ్మ రాకుండా, 2) కనీసం ఒక బొమ్మ వచ్చే, 3) మూడు బొమ్మలు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: మూడు నాణాలను ఎగురవేసినపుడు లఘు ఘటనలు $=2\times2\times2=8$

అవి.. $HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, TTH, TTT...$

1) బొమ్మ రాకుండా ఉండే ఘటనలు $=1$

$\therefore$ బొమ్మ రాకుండ ఉండే సంభావ్యత $=\frac{1}{8}$

2) కనీసం ఒక బొమ్మ వచ్చే ఘటనలు $=7$

$\therefore$ సంభావ్యత $=\frac{7}{8}$

3) మూడు బొమ్మలు వచ్చే ఘటనలు $=1$

$\therefore$ సంభావ్యత $=\frac{1}{8}$

2. ఒక సంచిలో 3 ఎర్రని, 6 తెల్లని మరియు 7 నీలిరంగు బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుంచి యాధృచ్ఛికంగా తీసిన రెండు బంతులు తెల్లనివి అయ్యే సంభావ్యత కనుగొనుము.

సాధన: మొత్తం బంతుల సంఖ్య $= 3 + 6 + 7 = 16$

16 బంతుల నుండి 2 తెల్ల బంతులను తీసే విధానాల సంఖ్య $= {}^{16}C_2$

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $= {}^{16}C_2 \frac{16 \times 15}{1 \times 2} = 120$

6 తెల్ల బంతుల నుండి 2 తెల్ల బంతులను తీసే విధానాల సంఖ్య $= {}^{6}C_2 \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $\frac{15}{120} = \frac{1}{8}$

3. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్ట నుండి 3 ముక్కలను యాధృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ మూడు ముక్కలు జాకీలు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: పేక ముక్కలు $= 52$

52 పేక ముక్కలనుండి 3 ముక్కలను తీసే విధానాల సంఖ్య $= {}^{52}C_3$

జాకీలు $= 4$

4 జాకీల నుండి 3 జాకీలను తీసే విధానాలు $= {}^{4}C_3$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $= \frac{{}^{4}C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{52 \times 51 \times 50} = \frac{1}{5525}$

4. ఒక పేక కట్టలో గల 52 కార్డుల నుండి 6 కార్డులను యాధృచ్ఛికంగా తీసినారు. అయిన ఆ కార్డులు 3 ఎర్రనివి మరియు 3 నల్లనివి అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన: పేక కట్ట నుండి 6 కార్డులను తీసే విధానాల సంఖ్య $= {}^{52}C_6$

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $= {}^{52}C_6$

పేక కట్ట నుండి 3 ఎర్రని కార్డులను ${}^{26}C_3$

విధాలుగా మరియు 3 నల్లని కార్డులను ${}^{26}C_3$

విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

$\therefore$ అనుకూల ఘటనల సంఖ్య

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $= \dfrac{{}^{26}C_3 \times {}^{26}C_3}{{}^{52}C_6}$

$$= \frac{\dfrac{26\times25\times24}{1\times2\times3}\times\dfrac{26\times25\times24}{1\times2\times3}}{\dfrac{52\times51\times50\times49\times48\times47}{1\times2\times3\times4\times5\times6}}$$

$$= \frac{13000}{39151}$$

5. ఒక సంచిలో 20 తెల్లని మరియు 30 నల్లని బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుండి యాధృచ్ఛికంగా తీసిన రెండు బంతులు, 1) తీసిన బంతి తిరిగి సంచిలో చేర్చే విధంగా, 2) తీసిన బంతిని తిరిగి సంచిలో చేర్చని విధంగా తెల్ల బంతులు అయ్యే సంభావ్యత కనుగొనుము.

సాధన: 1) సంచిలో మొత్తం బంతుల సంఖ్య $= 20 + 30 = 50$

మొత్తం సంభవాల సంఖ్య $50 \times 50 = 2500$

ఘటనకు అనుకూల సంభవాల సంఖ్య $20 \times 20 = 400$

రెండు బంతులు తెల్లనివి అయ్యే సంభావ్యత $= \dfrac{400}{2500} = \dfrac{4}{25}$

2) మొత్తం సంభవాల సంఖ్య, 50 బంతుల నుంతీ 2 బంతులను ఎన్నుకునే విధానాల సంఖ్యకు సమానము.

$\therefore$ మొత్తము సంభవాల సంఖ్య ${}^{50}C_2$

2 తెల్లని బంతులను ఎన్నుకునే విధానాల సంఖ్యకు సమానము ${}^{20}C_2$

$\therefore$ తీసిన 2 బంతులు తెల్లనివి అయ్యే సంభావ్యత $= \dfrac{{}^{20}C_2}{{}^{50}C_2} = \dfrac{20\times19}{50\times49} = \dfrac{38}{245}$

6. ముగ్గురు పురుషులు, ఇద్దరు స్త్రీలు మరియు 4గురు పిల్లలు గల సమూహము నుండి యాధృచ్ఛికంగా నలుగురిని ఎన్నుకున్నారు. ఆ నలుగురిలో సరిగ్గా ఇద్దరు పిల్లలు ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము?

సాధన: సమూహములో గల మొత్తం మనుషుల సంఖ్య $= 3 + 2 + 4 = 9$

9 మంది నుండి నలుగురిని ఎన్నుకునే విధానాల సంఖ్య $^9C_4$

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $^9C_4$

ఎన్నుకున్న 4గురిలో ఇద్దరు పిల్లలు తప్పకుండా ఉండవలెను.

నలుగురి పిల్లల నుండి ఇద్దరు పిల్లలను $^4C_2$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చును.

మిగిలిన ఇద్దరిని ముగ్గురు పురుషులు, ఇద్దరు స్త్రీల నుండి ఎన్నుకొనవలెను. అనగా మిగిలిన ఇద్దరిని 5 మంది నుండి ఎంపిక చేయవలెనని అర్థం.

మిగిలిన ఇద్దరిని $^5C_2$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

$\therefore$ మొత్తం అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $= {}^4C_2 \times {}^5C_2$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $= \dfrac{^4C_2 \times {}^5C_2}{^9C_4}$

$$= \frac{\frac{4\times3}{1\times2}\times\frac{5\times4}{1\times2}}{\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}} = \frac{6\times10}{9\times2\times7} = \frac{10}{21}$$

7. 1 నుండి 25 వరకు సంఖ్యలను వేసిన 25 టికెట్ల నుంచి యాధృచ్ఛికంగా ఒక టిక్కెట్టును ఎంపిక చేస్తే ఆ టికెట్టుపై గల సంఖ్య 5 యొక్క గుణిజం అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: 25 టికెట్ల నుండి 1 టికెట్టును $^{25}C_1$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

$\therefore$ మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $= {}^{25}C_1$

25 టికెట్లలో 5 యొక్క గుణిజాలు సంఖ్యగా గల టికెట్లు 5, 10, 15, 20, 25

ఈ ఐదు టికెట్ల నుండి ఒక టికెట్టును $^5C_1$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

$\therefore$ అనుకూల ఘటనలు $= {}^5C_1$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $= \dfrac{^5C_1}{^{25}C_1} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$

8. 6గురు బాలురు, 8 మంది బాలికలు గల సమూహము నుండి 5 గురు ఆటగాళ్ళ టీమ్‌ను ఎంపిక చేసినారు. అయిన ఆ టీమ్‌లో 2 బాలురు మరియు 3గురు బాలికలు ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: బాలురు $=6$

బాలికలు $=8$

మొత్తం ఆటగాళ్లు $=6+8=14$

14 మంది నుండి 5 గురు ఆటగాళ్ళ టీమ్‌ను ఎంపిక చేసే విధానాల సంఖ్య $^{14}C_5$

6 గురు బాలుర నుండి 2 బాలురను ఎన్నుకునే విధానాలు $^{6}C_2$ మరియు 8 మంది బాలికల నుండి 3గురు బాలికలను ఎన్నుకునే విధానాలు $^{8}C_3$

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $^{6}C_2 \times ^{8}C_3$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $= \dfrac{^{6}C_2 \times ^{8}C_3}{^{14}C_5}$

$$= \frac{\frac{6\times5}{1\times2}\times\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}}{\frac{14\times13\times12\times11\times10}{1\times2\times3\times4\times5}} = \frac{60}{143}$$

9. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల పేక కట్ట నుండి 3 కార్డులను యాధృచ్ఛికంగా తీసినారు. ఆ మూడు కార్డులు రాజు, రాణి మరియు జాకీ అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: 52 పేక ముక్కల నుండి 3 ముక్కలను $^{52}C_3$ విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చును.

మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $=^{52}C_3$

పేక కట్టలో 4 రాజులు, 4 రాణులు, 4 జాకీలు ఉండును.

4 రాజుల నుండి 1 రాజును $^{4}C_1$ విధాలుగా,

4 రాణుల నుండి 1 రాణిని $^{4}C_1$ విధాలుగా మరియు

4 జాకీల నుండి ఒక జాకీని $^{4}C_1$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

$\therefore$ అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $=^{4}C_1 \times ^{4}C_1 \times ^{4}C_1$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత $= \dfrac{{}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^{52}C_3} = \dfrac{4\times4\times4}{\dfrac{52\times51\times50}{1\times2\times3}} = \dfrac{16}{5514}$

10. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించిన ఆ రెండు పాచికలపై ముఖాల మొత్తం 9 లేదా 11 అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: సంఖ్యల మొత్తము 9 మరియు సంఖ్యల మొత్తము 11 అయ్యే ఘటనలు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

P (9 మొత్తం అయ్యే) $= P\left[(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\right] = \dfrac{4}{36}$

P (11 మొత్తం అయ్యే) $= \mathrm{P}\left((5,6),(6,5)\right) = \dfrac{2}{36}$

$\therefore P$ (మొత్తం 9 లేదా 11) $= \dfrac{4}{36} + \dfrac{2}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

11. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లిస్తే మొత్తము 7 లేదా 12 అయ్యే సంభావ్యతకు కనుగొనుము.

సాధన: సంఖ్యల మొత్తం 7 మరియు సంఖ్యల మొత్తం 12 అయ్యే ఘటనలు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

$\therefore P$ (7 మొత్తం అయ్యే) $= P\left[(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\right] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

P (12 మొత్తం అయ్యే) $= P\left[(6,6)\right] = -\dfrac{1}{36}$

P (మొత్తం 7 లేదా 12) $= \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{6+1}{36} = \dfrac{7}{36}$

12. బాగా కలిపిన చీట్ల పేక కట్ట నుండి ఒక కార్డును తీసినారు. తీసిన కార్డు రాణి లేదా ఆ ఠీను కార్డు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము?

సాధన: పేక కట్టలోని కార్డులు $= 52$

రాణిలు $= 4$

ఆ ఠీనులు $= 13$

తీసిన కార్డు రాణి అయ్యే సంభావ్యత $P(A) = \dfrac{4}{52}$

తీసిన కార్డు ఆఠీనులు అయ్యే సంభావ్యత $P(B)=\frac{13}{52}$

మిశ్రమ ఘటన $(A\cap B)$, ఒకే ఒక శాంపిల్ బిందువును కలిగి ఉండును. అది ఆఠీను రాణి $(A\cap B)=\frac{1}{52}$

$\therefore$ తీసిన కార్డు రాణి లేదా ఆ ఠీను అయ్యే సంభావ్యత $=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}$

$=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$

13. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించే యాధృచ్ఛిక ప్రయోగంలో

A రెండు పాచికలపై ముఖాల సంఖ్యల మొత్తం 8

B: రెండు పాచికలపై ఒకే సంఖ్య రావడం

A,B లు రెండు ఘటనలైన A లేదా B సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించే యాధృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపుల్ ఆవరణలో గల శాంపిల్ బిందువుల సంఖ్య $=6\times 6=36$

A కు అనుకూల ఘటనలు $A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

B కు అనుకూల ఘటనలు $B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,4),(6,6)\}$

$A\cap B=\{(4,4)\}$

$\therefore P(A)=\frac{5}{36}, P(B)=\frac{6}{36}, P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

A లేదా B సంభావ్యత

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

14. నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఎగుర వేసినప్పుడు, కనీసం ఒక బొరుసు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: నాలుగు నాణేలను ఎగురవేసినపుడు శాంపుల్ ఆవరణలో 16 శాంపిల్ బిందువులుండును.

P (కనీసం ఒక బొరుసు) $=P$ (1 లేదా 2 లేదా 4 బొరుసులు).

$= 1 - P$ (0 బొరుసు)

$= 1 - P(HHHH)$

4 బొమ్మలు వచ్చే ఘటనకు అనుకూల ఘటన ఒకటి.

$\therefore P(HHHH) = \frac{1}{16}$

$\therefore P$ (కనీసం ఒక బొరుసు) $= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

15. ఒక సంచిలో 8తెల్లని మరియు 2 ఆకు పచ్చని బంతులు కలవు. యాధృచ్ఛికంగా 3 బంతులను తీసినారు. తీసిన 3 బంతులలో కనీసం ఒక ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: తెల్లని బంతులు $= 8$

ఆకుపచ్చని బంతులు $= 2$

$\therefore$ సంచిలో గల మొత్తం బంతుల సంఖ్య $= 8 + 2 = 10$

3 బంతులను తీసే విధానాల సంఖ్య $= {}^{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$ విధాలు.

కనీసం ఒక ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటన A అనుకొనుము.

A ఘటనకు అనుకూల ఘటనల గురించి మనము చర్చించుకుందాం.

అనుకూల ఘటనలో 1 ఆకుపచ్చ బంతి లేదా 2 ఆకుపచ్చ బంతులు ఉండే అవకాశం ఉన్నది.

1 ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటనలు అనగా 1 ఆకుపచ్చ బంతి మరియు 2 తెల్లని బంతులు అని అర్థం.

1 ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటనకు అనూకల ఘటనలు $= {}^{2}C_1 \times {}^{8}C_2$

$$= 2 \times \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 56$$

అదేవిధంగా 2 ఆకుపచ్చ బంతులు ఉండే ఘటనకు అనుకూల ఘటనలు $= {}^{2}C_2 \times {}^{8}C_1 = 1 \times 8 = 8$

$\therefore$ కనీసం ఒక ఆకుపచ్చ బంతి ఉండే ఘటనకు సంభావ్యత..

P (కనీసం 1 ఆకుపచ్చ బంతి) $= P$ (1 ఆకుపచ్చ బంతి) $+ P$ (2 ఆకుపచ్చ బంతులు)

$= \frac{56}{120} + \frac{8}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$

16. ఒక సంచిలో 5 నీలిరంగు బంతులు మరియు 10 ఎర్రని బంతులు కలవు. వీటి నుండి 2 బంతులను యాధృచ్ఛికంగా తిరిగి చేర్చే విధముగా తీసినచో ఆ రెండు బంతులు నీలిరంగువి లేదా ఎర్రని బంతులు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: రెండు బంతులు నీలి రంగు బంతులు అయ్యే ఘటన A రెండు బంతులు ఎర్రని బంతులు అయ్యే ఘటన B అనుకొనుము. A, Bలు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

$\therefore$ ప్రాథమిక సిద్ధాంతం నుండి

A కు అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $= 5 \times 5 = 25$

అదే విధముగా B కు అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $= 10 \times 10 = 100$

$\therefore$ మొత్తం లఘు ఘటనల సంఖ్య $= 15 \times 15 = 225$

$P(A) = \frac{15}{225} = \frac{1}{9}$ మరియు $P(B) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$

A మరియు B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు కావున $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

17. ఒక పెట్టెలోని 12 బల్బులలో 5 పనిచేయనివి. పెట్టెలో నుంచి 3 బల్బులను యాధృచ్ఛికంగా తీసినప్పుడు, వాటిలో కనీసం 2 బల్బులు పనిచేయనివి ఉంటే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: పెట్టెలో ఉన్న 12 బల్బులలో 5 లోపంలో ఉన్నవి. మిగిలిన 7 మంచివి పెట్టె నుండి యాధృచ్ఛికంగా 3 బల్బులను ఎన్నుకునే విధాలు.

$n(s) = {}^{12}C_3$

E_1 అనేది తీసిన 3 బల్బులో 2 బల్బులు లోపం గలవి అనే ఘటన $n(E_1) = {}^{5}C_2 \times {}^{7}C_1$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)} = \frac{10 \times 7}{{}^{12}C_3} = \frac{70}{220}$

$P(E_1) = \frac{7}{22}$

రెండు లోపం ఉండడానికి $= \frac{7}{22} \times 2 = \frac{7}{11}$

కనీసం 2లోపం ఉండడానికి సంభావ్యత $1 - \frac{7}{11} = \frac{11-7}{11} = \frac{4}{11}$

18. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినారు.

ఎ) రెండు పాచికలపై వేరు, వేరు సంఖ్యలు

బి) సంఖ్యల మొత్తం కనీసం 3 అయ్యే సంభావ్యతలను కనుగొనుము

సాధన: రెండు పాచికలోని లఘు ఘటనల సంఖ్య $=36$

$n(s)=36$

ఎ) రెండు పాచికలపై వేరు వేరు సంఖ్యలు వచ్చే ఘటన $(E_1)=30$

$$P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(s)}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

బి) సంఖ్యల మొత్తం కనీసం 3 అయ్యే సంభావ్యత

E_2 అనుకుంటే

E_2 అనుకూల ఘటనలు $n(E_2)=2$

$$P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(s)}=\frac{2}{36}$$

సంఖ్యల మొత్తం కనీసం 3 వచ్చే ఘటన $=\frac{1}{1}-\frac{2}{36}=\frac{36-2}{36}=\frac{34}{36}$

19. క్రింది సంఘటనలకు A యొక్క సంభావ్యతను కనుగొనుము.

ఎ) సంఘటనానుకూల్యం 7 నుండి 2

బి) సంఘటన ప్రతికూల్యత 10 నుండి 7

సాధన:

ఎ) మొత్తము ఘటనలు $n(s)=9$

సంఘటనానుకూల్యం 7 నుండి 2 $n(E_1)=7$

$$P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(s)}=\frac{7}{9}$$

బి) మొత్తము ఘటనలు $n(s)=17$

సంఘటన ప్రతికూల్యత 10 నుండి $7 = n(E_2) = 7 = 7$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(s)} = \frac{07}{17} = \frac{7}{17}$$

20. రెండు పాచికలను దొర్లించినపుడు

ఎ) సంఖ్యల మొత్తం 4 కంటే ఎక్కువ 9 కంటే తక్కువ.

బి) సంఖ్యల మొత్తం 5 కాదు, 8 కాదు అయ్యే సంభావ్యతలను కనుగొనుము.

సాధన: రెండు పాచికలను దొర్లించేటపుడు ఏర్పడే లఘు ఘటన సంఖ్య $n(s) = 36$

ఎ) సంఖ్యల మొత్తం 4 కంటే ఎక్కువ 9 కంటే తక్కువ వచ్చే ఘటన E_1 అనుకుంటే

E_1ను అనుకూలు ఘటనలు.

$$\left.\begin{cases} (1,4)(1,5)(1,6) \\ \qquad (2,3)(2,4)(2,5)(2,6) \\ (3,2)(3,3)(3,4)(3,5) \\ (4,1)(4,2)(4,3)(4,4) \\ (5,1)(5,2)(5,3) \\ (6,1)(6,2) \end{cases}\right\} n(E_1) = 20$$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

బి) సంఖ్యల మొత్తం 5 కాదు, 8 కాదు అయ్యే ఘటన E_2 అనుకుంటే

$$E_2 \text{ అనుకూల ఘటనలు } \left\{\begin{matrix} (1,1)(1,2)(1,3)(1,5)(1,6) \\ (2,1)(2,2)(2,4)(2,5) \\ (3,1)(3,3)(3,4)(3,6) \\ (4,2)(4,3)(4,5)(4,6) \\ (5,1)(5,2)(5,4)(5,5)(5,6) \\ (6,1)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) \end{matrix}\right\} = n(E_2) = 27$$

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(s)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

21. ఒక సంచిలో గల 5 తెల్లని మరియు 10 ఆకుపచ్చ బంతుల నుండి యాధృచ్ఛికంగా రెండు బంతులను తీసినారు. అయితే ఆ రెండు బంతులలో కనీసం ఒక తెల్లబంతి ఉండే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: సంచిలో గల మొత్తం బంతుల సంఖ్య $=15$

2 బంతులను తీసి విధానాల సంఖ్య $={}^{15}C_2=105$

కనీసం ఒక తెల్ల బంతి వచ్చే ఘటన A అనుకొనుము

A ఘటనకు అనకూల ఘటనలు

1 తెల్ల బంతి లేదా 1 ఆకుపచ్చ బంతులు ఉండే అవకాశం

1 తెల్ల బంతి రావడానికి అనుకూల ఘటనలు $={}^{5}C_1\times{}^{10}C_1=5\times10=50$

2 తెల్ల బంతులు రావడానికి అనుకూల ఘటనం $={}^{5}C_2\times{}^{10}C_0=10$

కనీసం ఒక తెల్ల బంతి ఉండే ఘటనకు సంభావ్యత.

P (కనీసం 1 తెల్లని బంతి) $=P$ (1 తెల్లని బంతి) $+P$ (2 తెల్లని బంతి)

$$=\frac{50}{105}+\frac{10}{105}=\frac{60}{105}=\frac{4}{7}$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. ఒక విభాగములో గల రెండు ఉద్యోగాల ఖాళీలను భార్య భర్తలు మౌఖిక పరీక్షకు హాజరైనారు. భర్త ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యత 1/7 మరియు భార్య ఎంపిక అయ్యే సంభావ్యత 1/5 అయినా..

ఎ) వారిలో ఒకరు ఎంపిక అగుటను

బి) ఇద్దరు ఎంపిక అగుటను

సి) ఎవరూ ఎంపిక కాకుండకు

డి) కనీసం ఒకరు ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: భర్త ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యత $P(A)=\frac{1}{7}$

భార్య ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యత $P(B)=\frac{1}{5}$

ఎ) (వారిలో ఒకరు ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యత) $PAP\left(\bar{B}\right)+P\left(\bar{A}\right)P(B)$

$$=\frac{1}{7}\times\frac{4}{5}+\frac{6}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

బి) ఇద్దరు ఎంపిక అగుటకు సంభావ్యత $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$

సి) ఎవరు ఎంపిక కాకుండా ఉండుటకు సంభావ్యత $=P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right)=\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{35}$

డి) కనీసం ఒకరు ఎంపిక అగుటకు $=1-P$ (ఎవరి ఎంపిక కాకుండటకు గల సంభావ్యత)

$$=\frac{1}{1}-\frac{24}{35}=\frac{11}{35}$$

2. సాంఖ్యక శాస్త్రంలో ఒక సమస్యను సాధించుటకు ముగ్గురు విద్యార్థుల సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{4}$ ఆ సమస్య సాధించుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: $=P_1=\frac{1}{2};P_2=\frac{1}{3};P_3=\frac{1}{4};$

కనీసం ఒకరైనా సమస్యను సాధిస్తే సమస్య సాధింపబడును.

కావున P (కనీసం ఒకరైనా సమస్యను సాధించుట)$1-P$ (ఎవరూ సమస్యత సాధించకుండుట)

$\therefore P$ (ఎవరూ సమస్యను సాధించకుండుట) $=(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore P$ (కనీసం ఒకరైన సమస్యను సాధించుట) $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore$సమస్యను సాధించే సంభావ్యత $=\frac{3}{4}$

3. ఒక సమస్యను ముగ్గురు విద్యార్థులు A, B, C ఇచ్చారు దాన్ని వారు సాధించే సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ మరియు $\frac{3}{8}$ వారిలో ఒకరు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: $P(A) = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{2}{7}$

$P(C) = \frac{3}{8}$

A, B, C లు స్వతంత్రాలు

$$P(Exactly\ one\ of\ A, B, C\ Occurs) = P\left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right)$$

$$+P\left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C\right) + P\left(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}\right)$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B) - 2P(B \cap C) - 2P(A \cap C) + 3P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} - 2\left[P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(A \cap C)\right] + 3P[A \cap B \cap C]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} - 2\left[P(A).P(B) + P(B).P(C) + P(A).P(C)\right] + 3\left[P(A)P(B)P(C)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} - 2\left[\frac{1}{3}.\frac{2}{7} + \frac{2}{7}.\frac{3}{8} + \frac{1}{3}.\frac{3}{8}\right] + 3\left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{8}\right]$$

$$= \frac{56 + 48 + 63}{168} - 2\left[\frac{2}{21} + \frac{3}{28} + \frac{1}{8}\right] + \frac{3}{28}$$

$$= \frac{167}{168} - 2\left[\frac{16 + 18 + 21}{168}\right] + \frac{3}{28}$$

$$= \frac{167}{168} - \frac{110}{168} + \frac{3}{28}$$

$$= \frac{167-110+18}{168} = \frac{75}{168} = \frac{25}{56}$$

4. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్ట నుండి ఒక కార్డును తీసినారు అయిన ఈ కింది ఘటనలలో ఏవి స్వతంత్రాలు?

1. ఎ) A: తీసిన కార్డు ఎర్రనిది అగుట.

బి) B: తీసిన కార్డు రాణి అగుట.

2. సి) A: తీసిన కార్డు ఆరీను అగుట

డి) B: తీసిన కార్డు ఆస్ కార్డు అగుట.

సాధన: పేక ముక్కల కట్టలో ఎర్రనివి 26 కార్డులు ఉండును.

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

చీట్ల పేక కట్టలో మొత్తం 4 రాణులు ఉంటాయి.

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$A \cap B =$ ఎర్రనివిలో రాణులు $= \frac{1}{26}$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{13} = \frac{1}{26}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

కాబట్టి ఘటనలు స్వతంత్ర ఘటనలు.

2. చీట్ల పేక కట్టలో మొత్తం 13 ఆరీనులు ఉంటాయి.

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

పేక ముక్క కట్టలో 4ఆస్ కార్డులు ఉంటాయి.

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$A \cap B =$ ఆ థీన్‌లో ఒక ఆసు $= \frac{1}{52}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$= \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{52}$

కావున స్వతంత్రాలు.

5. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక కట్ట నుండి (తీసిన కార్డును తిరిగి కట్టలో వేయకుండా) యాధృచ్ఛికంగా రెండు ముక్కలను తీస్తే, మొదటి తీసిన కార్డు ఎర్రనిది, రెండవసారి తీసిన కార్డు వల్లనిది అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: బాగా కల్పిన చీట్ల పేక కట్టలో 26 నల్లని కార్డులు, 26 ఎర్రని కార్డులు ఉంటాయి.

మొదటిసారి తీసిన ముక్క ఎర్రనిది అయ్యే ఘటన A మరియు రెండవసారి తీసిన ముక్క నల్లనిది అయ్యే ఘటన B అనుకొనుము.

$P(A \cap B) = P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$

$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{26}{51} = \frac{26}{51}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{26}{51} = \frac{13}{51}$

6. 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేన కట్ట నుండి, తీసిన ముక్క తిరిగి కట్టలోకి చేర్చని విధంగా రెండు కార్డులు తీసినారు. మొదట కార్డు డైమండ్ మరియు రెండవ కార్డు ఎర్రనిది అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: 52 మార్కులు గల చీట్ల పేక కట్టలో 26 ఎర్రనివి ఉంటాయి.

ఈ 26 ఎర్రని ముక్కలలో 13 కార్డులు డైమండ్ మరియ 13 కార్డులు ఆథీన్లు.

మొదటిసారి తీసిన కార్డు డైమండ్ అయ్యే ఘటన A అనుకొనుము

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{25}{51}$$

$$\therefore P(A\cap B)=P(A),P\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{25}{51}=\frac{25}{204}$$

7. $P(A)=0.4, P(B)=0.2, P(A\cap B)=0.1$ **అగునట్లుగా** A **మరియు** B**లు రెండు ఘటనలు** B **ఇచ్చినపుడు** A **సంభావ్యత అనగా** $P\left(\frac{B}{A}\right)$ **కనుగొనుము.**

సాధన: A మరియు B రెండు ఘటనలకు

$$P(A\cap B)=P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)$$

మరియు $P(A\cap B)=P(B).P\left(\frac{A}{B}\right)$

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.2}$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2}$$

8. **4 తెల్లని, 3 పసుపు పచ్చని, 1 ఆకుపచ్చని బంతులు గల పెట్టె నుండి యాధృచ్ఛికంగా రెండు బంతులను ఒక్కొక్కసారి ఒక బంతి చొప్పున తీయడమైనది. తీసిన బంతిని తిరిగి పెట్టెలో చేర్చే విధముగా ఉన్నది. అయిన తీసిన బంతులు ఒకటి తెల్లనిది మరొకటి పసుపు పచ్చని బంతి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.**

సాధన: పెట్టెలోని బంతుల సంఖ్య $=4+3+1=8$

$$n(s)={}^{8}C_{1}$$

E_1 అనేది మొదటిసారి తీసిన బంతి తెల్లనిది అయ్యే ఘటన

$$n(E_1) = {}^4C_1$$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)} = \frac{4}{8}$$

E_2 అనేది రెండోసారి తీసిన బంతి పసుపు పచ్చని బంతి అయ్యే సంభావ్యత $n(E_2) = {}^3C_1$

$$\therefore P\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{{}^3C_1}{{}^7C_1} = \frac{3}{7}$$

మొదటి తెల్లనిది రెండోటి పసుపు పచ్చనిది అయ్యే సంభావ్యత

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

9. నాలుగు నాణేలను ఒకేసారి ఎగువేస్తే ఎ) సరిగ్గా మూడు బొమ్మలు, బి) గరిష్టగా మూడు బొమ్మలు వచ్చే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: నాలుగు నాణేలను ఒకేసారి ఎగుర వేసే ప్రయోగంలో ఏర్పడే లఘు ఘటనలు $= 2^4 = 16$

$$n(s) = 16$$

ఎ) సరిగ్గా మూడు బొమ్మలు పడే ఘటన E_1 అనుకుంటే

$$n(E_1) = {}^4C_3$$

సరిగ్గా మూడు బొమ్మలు పడే సంభావ్యత

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)} = \frac{1}{16}$$

$$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

బి) ఒక్క బొమ్మ కూడ రాకుండా ఉండడానికి $= {}^4C_0$

సంభావ్యత $= \frac{{}^4C_0}{16} = \frac{1}{16}$

$$P\left(\bar{E}\right)=\frac{n\left(\bar{E}\right)}{n(s)}$$

గరిష్టంగా మూడు బొమ్మలు వచ్చే సంభావ్యత $=1-\frac{1}{16}=\frac{16-1}{16}=\frac{15}{16}$

10. మొదటి రెండు వందల పూర్ణ సంఖ్యల నుండి యాధృచ్ఛికంగా ఒక సంఖ్య ఎనుకోబడెను. ఎన్నుకొన్న సంఖ్య 6 లేదా 8 చే భాగింపబడేది అయ్యే సంభావ్యత కనుగొనుము.

సాధన: మొత్తం లఘు ఘటనలు $n(s)=200$

6చే భాగించబడే సంఖ్యలు A అనుకుంటే

$$n(A)=\left\{\begin{matrix}6,16,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78,84,90\\96,102,108,114,120,126,132,138,144,150,156,\\162,168,174,180,186,192,198\end{matrix}\right\}$$

$$n(A)=33$$

$$\therefore P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{33}{200}$$

8 చే భాగించబడే సంఖ్యలను B అనుకుంటే

$$n(B)=\left\{\begin{matrix}8,16,24,32,40,48,56,64,72,80,88,96,104\\112,120,128,136,144,152,160,168,176,184,192,200\end{matrix}\right\}$$

$$n(B)=25$$

$$\therefore r(B)=\frac{n(B)}{n(s)}=\frac{25}{100}$$

$$n(A\cap B)=8$$

$$P(A\cap B)=\frac{(A\cap B)}{n(s)}=\frac{8}{200}$$

$\therefore$ 6చే లేదా 8 చే భాగించే సంఖ్యలు $A\cup B$ అయితే

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{33}{200} + \frac{25}{200} - \frac{8}{200}$

$= \frac{33+25-8}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

11. ఒక సంచిలో 1 నుండి 13 వరకు సంఖ్యలను కలిగిన 13 బంతులు కలవు. యాధృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని ఎంపిక చేస్తే ఆ సంఖ్య 2 లేదా 3చే భాగింపబడే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: సంచిలో మొత్తం బంతులు $n(s) = 13$

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

2చే భాగించబడే సంఖ్యను A అనుకుంటే..

$n(A) = \{2,4,6,8,10,12\} = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{6}{13}$

3చే భాగించబడే సంఖ్యను B అనుకుంటే.

$n(B) = \{3,6,9,12\} = 4$

$n(B) = 4$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{4}{13}$

2 మరియు 3 చే భాగించబడే సంఖ్యలు

$n(A \cap B) = \{6,12\} = 2$

$\therefore P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(s)} = \frac{2}{13}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{6}{13} + \frac{4}{13} - \frac{2}{13} = \frac{8}{13}$

12. ఒక పెట్టెలో 50 బోల్టులు మరియు 150 నట్లు కలవు. వాటిలో సగం బోల్టులు సగం నట్లు (త్పు పట్టినవి. యాధృచ్ఛికంగా ఒక వస్తువును తీసినపుడు అవి త్రుప్పు పట్టినవి లేదా బోల్టు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: A: మంచి బోల్టులు, నట్లు

B: తుప్పు పట్టిన బోల్టు అయ్యే ఘటన

	మంచివి	తుప్పు పట్టినవి	మొత్తం
బోల్టులు	25	25	50
నట్లు	75	75	150
మొత్తం	100	100	200

యాధృచ్ఛికంగా ఒక వస్తువును ఎన్నుకుంటే

$$P(A)=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{4+2-1}{8}=\frac{5}{8}$$

తుప్పు పట్టిన లేదా బోల్టు అయ్యే సంభావ్యత $=\frac{5}{8}$

13. ఒక స్త్రీ కొన్న ఒక డజను గ్రుడ్లలో 2 గ్రుడ్లు చెడిపోయినవి, ఆమె ఉదయం టిఫిన్ తయారీకై నాలుగు గ్రుడ్లను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే అవి..

ఎ) అన్ని మంచి గ్రుడ్లు

బి) కనీసం ఒక చెడిపోయిన గ్రుడ్డు ఉండే విధంగా సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన:

	మంచి	చెడినవి	మొత్తం
గ్రుడ్లు	10	2	12
	4	–	4
	–	1	–

మొత్తం గ్రుడు $n(s)=12$

ఎ) అన్ని మంచి గ్రుడ్లు A అనుకుంటే

A కు అనుకూల ఘటనలు $n(A) = {}^{10}C_4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{{}^{10}C_4}{{}^{12}C_4}$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7}{12\times11\times10\times9} = \frac{8\times7}{12\times11}$$

$$P(A) = \frac{14}{33}$$

బి) కనీసం ఒక చెడిపోయిన గ్రుడ్డు ఉండే విధంగా సంభావ్యత $= 1 - P(A)$

$$= \frac{1}{1} - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

14. ఒక సంచిలో 7 తెల్లని, 5 నల్లని మరియు 8 ఎర్రని బంతులు ఉన్నవి. తీసిన బంతిన తిరిగి చేర్చే విధంగా యాధృచ్ఛికంగా తీసిన 4 బంతులు నల్లనివి అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనుము.

సాధన: మొదటిసారి తీసిన బంతి నల్లనిది అయ్యే ఘటన A రెండో సారి తీసిన బంతి నల్లనిది అయ్యే ఘటన B,
మూడోసారి తీసిన బంతి నల్లనిది అయ్యే ఘటన C,
నాలుగోసారి తీసిన బంతి నల్లనిది అయ్యే ఘటన D అనుకొనుము.

$$\therefore P(A) = \frac{{}^{5}C_1}{{}^{20}C_1} = \frac{5}{20}$$

$$P(B) = \frac{{}^{4}C_1}{{}^{19}C_1} = \frac{4}{19}$$

$$P(C) = \frac{{}^{3}C_1}{{}^{18}C_1} = \frac{3}{18}$$

$$P(D) = \frac{{}^{2}C_1}{{}^{17}C_1} = \frac{2}{17}$$

$$P(A\cap B\cap C\cap D) = P(A)P(B)P(C)P(D)$$

$$= \frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{3}{18}\times\frac{2}{17} = \frac{1}{969}$$

ఆప్షనల్ మాడ్యూల్-1

32A

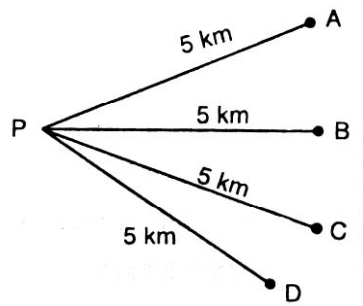
సదిశలు

దైనందిన జీవితములో మనము దూరము, వేగం ఉష్ణోగ్రత, ఘనపరిమాణం మొదలగు భౌతిక రాశులతో సంబందము కలిగి ఉంటాం. వీటిని వివరించడానికి వరుసగా దిశ మార్పు, దిశ మార్పురేటు (వడి) శరీరపు ఉష్ణోగ్రత లేక ఒక ప్రత్యేక స్థలం యొక్క ఉష్ణోగ్రత అది ఆవరించబడిన అంతరాళాలం సరిపోవును.

స్థానభ్రంశము, వేగం, త్వరణం, ద్రవ్య వేగం మొదలగు కష్టసాధ్యమైన భౌతిక రాశులతో విశ్లేషణం చేసి మనము పరిష్కరించవచ్చు.

దీనికి సంబంధించిన అంశాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణకు P అనే స్థిరబిందువు నుండి 5కి.మీల సమదూరంలో యున్న నాలుగు బిందువులను తీసుకుందాము. P అనే తొలి బిందువు నుంచి A, B, C లేక D అనే బిందువుకు 5కి.మీ దూరం ప్రయాణం చేస్తాము. కావున తొలిబిందువు మరియు దూరం గమ్యం చేరడం కొరకు సరిపోవు. మనము తుది బిందువు కూడ తెలియ జేయాలి. తొలిబిందువు నుంచి తుది బిందువుకు చేరడం కొరకు దిశ కూడా అవసరం అని ఈ భావము తెలియ జేస్తుంది.

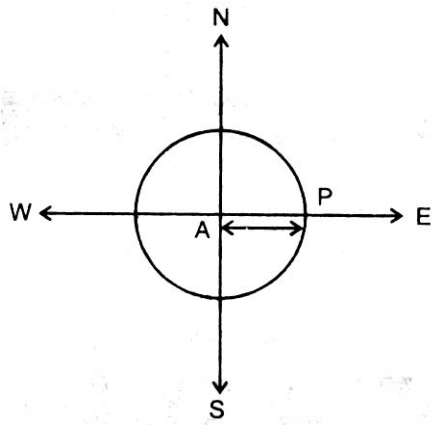


మరొక ఉదాహరణగా కదిలే బంతిని తీసుకొందాము. బంతి మార్పు (స్థితి) ఏ సమయంలో ఏ విధంగా ఉంటుందని తెలుసుకోవడం కొరకు మూల్యాంశాలు తెలియాలి.

బంతి మొదలు Aఅనే బిందువు వద్ద ఉంది . బంతి 5 సెమీ/సె వేగంతో సరళరేఖలో ప్రయానిస్తుంటె 3 సెకనుల తర్వాత బంతి స్థితి దిశ లేకుండా కనుగొనగలమా? కనుగొనలేము కాని బంతి Aనుంచి 15c.m దూరం ప్రయానించిందని నిర్ధారించగలము. మరియు A కేంద్రముగా 15c.m వ్యాసార్థముతో వృత్తం మీది ఏదేని బిందువుకు చేరుతుంది. అయినా బంతి Aనుండి తూర్పు దిక్కుగా 5c.m/sec వేగంతో కదిలితే 3 సెకనుల తర్వాత బంతి Aకు తూర్పు దిక్కు 15

c.m దూరంలో యున్న P అనే బిందువుకు చేరుతుంది.

3 సెకనుల తర్వాత బంతి గమనము (స్థానభ్రంశము) తెలియాలి అంటే బంతివేగం (5c.m/sec) మరియు బంతి దిశ (A కు తూర్పుగా) తెలియాలి.



ఈ పాఠంలో పరిమాణం మాత్రమే కలిగిన రాశులను అధిశలు అంటాము. అలాగే దిశ, పరిమాణం కలిగిన రాశులను సదిశలు అంటాము. సదిశలను దిశారేఖాఖండాలుగా మరియు వాటి రాశులను దిక్కులను కనుగొనుటకు సూచిస్తాము. వివిధ రకాల సదిశలు మరియు వాటి వివిధ ప్రక్రియ విశేషాలు తెలుసుకుంటాము. ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ మూల బిందువు యొక్క ప్రతిక్షేపనగా తెలుస్తుంది. సదిశ యొక్క విభేదనా భాగాలు రెండు లేక మూడు కొలతలలో ఒక దానికొకటి లంబంగా ఉన్న ప్రమాణ సదిశలు కనుగొంటాము. మనము (విభాగ సూత్రం) కనుగొని సమస్యలకు అన్వయిస్తాము. మనము రెండు సదిశల యొక్క గుణనాన్ని మరియు అదిశ, సదిశల యొక్క గుణనాన్ని నిర్వచిస్తాము.

లక్ష్యాలు:

పాఠమును చదివిన తరువాత మీరు

- దిశ యొక్క ప్రాముఖ్యతను తెలుసుకుంటారు.
- అదిశ మరియు సదిశలను నిర్వచించగలరు.
- అదిశ మరియు సదిశల మధ్యగల భేదాన్ని గుర్తిస్తారు.
- సదిశలను దిశా రేఖా ఖండముగా సూచించగలరు.
- సదిశల పరిమాణము మరియు దిశను అనుగొనగలరు.
- వివిధ రకాల సదిశల వర్గీకరణ – శూన్య మరియు యూనిట్ సదిశ.
- రెండు సదిశల సమానత్వమును నిర్వచించగలరు.
- ఒక బిందువు యొక్క స్థానిక సదిశను నిర్వచించగలరు.

- సదిశల మధ్య సంకలనము, వ్యవకలనము చేయగలరు.
- అదిశతో సదిశను గుణకారము చేయగలరు.
- సదిశల మధ్య వివిధ ప్రక్రియలను తెలియపరచి వాటిని ఉపయోగిస్తారు.
- త్రిపరిమాణ ఆవరణ గూర్చి సంగ్రహంగా తెలుసుకుంటారు.
- సదిశలను రెండు లేదా మూడు పరస్పర లంబాక్షాలతో తీర్మానిస్తారు.
- విభజన సూత్రమును రాబట్టుట మరియు ఉపయోగించుట చేస్తారు.
- రెండు సదిశల బిందు లబ్ధం మరియు వజ్ర లబ్ధాన్ని నిర్వచిస్తారు.

ముఖ్యాంశాలు

- **అదిశలు మరియు సదిశలు :**

  కేవలం పరిమాణం గల రాశులను అదిశలు అంటారు. వీటిని వాస్తవ సంఖ్యలతో సూచిస్తారు.

  ఉదా: ఘనపరిమాణం, కాలము, ఉష్ణోగ్రత.

  పరిమాణం మరియు దిశగల రాశులను సదిశలు అంటారు.

  ఉదా : వేగం, దూరము, త్వరణము.

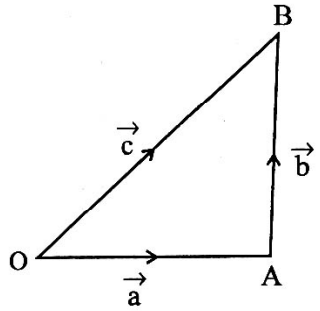
- **సదిశ పరిమాణము / మాపము :**

  A నుండి B వైపు ఉన్న దిశలోని AB రేఖా ఖండాన్ని $\overrightarrow{AB}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని దిశ కలిగిన సదిశ మాపము లేదా పరిమాణము అంటారు. దీనిని $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ తో సూచిస్తారు.

- రెండు సదిశల యొక్క పరిమాణము సమానంగా ఉంటూ, $\vec{a}$ సదిశకు వ్యతిరేక దిశలో ఉండే సదిశను $-\vec{a}$ చే సూచిస్తారు.

- సున్నా పరిమాణము గల సదిశను శూన్య సదిశ లేదా సున్నా సదిశ అంటారు. దీనిని $\vec{0}$ చే సూచిస్తారు.
- $\vec{A}$ మరియు $\vec{B}$ అను రెండు సదిశలు ఒకే పరిమాణము, దిశలను కలిగియుంటే ఆ సదిశలను సమాన సదిశలు అంటారు.
- ఒకే దిశ కలిగిన సదిశలను ఏకదశ లేదా సరూప సదిశలు అంటారు. సరూప సదిశలలో పరిమాణము సమానం కానవసరము లేదు.
- ఏదైన సదిశకు పరిమాణము సమానంగా ఉంటూ వ్యతిరేక దిశను కలిగియుంటే దానిని ఋణ సదిశ అంటారు. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సదిశలకు ఒకే తొలి బిందువు కలిగియుంటే ఆ సదిశలను సహారంభ సదిశలు అంటారు. ఉదా $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ సదిశలకు ఒకే తొలి బిందువు A కలదు.
- ఒకే దిశలో ఉన్న సదిశలను గాని లేదా వ్యతిరేక దిశలో ఉన్న సదిశలను గాని లేదా సమాంతరంగా ఉన్న సదిశలను సరేఖీయ సదిశలు అంటారు.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సదిశలు సమాంతరంగా ఉంటూ ఒకే తలంపై ఉన్నచో ఆ సదిశలను సతలీయ సదిశలు అంటారు. సతలీయ సదిశలు కాని సదిశలను అతరీయ సదిశలు అంటారు.
- **సదిశల సంకలన త్రిభుజ నియమము :**



OAB త్రిభుజములో $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

- **రెండు కంటే ఎక్కువ సదిశల సంకలనము :**

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

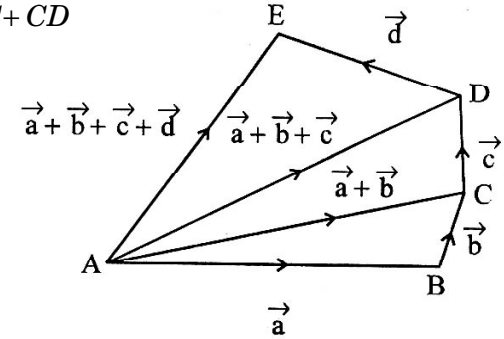
$$= \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$$

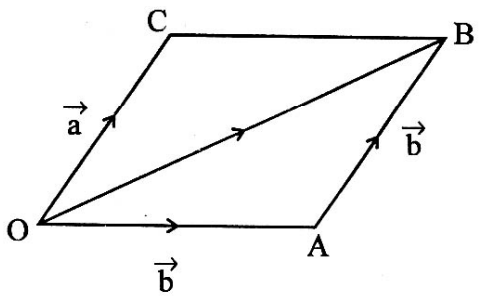
$$= \overrightarrow{OD}$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$



- **సదిశల సంకలనములో సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయము :**

$OABC$ సమాంతర చతుర్భుజములో



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ... (1)

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB}$

$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB}$ ... (2)

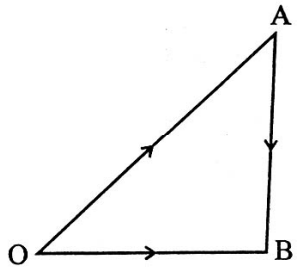
(1), (2)ల నుండి $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

- **రెండు సదిశల మధ్య వ్యవకలనము :**

ఇచ్చిన రెండు సదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల మధ్య వ్యవకలనమును $\vec{a}-\vec{b}$ తో సూచిస్తారు. అనగా $\vec{a}$ మరియు ఋణ సదిశ $\vec{b}$ ల మొత్తమని అర్థము. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

- **స్థాన సదిశ :** 0 ఒక స్థిర బిందువు అనుకుందాము. ఎదైనా బిందువు P కి సదిశ $\overrightarrow{OP}$ ని 0 దృష్ట్యా P స్థాన సదిశ అంటారు. $\overrightarrow{OP}$ ని $\vec{r}$ తో గాని $P(r)$ తో గాని సూచిస్తారు.

పటంలో చంపిన విధముగా $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ లు రెండు స్థాన సదిశలు. అయితే త్రిభుజ నియమము ప్రకారము



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=B$ యొక్క సదిశ A యొక్క స్థాన సదిశ.

- **సదిశా గుణన నియమాలు :**

$\vec{a}, \vec{b}$ లు సదిశలు మరియు x, y లు అదిశలు అయితే

1) $x\left(y\vec{a}\right)=(xy)\vec{a}$

2) $x\vec{a}+y\vec{a}=(x+y)\vec{a}$

3) $x\vec{a}+x\vec{b}=x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

4) $0.\vec{a}+x\vec{0}=0$

- **అదిశతో సదిశ గుణకారము :**

శూన్యేతర సదిశ $\vec{a}$ ను అదిశ $x\neq 0$ తో గుణించగా వచ్చే సదిశ పరిమాణము (x) కు సమానము.

$x>0$ అయిన దాని దిశ $\vec{a}$ దిశలో ఉండును.

$x < 0$ అయిన దాని దిశ $\vec{a}$ దిశకు వ్యతిరేక దిశలో ఉండును.

1) $x.\vec{0} = 0$

2) $0.\vec{a} = 0$

- $\vec{a} = x\vec{b}$ (x అదిశ) అయితే ఆ రెండు సదిశలను సరేఖీయ సదిశలు అంటారు.
- $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ సరేఖీయ సదిశలు కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్తక నియమము $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ (ఇక్కడి x, y లు అదిశలు)
- $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ లు సరేఖీయాలు కాని సదిశలు అయితే $x = 0$ మరియు $y = 0$ అయినప్పుడు మాత్రమే $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ అగును.
- **విభజన సూత్రము :** మూల బిందువు 0 దృష్ట్యా A, B బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}, \vec{b}$ అనుకుందాం.

  $\vec{OA} = \vec{a}$ మరియు $\vec{OB} = \vec{b}$ అయ్యేటట్లుగా A, B రేఖా ఖండాన్ని P విభజించే నిష్పత్తి $m : n$ అయితే

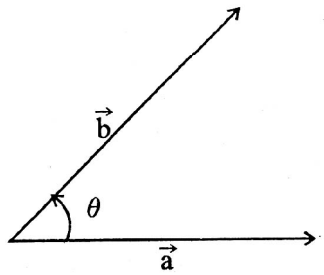
  (అంతరంగా) $\vec{OP} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m + n}$

  (బాహ్యంగా) $\vec{OP} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$
- **మధ్య బిందు స్థాన సదిశ :** AB రేఖా ఖండానికి P మధ్య బిందువు అయినప్పుడు P స్థాన సదిశ $\vec{OP} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$
- **త్రిధాకరణ బిందువు :** ఏదైనా రేఖా ఖండాన్ని $1:2$ లేదా $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువును త్రిధాకరణ బిందువు అంటారు.
- **రెండు సదిశల అదిశా లబ్ధము :**

  $\vec{a}$ మరియు $\bar{b}$ లు రెండు సదిశలకుందాం. వీటి మధ్య కోణం θ అయితే అదిశా లబ్ధమును $\bar{a}, \bar{b}$ తో

సూచిస్తాము.

$\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$



$\bar{a},\bar{b}$ అదిశ కావున $|\bar{a}|,|\bar{b}|$ మరియు $\cos\theta$ లు కూడా అదిశలు.

- అదిశా లబ్ధాన్ని బిందు లబ్ధమని కూడా అంటారు.

గమనికలు :

1) $\bar{a}.\bar{b}$ లు సజాతీయ సదిశలు అయితే $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| = ab$

2) $\bar{a}.\bar{b}$ లు విజాతీయ సదిశలు అయితే $\bar{a}.\bar{b} = ab\cos\pi = -ab$

3) $\bar{a}.\bar{b}$ ల మధ్యకోణం θ అయితే $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

4) $\bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$

$\bar{a}\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}.\bar{b}+\bar{a}.\bar{c}$

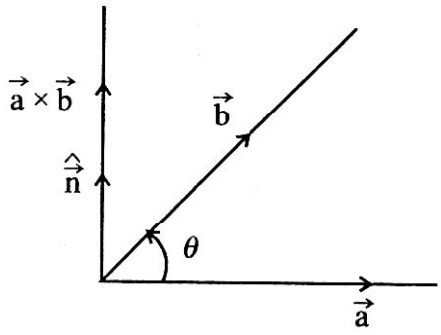
5) $n\left(\bar{a}.\bar{b}\right) = \left(n\bar{a}\right)\bar{b} = \bar{a}\left(n\bar{b}\right)$ ఇక్కడ n వాస్తవ సంఖ్య.

6) $\bar{i}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{j} = \bar{K}.\bar{K} = 1$ మరియు $\bar{i}.\bar{j} = \bar{j}.\bar{K} = \bar{K}.\bar{i} = 0$ ఇక్కడ $\bar{i},\bar{j},\bar{K}$ లు లంబ యూనిట్ సదిశలు.

- **రెండు సదిశల సదిశా లబ్ధము :** $\bar{a}$ మరియు $\bar{b}$ లు రెండు సదిశలనుకుందాము. $\bar{a},\bar{b}$ ల మధ్యకోణము θ . ఇది $0 < \theta < \pi$ అంతరంలో ముందుంది. సదిశా లబ్ధాన్ని $\bar{a}\times\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\,\bar{n}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని వజ్ర లబ్ధము అనికూడా అంటారు.

ఇక్కడ $\bar{n}$ యూనిట్ సదిశ.

ఇక్కడ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{n}$ కుడిచచేతి పద్ధతిలోని సదిశా త్రయంగా రూపొందేటట్లు గాను, $\bar{a}, \bar{b}$ రెండింటికి లంబంగా $\bar{n}$ ఒక యూనిట్ సదిశ ఉంటుంది.



గమనికలు :

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

2) $\bar{a} \times \bar{a} = 0$

3) $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{K} \times = 0$

4) $\bar{i} \times \bar{j} = K, \bar{j} \times \bar{K} = \bar{i}, \bar{K} \times \bar{i} = \bar{j}$ మరియు

5) $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ అయిన $\bar{a} = 0$ లేదా $\bar{b} = 0$ లేదా $\bar{a} \| \bar{b}$

6) $\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) + \left(\bar{a} \times \bar{c}\right)$

$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \left(\bar{a} \times \bar{c}\right) + \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$

7) $\sin\theta = \dfrac{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణముల ఖండన బిందువు 0 అయితే $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$ కనుగొనుము.

సాధన: $ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజములో $\vec{AC}, \vec{BD}$ కర్ణాల మధ్య బిందువు 0.

$\vec{OD} = -\vec{OB}$ మరియు $\vec{OC} = -\vec{OA}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{O}$

2. మూల బిందువు దృష్ట్యా A మరియు B అనే బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అయితే $\vec{AB}$ సదిశము కనుక్కోండి.

సాధన: మూల బిందువు O దృష్ట్యా A, B బిందువుల స్థాన సదిశలు.

$\vec{OA}=\vec{a}$ మరియు $\vec{OB}=\vec{b}$

$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

3. A, B, C మరియు D బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $\vec{2a}, \vec{3b}, \vec{4a}+\vec{3b}$ మరియు $\vec{a}+\vec{2b}$ అయితే $\vec{DB}$ మరియు $\vec{AC}$ సదిశలను కనుక్కోండి.

సాధన: మూల బిందువు 0 దృష్ట్యా A, B, C మరియు D బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా

$\vec{OA}=\vec{2a}, \vec{OB}=\vec{2b}, \vec{OC}=\vec{4a}+\vec{3b}. \vec{OD}=\vec{a}+\vec{2b}$

$\vec{DB}=\vec{OB}-\vec{OD}=\vec{3b}-\vec{a}-\vec{2b}=\vec{b}-\vec{a}$

$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=\vec{4a}+\vec{3b}-\vec{2a}=\vec{2a}+\vec{3b}$

4. $5\vec{a}+6\vec{b}, 7\vec{a}-8\vec{b}$ మరియు $3\vec{a}+20\vec{b}$ అనే స్థాన సదిశలు సరేఖీయాలు అని చూపించండి.

మూల బిందువు 0 దృష్ట్యా A, B, C ల స్థాన సదిశలు వరుసగా

సాధన: $\vec{OA}=5\vec{a}+6\vec{b}, \vec{OB}=7\vec{a}-8\vec{b}, \vec{OC}=3\vec{a}+20\vec{b}$

$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=7\vec{a}-8\vec{b}-5\vec{a}-6\vec{b}=2\vec{a}-14\vec{b}$

$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=3\vec{a}+20\vec{b}-5\vec{a}-6\vec{b}=-2\vec{a}+14\vec{b}=-\left(2\vec{a}-14\vec{b}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$

$\therefore \vec{AC} \,||\, \vec{AB}$, $\vec{AB}, \vec{AC}$ లు సరేఖీయాలు.

$\therefore A, B, C$ లు సరేఖీయాలు.

5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ లు సతతీయాలు అగుటకు నియమము వ్రాయండి.

సాధన: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

6. రెండు లంబు సదిశలక 3,4 అంశాలు గల $\vec{r}$ సదిశను వ్రాయండి.

సాధన: $\vec{r} = x\vec{i} + b\vec{j}$

7. $\vec{r_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{K}, \vec{r_2} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}$ మరియు $\vec{r_3} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{K}$ అయితే $\left|\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}\right| = 7$ అని చూపండి.

సాధన: $\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{K} - 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K} + \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{K}$

$= 3\vec{i} + 6\hat{j} - 2\hat{K}$

$\left|\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

8. $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{K}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}$ సదిశల యొక్క ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: $\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{K} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}$

$= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{K}$

$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$

ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశ $= \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{\left|\vec{a} + \vec{b}\right|} = \dfrac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{K}}{7}$

9. $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{K}$ మరియు $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{K}$ అయినపుడు సదిశ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

$$3\vec{a}-2\vec{b}=3\left(\hat{i}-\hat{j}-\hat{K}\right)-2\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{K}\right)$$

$$=3\hat{i}-3\hat{j}-3\hat{K}-2\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{K}$$

$$=\hat{i}-5\hat{j}-5\hat{K}$$

$$\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{51}$$

$3\vec{a}-2\vec{b}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ $=\dfrac{3\vec{a}-2\vec{b}}{\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|}$

$$=\frac{\hat{i}-5\hat{j}-5\hat{K}}{\sqrt{51}}$$

10. A మరియు B బిందువుల స్థాన సదిశలు $\bar{a}$ మరియు $\bar{b}$లు అయితే ABని C విభజించే నిష్పత్తి

1) $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$ 2) $2:-3$ అయితే C యొక్క స్థాన సదిశను కనుగొనుము.

సాధన: 1) $\vec{OA}=\bar{a},\vec{OB}=\bar{b}$ మరియు $m:n=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$

$$\vec{OC}=\frac{m\bar{b}+n\bar{a}}{m+n}=\frac{\frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{3}\bar{b}a}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{2\bar{a}+3\bar{b}}{5}$$

2) $\vec{OA}=\bar{a},\vec{OB}=\bar{b}$ మరియు $m:n=2:-3$

$$\therefore\vec{OC}=\frac{m\bar{b}+n\bar{a}}{m+n}=\frac{2\bar{b}-3\bar{a}}{2-3}=\frac{2\bar{b}-3\bar{a}}{-1}=3\bar{a}-2\bar{b}$$

11. $P\left(\bar{P}\right), Q\left(\bar{q}\right)$ లకు 3:4 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: $\overline{OP} = \bar{P}, \overline{OQ} = \bar{q}$ మరియు $m : n = 3 : 4$

R స్థాన సదిశ $\bar{r} = \dfrac{m\bar{q} + n\bar{p}}{m+n} = \dfrac{3\bar{q} + 4\bar{p}}{3+4} = \dfrac{4\bar{p} + 3\bar{q}}{7}$

12. $\bar{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{K}$ మరియు $b = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{K}$ అయితే $\bar{a}.\bar{b}$ కనుగొని దాని ద్వారా $\bar{a}, \bar{b}$ ల మధ్యకోణం కనుగొనుము.

సాధన: $\bar{a}, \bar{b} = \left(3\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{K}\right)\left(4\hat{i} - 3\bar{j} + \bar{K}\right)$

$= (3\times 4)\left(\bar{i}.\bar{i}\right) + (2\times -3)\left(\bar{j}.\bar{j}\right) + (-6\times 1)\left(\bar{K}.\bar{K}\right)$

$= 12 - 6 - 6 \qquad \left(\because \bar{i}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{j} = \bar{K}.\bar{K} = 1\right)$

$= 0$

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$

$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|} = \dfrac{0}{7\sqrt{26}}$

$\therefore \cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{2}$

13. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{K}$ మరియు $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{K}$ అయితే $\bar{a}.\bar{b}$ కనుగొని దాని ద్వారా $\bar{a}.\bar{b}$ల మధ్యకోణం కనుగొనుము.

సాధన: $\bar{a}.\bar{b} = \left(2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{K}\right)\left(3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{K}\right)$

$$= (2\times 3)\left(\bar{i} - \bar{i}\right) + (1\times -2)\left(\bar{j} - \bar{j}\right) + (-3\times 1)\left(\bar{K}.\bar{K}\right)$$

$$= 6 - 2 - 3 = 1$$

$$\bar{a} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\bar{b} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|.\left|\bar{b}\right|} = \frac{1}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$$

14. $\bar{a} = -6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{K}$ అయితే $\bar{a}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = -6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{K}$

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

$\bar{a}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ $\dfrac{\vec{a}}{\left|\bar{a}\right|} = \dfrac{-6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{K}}{7}$

15. $3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{K}, -2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{K}$ అనే సదిశల ఫలిత సదిశకు సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{K}$

$\bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{K}$

$\bar{a} + \bar{b} = 5\bar{i} - 6\bar{j}$

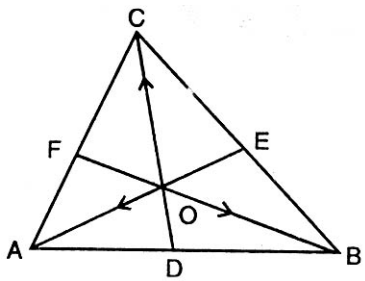
$\left|\bar{a} + \bar{b}\right| = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$

సమాంతరంగా ఉన్న యూనిట్ సదిశ $\dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{\left|\bar{a} + \bar{b}\right|} = \dfrac{5\bar{i} - 6\bar{j}}{\sqrt{61}}$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. ABC త్రిభుజములో మధ్యగతరేఖలు ఖండన బిందువు O. అయితే $\vec{OA}, \vec{OB}$ మరియు $\vec{OC}$ సదిశల సంకలనము తెలపండి.

సాధన: ABC త్రిభుజములో AB, BC, CA ల మధ్య బిందువులు వరుసగా D, E, F లు అనుకొనుము. CD, AE, BF మధ్యగత రేఖలు O అనుబిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి.



అప్పుడు $OC : OD = 2 : 1$

AB మధ్య బిందు D స్థానభ్రంశ $\dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$

O స్థాన భ్రంశ $= \dfrac{\dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{2} + 1 \times C}{2 + 1} = \dfrac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3}$

మూలబిందువు G దృష్ట్యా $\bar{GO} = \dfrac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3}$ మరియు $\bar{GA} = \bar{a}$

$= \bar{OA} = \bar{GA} - \bar{GO} = \bar{a} - \dfrac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3} = \dfrac{3\bar{a} - \bar{a} - \bar{b} - \bar{c}}{3} = \dfrac{2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}}{3}$

$\bar{OB} = \bar{GB} - \bar{GO} = \bar{b} - \dfrac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3} = \dfrac{2\bar{b} - \bar{a} - \bar{c}}{3}$

$$\bar{OC} = \bar{GC} - \bar{GO} = \bar{c} - \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} == \frac{2\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}}{3}$$

$$\bar{OA}+\bar{OB}+\bar{OC} = \frac{2\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}+2\bar{b}-\bar{a}-\bar{c}+2\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}}{3}$$

$$= \frac{2\bar{a}-2\bar{a}+2\bar{b}-2\bar{b}+2\bar{c}-2\bar{c}}{3}$$

$$= \frac{0}{3} = 0$$

2. $3\bar{a}-7\bar{b}-4\bar{c}, 3\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c}$ మరియు $\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c}$ సదిశలు సతతీయాలు అని చూపాలి. ఇక్కడ $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$లు అతలీయ సదిశలు.

సాధన: ఇచ్చిన సదిశలు సతలీయాలు అయిన $(\alpha,\beta,\gamma)=0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{bmatrix} = 0. \qquad \because \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{bmatrix} \neq 0$$

$$3(-4-1)+7(6-1)-4(3+2)=0$$

$$3(-5)+7(5)-4(5)=0$$

$$-15-35-20=0$$

$$35-35=0$$

$$0=0$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సదిశలు సతలీయాలు.

3. C మరియు Dల స్థాన సదిశలు $\bar{c}$ మరియు $\bar{d}$ అయిన CDని విభజించు త్రిధీకరణ బిందువులు P మరియు Q అయితే త్రిధాకరణ బిందువుల స్థాన సదిశలు కనుగొనుము.

సాధన: 1) $\bar{OC} = \bar{c}, \bar{OD} = \bar{d}$ మరియు $m:n = 1 = 2$

$$\therefore P \text{ స్థాన సదిశ } = \frac{m\bar{d}+n\bar{c}}{m+n} = \frac{\bar{d}+2\bar{c}}{1+2} = \frac{2\bar{c}+\bar{d}}{3}$$

2) $\bar{OC} = \bar{c}; \bar{OD} = \bar{d}$ మరియు $m : n = 2 : 1$

$\therefore Q$ స్థాన సదిశ $= \dfrac{m\bar{\alpha} + n\bar{c}}{m+n} = \dfrac{\bar{c} + 2\bar{d}}{3}$

4. $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{K}$ మరియు $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{K}$ అయితే $\bar{a} \times \bar{b}$ ని కనుక్కోండి. దాని ద్వారా $\bar{a}, \bar{b}$ ల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{K} \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \bar{i}(8+9) - \bar{j}(12+6) + \bar{K}(9-4)$

$= 17\bar{i} - 18\bar{j} + 5\bar{K}$

$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{284 + 324 + 25} = \sqrt{638}$

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}$

$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right| . \left|\bar{b}\right|} = \dfrac{\sqrt{638}}{\sqrt{22}\sqrt{29}} = \dfrac{\sqrt{638}}{\sqrt{638}} = 1$

$\therefore \sin\theta = \sin\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{2}$

5. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{K}$ మరియు $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{K}$ అయితే $\bar{a} \times \bar{b}$ను కనుక్కోని దాని ద్వారా $\bar{a}, \bar{b}$ల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{K} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \bar{i}(1-6) - \bar{j}(2+9) + \bar{K}(-4-3)$

$= -5\bar{i} - 11\bar{j} - 7\bar{K}$

$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{25 + 121 + 49} = \sqrt{195}$

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

$\sin\theta = \dfrac{\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right| . \left|\bar{b}\right|} = \dfrac{\sqrt{195}}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$

$\sin\theta == \dfrac{\sqrt{195}}{14}$

$\theta = \left(\dfrac{\sqrt{195}}{14}\right)$

6. $\bar{a}, \bar{b}$ సరేఖీయాలు కాని సదిశలు. $(2-x)\bar{a} + \bar{b}$ మరియు $y\bar{a} + (x-3)\bar{b}$ లు సమానాలు అయితే x మరియు y అనే సంఖ్యలు కనుక్కోండి.

$(2-x)\bar{a}+\bar{b}=y\bar{a}+(x-3)\bar{b}$

$2-x=y \Rightarrow x+y=2 \quad \rightarrow(1)$

$1=x-3 \Rightarrow x=1+3=4$

$(1) \Rightarrow \quad x+y=2$

$4+y=2$

$y=2-4$

$y=-2$

$x=4$ మరియు $y=-2$

7. $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+y\bar{K}$ అనే సదిశ $\bar{b}=x\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{K}$ తో సరేఖియం అయితే x, y ల విలువలు కనుక్కోండి. $\bar{a}$ మరియు $\bar{b}$ ల పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a}, \bar{b}$ లు సరేఖీయాలు అయితే $\bar{i}, \bar{j}, \bar{K}$ ల గుణకాలు.

$$\frac{x}{2}=\frac{6}{3}=\frac{-2}{y}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{2}{1} \Rightarrow x=4$$

$$\frac{-2}{y}=2 \Rightarrow y=\frac{-2}{2}=-1$$

$$\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-K \Rightarrow \left|\bar{a}\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$$

$$\bar{b}=4\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{K} \Rightarrow \left|\bar{b}\right|=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}.$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

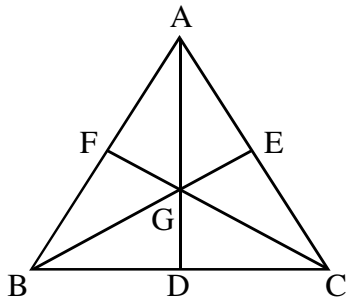
1. సదిశలనుపయోగించి త్రిభుజ మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలని చూపండి.

సాధన: O మూల బిందువు దృష్ట్యా త్రిభుజ శీర్షాలు A, B, C ల స్థాన సదిశలు వరుగా $\overline{OA} = \overline{a}, \overline{OB} = \overline{b}, \overline{OC} = \overline{c}$ అనుకొనుము.

BC మధ్య బిందువు D స్థాన సదిశ $\overline{OD} = \dfrac{\overline{b} + \overline{c}}{2}$

AD మధ్యగత రేఖను G బిందువు $2:1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\therefore G$ స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2\left(\dfrac{\overline{b} + \overline{c}}{2}\right) + \overline{a}}{2+1} = \dfrac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$



AC మధ్య బిందువు E స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OE} = \left(\dfrac{\overline{a} + \overline{c}}{2}\right)$

BE మధ్యగత రేఖను G బిందువు $2:1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\therefore G$ స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2\left(\dfrac{\overline{a} + \overline{c}}{2}\right) + \overline{b}}{2+1} = \dfrac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$.

AB మధ్య బిందువు F స్థాన సదిశ $\overrightarrow{OF} = \left(\dfrac{\overline{a} + \overline{b}}{2}\right)$

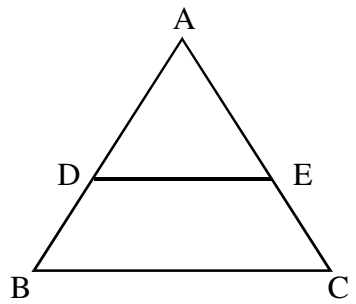
CF మధ్యగత రేఖను G బిందువు $2:1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది.

$\therefore G --- \overrightarrow{OG} = \dfrac{2\left(\dfrac{\overline{a} + \overline{b}}{2}\right) + \overline{c}}{2+1} = \dfrac{\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}}{3}$

$\therefore$ త్రిభుజ మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలు.

2. ఒక త్రిభుజములో ఎవైన రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరము అని చూపి ఆ భుజంలో అది సగమని చూపండి.

సాధన: O మూలబిందువు దృష్ట్యా త్రీభుజ శీర్షాలు A, B, C ల స్థాన సదిశలు వరుసగా



$\bar{OA} = \bar{a}$. $\bar{OB} = \bar{b}$, $\bar{OC} = \bar{c}$ అనుకొనుము

$\bar{AB}, \bar{AC}$ ల మధ్య బిందువులు D, E ల స్థాన సదిశలు వరుసగా

$$\bar{DE} = \bar{OE} - \bar{OD} = \frac{\bar{a}+\bar{c}}{2} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} = \frac{1}{2}\left(\bar{c}-\bar{b}\right)$$

$$BC = OC - OB = c - b$$

$$\therefore \bar{DE} = \frac{1}{2}\bar{BC}$$

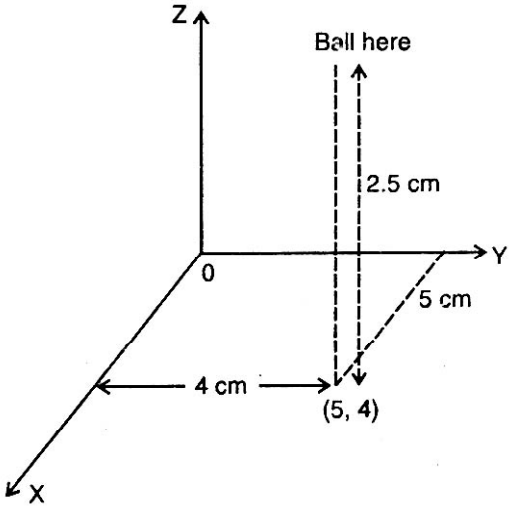
$\therefore \bar{BC}$ మరియు $\bar{DE}$ లు సమాంతరాలు మరియు $\bar{DE}, \bar{BC}$ లో సగముంటుంది.

33A

త్రిపరిమాణ జ్యామితి పరిచయము

ఏదైనా తలంలో ఒక బిందువు తీసుకుంటే, ఆ బిందువుకు అనురూపంగా దాని నిరూపకాలు అనబడే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనే వీలుంది. విపర్యయంగా (x, y) అనే క్రమయుగ్మానికి అనుగుణంగా తలము మీద (x, y) నిరూపకాలు గల బిందువు నిర్దేశితమవుతుంది.

మన గదిలో ఒక బంతిని నిలువుగా జారవిడుద్దాము. ఆ బంతి నేలను తాకిన బిందువు యొక్క స్థానము నిర్ధారించుటకు పూర్వము తీసుకున్న అక్షాలైన గది పొడవు వెడల్పులు చాలవు. గది పొడవు, వెడల్పు ఆధారంగా నిర్ధారితము. కాని నేలను తాకిన బంతి ఊర్ధ్వముగా పైకి లేస్తుంది. ఆ సమయంలో బంతి యొక్క స్థానము ఏ సమయంలోనైనా బంతి యొక్క స్థానము కొఱకు, బంతి ఎంత ఎత్తుకు లేచినది అనేది కూడా కావాలి.



మనము జారవిడిచిన బంతి నేలను తాకిన బిందువు (5, 4) అనుకుందాము. పైకి లేచిన బంతి 2.5 సెం.మీ ఎత్తులో వున్నప్పుడు దాని స్థానాన్ని (5, 4, 2.5) అనే మూడు సంఖ్యల చేత సూచిస్తాము.

కనుక, అంతరాళంలో ఒక బిందువు నిర్దేశించుటకు మూడు సంఖ్యలు అవసరము.

ఈ పాఠంలో విపులంగా చర్చించు అంశాలు :-

నిరూపక వ్యవస్థ, అంతరాళంలో బిందువు నిరూపకాలు, అంతరాళంలో రెండు బిందువుల మధ్యదూరము, రెండు బిందువులు కలిపిన రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా లేక బాహ్యంగా ఒక దత్త నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు, ఒక బిందువు – సరళరేఖల విక్షేపము.

లక్ష్యాలు :

పాఠం చదివిన తరువాత మీరు

- మూడు సంఖ్యల చేత అంతరాళంలో బిందువును గుర్తిస్తారు.
- అంతరాళంలో రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుట.
- రెండు బిందువులను కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని అంతరంగా లేక బాహ్యంగా దత్త నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనుట.
- అంతరాళంలో సరళరేఖ దిక్ – కొసైనులను నిర్వచిస్తారు.
- ఒక సరళరేఖా ఖండాన్ని వేరొక సరళరేఖ మీద నిక్షేపించుట.
- అంతరాళంలో రెండు సరళరేఖలు లంబంగా లేక సమాంతరంగా ఉండేందుకు నియమాలను కనుగొనుము.

ముఖ్యాంశాలు

1) త్రి పరిమాణ జ్యామితిలో నిరూపక తలాల చేత అంతరాళము ఎనిమిది అష్టకాలుగా విభజించబడుతుంది. అవి. $oxyz, ox^1yz, oxy^1z, oxyz^1, oxy^1z, ox^1y^1z, ox^1yz^1, ox^1y^1z^1$

2) మొదటి అష్టకములో P ఏదైనా ఒక బిందువు అయితే, ప్రతి అష్టకములోను Pకి అనుగుణంగా ఒక బిందువు వుంటుంది. వాటి నిరూపకాలు Pని రూపకాలతో సాంఖ్యకంగా సమానం.

   $P(a,b,c)$ అయితే మిగిలిన బిందువులు వరుసగా

   $(-a,b,c),(a,-b,c),(a,b,-c),(-a,-b,c),(-a,-b,-c)$

3) xoy తలంలోని బిందువు (a,b,o); yoz తలంలో బిందువు (o,b,c) మరియు zox తలంలో బిందువు (a,b,o)

4) x,y,z అక్షాల మీద బిందువులు వరుసగా $(a,o,o),(o,b,o),\ (o,o,c)$

5) $P(x_1,y_1,z_1);Q(x_2,y_2,z_2)$ రెండు బిందువుల మధ్య దూరము.

   $$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

6) $0(0,0,0);P(x,y,z)$ బిందువుల దూరము $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

7) $P(x_1,y_1,z_1);Q(x_2,y_2,z_2)$ బిందువులను కలిపేడి PQ రేఖా ఖండాన్ని $R(x,y,z)$ బిందువు

$l:m$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించేడి బిందువు నిరూపకాలు

$$\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\frac{ly_2+my_1}{l+m},\frac{lz_2+mz_1}{l+m}\right)$$

8) $P(x,y,z)$ మరియు $Q(x_2,y_2,z_2)$ బిందువులను కలిపెడి PQ రేఖా ఖండాన్ని $R(x,y,z)$ బిందువు $l:m$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించెడి బిందువు నిరూపకాలు.

$$\left(\frac{lx_2-mx_1}{l-m},\frac{ly_2-my_1}{l-m},\frac{lz_2-mz_1}{l-m}\right)$$

9) $P(x_1y_1z_1)$ మరియు $P(x_2y_2z_2)$ బిందువులను తెలిపేడి రేఖా ఖండము యొక్క మధ్య బిందువు నిరూపకాలు $\left(\frac{x_2+x_1}{2},\frac{y_2+y_1}{2},\frac{z_2+z_1}{2}\right)$

10) ఒక సరళరేఖ x,y,z అక్షాల ధన దిశలలో α,β,γ కోణాలు చేస్తే $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ లను ఆ సరళరేఖ దిక్ - కొసైనులని అంటారు.

అంటే $\cos\alpha=l,\cos\beta=m$ మరియు $\cos\gamma=n$

11) x అక్షము దిక్ - కొసైనులు $\cos 90^0=1,0,0$

y అక్షము దిక్ - కొసైనులు $\cos 90^0=0,1,0$

z అక్షము దిక్ - కొసైనులు $\cos 90^0=0,0,1$

12) l,m,n దిక్ కొసైన్లు అయితే $l^2+m^2+n^2=1$ మరియు $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

13) a,b,c అనే మూడు సంఖ్యలు l,m,n లకు అనుపాతములో వుంటే a,b,c లను దిక్ సంఖ్యలు అని అంటారు.

14) దిక్ - కొసైనులకు మరియు దిక్ - సంఖ్య మధ్య సంబంధము.

$$\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=\pm\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\therefore\frac{l}{a}\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};m=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

15) $P(x_1,y_1,z_1)$ మరియు $P(x_2,y_2,z_2)$ బిందువులను కలిపేది రేఖా ఖండపు నిక్షేపము

$l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$

16) $P(x_1, y_1, z_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులను కలిపే సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

17) $P(x_1, y_1, z_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులను కలిపే సరళ రేఖ యొక్క దిక్ - కొసైన్లు

$$(l, m, n) = \left(\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}\right)$$

ఇక్కడ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

18) (l_1, m_1, n_1) మరియు (l_2, m_2, n_2) దిక్ కొసైన్లు గల రెండు సరళ రేఖల మధ్య కోణం θ అయితే

$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

ఎ) రెండు సరళ రేఖలు లంబంగా ఉండుటకు నియమము $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

బి) రెండు సరళ రేఖలు సమాంతరంగా ఉండుటకు నియమము $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

19) (a_1, b_1, c_1) మరియు (a_2, b_2, c_2)లు దిక్ సంఖ్యలు గల రెండు సరళ రేఖల మధ్యకోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

ఎ) రెండు సరళ రేఖలు లంబంగా ఉండుటకు నియమము $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

బి) రెండు సరళ రేఖలు సమాంతరంగా ఉండుటకు నియమము $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $(-4, 2, 5)$ బిందువు ox^1yz అష్టకములో ఉంటుంది

2. $(4, 3, -6)$ బిందువు $oxyz^1$ అష్టకములో ఉంటుంది

3. $(-2, -1, -3)$ బిందువు $ox^1y^1z^1$ అష్టకములో ఉంటుంది

II. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (2 మార్కులు)

4. $(-3,1,-2),(-3,-1,2)$ బిందువుల మధ్య దూరము కనుగొనుము.

సాధన: $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$=\sqrt{(-3+3)^2+(-1-1)^2+(2+2)^2}$

$=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(4)^2}$

$=\sqrt{0+4+16}$

$=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$

5. $(0,0,0);(-1,1,1)$ బిందువుల మధ్య దూరము కనుగొనుము.

సాధన: $OP=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

6. $(5,-1,7),(a,5,1)$ బిందువుల మధ్య దూరము9 యూనిట్లు అయితే a విలువను కనుగొనుము

సాధన: $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$9=\sqrt{(a-5)^2+(5+1)^2+(1-7)^2}$

$9=\sqrt{a^2-10a+25+(6)^2+(-6)^2}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$81=a^2-10a+25+36+36$

$a^2-10a+97-81=0$

$a^2-10a+16=0$

$a^2-2a-8a+16=0$

$a(a-2)-8(a-2)=0$

$(a-2)(a-8)=0$

$a-2=0$ లేదా $a-8=0$

$a=2$ లేదా $a=8$

7. $(-3,2,4),(-1,5,9),(1,8,14)$ బిందువులు సరేఖీయాలు అనిచూపుము.

సాధన: $A=(-3,2,4);B=(-1,5,9);C=(1,8,14)$ అనుకుంటే

$$AB=\sqrt{(-1+3)^2+(5-2)^2+(9-4)^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(5)^2}=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$$

$$AC=\sqrt{(1+3)^2+(8-2)^2+(14-4)^2}=\sqrt{(4)^2+(6)^2+(10)^2}$$

$$=\sqrt{16+36+100}=\sqrt{16+36+100}=\sqrt{152}$$

$$=\sqrt{4\times 38}=2\sqrt{38}$$

$$BC=\sqrt{(1+1)^2+(8-5)^2+(14-9)^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(5)^2}=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$$

$$AB+BC=\sqrt{38}+\sqrt{38}$$

$$=2\sqrt{38}=AC$$

$\therefore A,B,C$ లు సరేఖీయాలు.

8. $(2,-5,3);(-3,5,-2)$ బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండాల్ని అంతరంగా $1:4$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు తెలుపుము.

సాధన: $(x_1,y_1,z_1)=(2,-5,3);(x_2,y_2,z_2)=(-3,5,-2)$

$l:m=1:4$ అనుకుందాం.

అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు $=\left(\dfrac{lx_2+mx_1}{l+m},\dfrac{ly_2+my_1}{l+m},\dfrac{lz_2+mz_1}{l+m}\right)$

$$=\left(\frac{1\times -3+4\times 2}{1+4},\frac{1\times +4\times -5}{1+4},\frac{1\times -2+4\times 3}{1+4}\right)$$

$$=\left(\frac{-3+8}{5},\frac{5-20}{5},\frac{-2+12}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{5},\frac{-15}{5},\frac{10}{5}\right)$$

$$=(1,-3,2)$$

9. $(2,-3,1),(3,4,-5)$ బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండాన్ని బాహ్యంగా 3:2 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువుల నిరూపకాలు కనుగొనుము.

సాధన: $(x_1,y_1,z_1)=(2,-3,1);(x_2,y_2,z_2)=(3,4,-5)$

$l:m=3:2$ అనుకొనుము.

బాహ్యంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలు $=\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\frac{ly_2+my_1}{l+m},\frac{lz_2+mz_1}{l+m}\right)$

$$=\left(\frac{3\times3-2\times2}{3-2},\frac{3\times4-2\times-3}{3-2},\frac{3\times-5-2\times1}{3-2}\right)$$

$$=\left(\frac{9-4}{1},\frac{12+6}{1},\frac{-15-2}{1}\right)$$

$$=(5,18,-17)$$

10. $(2,-4,3),(-4,5,-6)$ బిందువులు కలిపినా రేఖా ఖండము మధ్య బిందువు నిరూపకాలు వ్రాయండి.

సాధన: $(x_1,y_1,z_1)=(2,-4,3);(x_2,y_2,z_2)=(-4,5,-6)$

మధ్య బిందువు నిరూపకాలు $=\left(\frac{x_2+x_1}{2},\frac{y_2+y_1}{2},\frac{z_2+z_1}{2}\right)$

$$=\left(\frac{2-4}{2},\frac{-4+5}{2},\frac{3-6}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-2}{2},\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\right)$$

$$=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{-3}{2}\right)$$

11. $(2,-3,5),(7,1,3)$ బిందువులు కలిపినా రేఖా ఖండాన్ని(1) $xy-$తలాన్ని, 2) $yz-$తలాన్ని, 3) $zx-$తలాన్ని

$(x_1, y_1, z_1) = (2, -3, 5); (x_2, y_2, z_2) = (7, 1, 3)$

సాధన: 1) xy – తలాన్ని విభజించే నిష్పత్తి $= -z_1 : z_2 = -5 : 3$

2) yz – తలాన్ని విభజించే నిష్పత్తి $= -x_1 : x_2 = -2 : 7$

3) zx – తలాన్ని విభజించే నిష్పత్తి $= = -y_1 : y_2 = -(-3)^2 : 1 = 3 : 1$

12. $3, -1, 2$ దిక్ సంఖ్యలు గల సరళరేఖ దిక్ – కొసైనులు కనుగొనుము.

సాధన: $a = 3, b = -1, c = 2$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{16}$$

$$\therefore \text{దిక్ – కొసైనులు} \left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

$$= \left(\pm \frac{3}{\sqrt{14}}, \pm \frac{-1}{\sqrt{14}}, \pm \frac{2}{\sqrt{14}} \right)$$

$$= \pm \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right)$$

13. $(-3, 5, 6)$ బిందువు యొక్క విక్షేపాలను ఎ) నిరూపక తలాల మీద, బి) నిరూపకాల మీద కనుక్కోండి.

సాధన: ఎ) yz, zx, xy తలాల మీద $(-3, 5, 6)$ బిందువు విక్షేపాలు $(0, 5, 6); (-3, 0, 6), (-3, 5, 0)$

బి) x, y, z అక్షాల మీద విక్షేపాలు $(-3, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 6)$

14. $(5, -3, 8), (6, -1, 6)$ బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ దిక్ – కొసైనులు కనుగొనుము.

సాధన: $(x_1, y_1, z_1) = (5, -3, 8); (x_2, y_2, z_2) = (6, -1, 6)$

దిక్ సంఖ్యలు $= (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

$= (6 - 5, -1 + 3, 6 - 8)$

$= (1, 2, -2)$

$$PQ = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$\therefore$ దిక్ కొసైనులు $(l,m,n)=\left(\frac{x_2-x_1}{PQ},\frac{y_2-y_1}{PQ},\frac{z_2-z_1}{PQ}\right)$

$=\pm\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

15. $(2,1,3),(1,0,-4)$ బిందువులు కలిపిన రేఖా ఖండపు విక్షేపము $(2,-1,4),(0,1,5)$ బిందువులు కలిపిన సరళరేఖ మీద కనుగొనుము.

సాధన: $(x_1,y_1,z_1)=(2,-1,4);(x_2,y_2,z_2)=(0,1,5)$

దిక్ - సంఖ్యలు $(x_2-x_1,y_2-y_1-z_2-z_1)=(0-2,1+1,5-4)$

$=(-2,2,1)$

$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(1)^2}$

$=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

దిక్ - కొసైనులు $=\left(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

కావలసిన విక్షేపము $=l(x_2-x_1)+m(y_2-y_1)+x(z_2-z_1)$

$=\frac{-2}{3}(1-2)+\frac{2}{3}(0-1)+\frac{1}{3}(-4-3)$

$=\frac{-2}{3}(-1)+\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(-7)$

$=\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{-7}{3}$

$=\frac{-7}{3}$

విక్షేపము ఎల్లప్పు కౌధనాత్మకం. కావున కావలసినవి విక్షేపము $\frac{7}{3}$

16. $(1,1,2),\left(\sqrt{3-1},-\sqrt{3-1},4\right)$ దిక్ - సంఖ్యలు గల సరళ రేఖల మధ్యకోణము కనుగొనుము.

సాధన: $$\cos\theta=\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{1\left(\sqrt{3-1}\right)+1\left(-\sqrt{3-1}\right)+2\times4}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}\sqrt{(3-1)^2+\left(-\sqrt{3-1}\right)^2+(4)^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1+8}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{3+1-2\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}+16}}\right|$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{6\times4}}$$

$$=\frac{6}{6\times2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

17. $\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)$ దీక్ - కొసైనులు గల సరళ రేఖీయ సమాంతరాలని చూపండి.

సాధన: ఇచ్చిన సరళ రేఖలు సమాంతరాలు అయితే $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}-\frac{n_1}{n_2}$

$$\Rightarrow\frac{\frac{2}{3}}{\frac{-2}{3}}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{-1}{3}}$$

$= -1 = -1 = -1$

$\therefore$ ఇచ్చిన దిక్ – కొసైన్లు గల సరళ రేఖీయ సమాంతరాలు.

18. $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{0}{5}\right);\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5},\frac{0}{5}\right)$ దిక్ – కొసైనులు గల సరళ రేఖీయ లంబంగా ఉంటాయని చూపండి.

సాధన: లంబంగా ఉండుటకు నియమము $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

$$\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{0}{5}\right)\left(\frac{0}{5}\right)$$

$$=\frac{-12}{25}+\frac{12}{25}+\frac{0}{25}$$

$$=\frac{-12+12+0}{25}=\frac{0}{25}=0$$

$\therefore$ సరళరేఖలు లంబంగా ఉంటాయి.

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $(a,b,c).(b,c,a),(c,a,b)$ బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజమము సమబాహు త్రిభుజము అనిచూపుము.

సాధన: $A=(a,b,c), B=(b,c,a), C=(c,a,b)$ అనుకుంటే

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2cb+a^2+c^2-2ca}$$

$$=\sqrt{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca}$$

$$BC=\sqrt{(c-b)^2+(a-c)^2+(b-a)^2}$$

$$=\sqrt{c^2+b^2-2bc+a^2+c^2-2ca+b^2+a^2-2ab}$$

$$=\sqrt{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca}$$

$$CA = \sqrt{(a-c)^2 + (b-a)^2 - (c-b)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ca + b^2 + a^2 - 2ab + c^2 + b^2 - 2bc}$$

$$CA == \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca}$$

$\therefore AB = AC = CA$ కావున ఇచ్చిన బిందువులతో సమబాహు త్రిభుజము ఏర్పడుతుంది.

2. $(-1,0,-4),(0,1,-6),(1.2.-5)$ బిందువులతో లంబకోణ త్రిభుజము ఏర్పడుతుందని చూపండి.

సాధన: $A = (-1,0,-4), B = (0,1,-6), C = (1.2.-5)$ అనుకుందాం.

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$= (0+1)^2 + (1-0)^2 + (-6+4)^2$$

$$= (1)^2 + (1)^2 + (-2)^2$$

$$= 1 + 1 + 4 = 6$$

$$BC^2 = (1-0)^2 + (2-1)^2 + (-5+6)^2$$

$$= (1)^2 + (1)^2 + (1)^2$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$AC^2 = (1+1)^2 + (2-0)^2 + (-5+4)^2$$

$$= (2)^2 + (2)^2 + (-1)^2$$

$$= 4 + 4 + 1 = 9$$

$$AB^2 + BC^2 = 6 + 3 = 9 = AC^2$$

$\therefore \Delta ABC$ లంబకోణ త్రిభుజము

$\therefore$ దత్త బిందువులతో లంబకోణ త్రిభుజము ఏర్పడుతుంది

3. $(0,7,10),(-1,6,6),(-4,9,6)$ బిందువులు సమద్విబాహవీ లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలని చూపుము.

సాధన: $A = (0,7,10), B = (-1,6,6), C = (-4,9,6)$ అనుకుందాం.

$AB^2 = (-1-0)^2 + (6-7)^2 + (6-10)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2 = 1+1+16 = 18$

$BC^2 = (-4+1)^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2 = (-3)^2 + (3)^2 + (0)^2 = 9+9+0 = 18$

$AC^2 = (-4+0)^2 + (9-7)^2 + (6-10)^2 = (-4)^2 + (2)^2 + (-4)^2 = 16+4+16 = 36$

$AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = BC \Rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{18}$

$AB^2 + BC^2 = 18+18 = 36 = AC^2$

$\therefore \Delta ABC$ సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజము

$\therefore$ దత్త బిందువులతో సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజము ఏర్పడుతుంది.

4. $(3,-1,2),(5,-2,-3),(-2,4,1),(-4,5,6)$ బిందువులతో సమాంతర చతుర్భుజము ఏర్పడుతుందని చూపుము.

సాధన: $A = (3,-1,2), B = (5,-2,-3), C = (-2,4,1), D = (-4,5,6)$ అనుకుందాం.

$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (4+2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{(7)^2 + (6)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+36+16} = \sqrt{101}$

$CD = \sqrt{(-4+2)^2 + (5-4)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

$DA = \sqrt{(3+4)^2 + (-1-5)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(7)^2 + (-6)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+36+16} = \sqrt{101}$

AC మధ్య బిందువు $= \left(\frac{3-2}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

BD మధ్య బిందువు $= \left(\frac{5-4}{2}, \frac{-2+5}{2}, \frac{-3+6}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$AB = CD = \sqrt{30}, BC = DA = \sqrt{101}$

AC మధ్య బిందువు BD మధ్య బిందువు $= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజము.

$\therefore$ దత్త బిందువులతో సమాంతర చతుర్భుజము ఏర్పడుతుంది.

5. $(2,2,2), (-4,8,2), (-2,10,10), (4,4,10)$ బిందువులతో చతురస్రము ఏర్పడుతుందని చూపండి.

సాధన: $A = (2,2,2), B = (-4,8,2), C = (-2,10,10), D = (4,4,10)$ అనుకుందాం.

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (8-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2 (0)^2} = \sqrt{36+36+0} = \sqrt{72}$$

$$BC = \sqrt{(-2+4)^2 + (10-8)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 (8)^2} = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72}$$

$$CD = \sqrt{(4+2)^2 + (4-10)^2 + (10-10)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-6)^2 (0)^2} = \sqrt{36+36+0} = \sqrt{72}$$

$$DA = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 (8)^2} = \sqrt{4+4+64} = \sqrt{72}$$

$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (10-2)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (8)^2 (8)^2} = \sqrt{16+64+64} = \sqrt{144}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (4-8)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{(8)^2 + (-4)^2 (8)^2} = \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144}$$

$AB = BC = CD = DA = \sqrt{72}$

$AC = BD = \sqrt{144}$

$\therefore ABCD$ ఒక చతురస్రము

$\therefore$ దత్త బిందువులతో చతురస్రము ఏర్పడుతుంది.

6. $A(7,6,3), B(4,10,1), C(-2,6,2), D(1,2,4)$ బిందువులకు దీర్ఘ చతురస్ర శీర్షాలని చూపుము.

సాధన: $A = (7,6,3), B = (4,10,1), C = (-2,6,2), D = (1,2,4)$ అనుకుందాం.

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (10-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

$BC=\sqrt{(-2-4)^2+(6-10)^2+(2-1)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+(1)^2}=\sqrt{36+16+1}=\sqrt{53}$

$CD=\sqrt{(1+2)^2+(2-6)^2+(4-2)^2}=\sqrt{(3)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$

$DA=\sqrt{(7-1)^2+(6-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{(6)^2+(4)^2+(-1)^2}=\sqrt{36+16+1}=\sqrt{53}$

$AC=\sqrt{(7+2)^2+(6-6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(9)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{81+0+1}=\sqrt{82}$

$BD=\sqrt{(4-1)^2+(10-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{(3)^2+(8)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+64+9}=\sqrt{82}$

$AB=CD=\sqrt{29}$

$BC=DA=\sqrt{53}$

$AC=BD=\sqrt{82}$

ఎదుటి భుజాలు సమానము మరియు కర్ణములు కూడా సమానము

$ABCD$ ఒక దీర్ఘ చతురస్రము

$\therefore$ దత్త బిందువులతో దీర్ఘ చతురస్రము ఏర్పడుతుంది.

7. $P(3,2,-4), Q(5,4,-6), R(9,8,-10)$ బిందువులు సరేఖీయమని చూపండి. Q బిందువు PR ను ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో తెలుపుము.

సాధన: $PQ=\sqrt{(5-3)^2+(4-2)^2+(-6+4)^2}=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}$

$QR=\sqrt{(9-5)^2+(8-4)^2+(-10+6)^2}=\sqrt{(4)^2+(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16+16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$PR=\sqrt{(9-3)^2+(8-2)^2+(-10+4)^2}=\sqrt{(6)^2+(6)^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36+36}$

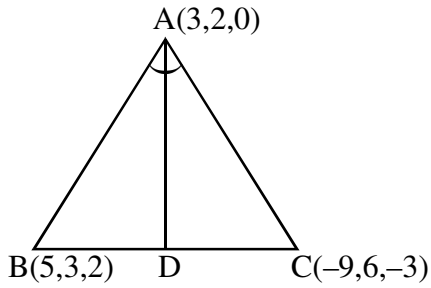
$\sqrt{108}=\sqrt{6\times6\times3}=6\sqrt{3}$

$PQ+QR=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}=PR$

$PQ:QR=2\sqrt{3}:4\sqrt{3}=1:2$

Q బిందువు PR ను $1:2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

8. $A(3,2,0), B(5,3,2), C(-9,6,-3)$ లు ఒక త్రిభుజ శీర్షాలు. $\underline{|BAC}$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ AD, BC ని D వద్దంఖం చేస్తుంది. D నిరూపకాలు కనుగొనుము.



సాధన: $AB = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9}$

$= 3$

$AC = \sqrt{(-9-3)^2 + (6-2)^2 + (-3-0)^2}$

$= \sqrt{(-12)^2 + (4)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{144+16+0} = \sqrt{169}$

$= 13$ D బిందువు BC ని $AB : AC$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

$AB = AC = 3:13$

D నిరూపకాలు $= \left(\frac{lx_2 + mx_4}{l+m}, \frac{ly_2 + my_1}{l+m}, \frac{lz_2 + mz_1}{l+m}\right)$

$= \left(\frac{3\times -9 + 13\times 5}{3+13}, \frac{3\times 6 + 13\times 3}{3+13}, \frac{3\times -3 + 13\times 2}{3+13}\right)$

$= \left(\frac{-27+65}{16}, \frac{18+39}{16}, \frac{-9+26}{16}\right)$

$= \left(\frac{38}{16}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$

9. సమాంతర చతుర్భుజము $ABCD$ యొక్క మూడు శీర్షాలు $A(3,-4,7), B=(5,3,-2), C(1,2,-3)$ అయితే D కనుగొనుము.

సాధన: $A=(3,-4,7), B=(5,3,-2), C=(1,2,-3)$ మరియు $D=(x,y,z)$ అనుకుందాం.

$ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజము కావున

వర్ధము AC మధ్య బిందువు = క్యాణము BD మధ్య బిందువు

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3+1}{2},\frac{-4+2}{2},\frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{-2+z}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{2},\frac{-2}{2},\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{-2+z}{2}\right)$$

$$=(2,-1,2)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{-2+z}{2}\right)$$

$$\frac{5+x}{2}=2\Rightarrow 5+x=4\Rightarrow x=4-5=-1$$

$$\frac{3+y}{2}=-1\Rightarrow 3+y=-2\Rightarrow y=-2-3=-5$$

$$\frac{-2+z}{2}=2\Rightarrow -2+z=4\Rightarrow z=4+2=6$$

$\therefore D$ నిరూపకాలు $=(-1,-5,6)$.

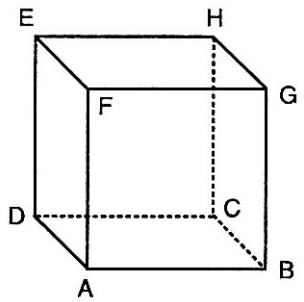
34A

తలము

మన ఇంటిలోని ఒక డాబా గదిని పరికించండి. దానికి నాలుగు గోడలు, నేల భాగము, పైకప్పు ఉన్నాయి. నేల, పైకప్పులు రెండూ, బాహ్యంగా విస్తరించిన సమాంతర తలాలు. నాలుగు గోడలలో ఎదురెదురుగా నున్నవి రెండేసి సమాంతర తలాలు. ఇట్లే టేబుల్ పై భాగము గది తలుపులు మున్నగునవి తలానికి ఉదాహరణలు.

తలము మీద రెండు బిందువులు తీసుకొని వాటిని ఒక సరళరేఖచే కలిపి పొడిగిద్దాము. ఇరువైపులా ఎంతదూరము పొడిగించినా ఆసరళ రేఖ మీద అన్ని బిందువులు అంటే ఆ సరళరేఖ మొత్తము ఆ తలము మీద ఉంటుంది. ఇది తలానికి మాత్రమే పరిమితమైన ధర్మము. అందువల్ల దీనిని తలానికి నిర్వచనముగా తీసుకొంటాము.

పటము 34.1లోనిది ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారపు పెట్టె. ఇది ఆరుముఖాలు, ఎనిమిది శీర్షాలు, పన్నెండు అంచెలు కలిగి ఉన్నది.



ఎదురెదురుగా నున్న జంట సమాంతర తలాలు

(i) ABCD; FGHE

(ii) AFED; BGHC

(iii) ABGF; DCHE

సమాంతర అంచులు

(i) AB, DC, EH, FG

(ii) AD, BC, GH, FE

(iii) AF, BG, CH, DE

పైన చెప్పబడిన మూఖాలన్నీ తలంలోని భాగాలే. అవి మూడు ఎదురెదురుగానున్న సమాంతర తలాల జంటలు.

ఈ పాఠంలో, మూడు బిందువుల గుండాపోయే తలము సమీకరణము, తలానికి అంతరఖండ, అభిలంబరూపాలు, x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము, రెండు తలాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తల సమీకరణము, అంతరాళంలో త్రిభుజ వైశాల్యము, నేర్చుకొందాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యపఠనం వలన మీరు నేర్చుకొనే విషయాలు

- తలాన్ని గుర్తించుట.
- తలము సాధారణ సమీకరణపు నిర్ధారణ.
- ఒక దత్త బిందువు గుండాపోయే తలము సాధారణ సమీకరణము
- మూడు బిందువుల గుండా పోవు తలము సమీకరణము
- తలానికి అంతరఖండ, అభిలంబ రూపాలలో సమీకరణాలు.
- రెండు తలాల మధ్యకోణము
- రెండు తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలము సమీకరణము
- మూడు చలరాశులలో రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణం రెండు తలాలను సూచిస్తుందని నిరూపించుట.

ముఖ్యాంశాలు

1. ఉపరితలము మీద గల రెండు బిందువులచే ఏర్పడు సరళరేఖ మొత్తము ఆ ఉపరితలము మీద ఉంటే, ఆ ఉపరితలానికి "తలము" అని పేరు.
2. తలానికి సాధారణ సమీకరణము $ax+by+cz+d=0$
3. మూడు స్వతంత్ర స్థిర సంఖ్యలు గల తలం సమీకరణం $Ax+By+Cz=1$
4. (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలం సమీకరణం.

   $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$
5. ఒక దత్త బిందువు గుండా అనంతమైన తలాలు పోతాయి.
6. $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ అనే మూడు బిందువుల గుండా పోయే తలం సమీకరణం.

   $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$
7. అంతర ఖండ రూపంలో తలం సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
8. తలం యొక్క అభిలంబరూపము $lx+my+nz=P$; ఇచ్చట l, m, n లు తలం లంబానికి దిక్-కొసైనులు

మరియు P అనేది మూల బిందువు నుంచి తలానికి లంబ దూరము.

9. $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ తలాల మధ్యకోణము θ అయిన

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

ఎ) తలాలు లంబంగా ఉండేందుకు నియమము $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

బి) తలాలు సమాంతరంగా ఉండేందుకు నియమము $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

10. $(x_1y_1z_1)$ బిందువు నుంచి $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=P$

తలానికి గల లంబ దూరము $|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-P|$

11. (x_1,y_1,z_1) బిందువు నుంచి $ax+by+cz+d=0$ తలానికి లంబ దూరము $\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

12. $a_1x+b_1y+c_1z+d=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2z+d=0$ తలాల మధ్యకోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణాలు. $\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

13. $a_1x^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx=0$ అనే రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణం రెండు తలాలను సూచించుటకు ఆవశ్యక దర్యాప్త నియమము $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

ఎ) ఈ సమీకరణం సూచించు రెండు తలాల మధ్యకోణం θ అయితే

$$Tan\theta=\frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca}}{a+b+c}$$

14. $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యము మీద వర్ణము.

$$\Delta^2=(\Delta xy)^2+(\Delta yz)^2+(\Delta zx)^2=\frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1 & z_1 & 1\\ y_2 & z_2 & 1\\ y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1 & x_1 & 1\\ z_2 & x_2 & 1\\ z_3 & x_3 & 1\end{vmatrix}^2\right\}$$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. $(5,-7,3)$ బిందువు గుండా పోయే ఏదైనా తలము సమీకరణం రాయండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువు $(x_1, y_1, z_1) = (5,-7,3)$

కావలసిన తలం సమీకరణం $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

ఈ సూత్రాన్ని బట్టి $a(x-5)+b(y+7)+c(z-3)=0$

$$\Rightarrow ax+by+cz+(-5a+7b-3c)=0$$

2. నిరూపకాక్షాల మీద వరుసగా $2,3,4$ అంతర ఖండాలు చేసే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన విలువలు $a=2, b=3, c=4$

తలం అంతర ఖండ సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

కావలసిన తలం సమీకరణం $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$

3. $2x+3y+4z=24$ తలం అక్షాల మీద ఏర్పరచే అంతర ఖండాలు తెలుపుము.

సాధన: తలం సమీకరణం $2x+3y+4z=24$

ఇరువైపుల 24చే భాగించగా $\frac{x}{12}+\frac{y}{8}+\frac{z}{6}=1$

అక్షాల మీద అంతర ఖండాలు వరుసగా $12,8,6$

4. $4x+12y-6z-28=0$ తలం సమీకరణాన్ని అభిలము రూపంలోకి మార్చుము.

సాధన: తలం సమీకరణం $4x+12y-6z=28$

$$\sqrt{(4)^2+(12)^2+(-6)^2}=\sqrt{16+144+36}=\sqrt{196}=14$$

చేత భాగిస్తే $\frac{4x}{14}+\frac{12y}{14}-\frac{6z}{14}=\frac{28}{14}$

$\Rightarrow \frac{2x}{7}+\frac{6y}{7}-\frac{3z}{7}=2$ ఇదే అభిలంబ రూపము.

5. నిరూపణక్షాలను ఒక తలం A, B, C బిందువుల వద్ద ఖండింస్తోంది. ABC త్రిభుజ కేంద్ర భాసము $(3,4,-6)$ అయిన తలం సమీకరణం?

సాధన: ఇచ్చిన బిందువు $(a,b,c)=(3,4,6)$

కావలసిన తలం సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$

$$\Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-6}=3$$

$$\Rightarrow \frac{4x+3y-2z}{12}=3$$

$$\Rightarrow 4x+3y-2z=36$$

6. $3x+4y-5z=9, 2x+6y+6z=7$ తలాలు లంబంగా ఉన్నాయని చూపుము.

సాధన: ఇచ్చిన తలాల నుండి $a_1=3,\ b_1=4,\ c_1=-5$

$$a_2=2,\ b_2=6,\ c_2=6$$

$$\therefore a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=6+24-30=0$$

$\therefore$ ఇచ్చిన తలాలు పరస్పర లంబాలు.

7. $(3,4,-5)$ బిందువు నుండి $2x-3y+3z+27=0$ తలానికి గల దూరమెంత?

సాధన: ఇచ్చిన బిందువు $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-5)$

దత్త సమీకరణం $ax+by+cz+d=0=2x-3y+3z+27$

కావలసిన దూరము $=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{2(3)-3(4)+3(-5)+27}{\sqrt{4+9+9}}$$

$$=\frac{6-12-15+27}{\sqrt{22}}$$

$=\frac{6}{\sqrt{22}}$ యూనిట్లు

8. $3x-5y+8z-2=0, 12x-20y+32z+9=0$ తలాలు సమాంతరాలని చూపుము.

సాధన: ఇచ్చిన తలాలనుండి $a_1=3,\ b_1=-5, c_1=8$

$a_2=12, b_2=-20, c_2=32$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{3}{12}=\frac{-5}{-20}=\frac{8}{32} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

దత్త తలాలు సమాంతరాలు.

9. $3x-2y+Kz-1=0, x+Ky+5z+2=0$ తలాలు లంబాలు అయితే K విలువ ఎంత?

సాధన: దత్త తలాల నుండి $a_1=3, b_1=-2, c_1=K$

$a_2=1, b_2=K, c_2=5$

దత్త తలాలు లంబాలు అయినా $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

$\Rightarrow 3-2K+5K=0$

$\Rightarrow 3K=-3$

$\Rightarrow K=-1$

10. $(3,2,-5)$ బిందువు నుండి $2x-3y-5z=7$ తలానికి గల దూరమెంత?

సాధన: దత్త బిందువు $(x_1, y_1, z_1)=(3,2,-5)$

దత్త సమీకరణం $ax+by+cz+d=0=2x-3y-5z-7$

కావలసిన దూరము $=\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$=\frac{2(3)-3(2)-5(-5)-7}{\sqrt{4+9+25}}$$

$$=\frac{6-6+25-7}{\sqrt{38}}$$

$=\dfrac{18}{\sqrt{38}}$ యూనిట్లు

11. $(2,3-1)$ బిందువు గుండా పోతూ $2x+3y+6z+7=0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $ax+by+cz+d=0$ తలానికి సమాంతరంగా (x_1,y_1,z_1) బిందువు గుండా పోవు తలం సమీకరణం

$$ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0$$

కావలసిన తలం సమీకరణం $2x+3y+6z-\left[(2\times2)+(3\times3)+(6\times-1)\right]=0$

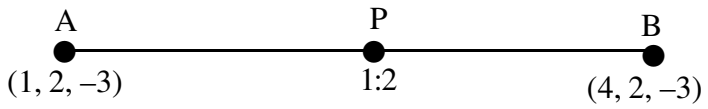
$$\Rightarrow 2x+3y+6z-(4+9-6)=0$$

$$\Rightarrow 2x+3y+6z-7=0$$

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (5 మార్కులు)

1. $(1,2,-3),(4,2,-3)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 1:2 నిష్పత్తిలో ఖండించే బిందువు గుండా పోయే తలం సమీకరణాన్ని వ్రాయము.

సాధన:



$AP:PB=1:2$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{PB}=\dfrac{1}{2}$ అనుకుంటే

$$P=\left(\frac{(1\times4)+(2\times1)}{1+2},\frac{(1\times2)+(2\times2)}{1+2},\frac{(1\times-3)+(2\times-3)}{1+3}\right)$$

$=(2,2,-3)$

$\therefore P$ గుండా పోయే తలం సమీకరణము

$$a(x-2)+b(y-2)+c(z+3)=0$$

$$\Rightarrow ax+by+cz+(-2a-2b+3c)=0$$

2. $(2,2,-1),(3,4,2),(7,0,6)$ బిందువుల గుండా పోయే తలం సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: మూడు బిందువుల గుండా పోవు తలం సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 3-2 & 4-2 & 2+1 \\ 7-2 & 0-2 & 6+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(14+6)-(y-2)(7-15)+(z+1)(-2-10)=0$$

$$\Rightarrow 20(x-2)+8(y-2)-12(z+1)=0$$

$$\Rightarrow 5(x-2)+2(y-2)-3(z+1)=0$$

$$\Rightarrow 5x+2y-3z-17=0$$

3. మూలబిందువు నుండి ఒక తలానికి లంబపాదము $(1,-3,1)$ అయిన తలం సమీకరణాన్ని కనుగొనుము?

సాధన: '0' నుండి తలానికి లంబపాదము P అనుకుంటే P బిందువు $(1,-3,1)$ P గుండా ఏదైనా తలము సమీకరణం

$a(x-1)+b(y+3)+c(z-1)=0$

OP కి దిక్ సంఖ్యలు $1-0,-3-0,1-0=1,-3,1$

తలానికి OP లంబము $\therefore a=1,\ b=-3,\ c=1$

$\therefore$ తలం సమీకరణం $1(x-1)-3(y+3)+1(z-1)=0$

$\Rightarrow x-3y+z-1-9-1=0$

$\Rightarrow x-3y+z-11=0$.

4. $2x-y+z=6, x+y+2z=3$ తలాల మధ్యకోణం కనుగొనుము.

సాధన: దత్త తలాల నుండి $a_1=2, b_2=-1, c_1=1$

$a_2=1, b_2=1, c_2=2$

రెండు తలాల మధ్య కోణం θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} = \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \cos 60^0$$

$$\therefore \theta = 60^0 \cdot$$

5. $(-1,1,1).(1,-1,1)$ బిందువుల గుండా పోతూ $x+2y+2z=5$ తలం లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: $(-1,1,1)$ బిందువు గుండా ఏదైనా తలం

$$a(x+1)+b(y-1)+c(z-1)=0 \qquad \ldots (1)$$

ఇది $(1,-1,1)$ బిందువు గుండా పోతుంది.

$$\therefore a(1+1)+b(-1-1)+c(1-1)=0$$

$$\Rightarrow 2a-2b=0$$

$$\Rightarrow a-b=0 \quad \ldots (2)$$

$x+2y+2z=5$ తలానికి (1) లంబము

$$\therefore a+2b+2c=0 \qquad \ldots (3)$$

(2), (3)ల నుండి అడ్డు గుణకార సూత్రమునుపయోగించి

a	b	c	
-1	0	1	-1
2	2	1	2

$$\Rightarrow \frac{a}{-2-0} = \frac{b}{0-2} = \frac{c}{2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{-2} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{3}$$

(1లో a,b,c విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం $-2(x+1)-2(y-1)+3(z-1)=0$

$$\Rightarrow -2x-2y+3z-2+2-3=0$$

$$\Rightarrow 2x+2y-3z+3=0$$

6. $(2,-1,5)$ బిందువు గుండా పోతూ $x+2y-z=1$ మరియు $3x-4y+z=5$ తలాలకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: $(2,-1,5)$ బిందువు గుండా ఏదైనా తలం

$a(x-2)+b(y+1)+c(z-5)=0 \qquad \ldots (1)$

ఇది $x+2y-z=1$ మరియు $3x-4y+z=5$ తలాలకు లంబం

$\therefore a(1)+b(2)+c(-1)=0 \Rightarrow a+2b-c=0 \qquad \ldots (2)$

మరియు $a(3)+b(-4)+c(1)=0 \Rightarrow 3a-4b+c=0 \qquad \ldots (3)$

(2), (3) ల నుండి అడ్డగుణకార సూత్రమును ఉపయోగించి

a	b	c	
2	-1	1	2
-4	1	3	-4

$$\Rightarrow \frac{a}{2-4}=\frac{b}{-3-1}=\frac{c}{-4-6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{-2}=\frac{b}{-4}=\frac{c}{-10}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{5}$$

(1)లో a,b,c విలువ ప్రతిక్షేపించగా

$1(x-2)+2(y+1)+5(z-5)=0$

$\Rightarrow x-2+2y+z+5z-25=0$

$\Rightarrow x+2y+5z-25=0$

7. మూల బిందువు గుండా పోతూ $x+2y+2z=0, 2x+y-2z=0$ తలాలకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: మూల బిందువు $(0,0,0)$ గుండా ఏదైన తలం సమీకరణము

$ax+by+cz=0 \quad \ldots (1)$

ఇది $x+2y+2z=0$ మరియు $2x+y-2z=0$ తలాలకు లంబం

$\therefore a(1)+b(2)+c(2)=0 \Rightarrow a+2b+2c=0 \quad \ldots (2)$

$\therefore a(2)+b(1)+c(-2)=0 \Rightarrow 2a+b-2c=0 \quad \ldots (3)$

(2), (3) ల నుండి అడ్డగుణకార సూత్రమునుపయోగించి

a	b	c	
2	2	1	2
1	-2	2	1

$$\Rightarrow \frac{a}{-4-2}=\frac{b}{4+2}=\frac{c}{1-4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{-6}=\frac{b}{6}=\frac{c}{-3} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{-2}=\frac{c}{1}$$

(1)లో a,b,c విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$2x-2y+z=0$

8. $3x+y-z-7=0$ మరియు $6x+2y-2z+11=0$ తలాల మధ్య దూరము ఎంత?

సాధన: దత్త తలాలు

$3x+y-z-7=0 \quad \ldots (1)$

$6x+2y-2z+11=0 \quad \ldots (2)$

ఇచ్చట $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ తలాలు (1), (2) లు సమాంతరాలు

$\therefore$ తలం (1)పైన ఏదైనా బిందువు $(0,7,0)$

$\therefore$రెండు తలాల మధ్య దూరము $=(0,7,0)$ నుండి (2) తలానికి లంబదూరం

$$=\frac{6(0)+2(7)-2(0)+11}{\sqrt{6^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{24+11}{\sqrt{36+4+4}}=\frac{25}{\sqrt{44}}$$

$=\frac{25}{2\sqrt{11}}$ యూనిట్లు

9. $2x+y-2z=4, 2x-3y+6z+2=0$ తలాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేసే తలాల సమీకరణాలు కనుగొనుము.

సాధన: దత్త తలాలు $2x+y-2z-4=0$ మరియు $2x-3y+6z+2=0$

$\therefore$ కావలసిన తలాల సమీకరణాలు $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

$$\Rightarrow \frac{2x+y-2z-4}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\pm\frac{2x-3y+6z+2}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(6)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+y-2z-4}{\sqrt{4+1+4}}=\pm\frac{x-3y+6z+2}{\sqrt{4+9+36}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+y-2z-4}{3}=\pm\frac{2x-3y+6z+2}{7}$$

$$\Rightarrow 7(2x+y-2z-4)=\pm 3(2x-3y+6z+2)$$

$$\Rightarrow 14x+7y-14z-28=\pm(6x-9y+18z+16)$$

$$\Rightarrow 8x+16y-32z-34=0 \Rightarrow 4x+8y-16z-17=0$$

మరియు $20x-2y+4z-22=0 \Rightarrow 10x-y+2z-11=0$

10. $2x^2-6ay^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0$ సమీకరణం రెండు తలాలను సూచిస్తుందని చూపి వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: దత్త సమీకరణం నుండి $ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx=0$ తో

పోల్చగా $a=2, b=-6, c=-12, f=9, g=1, h=\dfrac{1}{2}$

$\therefore abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

$$=(2)(-6)(-12)+2(9)(1)\left(\frac{1}{2}\right)-2(9)^2-(-6)(1)^2-(-12)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=144+9-2(81)+6(1)+12\left(\frac{1}{4}\right)$$

$= 144 + 9 - 162 + 6 + 3 = 162 - 162$

$= 0$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం మూల బిందువు నుండి పోయే రెండు తలాలను సూచిస్తుంది. రెండు తలాల మధ్య కోణము 'θ' అయిన

$$Tan\theta = \frac{2\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - ab - bc - ca}}{a + b + c}$$

$$= \frac{2\sqrt{81 + 1 + 4 + 12 - 72 + 24}}{2 - 6 - 12}$$

$$= \frac{2}{-6}\sqrt{46 + \frac{1}{4}}$$

$$== \frac{-\sqrt{184 + 1}}{16} = \frac{-\sqrt{185}}{16}$$

$$\therefore \theta = Tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{185}}{16}\right)$$

11. $(2,-5,3),(1,-7,4),(2,-3,5)$ బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుము?

సాధన: దత్త బిందువులు $(x_1, y_1, z_1) = (2,-5,3)$

$(x_2, y_2, z_2) = (1,-7,4)$

$(x_3, y_3, z_3) = (2,-3,5)$

$$\therefore \Delta xy = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[2(-7+3) - 1(-5+3) + 2(-5+7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-8 + 2 + 4]$$

$$= -1$$

$$\therefore \Delta yz = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[-5(4-5)+7(3-5)-3(3-4)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[5-14+3]$$

$$= -3$$

$$\therefore \Delta zx = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(1-2)-4(2-2)+5(2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-3+0+5]$$

$$= 1$$

$$\therefore \Delta^2 = \Delta^2 xy + \Delta^2 yz + \Delta^2 zx$$

$$= (-1)^2 + (-3)^2 + (1)^2$$

$$= 1+9+1 = 11$$

$\Delta = \sqrt{11}$ చ. యూనిట్లు

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $(-1,4,-3),(3,2,-5).(-3,8,-5),(-3,2,1)$ బిందువులు సతలీయాలని చూపుము. ఆ బిందువులు గల తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: దత్త బిందువులు $(x_1, y_1, z_1) = (-1,4,-3)$

$(x_2, y_2, z_2) = (3,2,-5)$

$(x_3, y_2, z_2) = (-3,8,-5)$

$(x_4, y_4, z_4) = (-3,2,1)$

మూడు బిందువుల గుండా పోయే తలం సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+3 \\ 3+1 & 2-4 & -5+3 \\ -3+1 & 8-4 & -5+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+3 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(4+8)-(y-4)(-8-4)+(z+3)(16-4)=0$$

$$\Rightarrow 12(x+1)+12(y-4)+12(z+3)=0$$

$$\Rightarrow x+1+y-4+z+3=0$$

$$\Rightarrow x+y+z=0$$

ఈ సమీకరణంలో $(x_4, y_4, z_4) = (-3, 2, 1)$

ప్రతిక్షేపించగా,

$$-3+2+1=0$$

$$\Rightarrow 0=0$$

$\therefore$ దత్త బిందువుల సతతీయాలు మరియు ఈ బిందువుల గల తలం సమీకరణము $x+y+z=0$

2. $6x^2-12y^2+4z^2+xy+13yz-14zx=0$ రెండు తలాలను సూచిస్తుందని చూపి, ఆ తలం సమీకరణాలు, వాటి మధ్యకోణం కనుగొనుము.

సాధన: దత్త సమీకరణం

$$6x^2-12y^2+4z^2+xy+13yz-14zx=0 \qquad \ldots (A)$$

(A) లో $z=0$ ప్రతిక్షేపించగా

$$6x^2-12y^2+xy = 6x^2+9xy-8xy-12y^2$$

$$= 3x(2x+3y)-4y(2x+3y)'$$

$$=(3x-4y)(2x+3y) \qquad \ldots (1)$$

(A) లో $y=0$ ప్రతిక్షేపించగా

$$6x^2+4z^2-14zx=6x^2-12xz-2xz+4z^2$$

$$=6x(x-2z)-2z(x-2z)$$

$$=(6x-2z)(x-2z)$$

$$=(3x-z)(2x-4z) \qquad \ldots (2)$$

(A) లో $x=0$ ప్రతిక్షేపించగా

$$-12y^2+4z^2+13yz=-12y^2+16yz-3yz+4z^2$$

$$=-4y(3y-4z)-z(3y-4z)$$

$$=(3y-4z)(-4y-z)$$

$$=-(3y-4z)(4y+z) \qquad \ldots (3)$$

(1), (2), (3)లను క్రోడికరిస్తే (A) కి కారణాంకాలు

$(3x-4y-z)$ మరియు $(2x+3y-4z)$

$$\therefore 6x^2-12y^2+4z^2+xy+13yz-14zx$$

$$=(3x-4y-z)(2x+3y-4z)$$

$\therefore$ తలం సమీకరణాలు $3x-4y-z=0, 2x+3y-4z=0$

$\therefore$ రెండు తలాల మధ్య కోణం θ అయిన

$$Tan\theta=\frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab}}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{\frac{169}{4}+49+\frac{1}{4}+48-24+72}}{6-12+4}$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{170}{4}+145}}{-2}=\frac{\sqrt{170+580}}{-2}=\frac{\sqrt{750}}{-2}=\frac{5\sqrt{30}}{-2}$$

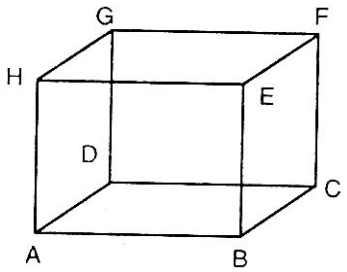
$$\therefore \theta=Tan^{-1}\left(\frac{-5\sqrt{30}}{2}\right)$$

35A

సరళరేఖ

పటములో నున్నది ఆరు ముఖములు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు పెట్టె.

ఈ ఆరు ముఖములు ఆరు తలములలోని భాగములే. దీనిలో ABCD, EFGH లు సమాంతర తలాలు. ఇట్లే ADGH, BCFE లు సమాంతర తలాలు. ABEH, CFGD లు కూడ సమాంతరాలే. ABCD, CFGD తలాలు CD సరళరేఖ మీద ఖండించుకుంటున్నాయి. ఇట్లే పక్కపక్కన గల ప్రతి రెండు తలాలు ఒక సరళరేఖ మీద ఖండించుకుంటాయి. ఇంకా AB, AH అనే రెండు అంచులు శీర్షము A వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. ఇట్లే ప్రతి పక్క పక్కన గల రెండు అంచులతో ఒక శీర్షమేర్పడుతుంది.



తలాలు ఖండించుకుంటే అంచులు (సరళ రేఖలు), అంచులు ఖండించుకుంటే శీర్షాలు (బిందువులు) ఏర్పడతాయి.

ఈ పాఠంలో, అంతరాళములోని సరళరేఖకు సౌష్ఠవ రూపంలో సమీకరణాలు, సరళరేఖ సాధారణ సమీకరణాలను సౌష్ఠవ రూపములోనికి మార్చుట, ఒక బిందువు నుండి ఒక సరళరేఖకు లంబదూరము, సరళరేఖకు తలానికి మధ్య కోణాన్ని చదువుతాము. ఇంకా రెండు సరళరేఖల సతలీయ నియమాన్ని కూడా నిర్ధారణ చేస్తాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠాన్ని చదవడం వలన మీరు ఈ క్రింది విషయాలు తెలుసుకుంటారు.

- అంతరాళంలోగల సరళరేఖకు సౌష్ఠవ రూపంలో సమీకరణాలు.
- సరళరేఖ సాధారణ రూపాన్ని సౌష్ఠవ రూపంలోకి మార్చుట
- ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖకు లంబదూరము కనుగొనుట
- ఒక సరళరేఖ, ఒక తలము మధ్య కోణము కనుగొనుట
- రెండు సరళరేఖల సతతీయ నియమాలు

ముఖ్యాంశాలు :

1. రెండు సమాంతర తలాలు ఖండించుకుంటే సరళరేఖ ఏర్పడుతుంది.

2. (x_1, y_1, z_1) బిందువుగుండా l, m, n దిక్-కొసైన్‌లు గల సరళరేఖ సౌష్ఠవ సమీకరణాలు

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r$$

ఇక్కడ 'r' అనేది సరళరేఖ మీద స్థిర బిందువు (x_1, y_1, z_1) నుండి ఏదైనా బిందువుకు గల దూరము.

3. సరళరేఖ సాధారణ (అసౌష్ఠవ) సమీకరణాలు $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ a_1x+b_2y+c_2z+d_2=0$

4. (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణాలు (రెండు బిందువుల రూపము)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ సరళరేఖకు $ax+by+cz+d=0$ తలానికి మధ్య కోణం 'θ' అయిన

$$\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

6. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1};\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ సరళరేఖల సతలీయతా నియమము

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

7. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n_1};\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ సరళరేఖలు గల తలం సమీకరణం

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

8. ఒక సరళరేఖ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, రెండవ సరళరేఖ $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0;$

$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ల సతలీయ నియమము

$$\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1}{a_1l+b_1m+c_1n}=\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}{a_2l+b_2m+c_2n}$$

9. అంతరాళంలోని రెండు ఖండించుకోని సరళరేఖలు ఒక తలంలో ఉండవు. అట్టి సరళరేఖలకు "విషమ సరళరేఖ"అని పేరు.

10. (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోతూ a, b, c లు దిక్-సంఖ్యలుగా గల సరళరేఖ సమీకరణాలు

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

11. $p(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు నుండి, AB సరళరేఖ సమీకరణాలు $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ పైకి PQ లంబాన్ని గీచిన $PQ^2=AP^2-AQ^2$. ఇచ్చట l, m, n లు దిక్-కొసైనులు

$AP^2=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2$ మరియు

$AQ=AB$ సరళరేఖ మీద AP విక్షేపము

$=l(x_1-\alpha)+m(y_1-\beta)+n(z_1-\gamma)$

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. (1,-2,3) బిందువు గుండా 3,-4,5 లు దిక్-సంఖ్యలుగా గల సరళరేఖ సమీకరణాలు సౌష్ఠవ రూపంలో రాయండి.

సాధన : $(x_1, y_1, z_1)=(1,-2,3)$ మరియు $a=3, b=-4, c=5$

$\therefore$ సరళరేఖ సమీకరణాలు సౌష్ఠవ రూపంలో $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-5}{3}$.

2. (3,-9,4), (-9, 5,-4) బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణాలు సౌష్ఠవ రూపంలో రాయండి.

సాధన : $A(3,-9,4)$, $B(-9,5,-4)$ అనుకొనుము.

AB దిక్‌సంఖ్యలు = -9-3, 5+9, -4-4

= -12, 14, -8

A బిందువు సమీకరణాలు $\frac{x-3}{-12}=\frac{y+9}{14}=\frac{z-4}{-8}$

B బిందువు సమీకరణాలు $\frac{x+9}{-12}=\frac{y-5}{14}=\frac{z+4}{-8}$

3. (1,2,3) బిందువు గుండా పోతూ (-4,7,2), (5-3,2) బిందువులు కలిపిన సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణాలు సౌష్ఠవ రూపంలో వ్రాయుము.

సాధన : $A(1,2,3)$, $B(-4,7,2)$, $C(5,-3,-2)$ అనుకొనుము.

BC దిక్-సంఖ్యలు = 5+4, -3-7, -2-2

= 9 , -10, -4

BC కి సమాంతరంగా A గుండా పోవు సరళరేఖల సమీకరణాలు

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z-3}{-4}$$

4. $\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-1}$ **తలం,** $3x-4y+5z=5$ **తలాల మధ్య కోణమెంత?**

సాధన : దత్తాంశం నుండి $l=1, m=4, n=-1, a=3, b=-4, c=5$ తలానికి సరళరేఖకు మధ్య కోణం 'θ' అయిన

$$\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{3-16-5}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{9+16+25}}=\frac{-18}{\sqrt{18}\sqrt{50}}$$

$$=-\sqrt{\frac{18}{50}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore \theta=\sin^{-1}\left(\frac{-3}{5}\right)$$

5. (1,2,3), (4,5,7) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము (-4,3,-6), (2,9,2) బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండానికి సమాంతరమని చూపుము.

సాధన : దత్త బిందువులు $A(1,2,3)$, $B(4,5,7)$, $C(-4,3,-6)$, $D(2,9,2)$ అనుకొనుము.

AB దిక్-సంఖ్యలు = 4−1, 5−2, 7−3 = 3, 3, 4

CD దిక్-సంఖ్యలు = 2+4, 9−3, 2+6 = 6, 6, 8 = 3, 3, 4

$\therefore$ AB రేఖాఖండము CD రేఖాఖండమునకు సమాంతరము.

6. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4};\ 4x-3y+1=0,\ 5x-3z+2=0$ **సరళరేఖలు సతతీయాలని చూపుము.**

సాధన : దత్త సరళరేఖల నుండి $(x_1, y_1, z_1)=(1,2,3)$

$l,m,n=2,3,4;\qquad a_1=4, b_1=-3, c_1=0, d_1=1$

$a_2=5, b_2=0, c_2=-3, d_2=2$

ఇప్పుడు $\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1}{a_1l+b_1m+c_1n}=\frac{4-6+0+1}{8-9+0}=\frac{-1}{-1}=1$

$$\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}{a_2l+b_2m+c_2n}=\frac{5+0-9+2}{10+0-12}=\frac{-2}{-2}=1$$

$\therefore$ దత్త సరళరేఖలు సతతీయాలు.

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $x+5y-z=7,\ 2x-5y+3z=-1$ **సూచించే సరళరేఖ సమీకరణాలు సౌష్ఠవ రూపంలోకి మార్చి దాని దిక్-కొసైనులు తెల్పండి.**

సాధన : రేఖ మీది బిందువు కొరకు $z=0$ గా తీసుకుంటే

$$x+5y=7$$
$$2x-5y=-1$$

సాధించగా $x=2, y=1$

$\therefore$ రేఖ మీద ఒక బిందువు $(2,1,0)$ సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు l,m,n అనుకోండి. ఈ సరళరేఖ రెండు తలాల లంబాలకు లంబము

$$\therefore l+5m-n=0$$

$$2l-5m+3n=0$$

$$\begin{array}{cccc} & \underline{l} & \underline{m} & \underline{n} \\ \therefore & 5 & -1 & 1 & 5 \\ & -5 & 3 & 2 & -5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{15-5} = \frac{m}{-2-3} = \frac{n}{-5-10}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{10} = \frac{m}{-5} = \frac{n}{-15} \Rightarrow \frac{l}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{n}{-3}$$

సరళరేఖ సమీకరణాలు $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{-3}$

రేఖ దిక్-సంఖ్యలు 2, −1, −3

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$\therefore$ సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$

2. (4,1,1) నుండి $x+y+z=4,\ x-2y-z=4$ సరళరేఖలకు లంబదూరం కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తబిందువు $(x_1, y_1, z_1) = (4,1,1)$

దత్త సరళరేఖ $x+y+z=4$

$x-2y-z=4$ లలో $z=0$ ప్రతిక్షేపించగా

$x+y=4$

$x-2y=4$ లను సాధించగా $x=4,\ y=0$

$\therefore$ బిందువు $(\alpha, \beta, \gamma) = (4,0,0)$

దత్త సరళరేఖ దిక్-కొసైనులు l, m, n అనుకుంటే

$l+m+n=0$

$l-2m-n=0$ సాధించగా

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{-3}$$

$\therefore$ సరళరేఖ సౌష్ఠవ రూపంలో $\frac{x-4}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-3}$

$$\therefore AP^2 = (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2$$

$$=(4-4)^2+(1-0)^2+(1-0)^2$$

$$=0+1+1$$

$$=2$$

ఇప్పుడు AB కి l,m,n లు వరుసగా $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-3}{\sqrt{14}}$

$\therefore$ AQ = AB మీద AP యొక్క విక్షేపమే

$$=l(x_1-\alpha)+m(y_1-\beta)+n(z_1-\gamma)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}(4-4)+\frac{2}{\sqrt{14}}(1-0)-\frac{3}{\sqrt{14}}(1-0)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{14}}-\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{14}}$$

$\therefore$ లంబదూరం $PQ^2=AP^2-AQ^2$

$$=2-\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)^2$$

$$=2-\frac{1}{14}$$

$$=\frac{28-1}{14}$$

$$=\frac{27}{14}$$

$$\therefore PQ=\sqrt{\frac{27}{14}}$$

3. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{1};\ \frac{x}{1}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z+7}{2}$ **సరళరేఖలు సతతీయాలని చూపి, ఆ సరళరేఖలు గల తలం సమీకరణం కనుగొనుము.**

సాధన : దత్తరేఖల నుండి బిందువులు, దిక్-కొసైనులు

$(x_1, y_1, z_1)=(-1,3,-2);\ l_1, m_1, n_1=-3,2,1$

$(x_2, y_2, z_2)=(0,7,-7);\ l_2, m_2, n_2=1,-3,2$

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ x_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0+1 & 7-3 & -7+2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad =1(4+3)-4(-6-1)-5(9-2)$$

$$=7-28-35$$

$$=0$$

$\therefore$ దత్త సరళరేఖలు సతలీయాలు.

దత్త సరళరేఖలు గల తలం సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(4+3)-(y-3)(-6-1)+(z+2)(9-2)=0$$

$$\Rightarrow 7x+7+7y-21+7z+14=0$$

$$\Rightarrow 7x+7y+7z=0$$

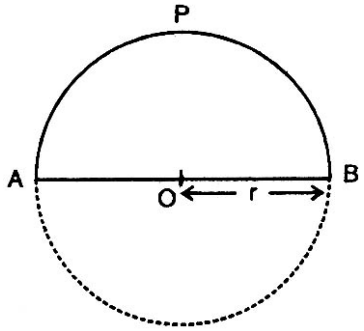
$$\Rightarrow x+y+z=0$$

36A

గోళము

నిత్య జీవితములో మనము చూసే ఆట వస్తువులైన అన్ని రకాల బంతులు మూడవ పరిమాణపు గోళ ఆకృతులే.

పక్క పటములో నున్నది OAPB అర్ధవృత్తము. దీనిని AB వ్యాసము మీద భ్రమణము చేస్తే, O కేంద్రము, r వ్యాసార్థము గల గోళమేర్పడుతుంది.



అంతరాళములో, ఒకస్థిర బిందువు నుంచి, స్థిరదూరములో ఉంటూ సంచరించే బిందు పథము గోళమని స్థిర బిందువును గోళకేంద్రమని, స్థిర దూరానికి గోళవ్యాసార్థమని పేర్లు.

వృత్తము ద్విపరిమాణమని, గోళము త్రిపరిమాణమని గ్రహించండి. ఈ పాఠములో మనము.

1. గోళానికి కేంద్ర, వ్యాసార్థరూపము
2. నాలుగు అతలీయ బిందువుల గుండా గోళసమీకరణాలు
3. గోళానికి వ్యాసార్థ రూపము
4. తలం చేత గోళఛేదకము
5. దత్త వృత్తం గుండా పోయే గోళసమీకరణము నేర్చుకొంటాము.

లక్ష్యాలు :

ఈ పాఠ్యపఠనం వలన మీరు నేర్చుకొనే విషయాలు

- గోళ కేంద్రం, వ్యాసార్థాలనుపయోగించి గోళ సమీకరణమును కనుగొనుట.
- గోళానికి సాధారణ సమీకరణమును రాబట్టుట.
- నాలుగు అతలీయ బిందువుల గుండా పోయే గోళ సమీకరణమును రాబట్టుట.
- వ్యాసాగ్రాలనుపయోగించి గోళ సమీకరణమును కనుగొనుట.
- తలచ్ఛేదకమైన వృత్తి సమీకరణాలను రాబట్టుట.

- దత్త వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణమును కనుగొనుట.

ముఖ్యాంశాలు

- అంతరాళములో ఒక స్థిర బిందువు నుంచి, స్థిర దూరములో చలించే బిందు పథమును గోళమని, స్థిర బిందువును గోళ కేంద్రమని, స్థిర దూరాన్ని గోళ వ్యాసార్థమని అంటారు.
- గోళ కేంద్రం $c(x_1, y_1, z_1)$, గోళ వ్యాసార్థము r అయితే గోళ సమీకరణము

  $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$
- గోళ కేంద్రము మూల బిందువుగా ఉంటూ, గోళ వ్యాసార్థము r అయితే గోళ సమీకరణము

  $x^2+y^2+z^2=r^2$
- ప్రామాణిక రూపములో గోళ సమీకరణము $x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c=0$
- గోళ కేంద్రము $(-g,-f,-h)$ మరియు గోళ వ్యాసార్థము $\sqrt{g^2+f^2+h^2-c}$
- గోళ వ్యాసార్థము $r=0$ అయితే, ఆ గోళాన్ని బిందుగోళమంటారు.
- ఒకే కేంద్రాన్ని కలిగి, విభిన్న వ్యాసార్థాలుగా గల గోళాలను సకేంద్ర గోళాలని అంటారు.
- r వ్యాసార్థముగా గల ఒక గోళ కేంద్రము 0 అయితే

  $OP_1 < r$ అయితే P_1 గోళానికి అంతర బిందువు.

  $OP_2 = r$ అయితే P_2 గోళం మీద బిందువు.

  $OP_3 > r$ అయితే P_3 గోళం బాహ్య బిందువు.
- నాలుగు అతలీయ బిందువుల గుండా పోయే గోళా సాధారణ సమీకరణము

  $x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz=0$, $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3),(x_4,y_4,z_4)$ నాలుగు అతలీయ బిందువుల గుండా పోతుంది. కాబట్టి నాలుగు బిందువులన ప్రతిక్షేపిస్తే నాలుగు సమీకరణాలు వస్తాయి. ఆ నాలుగు సమీకరణాలు సాధిస్తే వాటి నుండి g, f, h మరియు c వస్తాయి. వాటిని సాధారణ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే కావలసిన గోళ సమీకరణము వస్తుంది.

  $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$ లు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళ సమీకరణము

  $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$

- ఒక తలము చేత గోళాన్ని ఛేదిస్తే ఛేదకము వృత్తము అవుతుంది.
- గోళ కేంద్రమునుంచి తలానికి లంబాన్ని గీస్తే, లంబ పాదము వృత్త కేంద్రము అవుతుంది.
- గోళ కేంద్రం గుండాపోయే తలము వల్ల ఏర్పడు వృత్తానికి గురు వృత్తమని పేరు.
- గురువృత్త వ్యాసార్థము, గోళ వ్యాసార్థానికి సమానము.

I. అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (1 మార్కు)

1. మూల బిందువు కేంద్రము, 5 యూనిట్లు వ్యాసార్థము గల గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $0=(0,0,0), P(x,y,z), OP=5$

$OP=r \Rightarrow OP^2=r^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=5^2$

కావలసిన గోళ సమీకరణం $x^2+y^2+z^2-25=0$

2. $3x^2+3y^2+3z^2-3x+6y-9z-17=0$ సమీకరణముచే సూచించిన గోళ కేంద్రము మరియు వ్యాసార్థాలు తెల్పండి.

సాధన: గోళ సమీకరణము $3x^2+3y^2+3z^2-3x+6y-9z-17=0$

ఇరువైపులా 3చే భాగించగా

$$x^2+y^2+z^2-x+2y-3z-\frac{17}{3}=0$$

వృత్త కేంద్రము $(-g,-f,-h)=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right), c=\frac{-17}{3}$

గోళ వ్యాసార్థము $=\sqrt{g^2+f^2+h^2-c}$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}+\frac{17}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{3+12+27+68}{12}}=\sqrt{\frac{110}{12}}$$

$$=\sqrt{\frac{55}{6}}$$

3. మూల బిందువు గుండా పోతూ $(3,-3,-1)$ కేంద్రంగా గల గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $0=(0,0,0); C=(3,-3,-1)$

వ్యాసార్థం $(OC)=r=\sqrt{(3-0)^2+(-3-0)^2+(-1-0)^2}$

$$=\sqrt{(3)^2+(-3)^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{9+9+1}$$

$$=\sqrt{19}$$

గోళ సమీకరణము $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{19}\right)^2$

$$x^2-6x+9+y^2+6y+9+z^2+22+1=19$$

$$x^2+y^2+z^2-6x+6y+2z=0$$

4. $(3,-3,-1)$ బిందువును కేంద్రంగా కలిగి $(5,-2,1)$ బిందువు గుండాపోయే గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: గోళ వ్యాసార్థము $=\sqrt{(5-3)^2+(-2+3)^2+(1+1)^2}$

$$=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(2)^2}$$

$$=\sqrt{9}\ =3$$

గోళ సమీకరణము $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=(3)^2$

$$x^2-6x+9+y^2+6y+9+z^2+2z+1=9$$

$$x^2+y^2+z^2-6x+6y+2z+10=0$$

5. $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+1=0$ గోళం దృష్ట్యా $(2,-3,4)$ బిందువు అంతరంగా, బాహ్యంగా మీదనున్నవో తెల్పండి.

సాధన: గోళ కేంద్రం $c(3,-4,1), c=1$

గోళ వ్యాసార్థం $\sqrt{g^2+f^2+h^2-c}=\sqrt{9+16+1-1}$

$= \sqrt{25} = 5$

ఇచ్చిన బిందువు $P = (2, -3, 4)$

$CP = \sqrt{(3-2)^2 + (-4+3)^2 + (1-4)^2}$

$= \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$CP < r \Rightarrow \sqrt{11} < 5$

$\therefore$ ఇచ్చిన బిందువు గోళం అంతరంలో ఉంటుంది.

6. $(2, -3, 4), (-5, 6, 7)$ బిందువులు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళము సమీకరణము తెల్పండి.

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళ సమీకరణం.

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$

$(x-2)(x+5) + (y+3)(y-6) + (z-4)(z+7) = 0$

$x^2 + 3x - 10 + y^2 - 3y - 18 + z^2 + 3z - 28 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 3z - 56 = 0$

7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 7 = 0$ గోళానికి ఒక వ్యాసాగ్రము $(-1, 2, 4)$ అయితే రెండవ అగ్రాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: గోళ కేంద్రం $= (1, -2, 4)$

ఒక వ్యాసాగ్రము $= (-1, 2, 4)$ రెండవ అగ్రం $= (x, y, z)$ అనుకొనుము.

గోళ కేంద్రం $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

$(1, -2, 3) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{4+z}{2}\right)$

$(2, -4, 6) = (-1 + x, 2 + y, 4 + z)$

$-1 + x = 2 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3$

$2 + y = -4 \Rightarrow y = -4 - 2 = -6$

$$4+z=6 \Rightarrow z=6-4=2$$

రెండవ అగ్రము $=(3,-6,2)$

8. $2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4x+6y-5z=0$ గోళ, కేంద్ర వ్యాసార్థములు కనుగొనుము.

సాధన: $2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4x+6y-5z=0$

ఇరువైపులా 2చే భాగించగా

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y-\frac{5}{2}z=0$$

గోళ కేంద్రం $(-g,-f,-h)=\left(1,\frac{-3}{2},\frac{5}{4}\right)$ $c=0$

గోళ వ్యాసార్థము $\sqrt{g^2+f^2+h^2-c}$

$$=\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{25}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{16+36+25}{16}}$$

$=\sqrt{\frac{77}{4}}$ యూనిట్లు

9. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$ గోళంతో సకేంద్రకమై 10 యూనిట్లు వ్యాసార్థముగల గోళ సమీకరణము తెలుపుము.

గోళ కేంద్రం $(-g,-f,-h)=(1,2,3)$

వ్యాసార్థము $=10$

గోళ సమీకరణము $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=10^2$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=100$$

కావలసిన గోళ సమీకరణం $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-86=0$

10. $(x+1)(x+2)+(y-3)(y-5)+(z-7)(z+3)=0$ గోళ కేంద్ర వ్యాసార్థాలు తెల్పండి.

సాధన: గోళ వ్యాసాగ్రాలు $=(-1,3,7)$ మరియు $(-2,5,-3)$

గోళ కేంద్రం $=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$$=\left(\frac{-1-2}{2},\frac{3+5}{2},\frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{8}{2},\frac{4}{2}\right)$$

గోళ వ్యాసార్థము $=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2+1)^2+(5-3)^2+(-3-7)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-10)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+4+100}$$

$$=\frac{\sqrt{105}}{2}$$

IV. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు (8 మార్కులు)

1. $(0,0,0),(a,0,0,),(0,b,0),(0,0,c)$ నాలుగు అతలీయ బిందువుల గుండా పోయే గోళ సమీకరణము కనుక్కోండి. గోళ కేంద్ర వ్యాసార్థాలు కూడా తెల్పండి.

$x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+d=0 \qquad \ldots(1)$

గోళ సమీకరణము $(0,0,0)$ బిందువు ద్వారా సమీకరణం (1) పోతుంది.

$d=0 \qquad \ldots(2)$

$(a,0,0)$ బిందువు ద్వారా సమీకరణము (1) పోతుంది.

$a^2+2ga+d=0$

$d=0 \Rightarrow a^2+2ag=0$

$a(a+2g)=0, \qquad a\neq 0$

$2g+a=0$

$$2g = -a \qquad g = \frac{-a}{2}$$

$(0,b,0)$ బిందువు ద్వారా (1) పోతుంది.

$b^2 + 2fb + d = 0$

$d = 0 \Rightarrow b^2 + 2fb = 0$

$$b + 2f = 0$$

$$2f = -b \qquad = f = \frac{-b}{2}$$

$(0,0,C)$ బిందువు ద్వారా (1) పోతుంది.

$c^2 + 2hc + d = 0$

$d = 0 \Rightarrow c^2 + 2hc = 0$

$c + 2h = 0$

$2h = -c \quad = h = \frac{-c}{2}$

$g = \frac{a}{2}, f = \frac{-b}{2}, h = \frac{-c}{2}, d = 0$ (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\frac{-a}{b}\right)x + 2\left(\frac{-b}{2}\right)y + 2\left(\frac{-c}{2}\right)x + 0$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

గోళ కేంద్రం $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, వ్యాసార్థం $= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$

2. $(1,-1,-1),(3,3,1),(-2,0,5),(-1,4,4)$ బిందువుల గుండా పోయే గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

గోళ సమీకరణము $x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + 2hz + c = 0 \qquad \ldots (1)$

బిందువు $(1,-1,-1)$ ద్వారా (1) పోతుంది.

$1 + 1 + 1 + 2g - 2f - 2hc = 0$

$2g-2f-2h+c=-3 \quad \ldots (2)$

బిందువు $(3,3,1)$ ద్వారా (1) పోతుంది

$9+9+1+6g+6f+2h+c=0$

$6g+6f+2h+c=-19 \quad \ldots (3)$

$(-2,0,5)$ బిందువు గుండా (1) పోతుంది.

$4+0+25-2g+0+10h+c=0$

$-2g+10h+c=-29 \quad \ldots (4)$

$(-1,4,4)$ బిందువు గుండా (1) పోతుంది.

$1+16+16-2g+8f+8h+c=0$

$-2g+8f+8h+c=-33 \quad \ldots (5)$

(2) - (3) $\Rightarrow -4g-8f-4h=16$

$g+2f+h=-4 \quad \ldots (6)$

(2) - (4) $\Rightarrow 4g-2f-12h=26$

$2g-f-6h=13 \quad \ldots (7)$

(2) - (5) $\Rightarrow 4g-10f-10h=30$

$2g-5f-5h=15 \quad \ldots (8)$

(6) మరియు (7) సమీకరణాలను సాధించగా

(6) $\times$ (2) $\Rightarrow 2g+4f+2c=-8$

(7) $\times$ (1) $\Rightarrow 2g-f-6h=13$

$\underline{\quad - \quad + \quad + \quad - \quad}$

$5f+8h=-21 \quad \ldots (9)$

$5f+8h+21=0$

(6) మరియు 8 సమీకరణాలను సాధిస్తే

$(6) \times 2 \Rightarrow 2g + 4f + 2h = -8$

$(8) \times 2 \Rightarrow 2g - 5f - 5h = 15$

$\quad\quad\quad\quad - \quad + \quad + \quad -$

$9f + 7h = -23$

$9f + 7h + 23 = 0 \quad \ldots (10)$

(9), (10) అడ్డు గుణకార పద్ధతిలో సాధిస్తే

f	h	1	f
5	8	21	5
9	7	23	9

$$\frac{f}{184-147} = \frac{h}{189-115} = \frac{1}{35-72}$$

$$\frac{f}{37} = \frac{h}{74} = \frac{1}{-35}$$

$$\frac{f}{1} = \frac{h}{2} = \frac{1}{-1}$$

$f = 1, h = -2$

$f = 1, h = -2$ లను (6)లో ప్రతిక్షేపించగా

$g + 2 - 2 = -4 \Rightarrow g = -4$

$g = -4, f = 1, h = -2$ లను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$z(-4) - 2(1) - 2(-2) + c = -3$

$-8 - 2 + 4 + c = -3$

$-6 + c = -3$

$c = -3 + 6 = 3$

$g = -4, f = 1, h = -2, c = 3$ (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

కావలసిన గోళసమీకరణము

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z + 3 = 0$

3. $x^2+y^2+z^2-2y-4z-11=0, x+2y+2z=15$ సమీకరణాలచే సూచించిన వృత్త కేంద్ర, వ్యాసార్థాలు కనుక్కోండి.

గోళ సమీకరణము $x^2+y^2+z^2-2y-4z-11=0$

గోళ కేంద్రం $(0,1,2), c=-11$

గోళ వ్యాసార్థము $=\sqrt{0+1+4+11}=\sqrt{16}=4$

$OC=(0,1,2)$ నుండి $x+2y+2z-15=0$ తలానికి లంబదూరము

$$=\left|\frac{0+2\times1+2\times2-15}{\sqrt{1+4+4}}\right|$$

$$=\left|\frac{2+4-15}{\sqrt{9}}\right|=\frac{9}{3}=3$$

$CP^2=r^2-3^2$

$CP^2=16-9=7$

$CP=\sqrt{7}$

వృత్త వ్యాసార్థము $=\sqrt{7}$

తలానికి OC లంబము

OC కి దిక్ సంఖ్యలు $(1,2,2)$ ఇవి తలము సమీకరణంలో

x, y, z ల గుణకాలు

గోళ కేంద్రము $0=(0,1,2)$

$\bar{OC}$ కి సమీకరణాలు $\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}=r_1$ అనుకుందాం.

$C(x,y,z)=(r_1, 2r_1+1, 2r_1+2)$ ని తలం సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$r_1+2(2r+1)+2(2r_1+2)=15$

$r_1+4r_1+2+4r_1+4=15$

$9r_1=15-6$

$9r = 9 = 1$

గోళ కేంద్రము $(1,3,4)$

4. $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0; 2x + 3y + 4z - 8 = 0$ వృత్తము గురు వృత్తముగా గల గోళ సమీకరణము తెల్పండి.

సాధన: దత్త వృత్తము గుండా పోయే ఏదైనా గోళ సమీకరణము, $S + \lambda L = 0$

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2\right) + \lambda\left(2x + 3y + 4z - 8\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + (7 + 3\lambda)y + (-2 + 4\lambda)z + (2 - 8\lambda) = 0 \qquad \ldots (1)$$

దీని కేంద్రము $P = \left(-\lambda, \frac{(-7 + 3\lambda)}{2}, 1 - 2\lambda\right)$

గురు వృత్త నియమము P బిందువు $2x + 3y + 4z - 8 = 0$ తలం మీద ఉంటుంది.

$$-2\lambda - \left(\frac{21 + 9\lambda}{2}\right) + 4 - 8\lambda - 8 = 0$$

$$-4\lambda - 21 - 9\lambda + 8 - 16\lambda - 16 = 0$$

$$-29\lambda - 29 = 0$$

$$\lambda + 1 = 0$$

$\lambda = -1 \ldots$ (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 - 2x - 3y - 4z + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$$

ఇదే కావలసిన గోళ సమీకరణము.

5. $A(1,2,3), B(2,-3,5), C(0,7,4)$ లు మూడు బిందువులు P బిందువు. $P^2A + PB^2 + PC^2 = 147$ నియమంతో చలిస్తే P బిందుపథ సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువు $A = (1,2,3), B = (2,-3,5), C = (0,7,4)$

బిందు పథంలోని ఒక బిందువు $P = (x, y, z)$ అనుకుందాం.

$$PA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 4^2 - 4y + 4 + z^2 - 6x + 9$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14$$

$$PB^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2$$

$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 10z + 25$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z + 38$$

$$PC^2 = (x-0)^2 + (y-7)^2 + (z-4)^2$$

$$= x^2 + y^2 - 14y + 49 + z^2 - 8z + 16$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 8z + 65$$

ఇచ్చిన నియమం

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 147$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 + x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 67 - 10z + 38$$

$$+x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 8z + 65 = 147$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y - 24z + 117 - 147 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y - 24z - 30 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z - 10 = 0$$

ఇదే కావలసిన బిందుపథ సమీకరణము.

6. $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$ బిందువుల గుండా పోయే గోళ సమీకరణము కనుక్కోండి.

సాధన: గోళ సమీకరణము $x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + 2hz + c = 0$ ... (1) అనుకోనుము

$(0,0,0)$ బిందువు ద్వారా (1) పోతుంది. $c = 0$ ... (2)

$(1,0,0)$ బిందువు ద్వారా (1) పోతుంది.

$1+2g+c=0$

$c=0 \Rightarrow 1+2g+10=0 \Rightarrow 2g=1 \Rightarrow g=\frac{-1}{2}$

$(0,2,0)$ బిందువు ద్వారా (1) పోతుంది.

$4+4f+c=0$

$c=0 \Rightarrow 4+4f=0 \Rightarrow f=-1$

$(0,0,3)$ బిందువు ద్వారా (1) పోతుంది.

$9+6h+c=0$

$c=0 \Rightarrow 6h+9=0 \Rightarrow h=\frac{-3}{2}$

$g=-\frac{1}{2}, f=-1, h=\frac{-3}{2}$ మరియు $c=0$ లను (1) సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{-1}{2}\right)x+2(-1)y+2\left(\frac{-3}{2}\right)z+0=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$$

ఇదే కావలసిన గోళ సమీకరణము.