గణితం

పదవ తరగతి

ముఖ్యసలహాదారు

శ్రీమతి చిత్రా రామచంద్రన్, ఐ.ఎ.ఎస్.,
ప్రత్యేక ప్రధాన కార్యదర్శి, విద్యాశాఖ, తెలంగాణ.

ముఖ్య సంపాదకులు

డా॥ H.K. దివాన్
విద్యాభవన్ విద్యాపరిశోధన కేంద్రం, ఉదయపూర్, రాజస్థాన్.

పాఠ్యపుస్తక ప్రచురణ సమితి

శ్రీమతి A. శ్రీ దేవసేన, IAS
సంచాలకులు, పాఠశాల విద్యాశాఖ,
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ A. కృష్ణారావు,
సంచాలకులు, సార్వత్రిక విద్యాపీఠం,
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ S. వెంకటేశ్వర శర్మ,
సంచాలకులు, పాఠ్యపుస్తక ముద్రణాలయం
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

సమన్వయం, సహకారం

శ్రీ మారసాని సోమిరెడ్డి,
సంయుక్త సంచాలకులు,
సార్వత్రిక విద్యాపీఠం, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

శ్రీ బోయినపల్లి వెంకటేశ్వరరావు,
రాష్ట్ర సమన్వయ కర్త,
సార్వత్రిక విద్యాపీఠం, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

ప్రచురణ
సార్వత్రిక విద్యాపీఠం
తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

చట్టాలను గౌరవించండి.
హక్కులను పొందండి.

విద్య వల్ల ఎదగాలి.
వినయంతో మెలగాలి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 1

06-02-2021 14:53

© Government of Telangana, Hyderabad

First Published 2021

All rights reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Sarvatrika Vidya Peetham, Telangana, Hyderabad.

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

సార్వత్రిక విద్యాపీఠం, తెలంగాణ 2021-22

Printed in India
at the Telangana Govt.Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 2
06-02-2021 14:53

విషయనిపుణులు, నిర్వహణ

శ్రీ శరన్ గోపాల్, అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, బిట్స్-పిలాని, హైదరాబాద్ క్యాంపస్, హైదరాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ టి. నాగయ్య, అసిస్టెంట్ ప్రొఫెసర్, కాకతీయ విశ్వవిద్యాలయం, వరంగల్, వరంగల్ అర్బన్ జిల్లా.

శ్రీ సోయమ్మ, రిటైర్డ్ లెక్చరర్, DIET, వరంగల్, వరంగల్ అర్బన్ జిల్లా.

శ్రీ కె. రామాచారి, లెక్చరర్, DIET, వికారాబాద్, వికారాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ కె.కె.వి రాయలు, రిటైర్డ్ ప్రిన్సిపల్, CTE, మహబూబ్‌నగర్, మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా

విషయనిపుణులు - సమన్వయకర్త - రచయిత

శ్రీ కాకులవరం రాజేందర్ రెడ్డి

కో-ఆర్డినేటర్, గణిత పాఠ్యపుస్తకం, రిటైర్డ్ ఉపాధ్యాయులు, యాదాద్రి భువనగిరి జిల్లా.

రచయితలు

శ్రీ కె. శ్రీధరాచార్యులు, S.A., గణితం, ZPHS, నార్సింగి, మెదక్ జిల్లా.

శ్రీ పిడిఎల్ గణపతిశర్మ, S.A., గణితం, GHS, మడ్‌ఫోర్ట్, హైదరాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ ఎస్. ధర్మేందర్ సింగ్, S.A., గణితం, ZPHS, మన్నూర్, ఆదిలాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ కె. రామయ్య, S.A., గణితం, ZPHS, తాటికొండ, ఘన్‌పూర్ (స్టేషన్), జనగాం జిల్లా.

శ్రీ పి. సురేశ్, S.A., గణితం, GHS, విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ ఆర్. లక్ష్మీ నరసింహమూర్తి, S.A., గణితం, ZPHS, తూప్రాన్‌పేట్, యాదాద్రి భువనగిరి జిల్లా.

శ్రీ ఎస్. వెంకట రమేష్, P.G.T., గణితం, ఆదర్శ పాఠశాల, ఘన్‌పూర్ (స్టేషన్), జనగాం జిల్లా.

శ్రీ ఎన్. రవిగౌడ్, S.A., గణితం, ZPHS, భీరవల్లి, నిర్మల్ జిల్లా.

శ్రీ కె. సంతోష్, S.A., గణితం, ZPHS, చినరాజ్‌పల్లి, కె.బి.ఆసిఫాబాద్ జిల్లా.

శ్రీ బి. కొమురయ్య, S.A., గణితం, ZPHS, సంగెం, వరంగల్ (రూరల్) జిల్లా.

శ్రీ ఇ. శ్రీనివాస్, S.A., గణితం, ZPHS, బండతిమ్మాపూర్, సిద్ధిపేట జిల్లా.

శ్రీ ఎం. గోవింద్, S.A., గణితం, ZPHS, ఆలూర్, చెవెళ్ల, రంగారెడ్డి జిల్లా.

శ్రీమతి ఆర్. నివేదిత, S.A., గణితం, ZPHS, పొల్కంపల్లి, మహబూబ్‌నగర్ జిల్లా.

ముఖచిత్రం : **శ్రీ కె. సుధాకరాచారి,** ఎస్.జి.టి., యం.పి.పి.ఎస్. మైలారం, మం. రాయపర్తి, వరంగల్ రూరల్ జిల్లా.

డి.టి.పి., పేజీ లేఔటు & డిజైనింగ్: **సుంకర కోటేశ్వరరావు,** పవన్ గ్రాఫిక్స్, విద్యానగర్, హైదరాబాద్.
సుంకర సునీత, పవన్ గ్రాఫిక్స్, విద్యానగర్, హైదరాబాద్.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 3 06-02-2021 14:53

వందేమాతరం

– బంకించంద్ర ఛటర్జీ

వందేమాతరం, వందేమాతరం
సుజలాం సుఫలాం మలయజ శీతలాం
సస్యశ్యామలాం మాతరం; వందేమాతరం
శుభ్రజ్యోత్స్నా పులకిత యామినీం
ఫుల్లకుసుమిత ద్రుమదళ శోభినీం
సుహాసినీం సుమధుర భాషిణీం
సుఖదాం వరదాం మాతరం వందేమాతరం.

జాతీయ గీతం

– రవీంద్రనాథ్ ఠాగూర్

జనగణమన అధినాయక జయహే !
భారత భాగ్య విధాతా !
పంజాబ సింధ్ గుజరాత మరాఠా,
ద్రావిడ ఉత్కళ వంగా !
వింధ్య హిమాచల యమునా గంగా,
ఉచ్ఛల జలధి తరంగా !
తవ శుభనామే జాగే !
తవ శుభ ఆశిష మాగే !
గాహే తవ జయ గాథా !
జనగణ మంగళదాయక జయహే !
భారత భాగ్య విధాతా !
జయహే ! జయహే ! జయహే !
జయ జయ జయ జయహే !

ప్రతిజ్ఞ

– పైడిమర్రి వేంకట సుబ్బారావు

భారతదేశం నా మాతృభూమి.
భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను.
సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం.
దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషి చేస్తాను.
నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను.
ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను.
జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల, సేవానిరతి కలిగి ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 4 06-02-2021 14:53

ముందుమాట

విద్య అనేది జ్ఞానాన్ని కలిగించే ఒక అనుభవం. విద్య మనకు మన చుట్టూ ఉన్న ప్రపంచాన్ని అవగాహన చేసుకోవడానికి మరియు మన జ్ఞానాన్ని తెలివిగా ఉపయోగించుకోవడానికి అవకాశాలను కల్పిస్తుంది. విద్య అనేది భవిష్యత్తుకు ప్రవేశ పత్రము లాంటిది. ఎందుకంటే ఎవరైతే దానికొరకు ఈ రోజు సన్నద్ధమవుతారో వారికే అది రేపు దక్కుతుంది.

విద్యయొక్క అపారమైన సామర్థ్యాన్ని అవగాహన చేసుకొన్నాయి. కనుకనే అన్ని ప్రగతిశీల దేశాలు సార్వజనీన ప్రాథమిక విద్యకు కట్టుబడి, అందరికీ నాణ్యతతో కూడిన విద్యను అందివ్వాలని దృఢ సంకల్పంతో ఉన్నాయి. దాని కొనసాగింపుగా సార్వజనీన మాధ్యమిక విద్య అనే భావన ఊపందుకొన్నది.

విద్య అనేది కేవలం అవకాశం వలన పొందేది కాదు. ఉత్సాహంతో మరియు దాని పట్ల శ్రద్ధతో కోరుకొనవలసినది. దీనిని దృష్టిలో ఉంచుకొని, అందరికీ నాణ్యమైన విద్యను అందించాలనే ఉద్దేశ్యంతో సార్వత్రిక పాఠశాల (ఓపెన్ స్కూలు) సంస్థలు స్థాపించబడ్డాయి. ఈ సంస్థల ప్రధాన లక్ష్యము "మీ ఇంటి ముంగిట విద్య". విద్యలో గణించడం అనేది మానసిక క్రమశిక్షణను నిర్మించడానికి మరియు తార్కిక ఆలోచనలకు మానసిక దృఢత్వానికి ప్రభావవంతమైన మార్గాలను అందిస్తుంది. దీనితో పాటు గణిత జ్ఞానం అనేది సామాన్యశాస్త్రము, సాంఘీక శాస్త్రము, ఇంకా సంగీతము, చిత్రలేఖనము వంటి ఇతర పాఠశాల విషయాల అవగాహనలో ముఖ్యపాత్ర పోషిస్తుంది.

గణితం అనేది మానవ మెదళ్ళలోని సృజనాత్మకత మరియు తార్కికంగా కారణాలు చెప్పడం వంటి వాటివల్ల పురోగతి చెందుతుంది. గణిత విద్య యొక్క ప్రధాన లక్ష్యము విద్యార్థులలో గణితీకరణ సామర్థ్యాలను పెంపొందించడం. అభ్యాసకులు పాఠ్యపుస్తకాలలోని భావనలను సమాజంలోని తమ స్వంత అనుభవాలకు అనుసంధానం చేసుకోవాలి. లేనిచో ఆ జ్ఞానము కేవలము సమాచార స్థాయికి దిగిపోతుంది. అందువలన ఈ పాఠ్యపుస్తకం అభ్యాసకులకు వారి అనుభవాలను ప్రకృతి మరియు పరిసరాలకు అనుగుణంగా నిర్వహించుకోవడానికి సశక్తి పరుస్తోంది. మరియు అందరు విద్యార్థులకు అవకాశాలు కల్పించేటట్లు రూపొందించబడింది. NEP 2020 ప్రకారం విద్య యొక్క ప్రధాన లక్ష్యం విద్యార్థి యొక్క పరిపూర్ణమైన అభివృద్ధి కాబట్టి ఈ పాఠ్యపుస్తకం విద్యార్థులను ప్రోత్సహిస్తూ, వారు తమని తాము నైపుణ్యమైన భారతీయులుగా రూపుదిద్దుకొనే అవకాశం కల్పిస్తోంది.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో వివిధ రంగాలు అనగా సంఖ్యాశాస్త్రము, బీజగణితము, రేఖాగణితము, క్షేత్రగణితము, అంకగణితము, త్రికోణమితి మరియు సాంఖ్యక శాస్త్రములకు సంబంధించిన అధ్యాయాలు కలవు. ఈ రంగాల భావనలను వివిధ విద్యాప్రమాణాలు అనగా సమస్యాసాధన, కారణాలు చెప్పడం మరియు నిరూపణలు చేయడం, వ్యక్తపరచడం, అనుసంధానము మరియు దృశ్యీకరణ, ప్రాతినిధ్య పరచడం వంటి వాటి దృష్టిలో అభ్యసనం చేయగా సాధించవలసిన విద్యాప్రమాణాలు లభిస్తాయి. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను సాధించడమే విద్యాప్రణాళిక యొక్క అంతిమ లక్ష్యము.

దీన్ని రూపొందించడంలో తోడ్పడిన పాఠ్యపుస్తక రచయితలకు, సంపాదక వర్గ సభ్యులకు, సమన్వయకర్తకు, పుస్తక రూపకల్పన నిపుణులకు, DTP ఆపరేటర్‌కు కృతజ్ఞతలు. అదేవిధంగా శ్రీమతి చిత్రా రామచంద్రన్, IAS, ప్రత్యేక ప్రధానకార్యదర్శి, విద్యాశాఖ వారు ఈ నూతన పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధిలో నిరంతరం ప్రోత్సహించి, మార్గదర్శనం చేసినందుకు ప్రత్యేక కృతజ్ఞతలు. గౌరవనీయురాలైన విద్యాశాఖా మంత్రి శ్రీమతి సబితా ఇంద్రారెడ్డిగారు నిరంతరం ప్రోత్సహించి, మార్గదర్శనం చేసినందుకు ప్రత్యేక కృతజ్ఞతలు. అదేవిధంగా పైన పేర్కొన్న వివిధ వ్యక్తులతో సంభాషిస్తూ, సమన్వయ పరుస్తూ దీనిని విజయవంతంగా పూర్తి చేయడంలో తోడ్పడిన సార్వత్రిక పాఠశాల సంస్థలో పనిచేసే సిబ్బంది అందరికీ కూడా నాకు కృతజ్ఞలు.

ఈ పాఠ్యపుస్తకము అభ్యాసకులకు వారి అభ్యసనానికి ఉపయుక్తంగా ఉండి, వారి గణిత ప్రమాణాలను పెంపొందిస్తుందని నేను విశ్వసిస్తున్నాను. నాణ్యమైన పాఠ్యపుస్తకాలను రూపొందించాలనే నిరంతర ప్రయత్నంలో భాగంగా గణిత ప్రియుల నుండి తగిన సూచనలను, సలహాలను ఆహ్వానిస్తున్నాను. వాటిని పరిగణనలోనికి తీసుకొని మరింత నాణ్యత కొరకు పనిచేస్తాము.

తేది : 24-12-2020

స్థలము : హైదరాబాద్

శ్రీ ఎ. కృష్ణారావు

సంచాలకులు

సార్వత్రిక విద్యాపీఠం, తెలంగాణ, హైదరాబాద్.

అభ్యాసకులూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు .....

- పాఠ్యపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉహరణలు లేదా సమస్యలు మొదలగు మరియు దానికి సంబంధించిన బొమ్మలు/ పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బొమ్మతో పాటు చదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమానాలను వెంటనే మీ బోధకులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- భావనలు అవగాహన అయినవి అని తెలుసుకొనుటకు "మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి"లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేళ సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా బోధకులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- ప్రతీ అధ్యాయములోని ఉదాహరణలు మరియు కృత్యాలు మీ ఆలోచనలను పదునుపెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. వాటి వెనుక కొంత తర్కము ఉంటుంది. మీరు బావనలను అవగాహన చేసుకోవడానికి ఇవి దోహదపడతాయి.
- "ఆలోచించండి-చర్చించండి" మరియు కొన్ని కృత్యాలలో ఇచ్చిన ప్రశ్నలు మీ విశ్లేషణ సామర్థ్యం పెంచడానికి ఇవి మీ ఆలోచనలను ప్రేరేపించే ప్రక్రియలకు ఉపయోగపడతాయి.
- ప్రతీ ఆధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావాలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్ని ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా సాధించవలెను. గైడ్‌లో నుండి గాని, ఇతర మూలాల నుండి గాని కాపీ చేయకూడదు.
- పట్టికలలో మరియు పేజీలలో కొంత ఖాళీలను వదలడం జరిగింది. దాని వలన మీ జవాబులను త్వరగా రాసుకొనే సౌలభ్యం ఉంటుంది. వాటిని మీ పాఠ్యపుస్తకంలో అక్కడే రాసుకోవచ్చును.
- మీరు ప్రతీ వారము ఏరోజుకు ఆరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి. లేకపోతే తరవాత భారం పెరిగినట్లవుతుంది.
- పాఠ్యపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమాచారాన్ని, సమస్యలను మరికొన్నింటిని సేకరించండి. మీ మిత్రులు మరియు బోధకుల సహాయంతో వాటిని సాధించండి.
- పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికే పరిమితం చేయకుండా, మిగిలిన విషయాలను జీవితంలోని (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం-నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగాహనను వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసంధానం చేయడం, దృశ్యీకరించడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి. పాఠ్యపుస్తకం ముందు పేజీలలో ఇచ్చిన పాఠ్యప్రణాళిక ఆధారంగా ఈ సామర్థ్యాలను పెంపొందించుకునే ప్రయత్నం చేయాలి.
- పాఠ్యాంశ అంచనాలకు అనుగుణంగా, చివర ఇచ్చిన అభ్యాసములో వివిధ విద్యాప్రమాణాలకు చెందిన సమస్యలను సాధించడం ద్వారా, మీకు ఇచ్చిన అభ్యసన సామర్థ్యాలను సాధించే ప్రయత్నం చేయాలి.
- కొన్ని పాఠ్యాంశాలు పరీక్షలకు నిర్దేశించబడనప్పటికీ, వివిధ భావనలను అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కాబట్టి ఈ ప్రాథమిక భావనలను బాగా అవగాహన చేసుకోండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 6 06-02-2021 14:53

బోధకులకు సూచనలు

- అభ్యాసకులకు మార్గనిర్దేశనం చేయడానికి ముందు గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని ప్రతీ భావనపై అవగాహన పెంపొందించుకోండి.
- పాఠ్యపుస్తకంలో ముందుమాట, అభ్యాసకులకు సూచనలు, విద్యాప్రమాణాలు, విద్యాప్రణాళిక అంచనాలు, అభ్యసన ఫలితాలు ఈయబడ్డాయి. వీటిని చదివి, ఈ స్థాయిలో గణిత బోధన ఉద్దేశ్యాన్ని అవగాహన చేసుకోండి.
- అభ్యాసకులచే వారికొరకు ఇచ్చిన "అభ్యాసకుల సూచనలు" చదివించండి. వారితోపాటు మీరు కూడా వాటిని చదివినట్లయితే "అభ్యాసకులు ఏమి చేయాలి?" అని మీకు తెలుస్తుంది. తద్వారా మీరు వారికి మార్గనిర్దేశనం చేయవచ్చును.
- ఈ పాఠ్యపుస్తకం కేవలం సిలబస్ పూర్తి చేయడం మరియు పరీక్షలలో ఫలితాలు సాధించడం కొరకు తయారుచేయబడినది కాదు. "ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాల సాధన" దీని ప్రధాన లక్ష్యము. మీరు "విద్యాప్రమాణాలు" మరియు "అభ్యసన ఫలితాలు" చదవడం ద్వారా ఈ పాఠ్యపుస్తక అభ్యసన లక్ష్యాలను అవగాహన చేసుకోవచ్చును.
- ప్రతీ అధ్యాయమునకు చెందిన ముఖ్యమైన భావనలు అధ్యాయము చివర "ముఖ్యమైన భావనలు" శీర్షికతో ఇవ్వబడ్డాయి. కృత్యాలు మరియు అభ్యాసాల అభ్యసన ఫలితాల సాధనకొరకు ఇవ్వబడ్డాయి.
- పాఠ్యపుస్తకంలోని ప్రతీ అధ్యాయములోని భావనల క్రమాన్ని అవగాహన చేసుకొని అభ్యాసకులకు అదేక్రమంలో అందించండి.
- మీ శిక్షణా కేంద్రము వద్ద మీకు శిక్షణ కొరకు ఇచ్చిన తరగతుల సంఖ్యను దృష్టిలో ఉంచుకొని పాఠ్యాంశాలను విభజించుకొని వాటిని అభ్యాసకులతో చర్చించండి.
- అభ్యాసకులకు భావనల అవగాహనే కాక, అభ్యాసములలోని సమస్యలను స్వంతంగా పూర్తిచేసేందుకు ప్రోత్సహించండి.
- అభ్యాసకులు "మీ ప్రగతిని పరిశీలించుకోండి"లోని సమస్యలకు సమాధానాలు సొంతంగా రాసేటట్లు, అభ్యసన ఫలితాలు సాధించేటట్లు శిక్షణ ఇవ్వండి. ముఖ్యభావనలను స్పష్టంగా అవగాహన చేసుకొనేటట్లు చేయండి. సమాధానాలు ఎలా రాయాలో వారికి నల్లబల్లపై రాసి వివరించండి.
- ప్రతీ అభ్యాసకుడిని రేఖాచిత్రాలు గీయడం, జ్యామితీయ నిర్మాణాలు చేయడం, పట్టికలు రూపొందించడం వంటి వాటిలో పాల్గొనేటట్లు చేయండి.
- భావనలను మరింత అవగాహన చేసుకొనుట కొరకు 6 నుండి 10వ తరగతి వరకు గల గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు చూడమని చెప్పండి.
- అభ్యాసకులను అధ్యాయములలోని సమస్యలను, అభ్యాసములను ఒక నోట్ పుస్తకములో చేయమని చెప్పండి. వాటిని పరిశీలించి, వారికి సూచనలు ఇవ్వండి.
- అభ్యాసకులకు ఆన్‌లైన్‌లో గల అభ్యసన సౌకర్యాలను చెప్పి వారికి మార్గనిర్దేశనం చేయండి.
- పరీక్షలలో ప్రశ్నలు పాఠ్యపుస్తకంలోని అభ్యాసాల నుండి నేరుగా ఈయబడవు కనుక వారిని బయటి నుండి కొన్ని నమూనా ప్రశ్నలను సేకరించి స్వంతంగా చేసుకొనేటట్లు తయారుచేయండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 7 06-02-2021 14:53

విద్యా ప్రమాణాలు - సాధన సూచికలు (Academic Standards - indicators)

- విద్యార్థులు ఒక తరగతిలో ఏమి చేయగలగాలి, ఏం తెలిసి యుండాలో స్పష్టంగా వివరించే ప్రవచనాలను ఆ తరగతి యొక్క 'విద్యాప్రమాణాలు' అంటాము. ఈ విద్యా ప్రమాణాలను కింది విభాగాలుగా వర్గీకరించడమైనది.

I. సమస్యాసాధన

a) సమస్యలలో రకములు :

పజిళ్ళు, పదసమస్యలు, పటసమస్యలు, దత్తాంశ అవగాహన - విశ్లేషణ - పట్టికలు - గ్రాఫ్, పద్ధతి ప్రకారం చేయు సమస్యలు మొదలగు రకరకాలుగా గణిత సమస్యలుంటాయి.

b) సమస్యా సాధన - సోపానాలు

- సమస్యలను చదవడం.
- దత్తాంశంలోని సమాచారం మొత్తాన్ని విడిభాగాలుగా గుర్తించడం.
- అనుబంధ విడిభాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్య విడిభాగాలను వేరుచేయడం.
- సమస్యలో ఇమిడియున్న గణిత భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం.
- లెక్కచేయు పద్ధతి విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.

c) సంక్లిష్ట

సమస్య యొక్క సంక్లిష్టత అనునది కింది అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

- అనుసంధానం చేయడం (ఇది అనుసంధానం విభాగంలో నిర్వచించనైనది)
- సమస్యలో ఉన్న సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలో ఉన్న ప్రక్రియల సంఖ్య.
- సమస్యా సాధనకు ఇవ్వబడిన సందర్భ సమాచారం ఏ మేరకు ఉన్నది?
- సమస్య సాధించే పద్ధతి యొక్క సహజత్వం.

II. కారణములు చెప్పడం, నిరూపణ చేయడం

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించడం.
- గణిత సాధారణీకరణలను మరియు ప్రకల్పనలను అర్థం చేసుకోవడం మరియు చేయగలగడం.
- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం మరియు సరిచూడడం.
- తార్కిక చర్యలను పరీక్షించడం.
- సమస్యా నిరూపణలోని క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించడం.

III. వ్యక్తపరచడం

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం - రాయగలగడం.
  ఉదా : $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$, త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తం $= 180^0$
  గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణితపరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించడం. ఉదా: చతురస్రం అనునది నాలుగు సమాన భుజాలు మరియు నాలుగు సమాన కోణాలు గల సంవృత పటం.
- పద్ధతిని వివరించడం. ఉదా : రెండంకెల సంఖ్యలను కూడడంలో మొదట ఒకట్లస్థానం అంకెలను కూడి తరువాత పదుల స్థానంలోని అంకెలను కూడడం (స్థానమార్పిడిని గుర్తుకు తెచ్చుకుంటూ)
- గణిత తార్కికతను వివరించడం.

IV. అనుసంధానం

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలను - భావనలను అనుసంధానం చేయడం. ఉదా : గుణకారానికి, కూడికకు; మొత్తంలో భాగానికి - నిష్పత్తికి - భాగహారానికి; అమరికలకు - సౌష్ఠవమునకు; కొలతలు మరియు తలము / అంతరాళం.
- దైనందిన జీవితానికి గణితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.

- గణితంలో వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం, ఉదా : దత్తాంశ సేకరణ మరియు అంకగణితం; అంకగణితం మరియు ప్రదేశం.
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

V. దృశ్యీకరణ / ప్రాతినిధ్యపరచడం

- పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మ చిత్రం 2-D పటాలు, 3-D పటాలు మరియు పటాలను చదవడం.
- పట్టికలను రూపొందించడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మ చిత్రములు, పటాలను గీయడం.
- గణిత పటాలు, గుర్తులు, అమరికలు.
- నిర్వచనములను, సూత్రములను, సిద్ధాంతములను బట్టీవేయడం కాక, అన్వయించడంపై శ్రద్ధపెట్టండి. సమస్యల సాధన చేసేటప్పుడు కూడా ఈ విషయానికి ప్రాధాన్యత నీయండి.
- మీ పాఠ్యపుస్తకంలో వివిధ రంగాలు అనగా సంఖ్యాశాస్త్రము, బీజగణితము, రేఖాగణితము, క్షేత్రమితి, అంకగణితము మరియు సాంఖ్యకశాస్త్రములకు చెందిన అధ్యాయాలు ఉన్నాయి.
  మీరు ఈ అన్నిరంగాలపై పట్టు సాధించాలి. ఎందుకంటే తరువాతి తరగతులకు మరియు పోటీ పరీక్షలకు ఇవి చాలా ఉపయుక్తము.

అభ్యసన ఫలితాలు

☞ సంఖ్యాశాస్త్రము

- ఇచ్చిన సంఖ్యలకు ప్రధాన కారకాంక పద్ధతి ద్వారా క.సా.గు. మరియు గ.సా.కా లను కనుగొంటారు.(PS)
- అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు కరణీయ సంఖ్యలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధిస్తారు (PS)
- వాస్తవ సంఖ్యలలోని కొన్ని భావనలను దైనందిన జీవితములోని సమస్యల సాధనకు అనుసంధానిస్తారు.(Conn)
- ఇచ్చిన రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఉండే అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొంటారు (PS)
- అకరణీయ సంఖ్యలను, కరణీయ సంఖ్యలను వేరు చేయగలుగుతారు. (RP)
- అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు ఇస్తారు. (Comm)
- అంతముకాని ఆవర్తిత మరియు అనావర్తిత దశాంశాలను సంఖ్యారేఖపై క్రమానుగత వర్ధన పద్ధతిలో సూచిస్తారు.(V.R.)

☞ బీజ గణితము

- బహుపదులకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధిస్తారు. (చరరాశిని కనుగొనుట, శూన్యాలను కనుగొనుట, బహుపదుల భాగహారం, కారణాంక విభజన) (PS)
- బీజగణిత సర్వసమీకరణాలను సరిచూస్తారు. (RP)
- బహుపదులకు ఉదాహరణలు ఇస్తారు. పదాల సంఖ్య ఆధారంగా బహుపదులను ఏకపది, ద్విపది అని తెలుపుతారు. (Comm)
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాలకు చెందిన సమస్యలను సాధిస్తారు. (PS)
- ఇచ్చిన రేఖీయ సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాల సాధనలను సరిచూస్తారు.(RP)
- దైనందిన జీవితంలోని సందర్భాలను రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాలు సమస్యలుగా వ్యక్తీకరిస్తారు. (Comm)
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాలకు సంబంధించిన దైనందిన జీవిత సమస్యలను సాధిస్తారు. (అంకగణిత మరియు బీజగణిత భావనలనుపయోగించి) (Comm)
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలను గ్రాఫ్ కాగితంపై రేఖా చిత్రంగా చూపుతారు మరియు దానిని విశ్లేషిస్తారు.(RV)
- వర్గ సమీకరణ సాధనలకు (మూలాల స్వభావానికి) కారణాలు వివరిస్తారు.(RP)
- ఇచ్చిన సంఖ్యల అమరికలో కావలసిన పదాన్ని మరియు సామాన్య పదాన్ని కనుగొనగలరు. (PS)

☞ రేఖా గణితము

- రేఖీయ ద్వయం, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం, సరూపకతలకు చెందిన సమస్యలను సాధిస్తారు. (PS)
- ఖండన రేఖలకు, మిళిత రేఖలకు గల భేదాన్ని కనుగొంటారు.(RP)
- స్వంత అనుభవాలు మరియు దైనందిన జీవిత సందర్భాలనుండి స్వీకృతాలను వివరిస్తారు.(Comm)
- యూక్లిడ్ జ్యామితిని మరియు స్వీకృతాలను ప్రశంసిస్తారు. (Comm)
- వివిధ కోణాలను, త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం మరియు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నియమాలను వివరిస్తారు.(Comm)
- త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నియమాలను సరిచూస్తారు. (భు.కో.భు, కో.భు.కో, భు.భు.భు, లం.క.భు) (RP)
- త్రిభుజాల సర్వసమానతకు సరూపకతకు గల భేదాలను వివరిస్తారు. (Comm)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 9 06-02-2021 14:53

- జ్యామితీయ నిర్మాణాలలో ప్రతీ సోపానికి కారణాలను వివరిస్తారు (RP)
- ఇచ్చిన కొలతలతో జ్యామితీయ నిర్మాణాలు చేస్తారు. (RP)
- ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖలకు, ఛేదన రేఖలకు గల భేదాలను వివరిస్తారు. (PS)

☞ **క్షేత్రమితి**

- రెండు ఘనాకార వస్తువుల సంయోగము వల్ల ఏర్పడిన ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను చెందిన సమస్యలను సాధించగలరు. (PS)
- రెండు ఘనాకార వస్తువుల సంయోగము వల్ల ఏర్పడిన ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘన పరిమాణములను కనుగొని, కారణాలు వివరించగలరు. (RP)
- వివిధ ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము సూత్రాలలోని పదాలను వివరించగలరు. (Comm)
- క్షేత్రమితిలోని సమస్యల సాధనకు వివిధ జ్యామితీయ, అంకగణిత, బీజగణిత భావలను ఉపయోగించగలరు. (Comm)
- వివిధ ఘనాకార వస్తువులను మరియు వాటి సంయోగము వల్ల ఏర్పడిన ఘనాకృతుల పటాలను గీయగలరు. (VR)

☞ **అంకగణితము**

- ఇచ్చిన నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తిని కనుగొనగలరు (PS)
- బహుళనిష్పత్తి, లాభనష్టాలు, శాతాలు, ముదరా (డిస్కౌంట్), పన్నులు మొదలగు వాటికి సంబంధించిన సమస్యలను సాధిస్తారు. (PS)
- సామన్యవడ్డీ, చక్రవడ్డీ, అనులోమ/విలోమ అనుపాత సమస్యలు, కాలము–పని మరియు కాలము – దూరము సమస్యలు సాధిస్తారు. (PS)
- ఇచ్చిన సందర్భంలో శాతాలు, లాభనష్టాలు, డిస్కౌంట్లు అంచనా వేయగలరు మరియు కారణాలు చెప్పగలరు. (RP)
- సామాన్యవడ్డీ, చక్రవడ్డీలకు గల భేదాన్ని వివరించగలరు.(RP)
- నిష్పత్తి, శాతములను గుర్తులనుపయోగించి రాయగలరు. (Comm)
- లాభనష్టాలు, లాభ/నష్టశాతం, డిస్కౌంట్, సామాన్య/చక్రవడ్డీ మొదలైన వాటి సూత్రాలలోని పదాలను వివరించగలరు (Comm)
- అనుపాతము, అనులోమానుపాతము, విలోమానుపాతములను శాతాలకు అన్వయించగలరు (దైనందిన జీవిత సందర్భాలకు) (Con)

☞ **త్రికోణమితి**

- 0^0 నుండి 90^0 వరకు గల కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు మరియు సర్వసమీకరణాలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించగలరు. (PS)
- 0^0 నుండి 90^0 వరకు గల కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుగొనుటకు మరియు త్రిభుజ భుజాల పొడవులు కనుగొనుటకు గల కారణాలను వివరిస్తారు.(RP)
- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను సరిచూస్తారు (RP)
- ఇచ్చిన త్రిభుజములో ఎదుటిభుజము, కర్ణము, ఆసన్న భుజము అలాగే సైన్, కొసైన్, టాంజెంట్ లాంటి పదాలను వివరిస్తారు.(RP)
- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల సమస్యల సాధనలో బీజగణిత భావనలను ఉపయోగించగలరు. (Comm)
- 0^0 – 90^0 కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను పట్టిక రూపంలో రాస్తారు. (VR)

☞ **సాంఖ్యకశాస్త్రము**

- ఇచ్చిన అవర్గీకృత /వర్గీకృత దత్తాంశాలకు సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకములకు చెందిన సమస్యలను సాధించగలరు. (PS)
- అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకములను అంచనా వేయగలరు మరియు కారణాలను చెప్పగలరు (RP).
- తరగతుల అవధులకు, హద్దులకు గల భేదాలను వివరించగలరు. (RP)
- అవర్గీకృత / వర్గీకృత దత్తాంశానికి సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకము సూత్రాలలోని పదాలను వివరించగలరు. (Comm)
- ఇచ్చిన దత్తాంశానికి పౌనఃపున్యవిభాజన / సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలను రూపొందిస్తారు (VR)
- ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని వివిధ రేఖాచిత్రాల రూపంలో ప్రదర్శిస్తారు.(VR)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 10
06-02-2021 14:53

విషయసూచిక

క్రమ సంఖ్య	యూనిట్ పేర్లు	పేజి నెం.
	యూనిట్ - 1 సంఖ్యామానము (వాస్తవ సంఖ్యలు - పరిచయం)	
1.1	సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణసంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాలు	1-20
1.2	అకరణీయ సంఖ్యలు - కరణీయ సంఖ్యలు	21-38
1.3	ఘాతాలు - ఘాతాంకాలు	39-60
	యూనిట్ - 2 బీజగణితం	
2.1	బీజగణితం - ప్రాథమిక భావనలు	61-78
2.2	ప్రత్యేక లబ్ధాలు మరియు కారణాంక విభజన	79-92
2.3	రేఖీయ సమీకరణాలు	93-104
2.4	వర్గ సమీకరణాలు	105-122
2.5	సంఖ్యా అమరికలు	123-146
	యూనిట్ - 3 అంకగణితం	
3.1	నిష్పత్తి - అనుపాతాలు	147-158
3.2	శాతాలు మరియు లాభనష్టాలు	159-168
3.3	సాధారణ వడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ	169-174
	యూనిట్ - 4 రేఖాగణితం	
4.1	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	175-184
4.2	సమాంతర రేఖల ధర్మాలు	185-192
4.3	త్రిభుజములు	193-210
4.4	త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం	211-226
4.5	చతుర్భుజాలు	227-252
4.6	త్రిభుజముల సరూపత	253-284

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 11 06-02-2021 14:53

4.7	వృత్తాలు	285-296
4.8	ఛేదన రేఖలు, స్పర్శరేఖలు మరియు వాటి ధర్మాలు	297-308
4.9	నిర్మాణాలు	309-322
4.10	నిరూపక రేఖాగణితము	323-338
	యూనిట్ - 5 క్షేత్రమితి	
5.1	సమతల పటాల వైశాల్యం, చుట్టుకొలత	339-358
5.2	ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు	359-378
5.3	సంయోగము చేసిన ఘనాకార వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యం	379-382
	యూనిట్ - 6 త్రికోణమితి	
6.1	త్రికోణమితి – అనువర్తనాలు	383-408
	యూనిట్ - 7 సాంఖ్యకశాస్త్రం	
7.1	సాంఖ్యకశాస్త్రం పరిచయం	409-418
7.2	కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు	419-444
7.3	దత్తాంశాన్ని గ్రాఫు ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరచుట దృశీకరించుట	445-462
7.4	సంభావ్యత – పరిచయం	463-476

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 12 06-02-2021 14:53

యూనిట్ 1 **సంఖ్యామానం**
(సహజ సంఖ్యలు - పరిచయం)

అధ్యాయం 1.1 సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణసంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాలు

1.1.0 అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- సహజసంఖ్యలు, వాటి ధర్మాలను అవగాహన చేసుకుంటారు.
- సహజ సంఖ్యలను వాటి ధర్మాల ఆధారంగా వివిధ సందర్భాలలో చతుర్విధ ప్రక్రియల్లో ఉపయోగించి సమస్యలు సాధించగలరు.
- పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై ప్రాతినిధ్య పరచగలరు.
- పూర్ణ సంఖ్యలతో గల సమస్యలను చతుర్విధ ప్రక్రియల ద్వారా కనుగొనగలరు.
- సంఖ్యలలో బేసి, సరిసంఖ్యలు కారణాంకాలు, గుణిజాలు, ప్రధాన సంఖ్యలు, సంయుక్త సంఖ్యల గురించి అవగాహన చేసుకుంటారు.
- అకరణీయ సంఖ్యలను ఉపయోగించి చతుర్విధ ప్రక్రియలతో సమస్యలు సాధించగలరు.
- అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించగలరు.
- అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చగలుగుతారు.

1.1.1 పరిచయం

సంఖ్యలు మేదస్సుకు సాక్ష్యాలు, గణిత శాస్త్రానికి సంఖ్యలు ఆధారం. ఇప్పుడు మనము ఉపయోగించే సంఖ్యా పద్ధతిని “హిందూ అరబిక్ సంఖ్యారూపం” అంటారు. ఈ సంఖ్యావిధానములో 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. అనే 10 అంకెలను మనం ఉపయోగిస్తాము. అంకెలతో మనం సంఖ్యలను వ్రాస్తాం.

మన నిత్య జీవితంలో ప్రతీ అంశంతో సంఖ్యలు ముడిపడి ఉంటాయి. డాక్టర్‌కి పల్స్, రైతుకు పంటలెక్క, గౌండ (భవన నిర్మాణ కార్మికులు) వేసుకొనే కొలతలు, ఇంజనీర్ల ప్రణాళికలు, కలెక్టర్ల నివేదికలు, గృహిణి వంటలలో వేసే పదార్థాల నిష్పత్తి మరియు శాతాలు, వివిధ దేశాలలో ఉష్ణోగ్రతలలో తేడా, ఒక దేశం యొక్క ఆస్తులు, అప్పులు, షేర్ మార్కెట్లలోని ఒడిదుడుకులు వరకు అన్ని విషయాలు సంఖ్యల చుట్టు తిరుగుతాయి. కావున వివిధ రకాల సంఖ్యలకు సంబంధించిన సంపూర్ణ అవగాహనను పెంపొందించుకుందాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 13 06-02-2021 14:53

1.1.2 సహజ సంఖ్యలు మరియు పూర్ణాంకాలు

సహజ సంఖ్యలు (N)

గణనకు ఉపయోగించే 1, 2, 3, ... సంఖ్యలను సహజ సంఖ్యలు అంటారు. వీటిని 'N' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

N = {1, 2, 3 ......}.

గమనిక : అత్యల్ప సహజ సంఖ్య '1'

గమనిక : ప్రతి సహజ సంఖ్యకు ఉత్తరగామి(తరువాత సంఖ్య) ఉంటుంది. కాబట్టి మనం గరిష్ఠ సహజసంఖ్యను కనుగొనలేము.

సంఖ్యల యొక్క కొన్ని ధర్మాలు

క్ర.సం.	ధర్మం	నిర్వచనం	ఉదాహరణ	వ్యాఖ్యలు
1	సంవృత ధర్మం (i) సంకలనమునకు (ii) గుణకారమునకు	 $a, b \in$ N అయితే $a + b \in$ N $a, b \in$ N అయితే $ab \in$ N	 2, 3 ∈N, 2+3 = 5 ∈N 2, 3 ∈N, 2 × 3 = 6 ∈N	సహజ సంఖ్యలు సంకలనం మరియు గుణకారము దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
2.	స్థిత్యంతర ధర్మం (i) సంకలనమునకు (ii) గుణకారమునకు	 $a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$	 2, 3 ∈N అనుకొనుము 2 + 3 = 3 + 2 = 5 2 × 3 = 3 × 2 = 6	సహజ సంఖ్యలు సంకలనం మరియు గుణకారము దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
3.	సహచర ధర్మం (i) సంకలనమునకు (ii) గుణకారమునకు	 $(a+b)+c = a+(b+c)$ $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$	5,6,7 ∈N అనుకొనుము (5+6)+7 = 5+(6+7) 11 + 7 = 5 + 13 = 18 (5 × 6) × 7 = 5 × (6 × 7) 30 × 7 = 5 × 42 210 = 210	సహజ సంఖ్యలు సంకలనం మరియు గుణకారము దృష్ట్యా సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.
4.	తత్సమ ధర్మం (i) సంకలనమునకు (ii) గుణకారమునకు	 $a + 0 = 0 + a = a$ $a \times 1 = 1 \times a = a$ Multiplying by 1 will not change a number	 7 + 0 = 0 + 7 = 7 8 × 1 = 1 × 8 = 8	0 అనేది సంకలన తత్సమాంశము 1 అనేది గుణకార తత్సమాంశము. సహజ సంఖ్యలలో '0' వుండదు.

5.	విలోమ ధర్మము (i) సంకలనమునకు (ii) గుణకారమునకు	 $a+(-a)=0=(-a)+a$ $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$	$1, -2, \frac{1}{2} \in A$ (సమితి) $2+(-2) = 0 = (-2)+2$ $2 \times \frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{2} \times 2$	సహజ సంఖ్యలలో ఋణ సంఖ్యల భిన్నాలను కను గొనలేము. కాబట్టి సహజ సంఖ్యలు సంకనలం మరియు గుణకార విలోమ ధర్మాన్ని పాటించవు.
6.	విభాగ న్యాయం	$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$	$2,3,5 \in N$ అనుకొనుము $2 \times (3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$ $2 \times 8 = 6 + 10$ $16 = 16$ $(2+3) \times 5 = 2 \times 5 + 3 \times 5$ $5 \times 5 = 10 + 15$ $25 = 25$	

పూర్ణాంకాలు (W)

నీ దగ్గర నాలుగు చాక్లెట్లు వున్నాయి. నీ స్నేహితునికి/ స్నేహితురాలుకు అన్ని చాక్లెట్లు ఇచ్చావు. అయితే నీ దగ్గర ఎన్ని చాక్లెట్లు మిగిలి వున్నాయి. $4 - 4 = 0$.

నీవు '0' లను సహజ సంఖ్యలలో కనుగొనలేవు. కాబట్టి సహజ సంఖ్యలను '0' తో కలిపి విస్తరింప చేస్తే వచ్చే వ్యవస్థ పూర్ణాంకాలు. పూర్ణాంకాలను 'W' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

$W = \{0, 1, 2, 3, ... \}$

గమనిక : సున్న '0' అతి చిన్న పూర్ణాంకము. అతి పెద్ద పూర్ణాంకమును కనుగొనలేము.

సున్న యొక్క ధర్మాలు

(i) సంకలన తత్సమము 0 అనగా $a + 0 = 0 + a = a$.

(ii) ఏదేని నిర్వచించబడిన సంఖ్యను '0' తో గుణిస్తే వచ్చే ఫలితం '0'

$0 \times a = 0 = a \times 0$

(iii) తో భాగహారము నిర్వచింపబడదు, $\frac{a}{0}$ అనునది నిర్వచింపబడదు.

(iv) $\frac{0}{0}$ అనిర్ధారకము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 15 06-02-2021 14:53

పూర్ణసంఖ్యలు (Z)

ఎవరెస్ట్ పర్వతము యొక్క ఎత్తు +8,848 మీ. [ధనాత్మకం]

పసిఫిక్ మహాసముద్రం యొక్క లోతు –10,994 మీ. [ఋణాత్మకం]

ప్రపంచంలో నమోదైన అత్యధిక ఉష్ణోగ్రత $+63.8^{o}C$ [ధనాత్మకం]

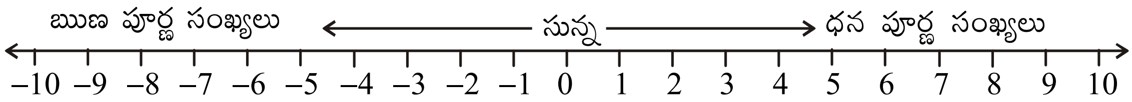
భూమి మీద నమోదైన అత్యల్ప ఉష్ణోగ్రత $-89^{o}C$ [ఋణాత్మకం]

ఋణసంఖ్యల ఆవశ్యకతను పై పరిస్థితులు తెలియచెప్తున్నాయి.

ధన సంఖ్యలు, సున్న మరియు ఋణసంఖ్యలన్నింటిని కలిపి పూర్ణ సంఖ్యలంటారు. పూర్ణసంఖ్యలను 'Z' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

$$Z = \{......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించటము



- ధన మరియు ఋణసంఖ్యలు రెండు అనంతంగా విస్తరించి ఉంటాయి.
- సంఖ్యారేఖపై ఎల్లప్పుడు కుడివైపు ఉండే సంఖ్యలు పెద్దవి.

(i) $-1 < 0$ (ii) $-10000 < 1$ (iii) $0 > -105$ (iv) $11 > -100$ etc.

('<' అనే గుర్తు 'లెస్‌దెన్' అని '>' అనే గుర్తు 'గ్రేటర్ దెన్' అని చదవాలి)
ఉపసమితిని సూచించు గుర్తు : $\subset$ (సబ్‌సెట్)

"N" లో ఉండే ప్రతి సంఖ్య W లో కూడా ఉంటుంది.

'W' లో ఉండే ప్రతి సంఖ్య Z లో కూడా ఉంటుంది.

- $N \subset W \subset Z$ (N అనునది W కి ఉపసమితి, W అనునది Z కి ఉపసమితి)
- ప్రతి పూర్ణసంఖ్యకు దాని యొక్క సంకలన విలోమము పూర్ణసంఖ్యలలోనే ఉంటుంది.

2 యొక్క సంకలన విలోమము –2

–9 యొక్క సంకలన విలోమము +9

ఉదాహరణ – 1 : క్రింది సముదాయములో సహజసంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలు గుర్తించండి.

1, –1, 3, 0, –100, 8, 17, –19.

సాధన : సహజసంఖ్యలు : 1, 3, 8, 17

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 16 06-02-2021 14:53

పూర్ణాంకాలు : 0, 1, 3, 8, 17

పూర్ణసంఖ్యలు : –100, –19, –1, 0, 1, 3, 8, 17

ఉదాహరణ – 2 : క్రింది ప్రవచనాలో ఏది సత్యమో ఏది అసత్యమో రాయండి?

(i) ప్రతి సహజ సంఖ్య ఒక పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

(ii) ప్రతి పూర్ణసంఖ్య కూడా ఒక పూర్ణాంకము అవుతుంది.

(iii) సంకలన తత్సమాంశము '0'.

(iv) ధన పూర్ణసంఖ్యలు అనగా సహజసంఖ్యలు

సాధన : (i) సత్యము (ii) అసత్యము (iii) సత్యము (iv) సత్యము.

ఉదాహరణ – 3 : క్రింది పూర్ణసంఖ్యలను ఆరోహణ మరియు అవరోహణ క్రమములో రాయండి.

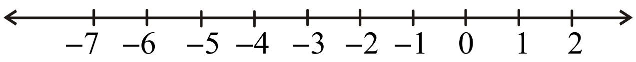
–100, 117, –205, 0, –76, 15, 12.

సాధన: ఆరోహణ క్రమము (చిన్నసంఖ్య నుండి పెద్దసంఖ్యవరకు) –205, –100, –76, 0, 12, 15, 117.

అవరోహణ క్రమము (పెద్దసంఖ్య నుండి చిన్నసంఖ్య వరకు) 117, 15, 12, 0, –76, –100, –205

ఉదాహరణ – 4 : –7 మరియు 2 ల మధ్య ఉండే అని పూర్ణసంఖ్యలను రాయుము.

సాధన :



–7 మరియు 2 ల మధ్య ఉండే పూర్ణ సంఖ్యలు : –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1.

పూర్ణసంఖ్యల ప్రాథమిక ప్రక్రియలు

పూర్ణ సంఖ్యల సంకలనము :

- రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యలను సంకలనము చేస్తే వచ్చే ఫలితము కూడా ధనపూర్ణ సంఖ్య.
  ఉదాహరణకు 3 + 5 = 8; 100 + 120 = 220.
- రెండు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలను సంకలనము చేస్తే వచ్చే ఫలితము కూడ ఋణపూర్ణ సంఖ్య
  (–3) + (–5) = –8; (–100) + (–250) = –350
  (ఇచ్చిన సంఖ్యలను కూడండి. కాని గుర్తు మాత్రము '–' ఉంచాలి)
- ఒక ధన సంఖ్య మరియు ఒక ఋణ సంఖ్యలను సంకలనము చేయునప్పుడు మాత్రమే మనము వ్యవకలనము చేయాలి. కాని గుర్తు మాత్రము ఆ రెండింటిలో పెద్ద సంఖ్య గుర్తు ఉంచాలి.

ఉదాహరణ – 5 : (–3) + (5) కనుగొనండి.

సాధన : (–3) + (5) = 2 [5 లో నుండి 3 ను తీసివేయాలి. 5 యొక్క గుర్తు +ను ఫలితానికి ఉంచాలి]

ఉదాహరణ – 6 : (–7) + 3 కనుగొనండి.

సాధన : (–7) + 3 = –4 [7 లో నుండి 3 ను తీసివేయాలి 7యొక్క గుర్తు – ను ఫలితానికి ఉంచాలి.]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 17 06-02-2021 14:53

పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనము :

పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనము అనగా మొదటి సంఖ్య మరియు రెండవ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమముల సంకలనము.

ఉదాహరణ - 7 : $(-3) - (-5)$ కనుగొనండి.

సాధన : $(-3) - (-5)$

$= -3 + 5$　　-5 యొక్క సంకలన విలోమము $+5$

$= +2$　　కూడికను చేయండి.

ఉదాహరణ - 8 : $(-100) - (+7)$ కనుగొనండి.

సాధన : $(-100) - (+7)$　　$-$ ను $+$ రాయాలి.

$= (-100) + (-7)$

$= -107$

పూర్ణసంఖ్యల గుణకారము :

- రెండు ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ధనపూర్ణ సంఖ్య

  ఉదా : $(-4) \times (-3) = +12$;　　$(-5) \times (-10) = +50$.

- ఒక ధన మరియు ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఋణపూర్ణసంఖ్య

  ఉదా : $6 \times (-2) = -12$;　$(-9) \times (3) = -27$.

- పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధములో ఋణసంఖ్యలు 'సరిసంఖ్య సార్లు' ఉన్నచో వాటి లబ్ధము ధనాత్మకము

  ఉదా : $(-2) \times (-3) \times (-5) \times (-6) = +180$ [4(సరిసంఖ్య) సార్లు ఋణ సంఖ్యలు కాబట్టి ధనాత్మకం]

- పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధములో ఋణసంఖ్యలు "బేసి సంఖ్యసార్లు" ఉన్నచో వాటి లబ్ధము ఋణాత్మకము

  ఉదా : $(-1) \times (-2) \times (-3) = -6$ [3(బేసిసంఖ్య) సార్లు ఋణసంఖ్యలు కాబట్టి ఋణాత్మకము]

పూర్ణసంఖ్యల భాగహారము :

- లవహారాలు ఒకే గుర్తును కలిగి యుంటే ఫలితము ధనాత్మకము.

  ఉదా : $\frac{-10}{-5} = +2$;　$\frac{-15}{-3} = +5$

- లవహారాలు వేర్వేరు గుర్తులు కలిగియుంటే వాటి ఫలితము ఋణాత్మకము

  ఉదా : $\frac{-6}{2} = -3$;　$\frac{8}{-2} = \frac{-8}{2} = -4$

కొన్ని ముఖ్యమైన ఫలితాలు

1. గుణిజము : ఏదేని సంఖ్యను పూర్ణసంఖ్యలతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాలు ఆ సంఖ్య యొక్క గుణిజాలు అవుతాయి.

7 యొక్క గుణిజాలు $7 \times 1 = 7$, $7 \times 2 = 14$, $7 \times 3 = 21$ ... etc.

7, 14, 21, 28, ... అనేవి 7 యొక్క గుణిజాలు.

2. కారణాంకము / భాజకము : ఏదేని పూర్ణ సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించే సంఖ్యలు ఆ పూర్ణ సంఖ్యకు కారణాంకాలవుతాయి.

గమనిక : 1కి తప్ప ప్రతి సంఖ్యకు కనీసం రెండు కారణాంకాలుంటాయి.

ఉదాహరణ - 9 : 42 42 యొక్క అన్ని కారణాంకాలను కనుగొనుము?

సాధన :

$1 \times 42 = 42$		$42 \times 1 = 42$
$2 \times 21 = 42$	స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని ఉపయోగించినచో	$21 \times 2 = 42$
$3 \times 14 = 42$		$14 \times 3 = 42$
$6 \times 7 = 42$		$7 \times 6 = 42$

$\therefore$ 42 యొక్క కారణాంకములు 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

3. సరిసంఖ్య : 2 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడే సంఖ్యలు

గమనిక : సరిసంఖ్యలు యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె 0, 2, 4, 6, 8 గా ఉంటుంది.

ఉదా : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... (సరి సంఖ్య)

4. బేసి సంఖ్య : 2 చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడని సంఖ్యలు

గమనిక : బేసి సంఖ్యలు 1, 3, 5, 7, 9 లలో ఏదేని ఒక అంకెతో ముగించబడతాయి.

ఉదా : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ... (బేసి సంఖ్య)

5. ప్రధాన సంఖ్య : '1' మరియు అదే సంఖ్యతో మాత్రమే భాగించబడే సంఖ్యలు, ప్రధాన సంఖ్యలకు రెండు కారణాంకాలు మాత్రమే ఉంటాయి. ఒకటి మరియు అదే సంఖ్య.

గమనిక : ప్రధాన సంఖ్యలలో 2 మాత్రమే సరిప్రధాన సంఖ్య.

గమనిక : '2' తప్ప మిగిలిన ప్రధాన సంఖ్యలన్నీ బేసి సంఖ్యలు

ఉదా : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... (ప్రధాన సంఖ్యలు)

23 యొక్క కారణాంకాలు 1, 23.

6. సంయుక్త సంఖ్యలు : '1' మరియు ప్రధాన సంఖ్యలు కాని అన్ని సంఖ్యలు.

సంయుక్త సంఖ్యలకు కనీసం 3 కారణాంకాలుంటాయి.

ఉదా : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ... (సంయుక్త సంఖ్యలు)

4 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 4.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 19 06-02-2021 14:53

7. సహప్రధానాంకాలు / పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు : ఏదేని రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా '1' అయితే ఆ సంఖ్యలు సహ ప్రధానాంకాలు.

ఉదా : 2, 3 ల గ.సా.భా '1' కావున అవి పరస్పర ప్రధానాంకాలు

2, 9 ల గ.సా.భా '1' కావున అవి పరస్పర ప్రధానాంకాలు

2, 4 ల గ.సా.భా '2' కావున అవి పరస్పర ప్రధానాంకాలు

8. వర్గ సంఖ్య : ఒక పూర్ణసంఖ్యను అదే పూర్ణ సంఖ్యచే గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధము.

ఉదా : $1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$(-4) \times (-4) = (-4)^2 = 16.$

$\vdots$

$17 \times 17 = 17^2 = 289.$

ఉదా : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ... అనేవి మొదటి పది వర్గ సంఖ్యలు.

9. ఘన సంఖ్యలు : సమానంగా ఉండే మూడు పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధమే ఘనసంఖ్య

$1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$ $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

ఉదా : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 అనేవి మొదటి పది ఘన సంఖ్యలు.

10. పరిపూర్ణ సంఖ్య : ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క క్రమకారణాంకాల మొత్తము ఆ ధనపూర్ణ సంఖ్యకు సమానమైనచో, అ ధనపూర్ణ సంఖ్యను పరిపూర్ణ సంఖ్య అంటాము.

6 యొక్క కారణాంకములు 1, 2, 3, 6

క్రమకారణాంకములు 1, 2, 3

మొత్తము = 1 + 2 + 3 = 6

6 తర్వాత పరిపూర్ణ సంఖ్య 28.

ఉదాహరణ - 10 : $100 + 50 \times 2$

సాధన : $100 + 50 \times 2$ (గుణకారం)

$= 100 + 100$ (కూడిక)

$= 200$

ఉదాహరణ - 11 : $5000 + 500 - 50$

సాధన : $5000 + 500 - 50$

$= 5500 - 50$ (కూడిక)

$= 5450$ (సంకలనము)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 20 06-02-2021 14:53

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది వానిలో సహజ సంఖ్యలను గుర్తించండి.
   5, 6, –1, 0, 3, 215, – 11, – 215
2. కింది వానిలో పూర్ణాంకాలు కాని సంఖ్యలను గుర్తించండి.
   6, 7, –8, –9, 0, –100.
3. సూక్ష్మీకరించండి.
   (i) $(-2) + (-8) + 9$ (ii) $(-3) + (-9) + (-11)$
4. సూక్ష్మీకరించండి.
   (i) $(-2) - (-8)$ (ii) $(-256) + (-85)$
   (iii) $(-18) + (-19) - (-110)$ (iv) $(-975) + (-120) - (-18)$
5. ఈ క్రింది లబ్ధములను కనుగొనండి.
   (i) $(-3)\times(-8)\times(-11)\times(-1)$ (ii) $(-15)\times 0\times(-19)$
6. క్రింది వానిని సాధించండి.
   (i) $60 \div 0$ (ii) $(-18) \div (-6)$ (iii) $(-125) \div 5$ (iv) $0 \div 200$
7. సూక్ష్మీకరించుము.
   (i) $18\times[7 + (-5)]$ (ii) $15\times(-20)\times(-15\div 3)$
8. –7, –5, 0, 5, 7 లను సంఖ్యా రేఖపై సూచించండి.

1.1.3 అకరణీయ సంఖ్యలు (Q)

ప్రసాద్‌కు ఒక ఎకరా పొలము ఉన్నది. ఆయన ఆ పొలాన్ని తన ఇద్దరూ పిల్లలకు సమానంగా పంచాలని నిర్ణయించుకున్నాడు.

ఒక్కొక్కరికి ఎంత పొలము వస్తుంది? $\frac{1}{2}$ ఎకరా

రత్నమ్మ కష్టపడి ₹ 2,00,000/- సంపాదించినది. తర్వాత ఆమె ఆ మొత్తాన్ని 7 వృద్ధాశ్రమాలకు సమానంగా పంచాలనుకున్నది.

ఒక్కో వృద్ధాశ్రమానికి వచ్చే మొత్తం $\frac{2,00,000}{7}$ రూపాయలు

$\frac{1}{2}, \frac{2,00,000}{7}$ లు కూడ సంఖ్యలు. కాని వీటిని పూర్ణసంఖ్యలలో కనుగొనలేము. కావున ఇటువంటి సంఖ్యలతో కూడిన నూతన సంఖ్యావ్యవస్థ 'అకరణీయ సంఖ్యలు' ను క్రింది విధంగా నిర్వచించారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 21 06-02-2021 14:53

$\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తీకరించగలిగే సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలంటారు. $p, q \in Z$ మరియు $q \neq 0$ అకరణీయ సంఖ్యలను 'Q' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

ఉదా : $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{-6}{7}, -\frac{11}{8}, \frac{-100}{9}, \frac{1}{7}, ...$ మొదలగునవి.

ప్రతి పూర్ణసంఖ్యను కూడ అకరణీయ సంఖ్యారూపంలో వ్యక్తీకరించవచ్చు.

ఉదా : -3 ను $-\frac{3}{1}$ లేదా $\frac{-6}{2}$ లేదా $\frac{-9}{3}$ లేదా $\frac{-12}{4}$..... మొదలగునవి.

పై పరిశీలనల ద్వారా సహజసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యలు అన్నియూ కూడా అకరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయని నిర్ధారణకు రావచ్చు. $N \subset W \subset Z \subset Q$.

ఉదాహరణ - 12 : కింది సంఖ్యలలో అకరణీయ సంఖ్యలు ఏవి.

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) $\frac{-3}{-17}$ (iv) $\frac{6}{-13}$

(v) -9 (vi) $\frac{0}{0}$ (vii) $\frac{8-8}{16\times(-4)}$ (viii) $\frac{-17}{3-3}$

సాధన : (i) (ii) (iii) (iv) (v) (vii) లు అకరణీయ సంఖ్యలు (vi) (viii) లు అకరణీయ సంఖ్యలు కాదు. ఎందుకనగా

$\frac{0}{0}$ అనిర్ధారకము మరియు $\frac{-17}{0}$ నిర్వచింపబడదు.

గమనిక : అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించునప్పుడు

(i) హారము ధనాత్మకంగా ఉండాలి.

(ii) లవహారాలను సూక్ష్మరూపంలో రాయాలి.

అకరణీయ సంఖ్యల ప్రామాణిక రూపం (సూక్ష్మరూపం)

ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{p}{q}$ లో, p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$, q ధనాత్మకము. p, q లు సహ ప్రధానాంకాలు అయితే అప్పుడు $\frac{p}{q}$ ప్రామాణిక లేదా సూక్ష్మరూపంలో ఉందని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ - 13 : క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను సూక్ష్మరూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{4}{8}$ (ii) $-\frac{18}{50}$ (iii) $\frac{-21}{-49}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 22 06-02-2021 14:53

సాధన :

(i) $\frac{4}{8} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2}$ [1, 2 ల గ.సా.భా 1]

$\therefore \frac{1}{2}$ అనునది $\frac{4}{8}$ అనే అకరణీయ సంఖ్య సూక్ష్మరూపం.

(ii) $-\frac{18}{50} = \frac{-2 \times 9}{2 \times 25} = \frac{-2 \times 9}{2 \times 25} = \frac{-9}{25}$

$\therefore -\frac{9}{25}$ అనునది $-\frac{18}{50}$ అనే అకరణీయ సంఖ్య సూక్ష్మరూపం.

(iii) $\frac{-21}{-49} = \frac{-7 \times 3}{-7 \times 7} = \frac{+\cancel{7} \times 3}{+\cancel{7} \times 7} = \frac{3}{7}$

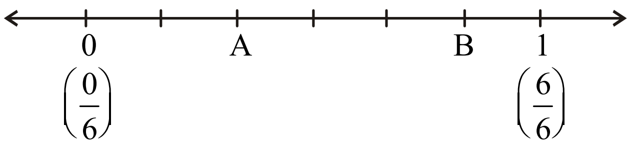
$\therefore \frac{3}{7}$ అనునది $\frac{-21}{-49}$ అనే అకరణీయ సంఖ్య సూక్ష్మరూపం.

సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలు

ఏ అకరణీయ సంఖ్యనైనా సంఖ్యారేఖపై ప్రాతినిధ్యం చేయవచ్చు. అకరణీయ సంఖ్యలోని హారము సంఖ్యారేఖలోని ఒక్కొక్క యూనిట్ ఎన్ని సమానభాగాలుగా విభజించబడిందో చెబుతుంది. అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవము ఆ భాగాలలో ఎన్నింటిని పరిగణనలోకి తీసుకోవాలో చెబుతుంది.

* ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అయినా ఎల్లప్పుడు మరొక అకరణీయ సంఖ్య ఉంటుంది. దీనిని సాంద్రత ధర్మము అంటారు.

ఉదాహరణ - 14 : క్రింది సంఖ్యారేఖలో A మరియు B లు సూచించు అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి?



సాధన : ఇక్కడ, 0 నుండి 1 అనే ఒక యూనిట్ 6 సమాన భాగాలుగా విభజించబడినది.

A అనునది మొత్తం 6 భాగాలలో 2 భాగాలను సూచిస్తుంది.

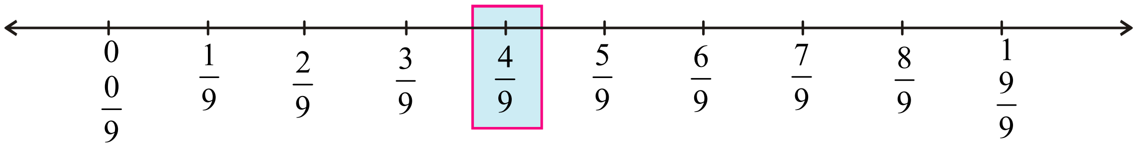
కావున A అనునది సూచించు అకరణీయ సంఖ్య $\frac{2}{6}$.

అదేవిధముగా B సూచించు అకరణీయ సంఖ్య $\frac{5}{6}$.

ఉదాహరణ - 15 : $\frac{4}{9}$ ని సంఖ్యారేఖపై ప్రాతినిధ్యపరచండి?

సాధన : $\frac{4}{9}$ అను అకరణీయ సంఖ్య 0 మరియు 1 ల మధ్య ఉంటుంది.

కావున 0 నుండి 1 వరకు ఉండే ఒక యూనిట్‌ను 9 సమానభాగాలుగా విభజించండి.



అనగా 0 నుండి 4 భాగాలు 0 భాగాలు (లవంలోని అంకె 4) గణించిన అది $\frac{4}{9}$ ని సూచించును.

ఉదాహరణ - 16 : $-\frac{17}{5}$ ని సంఖ్యారేఖపై సూచించండి?

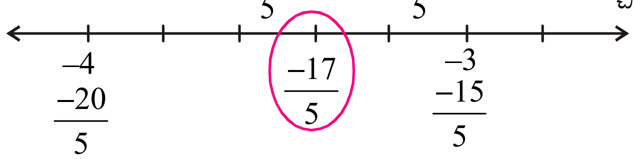
$$-\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5} = (-3) - \frac{2}{5}$$

సాధన : $-\frac{17}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్య –3 మరియు –4 అను సంఖ్యల మధ్య ఉంటుంది.

–3 మరియు –4 అనే యూనిట్‌ను 5 సమానభాగాలుగా విభజించండి.

$-\frac{15}{5}$ అనగా –3 నుండి 2 భాగాలు వెనకకి జరిగి $-\frac{17}{5}$ ను గుర్తించాలి.

$-3 = \frac{-15}{5}$, $-4 = \frac{-20}{5}$ గా రాయవచ్చు.



అకరణీయ సంఖ్యలను పోల్చటం

హారాలు సమానముగా ఉండే అకరణీయ సంఖ్యలను సులభముగా పోల్చవచ్చు. హారాలు సమానమైతే ఏ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవము పెద్దగా ఉంటుందో అదే పెద్ద అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

ఉదాహరణ - 17 : $\frac{5}{13}$ మరియు $\frac{8}{13}$ లను పోల్చుము.

సాధన : $\frac{5}{13}$ మరియు $\frac{8}{13}$ ఇక్కడ హారాలు సమానము మరియు లవాలను పరిశీలించగా $8 > 5$.

కావున, $\frac{8}{13} > \frac{5}{13}$

గమనిక : రెండు అకరణీయ సంఖ్యలకు వేర్వేరుగా హారాలు ఉంటే, అప్పుడు ఆ అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క సమానరూపాలు రాసి వాటి యొక్క హారాలను సమానం చేయాలి. ఫలిత అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క లవాలను పోల్చాలి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 24 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ - 18 : $\frac{2}{5}$ మరియు $\frac{3}{7}$ లను పోల్చండి.

సాధన : ఇక్కడ ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యల హారాలు సమానం కాదు

కావున వాటిని హారాలను సమానం చేయటానికి వాటి సమాన రూపాలను రాయాలి.

$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{7} = \frac{14}{35}$ $\left[\text{మొదటి అకరణీయ సంఖ్య} \times \frac{\text{రెండవ అకరణీయ సంఖ్య హారం}}{\text{రెండవ అకరణీయ సంఖ్య హారం}}\right]$

$\frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{35}$ $\left[\text{రెండవ అకరణీయ సంఖ్య} \times \frac{\text{మొదటి అకరణీయ సంఖ్య హారం}}{\text{మొదటి అకరణీయ సంఖ్య హారం}}\right]$

$$\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$$

$$\therefore \frac{3}{7} > \frac{2}{5}.$$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది వానిలో అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
   (i) $\frac{3+3}{3-3}$ (ii) $\frac{0}{8}$ (iii) $-\frac{8}{11}$ (iv) -6
2. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో పూర్ణసంఖ్యలను గుర్తించండి.
   (i) $-24, \frac{-6}{6}, \frac{-18}{19}, \frac{21}{7}, \frac{-19}{-38}$.
3. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల సూక్ష్మరూపాన్ని రాయండి.
   (i) $\frac{6}{12}$ (ii) $\frac{18}{50}$ (iii) $\frac{-6057}{2019}$
4. ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలకు సమానమైన 5 అకరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.
   (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-\frac{6}{11}$ (iii) $\frac{18}{5}$
5. $-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}$ లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.
6. $\frac{1}{6}, -\frac{5}{8}, \frac{3}{5}$ లను సంఖ్యా రేఖపై సూచించండి.
7. $\frac{3}{7}$ మరియు $\frac{4}{9}$ లను పోల్చండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 25 06-02-2021 14:53

1.1.4 అకరణీయ సంఖ్యల ప్రాథమిక ప్రక్రియలు

అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనము

(i) హారాలు సమానమయినప్పుడు కేవలం లవాలను సంకలనము చేయాలి $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ లు అకరణీయ d¥K«\ s-q#Ã $(b \neq 0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

ఇక్కడ మనము హారములను సంకలనము చేయలేము. ఎందుకనగా, రెండింటిలోని హారములు సమాన భాగాల సంఖ్యను సూచిస్తాయి.

(ii) అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనములో హారాలు సమానముగా లేనప్పుడు అకరణీయ సంఖ్యలు సమాన రూపాలు అనే భావనను ఉపయోగించి వాటి హారాలను సమానం చేయాలి. తర్వాత లవాలను సంకలనము చేయాలి.

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ అను రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను పరిశీలిద్దాం.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}$$

ఉదాహరణ - 19 : $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}$

సాధన : $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}=\frac{4+9}{7}=\frac{13}{7}$

ఉదాహరణ - 20 : $\frac{5}{8}+\frac{7}{9}$

సాధన : $\frac{5}{8}+\frac{7}{9}$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{9}{9}+\frac{7}{9}\times\frac{8}{8}$$

$$=\frac{45}{72}+\frac{56}{72}$$

$$=\frac{45+56}{72}$$

$$=\frac{101}{72}.$$

ఉదాహరణ - 21 : క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేయండి.

(i) $\frac{2}{5}$ మరియు $\frac{3}{7}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{6}{17}$ (iii) $-\frac{9}{11}$ మరియు $-\frac{11}{12}$

సాధన : $\frac{2}{5}$ మరియు $\frac{3}{7}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 26 06-02-2021 14:53

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7} = \frac{2\times7+3\times5}{5\times7}$$

$$= \frac{14+15}{35}$$

$$= \frac{29}{35}.$$

(ii) సాధన : $-\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{6}{17}$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{6}{17}$$

$$= -\frac{3}{5}\times\frac{17}{17}+\frac{6}{17}\times\frac{5}{5}$$

$$= -\frac{51}{85}+\frac{30}{85}$$

$$= \frac{-51+30}{85} = -\frac{21}{85}$$

లేదా

మరో పద్ధతి :

$$-\frac{3}{5}+\frac{6}{17} = \frac{-3\times17+6\times5}{5\times17} = \frac{-51+30}{85} = -\frac{21}{85}$$

(iii) $-\frac{9}{11}$ మరియు $-\frac{11}{12}$

సాధన : $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(-\frac{11}{12}\right)$

$$= \left(-\frac{9}{11}\times\frac{12}{12}\right)+\left(-\frac{11}{12}\times\frac{11}{11}\right)$$

$$= -\frac{108}{132}+\frac{-121}{132}$$

$$= \frac{-108-121}{132}$$

$$= -\frac{229}{132}$$

లేదా

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 27 06-02-2021 14:53

మరొ పద్ధతి :

$$\frac{-9}{11} \quad \frac{-11}{12}$$

$$\frac{-9\times 12+-11\times 11}{11\times 12}=\frac{-108-121}{132}=\frac{-229}{132}$$

అకరణీయ సంఖ్యల వ్యవకలనము

అకరణీయ సంఖ్యల వ్యవకలనము చేయటానికి సంకలనమునకు అనుసరించిన పద్ధతులనే అనుసరిస్తాము.

ఉదాహరణ - 22 : కింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేయండి.

(i) $-\frac{8}{5}+\frac{7}{9}$ (ii) $-\frac{8}{7}-\left(-\frac{9}{5}\right)$ (iii) $\frac{11}{12}-\frac{9}{5}$

సాధన : (i) $\frac{-8}{5} \quad \frac{7}{9} = \frac{-8\times 9+7\times 5}{5\times 9}=\frac{-72+35}{45}=-\frac{37}{45}$

(ii) $-\frac{8}{7}-\left(-\frac{9}{6}\right)$

$$=-\frac{8}{7}+\frac{9}{5}$$

$$=-\frac{8}{7}\times\frac{5}{5}+\frac{9}{5}\times\frac{7}{7}$$

$$=-\frac{40}{35}+\frac{63}{35}$$

$$=\frac{-40+63}{35}=\frac{23}{35}$$

(iii) $\frac{11}{12}-\frac{9}{5}$

సాధన : $\frac{11}{12}\times\frac{5}{5}-\frac{9}{5}\times\frac{12}{12}$

$$=\frac{55}{60}-\frac{108}{60}=\frac{55-108}{60}=-\frac{53}{60}.$$

మరొ పద్ధతి :

$$\frac{11}{12} \quad \frac{9}{5} = \frac{11\times 5-9\times 12}{12\times 5}=\frac{55-108}{60}=-\frac{53}{60}.$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 28 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ - 23 : $\frac{2}{7}$ నుంచి $-\frac{3}{5}$ సంకలనం చేయండి.

సాధన : $-\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = -\frac{3}{5}\times\frac{7}{7} - \frac{2}{7}\times\frac{5}{5}$

$$= -\frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{-21-10}{35} = -\frac{31}{35}$$

అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క గుణకారము

(i) $\left(\frac{a}{b}\right)$ మరియు $\left(\frac{c}{d}\right)$ $b \neq 0, d \neq 0$ అను రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకారము చేస్తే $\frac{ac}{bd}$ where $bd \neq 0$ అను అకరణీయ సంఖ్య వస్తుంది.

అనగా $\frac{\text{లవముల లబ్ధము}}{\text{హారముల లబ్ధము}}$

గమనిక : ఎల్లప్పుడూ అకరణీయ సంఖ్యను సూక్ష్మరూపంలో రాయాలి.

ఉదాహరణ - 24 : క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకారం చేయండి.

(i) $\frac{4}{5}$ మరియు $\frac{11}{2}$　(ii) $\frac{7}{8}$ మరియు $\left(-\frac{6}{15}\right)$　(iii) $\frac{5}{12}$ మరియు $\left(\frac{-3}{-7}\right)$

సాధన : (i) $\frac{4}{5} \times \frac{11}{2} = \frac{4\times11}{5\times2} = \frac{2\times2\times11}{5\times2} = \frac{22}{5}$

(ii) $\frac{7}{8}\times-\frac{6}{15} = \frac{7\times(-6)}{8\times15} = \frac{7\times(-3)\times2}{2\times4\times3\times5} = \frac{7\times(-1)}{4\times5} = -\frac{7}{20}$

(iii) $\frac{5}{12}\times\left(\frac{-3}{-7}\right) = \frac{5\times(-3)}{12\times(-7)}$

$$= \frac{5\times(-3)}{3\times4\times(-7)} = \frac{5\times(-1)}{4\times(-7)} = \frac{5}{28} = \frac{5}{28}.$$

అకరణీయ సంఖ్యల భాగహారము

అకరణీయ సంఖ్యచే భాగించబడటము అనునది ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క విలోమముచే గుణింపబడటానికి సమానము.

గమనిక : $\frac{a}{b}$ యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{b}{a}$　　$-\frac{a}{b}$ యొక్క గుణకార విలోమము $-\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}$ మరియు $\frac{c}{d}$ లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయిన　ఇక్కడ $b \neq 0$ మరియు $d \neq 0$.

$$\therefore \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 29　06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ - 25 : క్రింది దానిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $\frac{4}{5} \div \frac{6}{11}$ (ii) $\frac{51}{111} \div \frac{34}{37}$

సాధన : $\frac{4}{5} \div \frac{6}{11} = \frac{4}{5} \times \frac{11}{6}$ [$\frac{6}{11}$ యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{11}{6}$]

÷ గుర్తును × గా మార్చి రెండవ సంఖ్య యొక్క గుణకార విలోమము రాయాలి.

$$= \frac{4\times11}{5\times6} = \frac{2\times2\times11}{5\times2\times3} = \frac{2\times11}{5\times3} = \frac{22}{15}$$

(ii) $\frac{51}{111} \div \frac{34}{37}$

సాధన : $\frac{51}{111} \times \frac{37}{34}$ ($\frac{34}{37}$ యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{37}{34}$)

$$= \frac{51\times37}{111\times34} = \frac{17\times3\times37}{37\times3\times17\times2} = \frac{1}{2}.$$

ఉదాహరణ - 26 : సూక్ష్మీకరించుము (i) $5 \div 5\frac{2}{3}$ (ii) $4 \div \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{7}{8} \div 5$

సాధన : $5 \div 5\frac{2}{3}$

$5 \div \frac{17}{3}$ $5\frac{2}{3} = \frac{5\times3+2}{3} = \frac{17}{3}$

$= \frac{5}{1} \times \frac{3}{17}$ $\frac{17}{3}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{3}{17}$

$= \frac{15}{17}$

(ii) $4 \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{1} = 8$

(iii) $\frac{7}{8} \div 5 = \frac{7}{8} \div \frac{5}{1} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{40}.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}$ (ii) $\frac{8}{15} - \frac{2}{15}$ (iii) $\frac{3}{5} - \left(-\frac{8}{5}\right)$

2. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంకలనం చేయండి.

   (i) $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{8}{11}$ (iii) $\frac{7}{6}, \frac{11}{12}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 30 06-02-2021 14:53

3. వ్యవకలనం చేయండి.

(i) $\frac{7}{5}$ నుండి $\frac{8}{9}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ నుండి $\frac{9}{14}$

4. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $4\times\frac{3}{2}$ (ii) $5\times2\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{5}{6}\times\frac{7}{11}$ (iv) $\frac{18}{35}\times\frac{7}{108}$

5. క్రింది భిన్నాలకు గుణకార విలోమాలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $-\frac{13}{7}$

6. క్రింది సమస్యలను సాధించుము.

(i) $18\div\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{7}\div\frac{8}{15}$ (iii) $3\div2\frac{1}{7}$

అభ్యాసము

1. Simplify the following :

(i) $(-7) + 10 + (-12) + 6$ (ii) $(-3) - (9) + (-9)$

(iii) $(-230) - (-70) + 175 - 30$ (iv) $(-675) + (-130)-(-180) + 200$

2. Simplify the following :

(i) $(-3)\times(-10)\times(-2)\times5$ (ii) $(-100)\times(-1)\times0\times3$

(iii) $(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)\times(-1)$ (iv) $(-1)\times(-10)\times(-1)\times(-10)$

(v) $0\div20$ (vi) $(-56)\div(-7)$

(vii) $-625\div5$

3. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $20\times[10-(-5)]$ (ii) $25\times(-10)\times(21\div(-3))$

4. Simplify the following :

(i) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{7}{13}-\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{6}{7}+\frac{5}{9}$ (iv) $-\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$

(v) $\frac{5}{7}-\frac{4}{6}$ (vi) $\frac{5}{13}-\frac{2}{4}$

5. Simplify the following :

(i) $8\times\frac{5}{2}$ (ii) $5\times3\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{5}\times\frac{4}{13}$ (iv) $\frac{21}{35}\times\frac{7}{66}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 31 06-02-2021 14:53

ముఖ్యాంశాలు

- N (సహజ సంఖ్యలు) : N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }
- W (పూర్ణాంకాలు) : W = {0, 1, 2, 3, 4, ... }
- సంకలనము మరియు గుణకారము దృష్ట్యా సహజ సంఖ్యల ధర్మాలు :

  'O' ను సంకలన తత్సమాంశము అంటారు.

  a యొక్క సంకలన విలోమము $-a$ $-a$ యొక్క సంకలన విలోమము a.

  a యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{1}{a}$ మరియు $\frac{1}{a}$ యొక్క గుణకార విలోమము $a \neq 0$.
- (i) 0 × నిర్వచింపబడిన ఏదేని సంఖ్య = 0 (ii) $\frac{0}{\text{ఏదేని నిర్వచింపబడిన సంఖ్య}} = 0$

  (iii) $\frac{\text{నిర్వచింపబడిన సంఖ్య}}{0}$ అనునది నిర్వచింపబడదు.

  (iv) $\frac{0}{0}$ అనునది అనిర్ధారకము.
- Z(పూర్ణసంఖ్యలు) : .... {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ....}

  ఋణ సంఖ్యలను మనము అప్పును చూపించటానికి 0^0C, కంటె తక్కువ ఉష్ణోగ్రతలు, సముద్ర మట్టం కంటె తక్కువ లోతులను చూపించటానికి ఉపయోగిస్తాము. పూర్ణసంఖ్యలపై నాలుగు ప్రాథమిక ప్రక్రియలను నిష్పాదనము చేయవచ్చు. పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై సూచించవచ్చు.
- గుణిజాలు, కారణాంకాలు, సరి, బేసి సంఖ్యలు, ప్రధాన, సంయుక్త సంఖ్యలు, వర్గ మరియు ఘన సంఖ్యలు, పరిపూర్ణ సంఖ్యలు, సహప్రధానాంకాలు, BODMAS నియమము వంటి వాటిని గూర్చి తెలుసుకొన్నాము.
- $\frac{p}{q}$, ($q \neq 0$ p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు) రూపంలో ఉండే సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలుంటారు. Q అనే అక్షరంతో వీటిని సూచిస్తారు.
- q ధనాత్మకముగా ఉండి p, q లు సహప్రధాన సంఖ్యలయితే ఆ అకరణీయ సంఖ్య కనిష్ఠ రూపంలో ఉన్నదని చెప్తాము.
- ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క లవహారాలను ఒకే సంఖ్యచే గుణించటం లేదా భాగించటం ద్వారా ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సమాన రూపాలు రాయవచ్చు.
- అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై ప్రాతినిధ్యం చేయటము.
- రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనయినా అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 32 06-02-2021 14:53

అధ్యాయం

1.2 అకరణీయ సంఖ్యలు - కరణీయ సంఖ్యలు

1.2.0 అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య కావలసినన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను రాయగలరు.
- ఇచ్చిన సంఖ్యల క.సా.గు, గ.సా.భాలను ప్రధాన కారణాంక విభజన ద్వారా కనుగొనగలరు.
- ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలను అంతమొందే మరియు అంతంకాని దశాంశాలుగా గుర్తించగలుగుతారు.
- కరణీయ సంఖ్యలను గురించి అవగాహన పొందుతారు, వారు ధర్మాలను వివరించగలుగుతారు.
- వాస్తవ సంఖ్యల గురించి అవగాహన పొందగలరు.

1.2.1 పరిచయం

నాగరికత వర్ధిల్లే క్రమంలో (చరిత్రలో) గొప్ప ఆవిష్కరణ సంఖ్యల సృష్టి. సంఖ్యాభావనపై తగిన జ్ఞానం లేని సందర్భాన్ని ఒకసారి ఊహించండి. అప్పుడు ఎన్ని? ఎంత? అనే ప్రశ్నలకు సమాధానం ఉండదు కదా! ఇంకా అనేక సందర్భాలలో వివిధ సందేహాలు, అనుమానాలు కూడా తలెఉత్తతాయి అవునా! అందుకే "సున్నా"తో కలిపి సృష్టించబడిన సంఖ్యావ్యవస్థ మరియు సంఖ్యల సమ్మేళనం ద్వారా, ధర్మాల ద్వారా, నియమాల ద్వారా పొందిన జ్ఞానం మానవాళికి చాలా ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వగలిగింది. అనగా

(i) ఒక బుట్టలో ఎన్ని నారింజ పండ్లు ఉన్నాయి ?

(ii) పహల్గామ్ (కాశ్మీర్)లో అమర్‌నాథ్ యాత్ర సమయంలో ఉండే ఉష్ణోగ్రత ఎంత?

(iii) మీ ఇంటి నుండి మీరు పనిచేయు కార్యాలయానికి చేరుకొనుటకు పట్టు కాలం ఎంత?

(iv) పొలంలో నియమిత కాలంలో పండిన గోధుమ సంచులు ఎన్ని?

మొదలగు సందర్భాలలో, సంఖ్యాజ్ఞానం మరియు సంఖ్యల ద్వారా పరిక్రియలను ఉపయోగించవలసిన అవసరం ఉంటుంది. ఇంకా సంఖ్యలు వివిధ రూపాలలో కూడా ఉంటాయా?

ఉదాహరణకు $\frac{4}{2}$ యొక్క విలువ 2 అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు $\frac{4}{5}$ యొక్క విలువ కూడా ఒక అరణీయ సంఖ్య మరియు $\frac{4}{5} = 0.8$, ఇది ఒక దశాంశ సంఖ్య అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 33 06-02-2021 14:53

$\frac{4}{3}$ యొక్క విలువ ఎంత? గణించగా మనకు 1.333 ...గా వస్తుంది. దీనిని $1.\overline{3}$ గా సూచిస్తాం. అలాగే మనం నిజజీవితంలో $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$.... మొదలగు సంఖ్య రూపాలను కూడా చూసే ఉంటాం.

ఈ సంఖ్యలన్నిటినీ ఏమంటారు? ఇవన్నీ ఏమిటి? ఈ పాఠ్యాంశంలో అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల గూర్చి చర్చిద్దాం.

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు

1 మరియు 2 ల మధ్య ఏవైనా సహజసంఖ్యలుంటాయా?

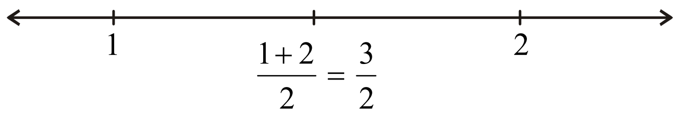
1 మరియు 2 ల మధ్య ఏవైనా పూర్ణాంకాలుంటాయా?

1 మరియు 2 ల మధ్య ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలుంటాయా?

మనం రెండు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మధ్య మరొక పూర్ణ సంఖ్యను కనుగొనలేము.

అయితే 1 మరియు 2 ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలను రాయవచ్చు.

'a' మరియు 'b' లు ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలయితే $\frac{a+b}{2}$ అను అకరణీయ సంఖ్య వాటి మధ్యగల మరొక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. a మరియు b. అంటే $\frac{1}{2}(a+b)$



అనగా $1 < \frac{3}{2} < 2$

ఇప్పుడు మనము 1 మరియు $\frac{3}{2}$ ల మధ్య గల మరొక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనటానికి ప్రయత్నం చేద్దాం.

అయితే $\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1\times 2+1\times 3}{1\times 2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2+3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}\right] = \frac{5}{4}$

అనగా $1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < 2.$

అదేవిధంగా $\frac{3}{2}$ మరియు 2 ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్య

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\times 1+2\times 2}{2\times 1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3+4}{2}\right] = \frac{7}{4}$$

కావున $1 < \frac{3}{4} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < 2.$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 34
06-02-2021 14:53

ఈ విధముగా ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అయినా ఎన్ని అకరణీయ సంఖ్యలయినా ఉండవచ్చు. అనగా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయి.

మరొక పద్ధతి :

అకరణీయ సంఖ్యల సమాన రూపాలు అనే భావన ద్వారా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఎన్ని అకరణీయ సంఖ్యల నయినా కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ - 1 : $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{2}{3}$ ల మధ్య గల 9 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనండి?

సాధన : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6}$;

ఇక్కడ ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క హారాలు సమానము.

కావున మన అవసరం మేరకు భిన్నాలను క్రింది విధంగా మరింతగా పెంచాలి.

$$\frac{3}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{60}; \qquad \frac{4}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{60}$$

$\frac{30}{60}$ మరియు $\frac{40}{60}$ ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\frac{31}{60}, \frac{32}{60}, \frac{33}{60}, \frac{34}{60}, \frac{35}{60}, \frac{36}{60}, \frac{37}{60}, \frac{38}{60}, \frac{39}{60}.$$

ఉదాహరణ - 2 : $-\frac{7}{8}$ మరియు $-\frac{2}{3}$ ల మధ్యగల 12 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన : $-\frac{7}{8} = -\frac{7}{8} \times \frac{3}{3} = \frac{-21}{24}$

$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \times \frac{8}{8} = \frac{-16}{24}$

అకరణీయ సంఖ్యల హారాల సమానము.

$\frac{-21}{24}$ మరియు $\frac{-16}{24}$ కావున మనకు అవసరమైన మేరకు మరిన్ని సమాన అకరణీయ సంఖ్య రూపాలను రాయాలి.

$\frac{-21}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{-63}{72}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 35 06-02-2021 14:53

$$\frac{-16}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{-48}{72}$$

$-\frac{7}{8}$ మరియు $-\frac{2}{3}$ ల మధ్య గల అకరణీయ సంఖ్యలు.

$$-\frac{62}{72}, -\frac{61}{72}, -\frac{60}{72}, -\frac{59}{72}, -\frac{58}{72}, -\frac{57}{72}, -\frac{56}{72}, -\frac{55}{72}, -\frac{54}{72}, -\frac{53}{72}, -\frac{52}{72}, -\frac{51}{72}, -\frac{50}{72}, -\frac{49}{72}$$

పై విధముగా మనము ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనయినా అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు. దీనిని సాంద్రత ధర్మము అంటారు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల మరొక అకరణీయ సంఖ్య కనుగొనుము.

   (i) $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{1}{8}$

2. $\frac{2}{7}$ మరియు $\frac{4}{9}$ ల మధ్యగల 9 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

3. $-\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{11}$ ల మధ్యగల 10 అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

1.2.2 అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము

ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకముల లబ్దంగా రాయవచ్చును. మరియు ప్రధాన కారణాంకాల క్రమం ఏదైనప్పటికి ఈ కారణాంకాల లబ్దం ఏకైకము.

దీనిని సాధారణముగా ఒక సంయుక్త సంఖ్య x ను $x = p_1\, p_2\, p_3 .... p_n$ అని రాయవచ్చు. దీనిలో $p_1\, p_2 .... p_n$ అనేవి ఆరోహణ క్రమంలో రాయబడిన ప్రధానాంకాలు అంటే $p_1 \le p_2 \le .... \le p_n$. ఈ సందర్భంలో ఒకే రకమైన ప్రధానాంకములు వాడినచో వాటిని ప్రధానాంకాల ఘాతాలుగా రాస్తాము.

ఉదాహరణ - 3 : 210 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయుము.

సాధన : కారణాంకాలుగా విభజించటానికి నీవు ప్రధాన సంఖ్యలను మాత్రమే తీసుకోవాలి.

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 36 06-02-2021 14:53

ఈ విధముగా ఏ సంయుక్త సంఖ్యనయినా ప్రధానాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు మరియు అది ఏకైకము.

గమనిక : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... are primes.

ఉదాహరణ – 4 : 2310 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయుము.

సాధన :

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{2310} \\ 3 & \underline{1155} \\ 5 & \underline{385} \\ 7 & \underline{77} \\ 11 & \underline{11} \end{array}$$

$\therefore\ 2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం ద్వారా గ.సా.భా మరియు క.సా.గులను కనుగొనటం

గ.సా.భా : గరిష్ట సామాన్య భాజకము.

క.సా.గు : కనిష్ట సామాన్య గుణిజము.

గ.సా.భా : ఇచ్చిన ప్రతి సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించగలిగే గరిష్ట సంఖ్య ఆ సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భా అవుతుంది.

క.సా.గు : ఇచ్చిన ప్రతి సంఖ్య చేత నిశ్శేషంగా భాగించబడే కనిష్ట సంఖ్య ఆ సంఖ్యల యొక్క క.సా.గు అవుతుంది.

ఉదాహరణ – 5 : 6 మరియు 20 ల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.గులను ప్రధానకారణాంకముల పద్ధతిని ఉపయోగించి కనుగొనండి.

సాధన : $6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{\mathbf{6}} \\ 3 & \underline{\mathbf{3}} \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & \underline{\mathbf{20}} \\ 2 & \underline{\mathbf{10}} \\ 5 & \underline{\mathbf{5}} \\ & 1 \end{array}$$

గ.సా.భా[6, 20]= సంఖ్యల యొక్క సామాన్య ప్రధాన కారణాంకముల కనిష్ట ఘాతాల లబ్ధం

$= 2^1$ (ఇక్కడ 2^1 అనేది సామాన్య ప్రధాన కారణాంకముల కనిష్ట ఘాతం)

$= 2$

క.సా.గు(6, 20) = సంఖ్యల యొక్క ప్రధాన కారణాంకములలో ప్రతి దాని గరిష్ట ఘాతాల లబ్ధం

$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ (ఇక్కడ సామాన్య ప్రధాన కారణాంకముల యొక్క కనిష్ట ఘాతములు తప్ప మిగిలిన వన్నీ తీసుకోవాలి.)

$= 4 \times 3 \times 5$

$= 60.$

గమనిక : ఇచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధము $= 6 \times 20 = 120$

క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల లబ్ధం $= 2 \times 60 = 120.$

పై పరిశీలనల ద్వారా

క.సా.గు $[a, b] \times$ గ.సా.భా$(a, b) = a \times b$

ఉదాహరణ - 6 : 96 మరియు 404 అను సంఖ్యల గ.సా.భాను ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము. వాటి క.సా.గును కనుగొనుము.

సాధన : 96 మరియు 404 ను ప్రధాన కారణాంకాలు

2 | 96	2 | 404
2 | 48	2 | 202
2 | 24	| 101
2 | 12	
2 | 6	
3 | 3	
1	

$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$

$404 = 2 \times 2 \times 101 = 2^2 \times 101$

గ.సా.భా $[96, 404] = 2^2 = 4$ అని మనకు తెలుసు.

గ.సా.భా $[a, b] \times$ క.సా.గు$(a, b) = a \times b$

$$\therefore \text{క.సా.గు}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{గ.సా.భా}[a,b]} = \frac{96 \times 404}{4}$$

$$= \frac{4 \times 14 \times 404}{4}$$

$$= 14 \times 404$$

$$= 5656$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 38　　06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ- 7 : 12, 54, 90 అను సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భా మరియు క.సా.గులను ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

సాధన : మనకు 12, 54, 90 సంఖ్యలు ఇవ్వబడినవి.

2|12	2|54	2|90
2|6	3|27	3|45
3|3	3|9	3|15
1	3|3	5|5
	1	1

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^3$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5$

ఇక్కడ 2^1 మరియు 3^1 అనునది 2 మరియు 3 అనే సామాన్య ప్రధాన కారణాంకములు కనిష్ట ఘాతములు.

గ.సా.భా $(12, 54, 90) = 2^1 \times 3^1 = 6$

మరియు $2^2, 3^3, 5^1$ అనునది 2, 3 మరియు 5 అనే ప్రధాన కారణాంకాల గరిష్ట ఘాతములు. కావున

క.సా.గు 12, 54, 90 $= 2^2 \times 3^3 \times 5^1$

$= 4 \times 27 \times 5$

$= 20 \times 27$

$= 540.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింద ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా వ్యక్తీకరించుము.
   (i) 256 (ii) 3825 (iii) 7429
2. క్రింది పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.భాలను ప్రధాన కారణాంకముల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.
   (i) 12, 15 మరియు 21 (ii) 72 మరియు 108
   (iii) 306 మరియు 657 (iv) 84 మరియు 180
3. $7 \times 11 \times 13 + 17$ మరియు $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ఏ విధంగా సంయుక్త సంఖ్యలగునో వివరించండి.
4. 42 మరియు 98 ల యొక్క క.సా.గును కనుగొని తద్వారా గ.సా.భాను కనుగొనుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 39 06-02-2021 14:53

1.2.3 అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు

I. దశాంశభిన్నాలు : 10 మరియు 10 యొక్క ఘాతాలను హారాలుగా కలిగిన భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలు అంటారు.

ఉదా : $\frac{3}{10}, \frac{45}{100}, \frac{156}{1000}, \ldots.$

$\frac{3}{10}$ = 3 దశాంశాలు = 0.3

$\frac{45}{100}$ = 45 దశాంశాలు = 0.45

$\frac{156}{1000}$ = (సహస్రాంశంగా రాయగా) = 0.156

II. దశాంశ భిన్నమును క్రమ భిన్నముగా రాయటం : భిన్నములోని హారములో దశాంశ భిన్నములోని దశాంశ బిందువుకి బదులుగా '1' ని రాయాలి. దశాంశ బిందువు తర్వాత ఎన్ని అంకెలుంటాయో 1 తర్వాత అన్ని సున్నాలను ఉంచాలి. దశాంశ బిందువుని తొలగించి లవముగా రాయాలి. వచ్చిన భిన్నాన్ని సూక్ష్మరూపంలో రాయాలి.

కావున $0.37 = \frac{37}{100}$

$1.235 = \frac{1235}{1000} = \frac{247}{200}$

ఇప్పుడు అంతమయ్యే దశాంశాలు మరియు అంతం కాని దశాంశాలు గురించి చర్చిద్దాం.

అంతమయ్యే దశాంశాలు మరియు అంతం కాని దశాంశాలు

అకరణీయ సంఖ్య $\frac{p}{q}, q \neq 0$ రూపంలో ఉంటుంది. $q = 2^m \times 5^n$ (m, n లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు) అనగా q యొక్క కారణాంకములు 2 లేదా 5 లేదా 2 మరియు 5 అయితే ఆ అకరణీయ సంఖ్య అంతమయ్యే దశాంశము. కాకపోతే అకరణీయ సంఖ్య అంతంకాని ఆవర్తితమయ్యే దశాంశము అవుతుంది.

ఉదాహరణ - 8 : $\frac{11}{20}$ ని దశాంశముగా రాసి అంతమయ్యేదో, కాదో సరిచూడండి.

సాధన : హారము 20 ని పరిశీలిద్దాము.

$20 = 2 \times 2 \times 5.$

హారములోని ప్రధానకారణాంకములు 2 మరియు 5 ఉన్నాయి.

∴ కావున పై భిన్నము అంతమయ్యే దశాంశమవుతుంది.

సరిచూచుట : భాగహారాన్ని ఉపయోగించి చూడగా

$$\begin{array}{r} 20)\ 11\ (0.55 \\ 0 \\ \hline 110 \\ 100 \\ \hline 100 \\ 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{11}{20} = 0.55$

శేషము సున్నా.

∴ కావున ఇది అంతమయ్యే దశాంశము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 40 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ - 9 : $\frac{128}{70}$ ని దశాంశరూపంలో రాసి అది అంతమయ్యే దశాంశము అవుతుందో కాదో కనుగొనండి.

సోపానం 1 : లవమును హారముచే భాగించుము (సూక్ష్మరూపం) $\frac{128}{70} = \frac{2 \times 64}{2 \times 35} = \frac{64}{35}$

సోపానం 2 : హారమును ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధముగా రాయాలి. ఇది 2^m5^n రూపంలో ఉందేమో పరిశీలించాలి.

$\therefore$ కాని ఇది $2^m . 5^n$ రూపంలో లేదు. కాబట్టి ఇది అంతమయ్యే దశాంశము కాదు.

సోపానం 3 : శేషము విలువ విభాజకము కంటే తక్కువ వచ్చే వరకు భాగహారమును కొనసాగించాలి. $29 < 35$.

సోపానం 4 : తర్వాత విభాజ్యములో దశాంశ బిందువునుంచాలి. మరియు భాగఫలం తర్వాత కూడ దశాంశ బిందువునుంచాలి.

సోపానం 5 : దశాంశ బిందువు తర్వాత విభాజ్యములో సున్నా ఉంచాలి. అలాగే శేషములో కూడా కుడి పక్క సున్నా ఉంచాలి. తర్వాత ఉండే సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలుగానే భావించి భాగహారమును కొనసాగించాలి.

సోపానం 6 : శేషము సున్నా వచ్చే వరకు లేదా అవసరమైన దశాంశస్థానాలు వచ్చే వరకు భాగహారం కొనసాగించాలి.

```
35)64.0000000...  (1.8285714
   35
   290
   280
 ←100
    70
    300
    280
    200
    175
     250
     245
       50
       35
       150
       140
ఆవర్తనం మొదలైనది ←10
```

ఇక్కడ దశాంశ స్థానములు కొనసాగుతూనే ఉన్నాయి.

$$\frac{64}{35} = 1.8285714285714 \ldots$$

ఇక్కడ 285714 అనునది ఆవర్తనం అవుతున్నది.

దీనిని $\frac{64}{35} = 1.8\overline{285714}$ గా రాస్తారు

మరియు ఒకటి పాయింట్ ఎనిమిది బార్ రెండు ఎనిమిది ఐదు ఏడు ఒకటి నాలుగు అని చదువుతారు.

దీనిని అంతం కాని ఆవర్తిత దశాంశము అంటారు.

గమనిక : హారము $2^m.5^n$ రూపంలో ఉండక పోతే ఆ భిన్నం అంతం కాని ఆవర్తిత దశాంశము అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 41 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ - 10 : క్రింద ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలోకి మార్చండి. మరియు ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో ఏవి అంతం కాని ఆవర్తితం కాని దశాంశాలో కనుగొనండి.

(i) $\frac{11}{60}$ (ii) $\frac{3}{75}$

సాధన : (i) $\frac{11}{60}$

```
60)11  (0.1833
    0
   ----
   110
    60
   ----
   500
   480
   ----
    200
    180
   ----
     20
```

$\frac{11}{60} = 0.18\overline{3}$, అంతం కాని ఆవర్తితమయ్యే దశాంశము.

(ii) $\frac{3}{75} = \frac{3}{3\times5\times5} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25}$ (సూక్ష్మ రూపము)

```
25) 1  (0.04
    0
   ----
   10
    0
   ----
   100
   100
   ----
     0
```

$\frac{1}{25} = 0.04$, అంతమయ్యే దశాంశము.

ఉదాహరణ - 11 : భాగహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో వేటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగలమో? వేటిని అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలుపండి.

(i) $\frac{51}{170}$ (ii) $\frac{77}{210}$ (iii) $\frac{129}{2^3.3^1.5^2}$

సాధన : (i) $\frac{51}{170} = \frac{17\times3}{17\times10} = \frac{3}{10} = \frac{3}{2\times5}$ అంతమయ్యే దశాంశము.

(ii) $\frac{77}{210} = \frac{7\times11}{7\times2\times3\times5} = \frac{11}{2\times3\times5}$ (సూక్ష్మ రూపము)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 42 06-02-2021 14:53

ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యను సూక్ష్మ రూపంలో రాయాలి. హారమును పరిశీలించాలి. హారములో '3' అనే సంఖ్య ఉన్నది. కావున

$\therefore \frac{77}{210}$ అనునది అంతం కాని ఆవర్తితమయ్యే దశాంశము.

(iii) $\frac{129}{2^3.3^1.5^2} = \frac{3 \times 43}{2^3 \,.\, 3.5^2} = \frac{43}{2^3.5^2}$

$\therefore$ అంతమయ్యే దశాంశము

ఉదాహరణ - 12 : క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశ రూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (ii) $\frac{9}{80}$

సోపానం 1 : మొదట ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యను కనిష్ఠరూపంలో రాయండి.

సోపానం 2 : హారమును పరిశీలించి దానిని $2^m \times 5^n$ రూపంలోకి అనగా 10^n కి సమానమయ్యే విధంగా మార్చండి.

సోపానం 3 : దశాంశ రూపమును రాయండి.

సాధన :

(i) $\frac{7218}{3^2.5^2}$

$$\frac{7218}{3^2.5^2} = \frac{2 \times 3^2 \times 401}{3^2.5^2}$$

$$= \frac{2 \times 401}{5^2}$$

$$= \frac{802}{5^2}$$

$$= \frac{802}{5^2} \times \frac{2^2}{2^2}$$

$$= \frac{802 \times 4}{(5 \times 2)^2}$$

$$= \frac{3208}{(10)^2}$$

$$= \frac{3208}{100}$$

$$= 32.08$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 7218 \\ 3 & 3609 \\ 3 & 1203 \\ 401 & 401 \\ & 1 \end{array}$$

$7218 = 2 \times 3 \times 3 \times 401$

$= 2 \times 3^2 \times 401$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 43 06-02-2021 14:53

(ii) $\frac{9}{80}$

$$\frac{9}{80} = \frac{9}{2^4 \times 5}$$

$$= \frac{9}{2^4 \times 5} \times \frac{5^3}{5^3}$$

$$= \frac{9 \times 125}{2^4 \times 5^4} = \frac{1125}{10^4} = 0.1125.$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 80 \\ 2 & 40 \\ 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$= 2^4 \times 5$

అంతం కాని ఆవర్తితమయ్యే దశాంశము

శుద్ధ ఆవర్తిత దశాంశము : దశాంశ బిందువు తర్వాత వచ్చే అన్ని అంకెలు ఆవర్తితమయితే ఆ దశాంశ భిన్నము శుద్ధ ఆవర్తితము దశాంశము.

ఉదా : $0.\overline{5}, 0.\overline{27}, 0.\overline{675}, ...$ మొ॥

శుద్ధ ఆవర్తిత దశాంశ భిన్నమును సాధారణ భిన్న రూపంలోకి మార్చటం

సోపానం 1 : ఆవర్తితమయ్యే అంకెలను కేవలము ఒక్కసారి లవముగా రాయాలి.

సోపానం 2 : ఆవర్తితమయ్యే అంకెలు ఎన్ని ఉన్నాయో అన్ని '9' లను హారముగా రాయండి.

ఉదా: (i) $0.\overline{3} = \frac{3}{9}$

(ii) $0.\overline{49} = \frac{49}{99}$

(iii) $0.\overline{05067} = \frac{05067}{99999} = \frac{5067}{99999}$

మిశ్రమావర్తిత దశాంశము : దశాంశ బిందువు తర్వాత కొన్ని అంకెలు ఆవృతము కాకుండా మరికొన్ని సంఖ్యలు ఆవర్తితము అయ్యేలా ఉంటే ఆ దశాంశము మిశ్రమావర్తిత దశాంశము.

ఉదా : $0.25777... = 0.25\overline{7}$

మిశ్రమావర్తిత దశాంశమును సాధారణ భిన్నముగా మార్చటం

ఇచ్చిన దత్తాంశ రూపము క్రింది రూపములో ఉంటే

(i) $0.x\overline{yz} = \frac{xyz - x}{990}$

(ii) $x.y\overline{zd} = \frac{xyzd - xy}{990}$

(iii) $xy.z\overline{dab} = \dfrac{xyzdab - xyz}{9990}$

ఉదా : $1.5\overline{23} = \dfrac{1523-15}{990} = \dfrac{1508}{990} = \dfrac{754}{495}$

$0.22\overline{79} = \dfrac{2279-22}{9900} = \dfrac{2257}{9900}$

అంతం కాని, ఆవర్తితం కాని దశాంశములు

క్రింది దశాంశలను పరిశీలించండి.

(i) 0.0234567891011 ....

(ii) 4.567778888899999 .....

అవును, పై దశాంశాలు అంతం కావు మరియు ఏ అంకెలు ఆవర్తితం కూడా కావు. వీటినే అంతం కాని ఆవర్తితం కాని దశాంశాలంటారు. మరియు పై దశాంశాలను మనం $\dfrac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేము. కావున ఇవి అకరణీయ సంఖ్యలు కావు.

అంతం కాని ఆవర్తితము కాని దశాంశాలను కరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

అకరణీయ సంఖ్యల నిస్సహాయత

(i) $x^2 = 4$ (ii) $x^2 = 2$ అను సమీకరణాలను సాధించండి.

సమీకరణము (i) $x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$ అకరణీయ సంఖ్య

సమీకరణము (ii) $x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ అనునది అకరణీయ సంఖ్య కాదు.

కావున మనకు అకరణీయ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యల ఆవశ్యకత కూడా ఉంది.

గమనిక : 'n' అనునది ఒక సహజ సంఖ్య అయి అది ఒక వర్గ సంఖ్య కానిచో $\sqrt{n}$ కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

భాగాహార పద్ధతిలో $\sqrt{2}$ విలువను కనుగొనుట

సోపానం 1 : ఇచ్చిన సంఖ్యలోని దశాంశ భాగము మరియు పూర్ణాంకభాగాలకు కుడి నుంచి ఎడమకు ఒకఅంకె వదలి మరొకఅంకెకు వేర్వేరుగా కామాల నుంచాలి.

సోపానం 2 : మొదటి ఎడమవైపు ఉన్న సంఖ్యను గమనించండి. ఇక్కడ అది '2'.

సోపానం 3 : 2కు అతి సమీపముగా కలిగిన వర్గ సంఖ్యను పరిశీలించాలి.
ఇక్కడ అది $1 \times 1 = 1$

సోపానం 4 : భాగహార ప్రక్రియను పూర్తిచేయాలి.

సోపానం 5 : తర్వాత ఉండే రెండు అంకెలను శేషము కుడి ప్రక్కన రాయాలి.

1	2.00,00,00,00,00 ...	1.41421
	1......................	
24	100	
	96	
281	400	
	281	
2824	11900	
	11296	
28282	60400	
	56564	
282841	383600	
	282841	
	100759	

సోపానం 6 : ముందున్న భాగఫలమును రెట్టింపు చేసి దానిని తర్వాత సోపానములో రాయాలి.
$1 \times 2 = 2$

సోపానం 7 : విభాజకములోను మరియు భాగఫలములోను ఒకే అంకె రాసి అది భాగహార న్యాయమును పాటించేలా చూడాలి.

$2\boxed{1} \times \boxed{1} = 21$ 100 కంటే చాలా చిన్నది మరియు శేషము విభాజకము కంటే పెద్దది.

$2\boxed{2} \times \boxed{2} = 44$ 100 కంటే చాలా చిన్నది

$2\boxed{3} \times \boxed{3} = 69$ 100 కంటే చాలా చిన్నది

$2\boxed{4} \times \boxed{4} = 96$ 100 కంటే చిన్నది.

సోపానం 8 : పై ప్రక్రియను కొనసాగించాలి.

$\sqrt{2} = 1.41421$ ..... అని మనం గమనిస్తాము.

మరియు ఇది అంతంకాని ఆవర్తితం కాని దశాంశము. కావున ఇది కరణీయ సంఖ్య.

సిద్ధాంతము : p అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ధన పూర్ణ సంఖ్య అయితే a^2 ను pనిశ్శేషంగా భాగిస్తే a ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

అనగా $\frac{a^2}{p}$ అయితే $\frac{a}{p}$

ఉదాహరణకు $a = 4, p = 2$ అయితే

ఇప్పుడు $\frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$ అయితే $\frac{4}{2} = 2$ అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 46 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ – 13 : $\sqrt{3}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుము.

సాధన : $\sqrt{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకొందాం.

$\therefore \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ $\quad$ ($a, b \in Z, b \neq 0$ మరియు a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు)

$\sqrt{3}b = a$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$3b^2 = a^2$

$\therefore \frac{3}{a^2} = b^2$

సిద్ధాంతం నుండి $\frac{3}{a}$ $\quad$ ...(1)

$\therefore \quad a = 3c,$ (c యొక్క కొన్ని విలువలకు)

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$a^2 = (3c)^2$

$a^2 = 9c^2$

కాని $\quad a^2 = 3b^2$

$\therefore \quad 3b^2 = 9c^2$

$b^2 = \frac{9}{3} c^2$

$b^2 = 3c^2$

$\therefore \frac{b^2}{3} = c^2$

సిద్ధాంతము నుండి

$\frac{b}{3}$ $\quad$ ...(2)

(1) మరియు (2) ల నుండి a మరియు b లకు '3' ఒక సామాన్య కారణాంకము

కాని a మరియు b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అనే దానికి ఇది విరుద్ధము

$\therefore$ కావున మన ప్రతిపాదన తప్పు.

$\sqrt{3}$ అనునది కరణీయ సంఖ్య.

గమనిక 1 : ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం మరొక కరణీయ సంఖ్య

గమనిక 2 : ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం మరియు భాగఫలం కూడా మరొక కరణీయ సంఖ్య అగును.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 47 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ: $5+\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $4-\sqrt{5}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$ లు కరణీయ సంఖ్యలు.

వాస్తవసంఖ్యలు (R)

అన్ని అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల సముదాయము సంఖ్యా రేఖలోని ప్రతి బిందువును ఆక్రమిస్తాయి. అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల కలయిక ఒక నూతన సముదాయమవుతుంది. దీనినే వాస్తవ సంఖ్య సమితి అంటారు. R. అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు. సంఖ్యా రేఖలోని ప్రతి బిందువు ఒక వాస్తవ సంఖ్యను ప్రాతినిధ్యం చేస్తుంది.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది దశాంశాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

   (i) 0.275 (ii) 0.0125 (iii) 32.25

2. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి. *m*.

   (i) $\frac{2}{25}$ (ii) $\frac{41}{90}$ (iii) $\frac{18}{125}$ (iv) $\frac{5}{11}$

3. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాసి అని అంతమయ్యే దశాంశాలో అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాలో కనుగొనండి.

   (i) $\frac{5}{16}$ (ii) $\frac{343}{400}$ (iii) $\frac{216}{600}$ (iv) $\frac{3}{7}$

4. భాగహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో వేటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగలమో? వేటిని అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలుపండి.

   (i) $\frac{27}{625}$ (ii) $\frac{91}{1300}$ (iii) $\frac{441}{2^3.5^2.7^2}$ (iv) $\frac{21}{24}$

5. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశ రూపంలో రాయండి.

   (i) $\frac{41}{25}$ (ii) $\frac{56}{2^3.5}$ (iii) $\frac{143}{110}$

6. ఏవేని నాలుగు కరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి?

7. క్రింది వానిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{256}$ (iii) $0.\overline{2375}$

8. క్రింది దశాంశ భిన్నాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

   (i) $15.7\overline{25}$ (ii) $1.37\overline{5}$ (iii) $20.00\overline{11}$ (iv) $3.\overline{42}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 48 06-02-2021 14:53

అభ్యాసము

1. ప్రధాన కారణాంక విభాజన పద్ధతిలో కింది సంఖ్యల క.సా.గు మరియు గ.సా.భా కనుగొనండి.
   (i) 8, 24, 56 (ii) 108 మరియు 144
   (iii) 5, 50, 625 (iv) 72 and 180

2. కింది దశాంశ సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
   (i) 0.675 (ii) 0.018 (iii) 2.375

3. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ సంఖ్య రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
   (i) $\frac{14}{25}$ (ii) $\frac{22}{7}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{52}{250}$

4. భాగహారం చేయకుండానే కిందనీయబడినవి అంతమయ్యే దశాంశాలా ? అంతం కాని దశాంశాలా? ఆవర్తన దశాంశాలా? తెలపండి.
   (i) $\frac{29}{125}$ (ii) $\frac{23}{150}$ (iii) $\frac{333}{2^3 5^3}$ (iv) $\frac{27}{2^4 5^4 7^2}$

5. కింది ఆవర్తన దశాంశాలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
   (i) $0.\overline{7}$ (ii) $0.\overline{13}$ (iii) $0.\overline{435}$ (iv) $1.2\overline{3}$
   (v) $12.\overline{23}$ (vi) $3.\overline{143}$

6. $4\sqrt{6}, 3+\sqrt{7}$ లు కరణీయ సంఖ్యలని నిరూపించండి.

ముఖ్యాంశాలు

- ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనయినా అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనవచ్చు.
- అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను సమానము చేసి వాటి లవాలను పోల్చటం ద్వారా వాటిని పోలుస్తారు.
- ప్రాథమిక అంకగణిత సిద్ధాంతము ప్రకారము ఏ సంయుక్త సంఖ్యనైనా ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు. మరియు అది ఏకైకము.
- ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా క.సా.గు మరియు గ.సా.భాలను కనుగొనటము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 49 06-02-2021 14:53

- గ.సా.భా (a, b) $\times$ క.సా.గు $(a, b) = a \times b$
- $x = \frac{p}{q}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దం యొక్క రూపం $2^m . 5^n$, m మరియు n లు ఋణేతర పూర్ణసంఖ్యలు అయితే అప్పుడు x అంతమయ్యే దశాంశము. q అనునది $2^m . 5^n$. రూపంలో లేకుంటే అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశము. x
- P ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు P అనునది a^2 ని భాగిస్తే ('a' ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య) P అనునది a ను కూడ భాగిస్తుంది.
- అకరణీయ మరియు కరణీయ సంఖ్యల సముదాయమును వాస్తవ సంఖ్యలంటారు. R చే సూచిస్తారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 50 06-02-2021 14:53

అధ్యాయం

1.3 ఘాతాలు – ఘాతాంకాలు

1.3.0 అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

* సంఖ్య యొక్క ఆవర్తన గుణకారాన్ని ఘాతరూపంలో రాయగలరు. ఘతరూపాలో నున్న దీన్ని ఆవర్తన గుణకారంగా రాయగలుగుతారు.
* ఘాత రూపంలో నున్న సంఖ్యలో భూమి, ఘాతాంకాలను గుర్తిస్తారు.
* ఒక సహజ సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతాల లబ్దంగా రాయగలుగుతారు.
* ఘాతాంక న్యాయాలను అవగాహన చేసుకుంటారు.
* a^0 మరియు a^{-m} లను వివరించగలుగుతారు.
* ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి సమస్యలు సాధిస్తారు.
* ఘాతాంక న్యాయాల ఆధారంగా ఘాతరూపంలోని సంఖ్యలను సూక్ష్మీకరించగలరు.

1.3.1 పరిచయం

మీరు మీ నగరంలో మొక్కలను పెంచాలని అనుకున్నావు అనుకుందాం. మీరు ఒంటరిగా చేయగలిగే దానికంటే ఎక్కువ మొక్కలను నాటగలగాలని మీరు కోరుకుంటున్నారు,అయితే మీరు మొక్కలు నాటాడానికి గొలుసు ప్రణాళిక చేసారు.

మీరు ఒక మొక్కను నాటండి మరియు ముగ్గురు సభ్యులను ఒక్కొక్కటి నాటడానికి ప్రేరణ కలిగించి మరియు వారు ఒక్కక్కరు మరో ముగ్గురు సభ్యులను ఒక్కొక్క మొక్క నాటమని ప్రోత్సహించండి.

ఇదేవిధంగా, గొలుసు ప్రణాళిక ఇలాగే కొనసాగితే,

10 వ దశలో నాటిన మొక్కల సంఖ్య ఎంతఅవుతుంది ?

30 వ దశలో నాటిన మొక్కల సంఖ్య ఎంతఅవుతుంది ?

సౌలభ్యం కోసం మీరు నాటిన మొక్కను పరిగణనలోకి తీసుకోరు.

ఇప్పుడు మొక్కల సంఖ్యను లెక్కిద్దాం?

1వ దశ $\rightarrow$ 3 మొక్కలు $=3$

2వ దశ $\rightarrow$ 9 మొక్కలు $=3\times3$

3వ దశ $\rightarrow$ 27 మొక్కలు $=3\times3\times3$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 51 06-02-2021 14:53

4వ దశ $\rightarrow$ 81 మొక్కలు $=3\times3\times3\times3$

ఇదేవిధంగా , 10వ దశలో $\rightarrow 3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3$ దీని విలువ 59049

30 వ దశలో సభ్యుల సంఖ్య $3\times3\times3\times\ldots$ (30 సార్లు) ఉంటుంది, ఇది 205891132094649 విలువను ఇస్తుంది, ఇది చదవడం మరియు గుర్తుంచుకోవడం సులభం కాదు.

అప్పుడు మీరు ఈ రకమైన విలువలను సరళమైన రీతిలో ఎలా వ్యక్తపరుచగలరు?

అదేవిధంగా, మనము చాలా సందర్భాలలో ఈ రకమైన నమూనాలను చూస్తాము. మనము ఇదివరకు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ వాస్తవ సంఖ్యల గుణకారం గురించి నేర్చుకున్నాము.

$4 \times 4 \times 4 = 64$,

$11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$ మరియు

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

13 ను 15 సార్లు గుణించే సంధార్భాన్ని ఆలోచించండి.

$13 \times 13 \times 13 \times$ .... 15 సార్లు

దాన్ని రాయడము ఎంతకష్టమో? దీన్ని సులభతరం చేయడానికి

ఘాతాంక రూపంలో రాయడం ద్వారా ఈ సమస్యను అధిగమించవచ్చు.

ఈ అధ్యాయంలో, మనము ఈఘాతంక రూపం యొక్క అర్థాన్ని వివరిస్తాము, మరియు ఘాతాంకన్యాయాలను రుజువు చేస్తాము మరియు వీటిని వర్తింపజేయడం నేర్చుకుంటాము. ప్రధాన సంఖ్యలఘాతాంకాల లబ్దాల యొక్క వాస్తవ సంఖ్యలను వ్యక్తపరచడం కూడా నేర్చుకుంటాము.

1.3.2 ఘాతంక రూపము, ఘాతంక యొక్క అర్థము

పరిచయంలో చర్చించిన ఉదాహరణను మరోసారి పరిశీలిద్దాం .

ఇప్పుడు మొక్కల సంఖ్యను లెక్కిద్దాం.

1వ దశ $\rightarrow$ 3 మొక్కలు $= 3$

2వ దశ $\rightarrow$ 9 మొక్కలు $= 3 \times 3$

3వ దశ $\rightarrow$ 27 మొక్కలు $= 3 \times 3 \times 3$

4వ దశ $\rightarrow$ 81 మొక్కలు $= 3 \times 3 \times 3 \times 3$

ఇదేవిధంగా , 10వ దశలో $\rightarrow 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ దీని విలువ 59049.

30 వ దశలో సభ్యుల సంఖ్య $3 \times 3 \times 3 \times \ldots$(30 సార్లు) ఉంటుంది, ఇది 205891132094649 విలువను ఇస్తుంది, ఇది చదవడం మరియు గుర్తుంచుకోవడం సులభం కాదు.

కాని గణితం దీనిని సరళతరం చేస్తుంది.

క్రింది నమూనా రూపాన్ని పరిశీలిద్దాం.

3×3 ను 3^2గా రాస్తాము. (3^2ను “మూడు యొక్క వర్గము” అని చదువుతాం)

$3 \times 3 \times 3$ను 3^3 గా రాస్తాము. (3^3ను “మూడు యొక్క ఘనము” అని చదువుతాం.)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 52 06-02-2021 14:53

$3 \times 3 \times 3 \times 3$ ను 3^4గా రాస్తాము. (3^4ను "మూడు యొక్క 4వ ఘాతం" లేదా 3 ఘాతం 4 అని చదువుతాం)

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ను 3^5 గా రాస్తాము.(3^5ను "మూడు యొక్క 5వ ఘాతం" లేదా 3 ఘాతం 5 అని చదువుతాం)

ఇదేవిధంగా, $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ను 3^{10}గా రాస్తాము.(3^{10}ను "మూడు యొక్క 10వ ఘాతం" లేదా 3 ఘాతం 10 అని చదువుతాం).

ఇప్పుడు $3 \times 3 \times 3 \times \ldots$(30 సార్లు) ను ఏవిధంగా రాస్తాము ?

అవును, మీరు ఊహిస్తున్నది నిజమే ...3 ?

$3 \times 3 \times 3 \times \ldots$(30 సార్లు) ను 3 ఘాతం 30 గా రాస్తాము,

గణితం అనేది 205891132094649 ను 3^{30} గా సులభతరం చెయ్యడం లో ప్రతినిధ్యం వహిస్తుంది

తెలుసుకోవలసిన నిబంధనలు

3^5ను పరిశీలించండి దీనిలో 3 ను "భూమి" అని, 5 ను "ఘాతము" లేదా "ఘాతంకము" అని పిలుస్తారు మరియు 3^5 ను 3 యొక్క "ఘాతము" 5 అని లేదా 3 ఘాతం 5 అని పిలుస్తాము .

దీని నుండి మనము చెప్పవచ్చు.

ఒక సంఖ్య యొక్క లబ్దం ను చాలాసార్లు వ్రాయడంను ఘాతరూపం లేదా ఘాతంక రూపం అంటారు.

అయితే, $5 \times 5 \times \ldots.$ 20 సార్లు $= 5^{20}$ మరియు $(-7) \times (-7) \times \ldots.$ 10 సార్లు $= (-7)^{10}$

5^{20} లో, భూమి 5 మరియు ఘాతాంకం 20.

$(-7)^{10}$లో, భూమి -7 మరియు ఘాతాంకం 10.

అదేవిధంగా, ఒక ఆకరణీయ సంఖ్య దాని యొక్క అనేక లబ్దాలను రాయడానికి కూడా ఈ ఘాతంక రూపాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

కాబట్టి,

$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$ (ఆకరణీయసంఖ్యను పదేపదే గుణించినప్పుడు, ఘాతాంకరూపానికి బ్రాకెట్లను ఉపయోగించాలి అందువల్ల భూమి $\frac{4}{7}$ మరియు ఘాతాంకం 6 అవుతుంది.)

మరియు $-\frac{3}{4} \times -\frac{3}{4} \times -\frac{3}{4} \times \ldots\ldots\ldots.$(13 సార్లు) $= \left(-\frac{3}{4}\right)^{13}$.

సాధారణంగా, 'a' అనే ఒక అకరణీయసంఖ్య m సార్లు.

దానితో అదే గుణించబడితే ఆ లబ్దాన్ని a^m అని రాస్తాము .

ఇక్కడ మళ్ళీ 'a' ను భూమి అని m ని ఘాతంకము అంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 53 06-02-2021 14:53

పై చర్చను వివరించడానికి కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం:

ఉదాహరణ 1: క్రింది వాటిని ఘాతరూపం లో రాయండి .

(i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

(ii) $-\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times$..........(50 సార్లు)

సాధన : (i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^7$

(ii) $-\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times$..........(50 సార్లు) $= \left(-\frac{2}{5}\right)^{50}$

ఉదాహరణ 2: క్రింది వాటిని ఘాతరూపంలో రాయండి. మరియు వాటి భూమి, ఘతాంకాలను తెలుపండి.

(i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

(ii) $(-27) \times (-27) \times (-27) \times \ldots$(100 సార్లు)

సాధన : (i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^9$

భూమి $= \frac{2}{3}$ మరియు ఘాతం $= 9$

(ii) $(-27) \times (-27) \times (-27) \times \ldots$(100 సార్లు) $= (-27)^{100}$

భూమి $= -27$ మరియు ఘాతం $= 100$

ఉదాహరణ 3: క్రింది విలువలను లెక్కించండి.

(i) $(2)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (iii) $(1)^{2019}$

సాధన : (i) $(2)^5$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 4 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 8 \times 2 \times 2$

$= 16 \times 2$

$= 32$

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 54 06-02-2021 14:53

$$= \frac{9}{25} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{27}{125} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{81}{625}.$$

(iii) $(1)^{1947} = 1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots$ (1947 సార్లు)

ఇక్కడ $1 \times 1 = 1$ మరియు

$1 \times 1 \times 1 = 1$

ఈ విధంగా $1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots$ (1947 సార్లు) $= 1$ అవుతుంది.

$(1)^{1947} = 1$.

1 యొక్క ఘాతము :

క్రింది వానిని పరిశీలించండి.

$(-1)^2 = -1 \times -1 = 1$

$(-1)^3 = -1 \times -1 \times -1 = -1$

$(-1)^4 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 = 1$

$(-1)^5 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

$(-1)^6 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = 1$

$(-1)^7 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

మనము పై క్రమాలను పరిశీలిస్తే ఈ విధంగా చెప్పగలము.

$(-1)^n = 1$ అయితే n సరిసంఖ్య అయినప్పుడు

$(-1)^n = -1$ అయితే n బేసిసంఖ్య అయినప్పుడు

$(-1)^n = 1$; n సరిసంఖ్య
$= -1$; n బేసిసంఖ్య

సంఖ్య యొక్క ఘాతం యొక్క విలోమము :

సంఖ్యల విలోమాలను గుర్తు తెచ్చుకుందాం

$\frac{2}{3}$ యొక్క విలోమము $\frac{3}{2}$

4 యొక్క విలోమము $\frac{1}{4}$

సాధారణంగా $\frac{p}{q}$ యొక్క విలోమము $\frac{q}{p}$; ఇక్కడ $p, q \neq 0$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 55 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 4: కింది వాటిలో ప్రతిదాని యొక్క విలోమాలను వ్రాసి వాటిని ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 5^{20} (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

సాధన :

(i) 5 యొక్క విలోమము $\frac{1}{5}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల 5^{20} యొక్క విలోమము $\frac{1}{5^{20}}$ లేదా దీనిని $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$ అని రాయవచ్చు.

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\frac{3}{4}$ యొక్క విలోమము $\frac{4}{3}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ యొక్క విలోమము $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

(iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

$-\frac{5}{6}$ యొక్క విలోమము $-\frac{6}{5}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$ యొక్క విలోమము $\left(-\frac{6}{5}\right)^9$.

1.3.3 ఒక సంఖ్యను ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధాలుగా విభజించి ఘాత రూపంలో రాయడం.

ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధానకారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఘాతరూపంలో రాయవచ్చు.

16, 243 మరియు 72 అనే సంయుక్త సంఖ్యలను తీసుకుందాం.

(i) $16 = 2 \times 8$

$= 2 \times 2 \times 4$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

2	16
2	8
2	4
	2

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 56 06-02-2021 14:53

(ii) $243 = 3 \times 81$

$= 3 \times 3 \times 27$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 9$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(iii) $72 = 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

ఇప్పుడు ఈ మూడింటి ప్రధానకారణాంకాలను ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరుచూదాం.

(i) $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$16 = 2^4$

(ii) $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$243 = 3^5$

(iii) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$72 = 2^3 \times 3^2$

ఒకటి తప్ప ఏదైనా సహజసంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధాలుగా రాసి వాటిని ఘాతాంక రూపంలో రాయవచ్చని మరియు అది ఏకైకమని మనకు తెలుసు.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 5: ఈ క్రింది వాటిని ఘాతాంక రూపములో వ్రాయుము.

(i) 360 (ii) 5445 (iii) 24300

సాధన :

(i) $360 = 2 \times 180$

$= 2 \times 2 \times 90$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 45$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 57 06-02-2021 14:53

(ii) $5445 = 3 \times 1815$

$= 3 \times 3 \times 605$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 121$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 11$

$= 3^2 \times 5^1 \times 11^2$

(iii) $24300 = 2 \times 12150$

$= 2 \times 2 \times 6075$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2025$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 675$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 225$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
	5

3	5445
3	1815
5	605
11	121
	11

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది వాటి ఘాతరూపాలను రాయండి.

   (i) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$

   (ii) $\left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times .....$ 15 సార్లు

   (iii) $\left(-\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right) \times .....$ 25 సార్లు

2. క్రింది వాటి భూమి మరియు ఘాతాలను రాయండి.

   (i) $(-3)^5$ (ii) $(7)^4$ (iii) $\left(-\frac{6}{5}\right)^9$

3. క్రింది విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$ (iv) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

4. క్రింది వాటి విలోమాలను కనుగొనండి.

   (i) 3^5 (ii) $(-7)^4$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{3}{11}\right)^{15}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 58 06-02-2021 14:53

5. క్రింది పదాలను ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరుచుము.

(i) 429　　(ii) 648　　(iii) 1512

6. ఈ క్రింది సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకములను రాసి వాటిని ఘాతరూపంలో వ్యక్తనరుచుము.

(i) 729　　(ii) 512　　(iii) 2592　　(iv) $\frac{1331}{4096}$

(v) $-\frac{243}{32}$

1.3.4 భాగఫల నియమము

గుణకార న్యాయము

క్రింది వానిని పరిశీలిద్దాం.

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ మరియు $3^2 = 3 \times 3$ అని తెలుసు.

3^2 ను 3^4 చే గుణించినప్పుడు లబ్దము ఏమి వస్తుంది ?

$3^2 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

సాధారణీకరించడానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

$3^2 \times 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$

$3^2 \times 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$

$3^2 \times 3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^9$

$3^2 \times 3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{10}$

పై ప్రతి సందర్భములో సమాన భూములు గల పదాలను గుణించినప్పుడు, ఒకే భూమి వ్రాసి గాతాంకాలను కూడవలయును.

ఇప్పుడు మనము క్రింది విధంగా సాధారణీకరించుద్దాం.

$a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

$a^2 \times a^4 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

$a^2 \times a^5 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$

.

.

.

$a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \ldots\ m$ సార్లు$) \times (a \times a \times a \times \ldots\ n$ సార్లు$)$

$= a \times a \times a \times \ldots\ (m + n)$ సార్లు $= a^{m+n}$.

అందువల్ల

న్యాయము 1: a ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 59　　06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 6: క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $5^3 \times 5^4$ (ii) $(-7)^{13} \times (-7)^7$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40}$

సాధన :

(i) $(5)^3 \times (5)^4$ ఈ రెండు ఘాత పదాలలో భూములు సమానం.

అది '5' మరియు, ఈ పదాలలో గణించబడుతున్నాయి.

కావున ఘాతంక న్యాయం 1 నుండి, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

అని మనకు తెలుసు.

$(5)^3 \times (5)^4 = (5)^{3+4} = (5)^7$

(ii) $(-7)^{13} \times (-7)^7$ ఈ రెండు ఘాతపదాలలో సమాన భూములు -7 ను కలిగి ఉన్నాయి. మరియు ఈ ఘాత పదాలు గణించబడుతున్నాయి.

కావున ఘాతంక న్యాయం 1 నుండి, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల,

$(-7)^{13} \times (-7)^7 = (-7)^{13+7} = (-7)^{20}$

(iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40}$ ఈ రెండు ఘతపదాలు సమాన భుములు $\frac{4}{5}$ ను కలిగి ఉన్నాయి. మరియు ఈ ఘాత పదాలు గుణించబడుతున్నాయి.

కావున ఘాతాంక న్యాయం-1 నుండి $a^m \times a^n = a^{m+n}$ అని మనకు తెలుసు.

అందువల్ల

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40} = \left(\frac{4}{5}\right)^{60+40} = \left(\frac{4}{5}\right)^{100}$$

భాగఫల నియమము

క్రింది వానిని పరిశీలిద్దాము.

$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ మరియు $3^2 = 3 \times 3$ అని మనకు తెలుసు.

3^7 ను 3^2 చే భాగించినపుడు భాగఫలం ఏమి వస్తుంది?

$$\frac{3^7}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

సాధారణీకరించడానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 60 06-02-2021 14:53

$$\frac{3^7}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3}}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$$\frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3}} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}} = 3 \times 3 = 3^2$$

పై ప్రతి సందర్భములో సమాన భూములు గల పదాలను భాగిస్తున్నప్పుడు, విభాజ్యం యొక్క ఘాతంకం నుండి విభాజకం యొక్క ఘాతంను తీసివేయడం ద్వారా మనకు భాగఫలం యొక్క ఘాతాంకం లభిస్తుంది.

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$$

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$\frac{3^7}{3^6} = 3^{7-6} = 3^1$$

ఇప్పుడు మనము క్రింది విధంగా సాధారణీకరించుద్దాం.

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a^{7-2} = a^5$$

సాధారణీకరించడానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాము.

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times \cancel{a \times a}}{\cancel{a \times a}} = a^{7-2} = a^5$$

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times \cancel{a \times a \times a}}{\cancel{a \times a \times a}} = a^{7-3} = a^4$$

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times \cancel{a \times a \times a \times a}}{\cancel{a \times a \times a \times a}} = a^{7-4} = a^3$$

.

.

.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots (m \text{ సార్లు})}{a \times a \times a \times a \times \ldots (n \text{ సార్లు})} = \frac{a \times a \times a \times \ldots \times \cancel{a \times a \times a \times a \ldots\ldots} (m \text{ సార్లు})}{\cancel{a \times a \times a \times a \ldots\ldots} (n \text{ సార్లు})}$$

$$= a \times a \times a \times \ldots\ldots (m - n) \text{ సార్లు} = a^{m-n}.$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 61 06-02-2021 14:53

న్యాయము 2: *a* ఏదైన ఒక తర అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (లేదా) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ఉదాహరణ 7: క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $7^5 \div 7^3$ (ii) $\frac{5^{10}}{5^6}$ (iii) $\frac{13^{100}}{13^{25}}$

సాధన :

(i) $7^5 \div 7^3$ ఈ రెండు ఘాతపదాలు సమాన భూములు '7' ను కలిగి ఉన్నాయి.

ఇక్కడ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ అని తెలుస.

$\therefore \quad 7^5 \div 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

(ii) $\frac{5^{10}}{5^6}$ లో ఈ రెండు ఘాతపదులు సమాన భూములు '5' ను కలిగి ఉన్నాయి.

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad \frac{5^{10}}{5^6} = 5^{10-6} = 5^4$.

(iii) $\frac{13^{100}}{13^{25}}$ ంలో ఈ రెండు ఘాతపదులు సమాన భూములు 13 ను కలిగి ఉన్నాయి.

ఇక్కడ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ అని తెలుసు.

$\therefore \quad \frac{13^{100}}{13^{25}} = 13^{100-25} = 13^{75}$

ఘాతన్యాయము

$(5^2)^3$ ను పరిశీలిద్దాం.

$$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^6$$

అదేవిధంగా

$$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^8$$
$$(5^2)^5 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^{10}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 62 06-02-2021 14:53

పై ప్రతి సందర్భంలో మనము ఒక ఘాతంకమును మరొక ఘాతాకానికి పెంచినపుడు, ఫలిత ఘాతంకం అనేది ఘాతంకాల లబ్ధం అవుతుంది.

ఇప్పుడు దీనిని సాధారణీకరిద్దాం.

$(5^3)^6 = 5^{3 \times 6} = 5^{18}$

$(5^3)^7 = 5^{3 \times 7} = 5^{21}$

$(5^3)^8 = 5^{3 \times 8} = 5^{24}$

$(5^3)^9 = 5^{3 \times 9} = 5^{27}$

అదేవిధంగా

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots$ (n సార్లు) $= a \times a \times a \times \ldots$ (mn సార్లు) $= a^{m \times n}$

న్యాయము 3: a అనేది శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య అయితే $(a^m)^n = a^{m \times n}$

ఉదాహరణ 8: క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.

(i) $(3^5)^4$ (ii) $(1947^{10})^7$ (iii) $(1729^{100})^{13}$ (iv) $[(-5)^{11}]^5$

సాధన :

(i) $(3^5)^4 = 3^{5\times4} = 3^{20}$

(ii) $(1947^{10})^7 = 1947^{10\times7} = 1947^{70}$

(iii) $(1729^{100})^{13} = 1729^{100 \times 13} = 1729^{1300}$.

(iv) $[(-5)^{11}]^5 = (-5)^{11 \times 5} = (-5)^{55}$

శూన్య ఘాతంకం:

$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ అని మనకు తెలుసు.

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$3^0 = 3^{1-1} = \frac{3^1}{3^1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$4^0 = 4^{1-1} = \frac{4^1}{4^1} = \frac{4}{4} = 1$$

.

.

.

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 63 06-02-2021 14:53

ఇప్పుడు, శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య ఘాతం '0' (zero) అయితే దాని విలువ '1' అవుతుందని చెప్పవచ్చు.

న్యాయము 4: 'a' ఏదైన శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య అయిన, $a^0 = 1 (a \neq 0)$

ఋణ ఘాతాకం :

మళ్లీ $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ సంబంధాన్ని పరిశీలిద్దాం.

పై సంబంధంలో $m = 0$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

అప్పుడు $a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n}$ ఘాతాంక న్యాయము -4 ప్రకారము $a^0 = 1$ అని తెలుసు.

$\therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

న్యాయము 5: a ఏదైన శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య అయిన $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

2 యొక్క విలోమము $\frac{1}{2}$ మరియు $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

అదేవిధంగా 3 యొక్క విలోమము $\frac{1}{3}$ మరియు $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

4 యొక్క విలోమము $\frac{1}{4}$ మరియు $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$

అందువల్ల, సాధారణంగా a యొక్క విలోమము a^{-1} అని చెప్పగలము.

అదేవిధంగా, 2^3 యొక్క విలోమము 2^{-3}

3^5 యొక్క విలోమము 3^{-5}

7^{10} యొక్క విలోమము 7^{-10}

$\left(\frac{7}{3}\right)^4$ యొక్క విలోమము $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ ఇది $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ కు సమానం.

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ యొక్క విలోమము $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

'a' ఏదైనా శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య మరియు 'm' అనేది ఏదైనా ధనపూర్ణాంకం అయితే a^m యొక్క విలోమం a^{-m} మరియు a^{-m} యొక్క విలోమం a^m అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 64 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 9: క్రింది వానిని భిన్నాలుగా లేదా పూర్ణ సంఖ్యలుగా వ్యక్తపరుచుము.

(i) 10^{-3} (ii) $(-2)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ (iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$

సాధన :

(i) $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ ఎందుకనగా $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ [న్యాయం - 5 నుండి]

$10^{-3} = \frac{1}{1000}$

(ii) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5}$ ఎందుకనగా, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ [న్యాయం- 5 నుండి]

$(-2)^{-5} = \frac{1}{-2\times-2\times-2\times-2\times-2} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

(iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ ఎందుకనగా $a^{-1} = \frac{1}{a}$ [న్యాయం-5 నుండి]

మరియు $\frac{1}{5} = 5^{-1}$

కాబట్టి, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = (5^{-1})^{-3} = 5^{-1\times-3} = 5^3 = 125$

(iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$ ఎందుకనగా, $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$ (పై వివరణ ప్రకారం)

కాబట్టి, $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1\times4} = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]^{4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$

ఇప్పటి వరకు మనము ఒక భూమి కలిగిన ఘాతపదాల న్యాయాల గురించి చర్చించాము. ఇప్పుడు వేరు వేరు భూములు గల ఘాత పదాల న్యాయాల గురించి చర్చిద్దాం.

న్యాయము 6: $(a\,.\,b)^m = a^m\,.\,b^n$

న్యాయము 7: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^n},\ (b\neq 0)$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 65 06-02-2021 14:53

$2^3 = 8$ అని తెలుసు. 2 యొక్క ఘాతం 3 కాకుండా వేరే ఘాతం 8 కి సమానం అవుతుందని కాదు. అదేవిధంగా ఒక సంఖ్య వేరు వేరు ఘాతాలకు సమాన విలువలను ఇవ్వలేదు అని చెప్పగలము. అందువల్ల క్రింది విధంగా మనము నిర్ధారణకు రావచ్చు.

న్యాయము 8: $a^m = b^n$, అయినా $m=n$, $a > 0$ మరియు $a \neq 1$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

సూక్ష్మీకరించుము.

1. (i) $x^3 \times x^5$ (ii) $a^{55} \times a^{45}$ (iii) $\left(\frac{x}{y}\right)^{70} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{130}$
   (iv) $\left(\frac{p}{q}\right)^{500} \times \left(\frac{p}{q}\right)^{200}$

2. (i) $\frac{x^{10}}{x^7}$ (ii) $a^{50} \div a^{20}$ (iii) $(xy)^{25} \div (xy)^{12}$ (iv) $\frac{(ab)^{300}}{(ab)^{200}}$

3. (i) $(x^5)^2$ (ii) $(a^{10})^5$ (iii) $(x^3)^2 \times (x^2)^3$ (iv) $(a^5)^2 - (a^2)^5$

విలువను కనుగొనండి.

4. (i) $2 + 2^{-1}$ (ii) $1 + 3^{-2}$ (iii) $2^{-3} + 5^{-2}$ (iv) $3^{-2} + 3^{-2} + 3^0$

1.3.5 ఘాతాంక న్యాయాలు అనువర్తనాలు

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఘాతాంక న్యాయాల అనువర్తనాలను చూద్దాం. క్రింది సమస్యలను పైన చర్చించిన ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి సాధిద్దాము.

ఉదాహరణ 10: క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించి ఘాతరూపంలో వ్రాయండి.

(i) $5x^3 \times 3x^7$ (ii) $(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$ (iii) $\frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

సాధన :

(i) $5x^3 \times 3x^7$ అని ఇవ్వబడినది.

$5x^3 \times 3x^7$ [సూక్ష్మీకరించడానికి స్థిర సంఖ్యలను గుణించి ఘాత న్యాయాలను వర్తింప జేయాలి.]

$= 5 \times 3x^{3+7}$ [ఘాతాంక న్యాయం-1 ప్రకారం $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$=15\, x^{10}$

(ii) $(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$ అని ఇవ్వబడినది.

$(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$

$= (2^4x^{2\times4}y^4) \times (25^2\, x^{3\times2}\, y^{2\times2})$ [ఘాతంక న్యాయం-3 ప్రకారం $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (16x^8y^4) \times (625x^6\, y^4)$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 66 06-02-2021 14:53

$= 16 \times 625\, x^{8+6}\, y^{4+4}$ [ఘాతాంక న్యాయం-1 ప్రకారం $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 10000x^{14}\, y^8$

(iii) $\frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$ అని ఇవ్వబడినది.

$= \frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

$= \frac{(6^4\, a^{3\times4} b^{2\times4})}{(36^2\, a^{2\times2} b^{3\times2})}$ [ఘాతాంకన్యాయం-3 ప్రకారం $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= \frac{1296\, a^{12} b^8}{1296 a^4 b^6}$

$= a^{12-4} b^{8-6}$ [ఘాతంకన్యాయం-2 ప్రకారం $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= a^8 b^2.$

ఉదాహరణ 11: ఈ క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించి ఘాతాంక రూపంలో వ్రాయుము.

(i) $\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

(ii) $(8^2 \times 8^4) \div 8^3$

(iii) $\frac{5^7}{5^2} \times 5^3$

(iv) $\frac{5^4 \times x^{16} y^5}{25^2 \times x^7 y^4}$

సాధన :

(i) Given $\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

$\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

$= \{2^{12} \times 2^8\} \div 2^{12}$ [ఘాతంకన్యాయం-3 ప్రకారం $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= 2^{(12+8)} \div 2^{12}$ [ఘాతంకన్యాయం-1 ప్రకారం $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 2^{20} \div 2^{12}$ [ఘాతంకన్యాయం-2 ప్రకారం $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 2^{(20-12)}$

$= 2^8$

(ii) $(8^2 \times 8^4) \div 8^3$ అని ఇవ్వబడింది.

$(8^2 \times 8^4) \div 8^3$ [ఘాతంకన్యాయం-1 ప్రకారం $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 8^{(2+4)} \div 8^3$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 67 06-02-2021 14:53

$= 8^6 \div 8^3$ [ఘాతంకన్యాయం-2 ప్రకారం $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 8^{(6-3)}$

$= 8^3$ [8 యొక్క ప్రధానకారణాంకం]

$= (2^3)^3$

$= 2^9$

(iii) $\frac{5^7}{5^2} \times 5^3$ అని ఇవ్వబడినది.

$= 5^{(7-2)} \times 5^3$ [ఘాతంకన్యాయం-2 ప్రకారం $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 5^5 \times 5^3$ [ఘాతంకన్యాయం-1 ప్రకారం $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 5^{(5+3)} = 5^8$

(iv) $\frac{5^4 \times x^{10} y^5}{25 \times x^7 y^4}$ అని ఇవ్వబడినది.

$\frac{5^4 \times x^{10} y^5}{(5^2)^2 \times x^7 y^4}$ [హారంలో 25 యొక్క ప్రధాన కారణాంకం]

$= \frac{5^4 \times x^{10} y^5}{5^4 \times x^7 y^4}$ [ఘాతాంక న్యాయం-3 ప్రకారం $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (5^{4-4} \times x^{10-7} y^{5-4})$ [ఘాతాంక న్యాయం-2 ప్రకారం $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= 5^0 x^3 y^1$ [$\because 5^0 = 1$]

$= 1x^3 y = x^3 y.$

ఉదాహరణ 12: క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించి ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరుచుము.

(i) $(x^6 y^4 z^{x-2}) \times (x^{-3} y^{-5} z^{-1}) \times (x^2 y z^3)$

(ii) $\frac{a^7 b^{-5} c^{-4}}{a^{-3} b^3 c^4}$

(iii) $(p^2 q^2 r^2)^3 \times (p^3 q^3 r^3)^{-2}$

సాధన :

(i) $(x^6 y^4 z^{x-2}) \times (x^{-3} y^{-5} z^{-1}) \times (x^2 y z^3)$ అని చూపుము.

$(x^6 y^4 z^{x-2}) \times (x^{-3} y^{-5} z^{-1}) \times (x^2 y z^3)$

$= (x^{6+(-3)+2} y^{4+(-5)+1} z^{-2+(-5)+1})$ [ఘాతాంక న్యాయం-1 ప్రకారం $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= x^{8-3} y^{5-5} z^{1-7}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 68 06-02-2021 14:53

$= x^5 y^0 z^{-6}$ [$y^0 = 1$ మరియు ఏదైనా సంఖ్యను 1 చే గుణించగా అదే సంఖ్య వచ్చును]

$= \frac{x^5}{z^6}$

(ii) $\frac{a^7 b^{-5} c^{-4}}{a^{-3} b^3 c^4}$ అని ఇవ్వబడినది.

$\frac{a^7 b^{-5} c^{-4}}{a^{-3} b^3 c^4}$

$= a^{7-(-3)} b^{5-3} c^{-4-(-4)}$ [ఘాతాంక న్యాయం-2 ప్రకారం $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= a^{7+3} b^{5-3} c^{-4+4}$

$= a^{10} b^2 c^0$ [$\because c^0 = 1$]

$= a^{10} b^2$

(iii) $(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$ అని చూపుము.

$(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$

$= (p^{2\times3} q^{2\times3} r^{2\times3}) \times (p^{3\times-2} q^{3\times-2} r^{3\times-2})$

$= (p^6 q^6 r^6) \times (p^{-6} q^{-6} r^{-6})$

$= (p^{6-6} q^{6-6} r^{6-6})$

$= (p^0 q^0 r^0) = 1$

ఉదాహరణ 13: $\frac{x^{m+n} \times x^{n+l} \times x^{l+m}}{(x^m \times x^n \times x^l)^2} = 1$ అని చూపుము.

సాధన : **LHS** $= \frac{x^{m+n} \times x^{n+l} \times x^{l+m}}{(x^m \times x^n \times x^l)^2}$

$= \frac{x^{m+n+n+l+l+m}}{(x^{2m+2n+2l})}$

[లవంలో $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$, హారంలో $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= \frac{x^{2m+2n+2l}}{(x^{2m+2n+2l})} = 1 =$ [RHS] నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 14 : $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^r = 1$ అని చూపండి.

సాధన : LHS $= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^r$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 69 06-02-2021 14:53

$$= \left(\frac{x^{pr}}{x^{qr}}\right) \times \left(\frac{x^{qp}}{x^{rp}}\right) \times \left(\frac{x^{rq}}{x^{pq}}\right) \qquad [(a^m)^n = a^{mn} \text{ ప్రకారం}]$$

$$= (x^{pr-qr}) \times (x^{pq-rp}) \times (x^{rq-pq}) \qquad [\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ ప్రకారం}]$$

$$= x^{pr-qr+qp-rp+rq-pq}$$

$$= x^0 = 1.$$

ఎందుకనగా, $pq = qp,\ qr = rq$ మరియు $pr = rp,$

కాబట్టి, $pr - qr + rp + rq - pq = 0$

ఉదాహరణ 15: $3^{x+2} = 729$ అయినా, 3^{x-2} విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : $3^{x+2} = 729$ అని ఇవ్వబడింది.

729 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయగా $729 = 3^6$

$\therefore\ 3^{x+2} = 729$

అప్పుడు $3^{x+2} = 3^6$

$a^m = b^n$ అయినా $m = n$ [$\because$ ఘాతాంక న్యాయం : 8]

అప్పుడు $x + 2 = 6,\ x = 4$

$x = 4$ అయినా, 3^{x-2} యొక్క విలువ $x - 2 = 4 - 2 = 2$

$\therefore\ 3^{x-2} = 3^2 = 9.$

1.3.6 ప్రామాణిక రూపం

మీ నాన్నగారు ₹1,61,688 లతో ఒక బైక్ కొన్నాడు అనుకొందాం. అప్పుడు మీ స్నేహితుడు బైక్‌ధర ఎంత? అని మిమ్మల్ని అడిగాడు. అప్పుడు మీరు సులభంగా దాని ధర ఏమని చెపుతారు?

1.61 లక్షలు లేదా ఒక లక్ష అరవై ఒక వేయి ఆరువందల ఎనభై ఎనిమిది అని చెబుతారా?

సాధారణంగా మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య లేదా మిక్కిలి చిన్న సంఖ్యను సులభంగా తెలియజేయడానికి ప్రామాణిక రూపాన్ని వాడతాము. ఉదాహరణకు 400000 ను సాధారణ రూపంలో రాయలనుకున్నాము.

$10^5 = 100000$, so 1.61 లక్షలు $= 1.61 \times 100000 = 1.61 \times 10^5$.

కాబట్టి 1.61 లక్షలను ప్రామాణిక రూపంలో 1.61×10^5 అని రాయవచ్చు. ఈ పద్ధతిలో అతిపెద్ద సంఖ్యని మనము సులభంగా రాయవచ్చు.

ఈ పద్ధతిని ఒక సంఖ్యను 1 మరియు 10 మధ్యగల దశాంశ భిన్నంగా రాసి దానికి కావలసిన 10 యొక్క ఘాతాలతో లబ్ధంగా చేయటాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం అంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 70 06-02-2021 14:53

$0.125 = \frac{125}{1000}$ ను ప్రామాణిక రూపంలో రాయడానికి మొదట 1 నుండి 10 పూర్ణాంక భాగంను తీసుకుందాం. ఇక్కడ మొదటి సంఖ్య 1 మరియు ఈ సంఖ్య 1.25 గా వ్యక్తపరుస్తాం. అనగా దశాంశ భాగం రెండు స్థానాలు ఎడమవైపుకు జరుగుతుంది.

m & ∯ T ф Íe Ö D ȉ £s Ấ | Ÿ $0.125 = 1.25 \times 10^{-2}$.

ఉదాహరణ 16: 81900000000000 యొక్క ప్రామాణిక రూపంను వ్రాయుము.

సాధన : ఇది 10^{13} అవుతుంది. ఎందుకనగా దశాంశ బిందువు 13 స్థానాలు ఎడమకు జరుగుతుంది. అప్పుడు సంఖ్య 8.19 అవుతుంది.

$$81\ 900\ 000\ 000\ 000 = 8.19 \times 10^{13}$$

ఉదాహరణ 17 : 0.0000012 ను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

సాధన : ఇది 10^{-6} అవుతుంది. ఎందుకనగా దశాంశ బిందువు 6 స్థానాలు కుడివైపు జరుగుతుంది. అప్పుడు సంఖ్య 1.2

$$0.0000012 = 1.2 \times 10^{-6}$$

అభ్యాసము

1. క్రింది వానిని సూక్ష్మీకరించుము.
   - (i) $x^7 \times x^0$
   - (ii) $-3a^5 \times 2a^7$
   - (iii) $8a^2x - 4a^3$
   - (iv) $32(a^2)^5 \div (2a^5)^2$
   - (v) $(x^5)^2 + (y^3)^3 + (z^4)^2$
   - (vi) $(2a^3)^2 - (-3b)^3$
   - (vii) $(2x^4)^3 + (-3y^2)^2$
   - (viii) $x^{a-b} \times x^{b-c} \times x^{c-a}$
2. క్రింది వాని విలువలు కనుగొనుము.
   - (i) $2^3 \times 2^5$
   - (ii) $3^2 \times 3^{-2}$
   - (iii) $1+\left(\frac{1}{2}\right)^5$
   - (iv) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{6}$
   - (v) $\left[\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^2\right\}^{-2}\right]^{-1}$
   - (vi) $2^{-1} + 2^{-1}$
   - (vii) 4×2^{-2}
   - (viii) $2^2 \times 2^3 \div 2^5$
3. $2^m = 32$ అయినా 2^{m+3} విలువ ఎంత?
4. $\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{16}{81}$ అయినా $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ విలువ ఎంత?
5. $5^{2x+1} \div 25 = 125$ అయినా 'x' విలువ ఎంత ?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 71

06-02-2021 14:53

6. $a = 3$ మరియు $b = 2$ అయినా, (i) $a^b + b^a$, (ii) $a^b - b^a$ విలువలు కనుగొనండి.

7. $(a + b)(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = ab$ అని చూపుము.

8. $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}$ విలువ కనుగొనండి.

9. సూర్యుడు మరియు భూమికి గల సరాసరి దూరం 149597870 అయిన ఈ దూరాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము.

10. కరోనా వైరస్ యొక్క అంచనా వేసిన వ్యాసము 0.0000005 సెం.మీ. అయినా దీనిని ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండి.

ముఖ్యాంశాలు

- $a \times a \times a \times ..... m$ సార్లు $= a^m$. a^m లో 'a' ను భూమి అని 'm' ను ఘాతం అని పిలుస్తాము. మరియు a^m ను ఘాతాంక రూపం లేదు ఘాతరూపం అని పిలుస్తాము.
- ఘాతాంక న్యాయాలు
    - o **న్యాయము-1:** $a^m \times a^n = a^{m+n}$
    - o **న్యాయము-2**: $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (లేదా) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
    - o **న్యాయము-3:** $(a^m)^n = a^{m \times n}$
    - o **న్యాయము-4:** $a^0 = 1\ (a \neq 0)$
    - o **న్యాయము-5:** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
    - o **న్యాయము-6:** $(\mathrm{a}\ .\ b)^m = a^m\ .\ b^n$
    - o **న్యాయము-7:** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{a^n}, (b \neq 0)$
    - o **న్యాయము-8**: If $a^m = b^n$, అయినా $m = n$, $a > 0$ మరియు $a \neq 1$
- a^{-1} యొక్క విలోమం $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. మరియు a^m యొక్క విలోమం a^{-m} మరియు a^{-m} యొక్క విలోమం a^m.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 72 06-02-2021 14:53

యూనిట్ 2 బీజగణితం

అధ్యాయం 2.1 బీజగణితం - ప్రాథమిక భావనలు

2.1.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- చరరాశిని గుర్తించగల్గుతారు.
- బీజీయ సమాసమును వ్యక్తపరచగల్గుతారు.
- సజాతి, విజాతి పదాలను గుర్తించగలరు.
- బీజీయ సమాసాల రకాలను గుర్తించగలరు.
- బీజీయ సమాసాల సూక్ష్మీకరణ చేయగలరు.
- బీజీయ సమాసాలను ప్రాథమిక ప్రక్రియల ద్వారా సాధించగల్గుతారు.
- బీజీయ సమాస విలువను కనుగొనగలరు.
- బహుపదులను గురించి తెలుసుకుంటారు.
- బహుపదుల పరిమాణం మరియు రకాలను తెలియపరుస్తారు.
- బహుపది విలువను కనుగొనగల్గుతారు.

2.1.1 పరిచయం

మనం సంఖ్యలనూ, వాటి ధర్మాలను గురించి తెలిపే గణితశాఖను అంకగణితం అని, జ్యామితీ ఆకారాలను వాటి ధర్మాలను గురించి తెలిపే గణిత విభాగాన్ని రేఖాగణితం అని తెలుసుకున్నాం. గణితంలో బీజగణితం అనే మరో గణిత విభాగాన్ని గురించి తెలుసుకుందాం.

బీజగణితం మనం ప్రధానంగా "తెలియని రాశులను" బీజీయ అక్షరాలుచే $(a, b, c, d, ..., x, y, z)$ సూచిస్తాం. కొన్ని గణిత సమస్యలలో తెలియని రాశులను బీజీయ అక్షరాలతో సూచించి ఆ సమస్యలను వివిధ పద్ధతులలో సాధిస్తాము. ఈ పద్ధతులను తెలుసుకుంటే మన నిత్యజీవితంలోని అనేక గణిత సమస్యలను మరియు పజిల్స్‌ను సులభంగా సాధించవచ్చు.

క్రింది సంభాషణ పరిశీలించండి.

అర్చన : అంజలి నీవు 1 నుండి 10 లోపు ఏదైనా సంఖ్యను కోరుకో

అంజలి : కోరుకున్నాను

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 73 06-02-2021 14:53

అర్చన	: ఆ సంఖ్యను రెట్టింపు చేయు
అంజలి	: అలాగే చేశాను
అర్చన	: వచ్చిన సంఖ్యకు 10 కలుపు
అంజలి	: కలిపాను
అర్చన	: దానిని 2చే భాగించు
అంజలి	: భాగించాను
అర్చన	: భాగించగా వచ్చిన సంఖ్య నుండి నీవు మొదటగా కోరుకున్న సంఖ్యను తీసివేయు
అంజలి	: అలాగే తీసివేశాను
అర్చన	: ఇప్పుడు మిగిలిన సంఖ్య 5 కదా
అంజలి	: భలే, భలే ఏవిధంగా చెప్పావు ?

అని ఆలోచనలో పడిపోయింది అంజలి. మరి అర్చన ఏవిధంగా చెప్పిందో మీరూ ఆలోచించండి. ఈ అధ్యాయంలో ఈ విధమైన సమస్యలను ఎలా సాధించగలమో చూద్దాం.

2.1.2 బీజీయ సమాసాలు

మనము ఇప్పుడు ఒక ఉదా॥పరిశీలిద్దాం మనము ఒక అమరికను పరిశీలించి బీజీయ సమాసమును వ్యక్తపరుద్దాం.

ఒక స్వచ్ఛంద సంస్థవారు ప్రతి పాఠశాలలో బాగా చదువుతున్న పేద విద్యార్థులకు ఒక్కొక్కరికి 6 నోటు పుస్తకాలను ఇవ్వాలనుకున్నారు.

ఒక విద్యార్థికి అవసరమగునో నోటు పుస్తకాల సంఖ్య $=6$

ఇద్దరు విద్యార్థులకు అవసరమగు నోటు పుస్తకాల సంఖ్య $= 12$

ముగ్గురు విద్యార్థులకు అవసరమగు పుస్తకాల సంఖ్య $= 18$

పై సమాచారాన్ని క్రింది పట్టికలో అమరిస్తే

విద్యార్థుల సంఖ్య	1	2	3	4	-
కావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్య	6	12	18	24	-
అమరిక (ఏర్పడిన విధానం)	6×1	6×2	6×3	6×4	-

ఇప్పుడు కావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్యకు విద్యార్థుల సంఖ్యకు గల సంబంధంను పరిశీలించండి.

పై పట్టికలో విద్యార్థుల సంఖ్య మార్పు జరుగుతున్నప్పుడు (పెరుగుట) కావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్య కూడా మార్పు జరుగుతున్నది(పెరిగింది) అదే విధంగాప్రతి సందర్భంలోకావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్య విద్యార్థుల సంఖ్య ఆరురెట్లు కావడం మనం గమనించవచ్చు.

మనకు ఎంతమంది విద్యార్థులకైనా అవసరమగు నోటు పుస్తకాల సంఖ్యను తీసుకోవడానికి సులభంగా దీనిని,

$6 \times a$ గా లేదా $6a$ గాని వ్రాయవచ్చు.

$6a$ అంటే రావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్య = $6a$ అగును. దీనిని బట్టి 35 మంది విద్యార్థులకు అవసరమగు నోటు పుస్తకాలు సులభంగా చెప్పగలరా? ఇది 210 కదా ! పై ఉదాహరణ ప్రకారం విద్యార్థుల సంఖ్యకు అవసరమగు నోటు పుస్తకాల సంఖ్యను తెలుసుకోవడానికి సూత్రంను కనుగొన్నాము. ఇచ్చట "a" అనేది విద్యార్థుల సంఖ్య అయితే దీని వలన

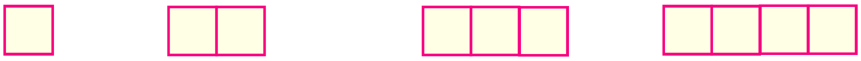
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 74 06-02-2021 14:53

1, 2, 3, 4, 5, ….. అవుతాయి.

అందుచే 'a' అనేది ఒక చరరాశి ఇది స్థిరమైన విలువ కలిగి ఉండగ అనేక విలువలను తీసుకుంటుంది. దీనిని బట్టి కావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్య మారుతుంది.

మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

క్రింది అగ్గిపుల్లల అమరికను పరిశీలించండి.



అమరిక- 1   అమరిక-2   అమరిక-3   అమరిక-4

ఆకారాల అమరికకు కావల్సిన అగ్గిపుల్లల సంఖ్య

ఏర్పరిచే ఆకారాలు	1	2	3	4
కావల్సిన అగ్గిపుల్లలు	4	7	10	13
అమరిక	$(3\times1)+1$	$(3\times2)+1$	$(3\times3)+1$	$(3\times4)+1$

కావల్సిన అగ్గిపుల్లల సంఖ్య కనుగొనడానికి సూత్రం =

= 3 × (చతురస్రాల సంఖ్య) × 1

$= 3p + 1$

p అనే చరరాశిని ఆకారాల సంఖ్యను సూచించడానికి వాడాము. $6a$ మరియు $3p + 1$ లను బీజీయ సమాసాలు అంటారు.

గమనిక : ఏదైన ఒక సమాసంలో కనీసం ఒక బీజీయ అక్షరం ఉంటే ఆ సమాసమును బీజీయ సమాసం అంటారు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక్కొక్క విద్యార్థికి మధ్యాహ్న భోజనంలో 150గ్రా. బియ్యం ఇస్తే అవసరమగు బియ్యంనకు సూత్రంను రాయండి.
2. క్రింది అమరికలలో కావలసిన అగ్గిపుల్లలకు సూత్రంను రాయండి.

(i)   (ii)   (iii)   (iv)

3. క్రింది అమరికలలో కావలసిన అగ్గిపుల్లలకు సూత్రంను రాయండి.

i)

(a)   (b)   (c)   (d)

ii)

(a)   (b)   (c)   (d)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 75   06-02-2021 14:53

ఈ విధంగా చరరాశితో సంకలనం వ్యవకలనం మరియు గుణకార, భాగహార ప్రక్రియలతో కూడిన సమాసాలను బీజీయ సమాసాలు అంటాము. ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను క్రింది పట్టికలో చూద్దాం.

క్రమ సంఖ్య	సమాస వాక్యం(లేదా) సందర్భం	చరరాశి	బీజీయ సమాసం ఉపయోగించి ప్రవచనం
1.	x అనేది 5 చే గుణించబడినది	x	$5x$
2.	y అనునది 4 చే భాగించబడినది	y	$\frac{y}{4}$
3.	z నుండి 6 తీసివేయబడినది	z	$z - 6$
4.	తమ్మునికంటే అన్న 3 సం॥లు పెద్ద	తమ్ముడి వయస్సు $= m$ సం॥లు	అన్న వయస్సు $= m + 3$ సం॥లు
5.	డిజిల్ ధర కంటే పెట్రోల్ ధర రూ॥10 ఎక్కువ	డిజిల్ ధర $= r$	పెట్రోల్ ధర $= r + 10$
6.	నీరజ దగ్గర రాణి కంటే 3 రెట్ల కంటే రూ॥10లు తక్కువ	రాణి దగ్గర ఉన్న రూపాయలు $= n$	నీరజ దగ్గర ఉన్న రూ॥లు $= 3n - 10$
7.	రాజు హాజరైన దినములలో రవి $\frac{1}{3}$ వ వంతు హాజరయ్యాడు.	రాజు హాజరు దినములు $= a$	రవి హాజరు దినములు $= \frac{a}{3}$
8.	y ను 5 చే భాగించి, $3z$ కలుప బడినది	y, z	$\frac{y}{5} + 3z$
9.	m యొక్క 4 రెట్లను n యొక్క 3 వ వంతుకు కలుపబడినది	m, n	$4m + \frac{n}{3}$
10.	z యొక్క 4వ వంతు నుండి y ని తీసివేయబడినది.	y, z	$\frac{z}{4} - y$

2.1.3 సజాతి పదాలు మరియు విజాతి పదాలు

$3x + 2$ అనే బీజీయ సమాసాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఇక్కడ 'x' అనునది 3 చే గుణించబడిన తరువాత '2' కలపబడినది. '$3x$' మరియు '2' లను "$3x + 2$" సమాసంలోని పదాలు అంటారు. '$3x$' ను బీజీయపదం అని, '2' ను సంఖ్యాపదం అని అంటారు.

ఈక్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

(i) $6x$ మరియు $8x$ (ii) $3x^2y$ మరియు $7x^2y$ (iii) $4a^2$ మరియు $\frac{5}{3}b^2$

(iv) $7a^2b$ మరియు $7ab^2$ (v) $4mn$ మరియు $\frac{9}{5}mn$ (vi) $6x^2y^2$ మరియు $7x^3y$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 76 06-02-2021 14:53

1. ఉదాహరణ (i) లో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశి 'x'ను కలిగి ఉండి చరరాశి 'x' యొక్క ఘాతం 1 ఉంది.
2. ఉదాహరణ (ii) లో రెండు పదాలు x మరియు y చరరాశులను కలిగి ఉంది. మొదటి పదంలో 'x' ఘాతం '2'. y ఘాతం '1' మరియు రెండవ పదంలో 'x' ఘాతం '2', y ఘాతం '1'.
3. ఉదాహరణ (iii) లో రెండు పదాలలో వేరువేరు చరరాశులు a మరియు b చరరాశులను కలిగి ఉన్నాయి. మొదటి పదంలో 'a' ఘాతం '1' మరియు 'b' ఘాతం '2' గా ఉంది.
4. ఉదాహరణ (iv) లో రెండు పదాలు a మరియు b చరరాశులను కలిగి ఉన్నాయి. మొదటి పదంలో 'a' ఘాతం '2' మరియు 'b' ఘాతం '1' రెండవ పదంలో 'a' ఘాతం '1' మరియు 'b' ఘాతం '2' గా ఉంది.
5. ఉదాహరణ (v)లో రెండు పదాలు 'm' మరియు 'n' చరరాశులను కలిగి ఉన్నాయి. 'm' మరియు 'n' ల ఘాతాలు '1' ని కలిగి ఉన్నాయి.
6. ఉదాహరణ (vi) లో రెండు పదాలు 'x' మరియు 'y' చరరాశులను కలిగి ఉన్నాయి. మొదటి పదంలో x మరియు y ల ఘాతాలు 2 ను కలిగి ఉన్నాయి మరియు రెండవ పదంలో x యొక్క ఘాతం 3 మరియు y ఘాతం 1ని కలిగి ఉన్నాయి.

పై ఉదాహరణలను పరిశీలిస్తే ఉదా॥ 1, 2 మరియు 5 లలో ఒకే చరరాశులు మరియు వాటి ఘాతాలు సమానంగా ఉన్నాయి. ఇటువంటి పదాలను "సజాతి పదాలు" అంటాము. ఉదా॥ 3, 4, 6లలోని పదాలను 'విజాతి పదాలు' అంటాము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది పదాలలో సజాతి పదాలను ఒక సమూహంగా రాయండి.

1. $5xy, 4x^2, 3xy, 12x^2y, 6xy^2, 7xy, 8x^2, 9y^2, 10x^2y, 14xy^2, 12xy, 15x^2, 12xy^2$.
2. క్రింది పదాలకు ఐదేసి చొప్పున సజాతి పదాలను రాయండి.
   - (i) $3xz$ ...., ..., ..., ..., ...,
   - (ii) $4m^2n$ ...., ..., ..., ..., ...,
   - (iii) $5pq^2$ ...., ..., ..., ..., ...,
   - (iv) $7a^3b^3$ ...., ..., ..., ..., ...,
   - (v) $-6p^2$ ...., ..., ..., ..., ...,
3. సజాతి పదాలను జతపరుచుము.

(i)	$8s^2$	$12pq^2$
(ii)	$4pq^2r$	$9s$
(iii)	$5pq^2$	$6s^2$
(iv)	$6s$	$4xyz$
(v)	$9xyz$	$5pq^2r$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 77 06-02-2021 14:53

2.1.4 బీజీయ సమాసాల రకాలు

బీజీయ సమాసంలోని పదాల సంఖ్యను బట్టి వాటిని వేరు వేరు పేర్లతో పిలుస్తాం.

పదాల సంఖ్య	బీజీయ సమాసం పేరు	ఉదాహరణలు
ఒకే పదం	ఏకపది	(i) x (ii) $3xy$ (iii) $4pqr$ (iv) $4z^2xy$ (v) $6mn^2$
రెండు విజాతి పదాలు	ద్విపది	(i) $x + y$ (ii) $a^2 + b^2$ (iii) $mn + n^2$ (iv) $x^2 - xy$ (v) $p^2 + q^2$
మూడు విజాతి పదాలు	త్రిపది	(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $m^2 - 2mn + n^2$ (iii) $pq + xy - mn$
ఒకటి కంటే ఎక్కువ విజాతి పదాలు	బహుళపది	(i) $3x^2 + 4xy + 2z^2 + 5$ (ii) $6p^2 + 7q^2 + 6pq + 8$ (iii) $7x^2 - 2xy - y^2 + 5$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. వివిధ రకాల బీజీయ సమాసాలకు ఐదేసి చొప్పున ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. క్రింది ఇవ్వమడిన బీజీయ సమాసాలలో ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది మరియు బహుళపదులను గుర్తించండి.
   (i) $3xyz + 2xy$ (ii) $2pq^2$ (iii) $4x + 3p + q + 1$
   (iv) $3m^2 + 4m - 5$ (v) $2p^2 - 5p$

2.1.5 బీజీయ సమాసాల పరిక్రియలు

బీజీయ సమాస సూక్ష్మీకరణ

$7x^2 + 3y^2 - 6x^2y + 4xy + 5x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy$ అనే బీజీయ సమాసమును పరిశీలిద్దాం.

పై బీజీయ సమాసములో కొన్ని సజాతిపదాలను మనం గమనించవచ్చు. వాటిని కలపడం ద్వారా ఆ బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మీకరించవచ్చును.

క్ర.సం	సోపానాలు	విధానము
1.	ఇచ్చిన బీజీయ సమాసమును రాయండి.	$7x^2 + 3y^2 - 6x^2y + 4xy + 5x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy$
2.	సజాతి పదాలను ఒక్కదగ్గరకు చేర్చండి.	$(7x^2 - 3x^2) + (3y^2+2y^2)+(-6x^2y+5x^2y) + (4xy-6xy)$
3.	సజాతి పదాలను కూడండి.	$4x^2 + 5y^2 - 1x^2y - 2xy$

గమనిక : ఒక సమాసంలోని ఏ రెండు పదాలు సజాతి పదాలు కాకుంటే ఆ సమాజం సూక్ష్మరూపంలో ఉందంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 78 06-02-2021 14:53

అదనపు ఉదాహరణ :

సూక్ష్మీకరించుము : $7x^2y - 3xy^2 + 4xy^2 - 2x^2y - 8 + 5xy^2 + 6x^2y + 5$

సోపానం 1 $7x^2y - 3xy^2 + 4xy^2 - 2x^2y - 8 + 5xy^2 + 6x^2y + 5$

సోపానం 2 $(7x^2y - 2x^2y + 6x^2y) + (-3xy^2 + 4xy^2 + 5xy^2) + (-8+5)$(సజాతి పదాలను ఒకే గ్రూపుగా వ్రాయగా)

సోపానం 3 $11x^2y + 6xy^2 - 3$ (సజాతి పదాలకు కూడగా)

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $3xy + 7xy - 9xy$　　(ii) $10x^2 - 5x^2 + 4x$

(iii) $3x^2y - 5xy^2 + 7xy^2$　　(iv) $4a^2 - 5b^2 + 4a^2b - 7ab^2 + 5a^2 - 4b^2$

(v) $6x^2 + 7q^2 - 7pq + 4 - 3p^2 - 6q^2 + 5$

(vi) $7xy^2 + 3xy - 6xy - 4xy^2$

(vii) $3m^3 + 4m^2 + 5m - 4m^3 + 2m$

(viii) $4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5xy - \frac{3}{2}xy$

బీజీయ సమాసాల సంకలనం

సజాతి పదాలను కూడటం ద్వారా సమాసాలను సంకలనం చేస్తాం. దీనిని రెండు పద్ధతులలో చేయవచ్చు.

(i) నిలువు వరుస పద్ధతి లేదా దొంతి పద్ధతి

(ii) అడ్డు వరుస పద్ధతి లేదా పంక్తి పద్ధతి

నిలువు వరుస పద్ధతి

ఉదాహరణ 1: $5x^2 - 4x - 6$ మరియు $7x + 5 + 3xy$ లను కూడండి.

సోపానం 1 మొదట సమాసాలను ప్రామాణిక రూపం (చరరాశుల ఘాతాలను ఆరోహణ క్రమం)లో రాయాలి.

$5x^2 - 4x - 6 = 5x^2 - 4x - 6$

$7x + 5 + 3x^2 = 3x^2 + 7x + 5$

సోపానం 2

$$\begin{array}{l} 5x^2 - 4x - 6 \\ 3x^2 + 7x + 5 \\ \hline \end{array}$$

(సజాతి పదాలను ఒకదాని కింద ఒకటి వచ్చునట్లు బీజీయసమాసాలను నిలువువరుసలో ఒకదానికింద ఒకటి రాయాలి).

సోపానం 3

$$\begin{array}{l} 5x^2 - 4x - 6 \\ 3x^2 + 7x + 5 \\ \hline 8x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

(సజాతి పదాలను కలపాలి)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 79　06-02-2021 14:53

(ii) అడ్డు వరుస పద్ధతి

ఉదాహరణ 2: $6x^2 + 4 - 3x$ మరియు $7x^2 - 8x + 5$ లను కలుపుము.

సోపానం 1 ఇచ్చిన బీజీయ సమాసాలను సంకలనం గుర్తు (+) ను ఉపయోగించి కలిపి రాయండి.

$6x^2 + 4 - 3x + 7x^2 - 8x + 5$

సోపానం 2 సజాతి పదాలను సమూహాలు చేర్చి సమాసాన్ని తిరిగి రాయండి.

$(6x^2 + 7x^2) + (-3x - 8x) + (4 + 5)$

సోపానం 3 గుణకాలను సూక్ష్మీకరించండి. $(6 + 7)x^2 + (-5 - 8)x + 9$

సోపానం 4 ఫలిత సమాసాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండి.

$13x^2 - 11x + 9$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది బీజీయ సమాసాలను సంకలనం చేయండి.

(i) $6x^2 - 3x + 4$ మరియు $7x + 8x^2 - 9$

(ii) $9x - 5x^2 + 11$ మరియు $8 + 6x + 4x^2$

(iii) $7x - 8x^2 - 7$ మరియు $8x^2 + 8x$

(iv) $6x^2 + 4x - 3$ మరియు $9x^2 + 9$

(v) $4x + 5$ మరియు $6x^2 - 8$

బీజీయ సమాసాల వ్యవకలనము

బీజీయ సమాసాల వ్యవకలనం నేర్చుకునే ముందు, సమాసం యొక్క సంకలన విలోమం గురించి తెలుసుకుందాం.

బీజీయ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమము : బీజీయ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమం పొందడానికి ఆ సమాసంలోని ప్రతి పదం ముందున్న గుర్తును మార్చాలి. అనగా,

$6x$ యొక్క సంకలన విలోమం $-6x$ మరియు $-2x^2 + 1$ యొక్క సంకలన విలోమం $2x^2 - 1$ మరియు 5 యొక్క సంకలన విలోమం -5.

i.e., $6x + (-6x) = 0$

$-2x^2 + (2x^2) = 0$

$5 + (-5) = 0$

ప్రతి బీజీయ సమాసానికి, మరొక బీజీయ సమాసం కలిపినపుడు వాటి మొత్తం సున్న అగునట్లు వ్యవస్థితం అయితే, ఆ రెండు సమాసాలు ఒకదానికి ఒకటి "సంకలన విలోమాలు" అంటారు.

ఉదాహరణ 3: $3x^2 + 2x - 6$ యొక్క సంకలన విలోమమును రాయండి.

సాధన : $3x^2 + 2x - 6$ యొక్క సంకలన విలోమం $= -(3x^2 + 2x - 6) = -3x^2 - 2x + 6$

బీజీయ సమాసాల వ్యవకలనం నకు కూడా రెండు పద్ధతులు కలవు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 80 06-02-2021 14:53

నిలువు వరుస (లేదా) దొంతి పద్ధతి :

ఉదాహరణ 4 : $3x^2 + 2x - 6$ నుండి $5x^2 - 4x + 3$ ను తీసివేయండి.

సోపానం 1 : బీజీయ సమాసాలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయండి.

$$3x^2 + 2x - 6 = 3x^2 + 2x - 6$$

$$5x^2 - 4x + 3 = 5x^2 - 4x + 3$$

సోపానం 2 : బీజీయ సమాసాలను ఒకదాని కింద ఒకటి రాయాలి. తీసివేయబడే సమాసమును క్రింది వరుసలో ఉంచాలి. సజాతి పదాలు ఒకదాని కింద ఒకటి వచ్చునట్లు రాయాలి.

$$\begin{array}{l} 3x^2 + 2x - 6 \\ \underline{5x^2 - 4x + 3} \end{array}$$

సోపానం 3 : రెండవ అడ్డువరుసలోని బీజీయ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమం వ్రాయుటకు దాని ప్రతిపదం గుర్తును మార్చాలి.

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & +\,2x & -\,6 \\ 5x^2 & -\,4x & +\,3 \\ - & + & - \\ \hline \end{array}$$

సోపానం 4 : నిలువు వరుసలో సజాతి పదాలను కూడి ఫలితాన్ని దిగువన రాయాలి.

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & +\,2x & -\,6 \\ 5x^2 & -\,4x & +\,3 \\ - & + & - \\ \hline -2x^2 & +\,6x & -\,9 \end{array}$$

అడ్డ వరుస పద్ధతి (లేదా) పంక్తి పద్ధతి :

ఉదాహరణ 5: $5y^2 - 6y + 9$ నుండి $8y + 4y^2 - 6$ ను తీసివేయండి.

సోపానం 1 : తీసివేయాల్సిన సమాసాన్ని బ్రాకెట్‌లో రాసి దానిముందు వ్యవకలనం గుర్తు (– మైనస్) ను ఉంచాలి. దీనిని ఒకే అడ్డువరుసలో వ్రాయాలి.

$$5y^2 - 6y + 9 - (8y + 4y^2 - 6)$$

సోపానం 2 : మొదటి సమాసంనకు రెండవ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమాన్ని కూడాలి.

$$5y^2 - 6y + 9 - 8y - 4y^2 + 6$$

సోపానం 3 : సజాతి పదాలను సమూహాలుగా రాసి సూక్ష్మీకరించాలి.

$$(5y^2 - 4y^2) + (-6y - 8y) + (9 + 6)$$

$$= y^2 - 14y + 15.$$

సోపానం 4 : ఫలితాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయాలి. $y^2 - 14y + 15$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 81 06-02-2021 14:53

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది సమాసాలలో మొదటి సమాసం నుండి రెండవ సమాసాన్ని తీసివేయండి.

1. $6a - 7b + c$; $8a + 9b - 6c$
2. $7a^2 - 3 + 4a$; $3a^2 - 5a + 13$
3. $14x^2 - 15$; $12x^2 - 4x + 14$
4. $6p^2 - 7p + 4$; $5p^2 - 8$
5. $3m^2 + 5m - 6$ మరియు $5m^2 - 4m + 3$ లను కలిపి $-7m^2 + 5m - 9$ ను తీసివేయండి.

బీజీయ సమాసాల గుణకారం

ఏకపదుల గుణకారం

ఉదాహరణ 6: $3x$ మరియు $4y$ లను గుణించండి.

సోపానం 1 : ఇవ్వబడిన ఏకపదుల మధ్య గుణకారం గుర్తు (×) ను ఉంచి లబ్ధంగా రాయండి.

$= 3x \times 4y$

సోపానం 2 : పదాలలోని గుణకాలను చరరాశులను గుణకారం గుర్తును ఉంచి లబ్ధంగా రాయండి.

$= 3 \times x \times 4 \times y.$

సోపానం 3 : ఇప్పుడు సంఖ్యా గుణకాలను మరియు చరరాశులను గుణించి వాటి లబ్ధాలను ఫలితంగా రాయండి.

$= (3 \times 4)\,(x \times y)$

$= 12\,xy.$

ఉదాహరణ 7 : $3p$ మరియు $5pqr$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

$= 3p \times 5pqr$

$= 3 \times p \times 5 \times p \times q \times r$

$= (3 \times 5)\,(p \times p \times q \times r)$

$= 15p^2qr \quad (\because\ p \times p = p^2).$

ఉదాహరణ 8 : $5m^2n$ మరియు $-6mn$ లను గుణించండి.

సాధన : $5m^2n \times -6mn.$

$= 5 \times m^2 \times n \times -6 \times m \times n$

$= (5 \times -6)\,(m^2 \times n \times m \times n)$

$= -30m^3n^2 \quad (\because\ m^2 \times m = m^3 \text{ and } n \times n = n^2)$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 82 06-02-2021 14:53

మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఏకపదుల గుణకారం

ఉదాహరణ 9: $3xy$, $4y$ మరియు $5x$ ల లబ్దాన్ని గణించండి.

సాధన : $3xy \times 4y \times 5x$

$$= 3 \times x \times y \times 4 \times y \times 5 \times x$$
$$= (3 \times 4 \times 5)\,(x \times y \times y \times x)$$
$$= 60x^2y^2.$$

ఉదాహరణ 10: $4a^2b \times 5ab^2c \times 6abc$ లబ్దాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $4a^2b \times 5ab^2c \times 6abc$

$$= (4 \times 5 \times 6) \times (a^2 \times a \times a) \times (b \times b^2 \times b) \times (c \times c)$$
$$= 120a^4b^4c^2.$$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది ఏకపదుల లబ్దాలను కనుగొనండి.

(i) $3xy, 4x$ (ii) $6ac, 7b^2c$ (iii) $-8p2q, 2qr^2$

(iv) $-5mn, -3m^2n$ (v) x, xy, xyz (vi) pqr, pq^2, qr^2

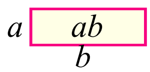
(vii) lm, mn, ln (viii) $5abc, 6a^2b^2c^2, 2abc$

(ix) $3x^2y^2z^2, -2xyz, -3x^3y^3z^3$ (x) $4xy^2z^3, 2x^2y, 3x^3y^2z^2$

ఏక పదిని ద్విపదిచే గుణించడం

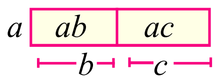
ఏకపది మరియు ద్విపది యొక్క గుణకారమును జ్యామితీయ ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

పొడవు b, వెడల్పుల a గల



దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= ab$

పొడవును 'c' యూనిట్లు పెంచితే అపుడు ఆ



దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $= a(b + c)$.

$$a(b + c) = ab + ac$$

ఒక వైపు వైశాల్యం = $a(b + c)$. కానీ పటంలో ఎడమ భాగం వైశాల్యం 'ab' ని మరియు కుడిభాగ వైశాల్యం 'ac'ని కలిగి ఉంది. కావున మొత్తం వైశాల్యం $ab + ac$.

పై పరిశీలన ఆధారంగా ఏకపదిని ద్విపదిచే గుణించుదాం.

ఉదాహరణ 11: $3x$, $(4y + 5z)$ ల లబ్దాన్ని కనుగొనండి.

సాధన :

సోపానం 1 : ఏకపది, ద్విపదుల మధ్య గుణకారం గుర్తు (×)ను ఉంచి లబ్దంగా రాయాలి.

$$3x \times (4y + 5z)$$

సోపానం 2 : ఏకపదిని ద్విపదిలోని మొదటిపదం చే మొదట గుణించి తరువాత ఏకపదిని ద్విపదిలోని రెండవ పదంచే గుణించి ఆ లబ్దాలను సంకలనంగా వ్రాయాలి.

$$(3x \times 4y) + (3x \times 5z)$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 83 06-02-2021 14:53

సోపానం 3 : పదాలను సూక్ష్మీకరించి ఫలితాన్ని వ్రాయాలి.

$12xy + 15xz$

ఉదాహరణ 12: $2a(3ab - 4ac)$ ల లబ్దంను కనుగొనండి.

సాధన : $2a(3ab - 4ac) = 2a \times (3ab - 4ac)$

$= (2a \times 3ab) + (2a \times -4ac)$

$= (2 \times 3 \times a \times a \times b) + (2 \times a \times (-4)\times a \times c)$

$= (6 \times a^2 \times b) + (-8 \times a^2 \times c)$

$= 6a^2b - 8a^2c.$

ఉదాహరణ 13: $(6m + 2n - mn)(-3mn)$ ల లబ్దాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : $(6m + 2n - mn)(-3mn) = (6m \times -3mn) + (2n \times -3mn) + ((-mn) \times (+3mn))$

$= (6 \times -3 \times m \times m \times n) + (2\times -3\times n\times m\times n)$

$+ (-m \times n \times -3 \times m \times n)$

$= -18m^2n - 6mn^2 + 3m^2n^2.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది లబ్దాలను కనుగొనండి.

(i) $2x, (3xy + 4xz)$ (ii) $5m, (3mn - 2)$

(iii) $(4abc - 6a^2c^2b^2), 3(-abc)$ (iv) $3p, (4pq - 2pr - pqr)$

(v) $(5x - 6y - 7z), (-xyz)$ (vi) $(mn - 2lm - ln), 3lm$

ద్విపదిని ద్విపదిచే గుణించడం

మనం ఏకపదిని ద్విపదినే గుణించడం చూసాము.

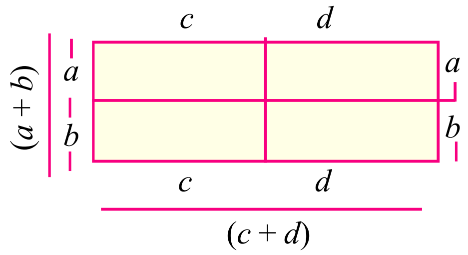
$(a + b)e = ae + be$

ఇప్పుడు 'e' కు బదులు $(c + d)$ ని ప్రతిక్షేపిస్తే

$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$

$\therefore (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

దీనిని జ్యామితీయ ఆధారంగా $(a + b)$, $(c + d)$ పొడవు వెడల్పులు గల దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యంను క్రింది విధంగా చూపవచ్చు.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 84 06-02-2021 14:53

ఈ దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం = $(a+b) \times (c+d)$

కాని పటం నుండి మొత్తం దీ॥చ॥వై॥

$= ac + ad + bc + bd$

$\therefore \ (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

ఉదాహరణ 14: $(2x+3y)(5x+4y)$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన :

సోపానం 1 : రెండు ద్విపదులను లబ్ధంగా రాయండి.

$(2x+3y) \times (5x+4y)$

సోపానం 2 : మొదటి ద్విపదిలోని మొదటి పదంచే రెండవ ద్విపదిని గుణించి, తరువాత మొదటి ద్విపదిలోని రెండవ పదంచే రెండవ ద్విపదిని గుణించి లబ్ధాలను సంకలనంగా రాయాలి.

$= 2x \times (5x+4y) + 3y(5x+4y)$

సోపానం 3 : ఏకపది, ద్విపది గుణకారం ఆధారంగా సూక్ష్మీకరించండి.

$(2x \times 5x + 2x \times 4y) + (3y \times 5x + 3y \times 4y)$

$= 10x^2 + 8xy + 15xy + 12y^2$

సోపానం 4 : సజాతి పదాలను కలపండి.

$= 10x^2 + 23xy + 12y^2.$

ఉదాహరణ 15 : $(4a+2b)(2a-3b)$ ల లబ్ధంను కనుగొనండి.

సాధన: $(4a+2b)(2a-3b) = 4a(2a-3b) + 2b(2a-3b)$

$= (4a \times 2a) + (4a \times -3b) + (2b \times 2a) + (2b \times -3b)$

$= 8a^2 - 12ab + 4ab - 6b^2$

$= 8a^2 - 8ab - 6b^2.$

ఇదేవిధముగా త్రిపదిని, ద్విపదిచే గుణించడము ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వార అవగాహన చేసుకోవచ్చును.

ఉదాహరణ 16: $(3m-2l)\ (m-2n-lmn)$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: $(3m+2l)(m-2n-lmn) = 3m(m-2n-lmn) + 2l(m-2n-lmn)$

$= (3m \times m) + (3m \times -2n) + (3m \times -lmn) + (-2l \times m)$

$+ (-2l \times -2n) + (-2l \times -lmn)$

$= 3m^2 - 6mn - 3lm^2n - 2lm + 4ln + 2l^2mn.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది లబ్ధాలను కనుగొనండి.

1. $(2p+3q), \ (3q+2p)$
2. $(3a-2b), \ (4a-5b)$
3. $(6x^2y-3xy^2), (x^2y-xy^2)$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 85 06-02-2021 14:53

4. $(x - y)(3xy - 2x^2y + 2xy^2)$
5. $(3l - 2m)(3lm - 2nl - lmn)$
6. $(x + y + z)(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)$

2.1.6 బీజీయ సమాసం యొక్క విలువ

$3x^2 - 2x + 1$ అను బీజీయ సమాసంను తీసుకుందాం. $x = 0, 1, 2, -1, \ldots$ వద్ద ఈ సమాసం యొక్క విలువ ఏమవుతుంది?

దీని కోసం మనము $3x^2 - 2x + 1$ సమాసంలోని "x" కు బదులుగా '0' లేదా '1' లేదా '2' ను ప్రతిక్షేపణ ద్వారా సమాసం విలువను కనుగొంటాము.

ఉదాహరణ 17: $x = 2$ వద్ద $4x + 1$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన:

సోపానం 1 : $4x + 1$ (సమాసమును వ్రాయుము)

సోపానం 2 : $4(2) + 1$ (చరరాశి x కు బదులు 2ను ప్రతిక్షేపించుము)

సోపానం 3 : $8 + 1 = 9$.

ఉదాహరణ 18: $m = -1$ మరియు '0' అయితే $m^2 - 2m + 3$ విలువ ఎంత?

సాధన:

సోపానం 1 : $m^2 - 2m + 3$ (సమాసమును వ్రాయుము)

సోపానం 2 : $(-1)^2 - 2(-1) + 3$ (చరరాశి 'm'కు బదులు -1ని ప్రతిక్షేపించుము)

సోపానం 3 : $1 + 2 + 3 = 6$

(ఇప్పుడు $m = 0$ ను ప్రతిక్షేపించుము)

సోపానం 1 : $(0)^2 - 2(0) + 3$

సోపానం 2 : $0 - 0 + 3 = 3$.

ఉదాహరణ 19 : దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $A = l \times b$ మరియు $l = 8$cm, $b = 6$ cm అయితే వైశాల్యం ఎంత?

సాధన:

సోపానం 1 : దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $A = l \times b$

($l = 8$ cm, $b = 6$ cm అయితే వైశాల్యం ఎంత?)

సోపానం 2 : $A = 8 \times 6$ (l, b విలువలను ప్రతిక్షేపించగా)

సోపానం 3 : $A = 48\ cm^2$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 86 06-02-2021 14:53

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత $p = 2(l + b)$; $l = 6\text{cm}$, $b = 4\text{ cm}$ అయినా చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.
2. $x = -1$, $y = 2$ అయినా క్రింది బీజీయ సమాసాల విలువను కనుగొనుము.
   (i) $2x + 3y - 5$ (ii) $5x - 2y + 1$
   (iii) $3xy - 4x + 2$ (iv) $7x - 3y - 2xy$

2.1.7 బహుపదులు

ఇంతవరకు మనం చాలా రకాల బీజీయ సమాసాలను (ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది, బహుళపది ....) చూసాము. మరి బహుపదులు అంటే ఏమిటి?

a ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు n ఒక పూర్ణాంకం అయి ax^n రూపంలో ఉన్న పరిమితి పదాల మొత్తంగా రాయబడిన బీజీయ సమానంను 'బహుపది' అంటాం.

ఇక్కడ $a \neq 0$ మరియు మొత్తం సంఖ్య 'n'.

బహుపది	బహుపది కానిది
$2x$	$4x^{1/2}$ or $4\sqrt{x}$
$\frac{1}{3}x - 4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4 + \frac{1}{x}$
$4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$	$\frac{x^2 + 2}{x} - 6$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది సమాసాలలో ఏవి బహుపదులు? ఏవికావో? కారణాలు తెలుపండి.

1. $3x - 4$
2. $4y^2 - \frac{1}{y} + 2$
3. $\sqrt{5}p^2 - 4$
4. $\frac{1}{z} + 2$
5. $(3x + 4)(x - y)$
6. $(2x^2 - 2x)\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $3\sqrt{p}$
8. $z^2 - xyz$
9. $4x - 2y - \sqrt{xy}$
10. $5x^3y^2z$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 87
06-02-2021 14:53

బహుపది యొక్క పరిమాణం

బహుపదిలో ప్రతిపదం, స్థిరరాశి మరియు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యల ఘాతాంకాలతో కూడిన చరరాశుల లబ్ధంగా ఉంటాయి. దీనిలో స్థిరరాశిని చరరాశి యొక్క గుణకం అంటాం. అదేవిధంగా పదాలలో గల చరరాశుల యొక్క గరిష్ట ఘాతాంకంను బహుపది పరిమాణం అంటారు.

ఉదాహరణ 20 :

1. $2x^2 - 3x + 4$ 2. $2p^2q^2 + 3pq^2 - 4p^3$.

$2x^2 - 3x + 4$ అనే బహుపదిలో $2x^2, -3x$ మరియు 4 అనే పదాల ఉన్నాయి. దీనిలో ప్రతి పదానికి పరిమాణం ఉంటుంది. $2x^2$ యొక్క పరిమాణం '2', $-3x$ యొక్క పరిమాణం '1' మరియు 4 యొక్క పరిమాణం '0' $(4x^0 = 4)$.

$2x^2 - 3x + 4$ బహుపది అన్ని పదాలలో గరిష్ట ఘాతం కలిగిన పదం $2x^2$. కావున $2x^2 - 3x + 4$ పరిమాణం '2'.

రెండవ సమాసం $2p^2q^2 + 3p^2 - 4p^3$ లో మొదటి రెండు పదాలలో రెండేసి చరరాశులు ఉన్నాయి. ఆ రెండు చరరాశుల ఘాతాల మొత్తంను పరిమాణంగా తీసుకోవాలి.

అనగా $2p^2q^2$, $2 + 2 = 4$ (పరిమాణం)

$3p^1q^2$, $1 + 3 = 3$ (పరిమాణం)

$4p^3$ లో పరిమాణం 3.

ఈ పదాలన్నింటిలో గరిష్ట పరిమాణం '4'. కావున బహుపది పరిమాణం '4'.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది బహుపదుల పరిమాణాలను వ్రాయండి.

(i) $9x^2 - 3x + 4$ (ii) $5m^2 + 6m - 6$ (iii) $2p^3 - 3pq + 4p^3q$

(iv) $6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ (v) $m^3 - 2mn^2 + 3mn$ (vi) $6a^2b + 3ab^2 - 4ab - 5$

(vii) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (viii) $x^2 + 2xy + y^2$

పరిమాణాల ఆధారంగా బహుపదుల రకాలు

బహుపది పేరు	బహుపది పరిమాణం	ఉదాహరణ
శూన్యబహుపది	నిర్వచించలేము	0
స్థిర బహుపది	సున్నా	$5, -3, \frac{1}{2}x^0$ etc
రేఖీయ బహుపది	1	$x + 2, y - 3, 2p - 1$ $3n - 4$ etc
వర్గ బహుపది	2	$x^2 - 3x + 4, a^2 - b$ $3m^2 + 4m$ etc.
ఘనబహుపది	3	$x^3 - y^3, 3x + 4y^3,$ $9x^3 - 2x^2 + b$ etc.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 88 06-02-2021 14:53

పదాల ఆధారంగా బహుపదులు రకాలు

బహుపది పరిమాణం	బహుపది పేరు	ఉదాహరణ	పదాలు
1	ఏకపది	$5xy$	$5xy$
2	ద్విపది	$-2m + 6n$	$-2m, 6n$
3	త్రిపది	$4a^2 + ab + 3$	$4a^2, ab, 3$
3 కంటే ఎక్కువ	బహుపది	$5x^2 + 3y^2 - 6xy + 7$	$5x^2, 3y^2, -6xy, 7$

గమనిక : ప్రతి బహుపది, బహుళపది అవుతుంది. కాని ప్రతి బహుళపది, బహుపది కానవసరము లేదు.

2.1.8 బహుపది విలువ

1. $p(x) = 4x^2 - 2x + 3$ అనే బహుపదిని తీసుకుందాం.

   ఇక్కడ $x = 1, 2, 3$ అయితే $p(x)$ విలువ ఎంత?

   దీని కోసం $p(x)$ లో ప్రతి 'x' కు బదులు 1 లేదా 2 లేదా 3 ను ప్రతిక్షేపించగా $p(x)$ విలువలు వస్తాయి.

   క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

x విలువ	$p(x) = 4x^2 - 2x + 3$	$p(x)$ విలువ
1	$p(1) = 4(1)^2 - 2(1) + 3$ $= 4 - 2 + 3$	5
2	$p(2) = 4(2)2 - 2(2) + 3$ $= 4(4) - 4 + 3$ $= 16 - 4 + 3$	15
3	$p(3) =$	...

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపదులలో సూచించిన చరరాశి విలువను ప్రతిక్షేపించి ఆ బహుపది విలువను కనుగొనండి.

1. $x = 2$ వద్ద $p(x) = 3x^2 - x - 5$
2. $m = 0$ వద్ద $p(m) = 4m^2 - 5m + 6$
3. $n = 1$ వద్ద $p(n) = 2n^3 - 3n - 2$
4. $a = 1$ వద్ద $p(a) = 3a^3 - 4a^2 + 2$ మరియు -2
5. $t = -1$ వద్ద $p(t) = 4t^2 + 2t - 6$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 89 06-02-2021 14:53

అభ్యాసము

1. ఏవైన ఐదు బీజీయ సమాసాలను వ్రాయుము.
2. $5x, 4xy, -3x^2, 10x^2y, 12x^2y^2, -x, 7x^2, 4xy^2, -5x^2y, -3xy, 2x, 4x^2, -x^2y^2, xy$.

   లలో సజాతి పదాలను సమూహంగా రాయండి.
3. క్రింది వానిలో ఏవి ఏకపదులు, ద్విపది లేదు త్రిపదులో రాయండి.

   (i) $3m - 2n$ (ii) $2xy$ (iii) $4x - 3xy - 2$ (iv) $5x^2 + 3xy$

   (v) $4pqr$ (vi) $ax + by - cxy + 2y$ $2x + 7$
4. $3x^2 + 2xy - y^2$ నుండి $5x^2 - 4xy + 2y^2$ ను తీసివేయండి.
5. $4x^2 - 3xy - 2y^2$ మరియు $-3x^2 + xy + 2y^2$ ల మొత్తం నుండి $2x^2 - 4xy + 3y^2$ మరియు $3x^2 + 2xy - y^2$ ల మొత్తాన్ని తీసివేయండి.
6. $(3xy - 2x)$ మరియు $\left(4x + \sqrt{x}y\right)$ ల లబ్దాన్ని కనుగొనండి.
7. $(5a^2 - ab + b^2)$ మరియు $(a^2 + 6ab + 3b^2)$ ల లబ్దాన్ని గణించండి.
8. క్రింది బహుపదుల పరిమాణాలను కనుగొనండి.

   (i) $3x^2 - xy + y$ (ii) $m^2 - mn + n^3$ (iii) $3x^2 + y^2 - 3xyz$

   (iv) $a^3 - a^2b^2 + b^2$ (v) $x^5 - 3x^2y^2$ (vi) $x^5 - 4z - y^6$
9. క్రింది బహుపదులకు $p(0), p(1), p(2), p(-1)$ మరియు $p(-2)$ ల విలువలను కనుగొనండి.

   (i) $p(x) = x^2 - 4x + 2$ (ii) $p(m) = 3m^2 - 4$ (iii) $p(y) = y^3 - 3y^2 - 5$

   (iv) $p(t) = 4t^2 - 3t - 2$ (v) $p(n) = n^3 - 4n - 3$ (vi) $p(x) = 3x - 4 + 5x^2$

ముఖ్యాంశాలు

- బీజీయ సమాసంలో చరరాశులుగా $a, b, c, m, n, p, q, s, t, x, y, z$ etc., (ఆంగ్ల అక్షరాలు) మొదలగు వాటిని ఉపయోగిస్తాము.
- చరరాశి యొక్క విలువ స్థిరంగా ఉండదు. సందర్భములు, నియమాలను బట్టి మారుతుండవచ్చు.
- ఒకే చరరాశిని మరియు ఒకే చరరాశి ఘాతం కల్గి ఉన్న బీజీయ సమాసాలను సజాతీయ పదాలు అంటారు.
- ఇచ్చిన బీజీయ పదాలలో ఒకే పదం ఉంటే అది 'ఏకపది' అనీ, రెండు విజాతి పదాలుంటే 'ద్విపది' అనీ, మూడు విజాతి పదాలుంటే దానిని 'త్రిపది' అనీ, అంతకన్నా ఎక్కువ విజాతి పదాలుంటే "బహుళపదులు" అంటారు.
- బహుపదులను వాటి పరిమాణాన్ని బట్టి రేఖీయ బహుపది, వర్గ బహుపది, ఘన బహుపదిగా వర్గీకరించవచ్చు.
- ఒక బహుపది $p(x)$ యొక్క విలువ ఒక వాస్తవ సంఖ్య 'a' వద్ద శూన్యం అయితే $p(a) = 0$. ఇప్పుడు 'a' ను $p(x)$ యొక్క బహుపది శూన్యవిలువ అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 90 06-02-2021 14:53

అధ్యాయం 2.2 ప్రత్యేక లబ్ధాలు మరియు కారణాంక విభజన

2.2.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- సర్వసమీకరణాల ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్యల వర్గమును కనుగొంటారు.
- సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి సమస్యలు సాధిస్తారు.
- కారణాంక విభజన
- బీజీయ సమాసాల యొక్క కారణాంకాలను సామాన్య కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొంటారు.
- సమాసంలోని పదాలను అనువైన సమూహాలుగా చేయుట ద్వారా కారణాంక విబజన చేయగల్గుతారు.
- సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన గూర్చి తెలుసుకుంటారు.

2.2.1 పరిచయం

గత అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న విధంగా మనం బీజీయ సమాసాలను సంకలనం కూడా చేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు $3x$ కు $5x$ ను ఏవిధంగా కలపాలో మనకు తెలుసు. i.e. $3x + 5x = 8x$ మరియు $5x$ ను $3y$ కి కల్పితే $5x + 3y$ వస్తుంది.

బీజీయ సమాసాలను సంకలనం లేదా వ్యవకలనం చేయాల్సి వస్తే ముందుగా సజాతి పదాలను ఒక సమూహంగా రాసుకొని కలపడం లేదా వ్యవకలనం చేయాలి. ఇక్కడ ఒక విషయం గుర్తు పెట్టుకోవాలి. అదేమిటంటే విజాతి పదాలను కలపడం లేదా తీసివేయడం చేయలేము. ఆ పదాలు అలాగే ఉంటాయి. కావున $3x^2$ మరియు $6x^2$ ల మొత్తం $9x^2$ కాగా $5x + 3x^2$ యొక్క విలువ $5x + 3x^2$ అవుతాయి.

అదేవిధంగా $5xy + 8x + 9y + 3xy$ ని గనుక తీసుకుంటే ఇందులో కేవలం $5xy$, $3xy$ లను మాత్రమే కూడగలము. ఎందుకంటే ఇవి మాత్రమే సజాతి పదాలు కావున $8xy$ వస్తుంది. మిగిలిన పదాలు అలాగే ఉంటాయి. అనగా దీని ఫలిత విలువ $8xy + 8x + 9y$ గా వ్రాస్తాము.

బీజీయ సమాసాలలోని పదాలు అంకెలు (స్థిరరాశులు) మరియు అక్షరాలతో కూడా (చరరాశులు) ఉంటాయి. ఇలా ఉన్నప్పుడు వాటిని ఎలా కూడాలో, గుణించాలో మనకు తెలుసు.

ఉదాహరణ

$$y \times y = y^2$$
$$x \times y = xy$$
$$5x \times 3y = 15xy$$

మరియు $5(x + y) = 5x + 5y$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 91 06-02-2021 14:53

మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

((i) $x(x + 4) = x^2 + 4x$

(ii) $(m + 3)\ (m + n) = m \times (m + n) + 3 \times (m + n)$

$= m^2 + mn + 3m + 3n.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. క్రింది సమస్యలను సాధించండి.

(i) $(m + 3)\ (m + 3)$ (ii) $(y - 3) \times (y - 3)$

(iii) $(p + 5) \times (p - 5)$ (iv) $(2m + 4) \times (3m + 6)$

(v) $(x - 5) \times (3y - 6)$ (vi) $(5x - 2y) \times (3y - 2x)$

2.2.2 బీజీయ సర్వసమీకరణాలు

అక్షరాలు మరియు సంఖ్యలతో (స్థిర, చర రాశులు) కూడుకున్న పదాల యొక్క సామాన్య గుణకారాలు కొన్ని మనం చూస్తుంటాము. ముమ్ముందు సమస్యలు సాధించడంలో ఉపయోగపడతాయి. బీజీయ సమాసాలలో వీటి రూపాలను గుర్తించే ప్రయత్నం చేస్తూ వాటిని ఉపయోగించుకుంటాము. వీటినే బీజీయ సర్వసమీకరణాలు అంటాము. వీటి సాధారణ రూపంలో ఏవైనా చరరాశులు ఉంచుకునే వెసులుబాటు ఉంటుంది. బీజీయ సర్వసమీకరణాలను పొందుటకు ముందుగా మనం కొన్ని గుణకారాలను చేద్దాము.

$(a + b) \times (a + b)$ ని గమనించండి. దీనిలో a మరియు b అనేవి ఏవైన 2 అక్షరాలు. ఇవి m & n లేదా x & y లేదా p & q ఏవైనా కావచ్చు.

$(a + b)\ (a + b) = a \times (a + b) + b(a + b)$

$= (a \times a) + (a \times b) + (b \times a) + (b \times b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

అనగా $a^2 + 2ab + b^2$ వస్తుంది.

$\therefore\ (a + b)\ (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ $\Rightarrow$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

అదేవిధంగా ఇప్పుడు $(a - b)$ ని $(a - b)$తో గుణించి చూద్దాము.

కాబట్టి $(a - b) \times (a - b)$

$(a - b) \times (a - b) = a(a - b) - b(a - b)$

$= (a \times a) - (a \times b) - (b \times a) + (b \times b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 92 06-02-2021 14:53

$\therefore\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ వస్తుంది.

కావున $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

ఇప్పుడు $(a+b)\times(a-b)$ విలువ కనుగొనే ప్రయత్నం చేద్దాం.

$$(a+b)(a-b) = a\times(a-b) + b\times(a-b)$$

$$= (a\times a) - (a\times b) + (b\times a) - (b\times b)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. క్రింది వాని విలువలు కనుగొనండి.

(i) $(x+y)(x+y)$ (ii) $(x-z)\times(x-z)$

(iii) $(c-d)\times(c+d)$ (iv) $(m-n)\times(m-n)$

సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కొన్ని సమస్యలను సాధించే ప్రయత్నం చేద్దాము.

ఉదాహరణ 1 : $(5x+3)^2$ విలువను సరైన సర్వసమీకరణంను ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

సాధన : $(5x+3)^2$ అనేది $(a+b)^2$ రూపంలో ఉంది. ఇచ్చట $a = 5x$ మరియు $b = 3$

a, b విలువలను సర్వసమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$(5x+3)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + (3)^2 \qquad [\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$

$$\therefore\ (5x+3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$$

ఉదాహరణ 2 : $(y-8)(y-8)$ యొక్క లబ్ధాన్ని సరైన సర్వసమీకరణంను ఉపయోగించి కనుగొనండి.

సాధన : $(y-8)(y-8)$ అనగా $(y-8)^2$ అవుతుంది.

ఇంకా $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ అని మనకు తెలుసు.

$$(y-8)(y-8) = (y-8)^2 = y^2 - 2(y)(8) + 8^2$$

$$= y^2 - 16y + 64$$

$$\therefore\ (y-8)^2 = y^2 - 16y + 64$$

ఉదాహరణ 3 : 102×98 యొక్క విలువను సరైన సర్వసమీకరణంను ఉపయోగించి కనుగొనండి.

సాధన : 102×98 లో

$$102\times 98 = (100+2)(100-2)$$

[ఇది $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 93 06-02-2021 14:53

$$102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2)$$
$$= (100)^2 - (2)^2$$
$$= 10{,}000 - 4 \qquad [(x + y)(x - y) = x^2 - y^2]$$
$$= 9{,}996$$

ఉదాహరణ 4 : $987^2 - 13^2$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన :

$$(987)^2 - (13)^2 = (987 + 13)(987 - 13) \quad (\because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \text{ అని తెలుసు})$$
$$= 1000 \times 974$$
$$= 9{,}74{,}000.$$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి క్రింది వాని విలువలు కనుగొనండి.

(i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 297×303

(iii) $(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2$ (iv) $(5x - 2)(5x - 2)$

(v) 1001×1001 (vi) 80.5×79.5

(vii) $\left(\frac{2}{3}m - \frac{3}{2}n\right)^2$ (viii) $(xy + 3z)^2$

(ix) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

II. $a + b = 5$ మరియు $ab = 4$ అయితే $a - b$ విలువను కనుగొనండి.

III. ఒక చదరం యొక్క భుజం పొడవు $(5x + 3)$ మీ॥ అయిన దాని వైశాల్యం కనుగొనండి.

2.2.3 సర్వసమీకరణాల సహాయంతో సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనడం

ఉదాహరణ 5 : $(501)^2$ యొక్క విలువను సరైన సర్వసమీకరణం ద్వారా కనుగొనండి.

సాధన :

$$(501)^2 = (500 + 1)^2$$
$$= (500)^2 + 2(500)(1) + (1)^2 \qquad [\because (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$$
$$= 250000 + 1000 + 1$$
$$= 2{,}51{,}001$$
$$\therefore (501)^2 = 2{,}51{,}001.$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 94   06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 6: $(290)^2$ యొక్క విలువను గణించండి.

సాధన : $(290)^2 = (300 - 10)^2$

$= (300)^2 - 2(300)(10) + (10)^2$

$= 90{,}000 - 6000 + 100$

$= 84{,}100.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది వాని విలువలను సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కనుగొనండి.

(i) $(890)^2$ (ii) $(405)^2$ (iii) $(999)^2$ (iv) $(710)^2$

(v) $(302)^2$ (vi) $(801)^2$ (vii) $(404)^2$

2.2.4 బీజీయ సమాసాల కారణాంక విభజన

పరిచయం 12, 20, 81 మొదలగు సహజ సంఖ్యల యొక్క కారణాంకాలు ఏవిధంగా రాయాలో మనకు తెలుసు.

ఉదాహరణకు 12 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 3, 4, 6 మరియు 12 ఎందుకనగా 12ను పైన తెలిపిన సంఖ్యలను ఇతర సంఖ్యలతో గుణించి లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చు.

అదే విధంగా 24 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

అదేవిధంగా ప్రతీ బీజీయ సమాసాన్ని కూడ దాని కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చును.

క్రింది ఉదాహరణలు గమనించండి.

(i) $3xy = 3 \times x \times y$

$= (3 \times x) \times y$

$= 3 \times (x \times y)$

$= (3 \times y) \times x$

కావున $3xy$ యొక్క కారణాంకాలు $3, x, y, 3x, 3y, 3xy$.

(ii) $5x^2y = 5 \times x \times x \times y$

$= (5x^2) \times y$

$= 5\,(x^2y)$

$= (5y)x^2.$

కావున $5x^2y$ యొక్క కారణాంకాలు $5, x, y, 5x, 5y, 5x^2, x^2y, xy, 5xy, 5x^2y$.

బీజీయ సమాసానికి ఉన్నటువంటి అన్ని కారణాంకాలను కనుగొనే ప్రక్రియనే "కారణాంక విభజన" అంటాము.

2.2.5 బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభన చేయడం ఎలా?

$4x^2 + 8$ అనే బీజీయ సమాసంను తీసుకుంటే

* దీనిలో $4x^2$ మరియు 8 అనే 2 పదాలు ఉన్నాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 95 06-02-2021 14:53

* వీటిలో ఏదైనా ఉమ్మడి కారణాంకం ఉందా?
* రెండవ పదం 8ను 4 × 2 గా మార్చి రాయవచ్చు. కావున
* రెండు పదాలలో 4 అనేది ఉమ్మడి కారణాంకం అవుతుంది.
* కావున దత్త బీజీయ సమాసంను మనం క్రింది విధంగా కారణాంక విభజన చేయవచ్చు.

$$4x^2 + 8 = (4\times x \times x) + (4 \times 2)$$
$$= 4(x^2 + 2)$$

సరిచూచుట: కారణాంక విభజన అనంతరం వచ్చిన కారణాంకాలను గుణించడం ద్వారా కారణాంక విభజన సర్రైందో కాదో సరిచూడవచ్చు.

ఉదాహరణ 7: $4y^3 + 2y^2$ ను కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : దత్తసమస్యలో $4y^3$ మరియు $2y^2$ అనే రెండు పదాలు ఉన్నాయి.

* రెండు పదాలలో ఉన్న ఉమ్మడి కారణాంకం 2 మరియు y^2 గా మనం గమనించవచ్చు.
* 2 పదాల గ.సా.కా. $2y^2$ అవుతుంది.
* $4y^3 + 2y^2 = 2y^2(2y + 1)$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. **క్రింద ఇచ్చిన పదాలలోని ఉమ్మడి కారణాంకాలు రాయండి.**

(i) $81x,\ 18x^2$ (ii) $3m^2, 7m, 6m^3$

(iii) $4x^2y, 10y^2z$ (iv) $12x^2yz^2, 18xy^2z, 16xyz^2$

(v) $4a^2b^2, 6ab^2, 10a^3b^3$ (vi) $10xy^2, 14x^2y, 20x^3y^2, 18x^3y$

మనం ఇచ్చట గ.సా.కా. అనే భావనను ఉపయోగించడం జరిగింది. కావున బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయడం అంటే ఇచ్చిన సంఖ్యల గ.సా.కా కనుగొనడం వంటిదే. ఇచ్చిన పూర్ణాంకాల యొక్క గ.సా.కా. ను కనుగొనే పద్ధతిని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకునే ప్రయత్నం చెయ్యండి.

ఒక ఉదాహరణ సహాయంతో ఇంకా వివరంగా అర్థం చేసుకునే ప్రయత్నం చేద్దాము.

ఉదాహరణ 8 : $24pq^2 - 16p^2q^2$ ని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : సమస్యలోని 2 పదాలు $24pq^2$ & $16p^2q^2$ మొదట ఈ 2 పదాల గ.సా.కా కనుగొందాము.

$$24\,pq^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times p \times q \times q$$ [ప్రధాన కారణాంకాలు]

$$16p^2q^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 96
06-02-2021 14:53

గరిష్ట సామాన్య కారణాంకం $= 2\times2\times2\times p \times q \times q$

$= 8pq^2$.

$\therefore \; 24pq^2 - 16p^2q^2 = 8pq^2 \; (3 - 2p)$.

ఉదాహరణ 9 : $8x^2y^3 + 10x^3y^2$ ని కారణాంక విభజన చెయ్యండి.

సాధన : $8x^2y^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times y$

$10x^3y^2 = 2 \times 5 \times x \times x \times x \times y \times y$

గ.సా.కా. $= 2 \times x \times x \times y \times y$

$= 2x^2y^2$

$\therefore \; 8x^2y^3 + 10x^3y^2 = 2x^2y^2 \; (y + 5x)$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది వాటిని కారణాంక విభజన చెయ్యండి.

(i) $8xy + 6y^2$ (ii) $9m^2n - 6n^2m$

(iii) $x^2y + y^2x - x^2$ (iv) $6x^7 + 3x^4 - 15x^3$

(v) $a^3b^8 - 7a^{10}b^4 + 2a^5b^2$ (vi) $2x(x^2 + 1)^3 - 16(x^2+1)^5$

ఉదాహరణ 10: $(25p^2 - 49q^2) \; (5p + 7q)$

సాధన : సమస్యలోని $25p^2 - 49q^2$ ని $(5p)^2 - (7q)^2$ గా రాయవచ్చు. మరియు ఇది $x^2 - y^2$ రూపంలో ఉంది.

$x^2 - y^2$ కు సంబంధించిన సర్వసమానత్వం జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.

ఇచ్చట $x = 5p \quad y = 7q$

$$\therefore \; \frac{25p^2 - 49q^2}{(5p+7q)} = \frac{(5p)^2 - (7q)^2}{(5p+7q)}$$

$$= \frac{(5p+7q)(5p-7q)}{(5p+7q)}$$

$$= 5p - 7q.$$

పై ఉదాహరణల నుండి బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మరూపంలో రాయడానికి మరియు సూక్ష్మీకరించుటకు కారణాంక విభజన సహాయపడుతుందని తెలుస్తుంది.

ఇప్పటి వరకు కారణాంకాలు అంటే ఏమిటో, బీజీయ సమాసాలను కారణాంక విభజన ఎలా చేయాలో తెలుసుకున్నాం కదా!

ఇప్పుడు కారణాంక విభజన పద్ధతుల గురించి చర్చించుకుందాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 97 06-02-2021 14:53

I. ఉమ్మడి కారణ్యాంకం కనుగొనడం ద్వారా

ఉదాహరణ 11: $2x^4 + 4x^2 + 8x^3$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : మొదట ఇచ్చిన సమాసంలోని 3 పదాలలో ఉన్న సామాన్య (ఉమ్మడి) కారణాంకాలను కనుగొనాలి. దానికోసం సమాసంలోని పదాలను ప్రధాన కారణాంకాలుగా విడగొట్టాలి.

కావున

$2x^4 = 2 \times x \times x \times x \times x$

$4x^2 = 2 \times 2 \times x \times x$

$8x^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x$

గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకం

$2 \times x \times x = 2x^2$

గ.సా.కా $2x^2$ ను గుణకంగా రాయగా

$2x^4 + 4x^2 + 8x^3 = 2x^2 (x^2 + 2 + 4x)$

$= 2x^2 (x^2 + 4x + 2).$

ఉదాహరణ 12: $8xy + 4$ ని కారణాంకాలుగా విడగొట్టండి.

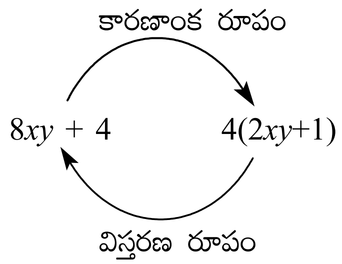
సాధన : $8xy = 2 \times 2 \times 2 \times x \times y$

$4 = 2 \times 2$

రెండు పదాలలోని గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకను గుర్తించండి.

గ.సా.కా $2 \times 2 = 4$ ను గుణకంగా రాయగా మనకు

$8xy + 4 = 4(2xy + 1)$



మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఉమ్మడి కారణాంక పద్ధతిలో క్రింది సమస్యలను కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $4y^3 + 2y^2$ (ii) $3xyz + 16x^2y$

(iii) $5l^2m - 25m^2n + 10lm$ (iv) $8x^2 + 10x^2y - 20xy^2$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 98 06-02-2021 14:53

II. పదాలను అనువైన సమూహాలుగా చేయడం ద్వారా కారణాంక విభజన చేయుట

క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదాహరణ 13 : $12a - n + na - 12$

ఈ బీజీయ సమాసంలో ఉన్న 4 పదాలలో కనీసం ఒక్క సామాన్య (ఉమ్మడి) కారణాంకం కూడా లేదు. ఇలాంటి సందర్భాలలో మనం సమాసంలోని పదాలను అనుకూల సమూహాలుగా రాసుకోవాలి. అనువైన సమూహాలు చేయడంలో క్రింది 3 సోపానాలు పాటించాలి.

1) ప్రతి సమూహంలో కూడా ఉమ్మడి కారణాంకం ఉండాలి. 2) ప్రతి సమూహాన్ని కారణాంక విభజ చేయాలి. 3) ప్రతీ సమూహాంలో ఉన్న ఉమ్మడి పదాన్ని కారణాంకంగా రాసుకోవాలి. ఈ సమాసాన్ని జాగ్రత్తగా గమనిస్తే మొదట, చివరి పదాలలో "12" మరియు రెండవ, మూడవ పదాలలో "n" అనేది ఉమ్మడి కారణాంకంగా ఉంది. ఈ 4పదాలను ఒక క్రమపద్ధతిలో రాసుకుంటే

$$12a - n + na - 12 = 12a - 12 - n + na$$
$$= (12a - 12) + (na - n)$$
$$= 12(a - 1) + n(a - 1)$$

మళ్ళీ ఈ రెండు పదాలలో $(a - 1)$ అనేది ఉమ్మడి కారణాంకంగా ఉంది.

కావున $12a - n + na - 12 = (a - 1)(12 + n)$

$\therefore$ $12a - n + na - 12$ యొక్క కారణాంకాలు $(a - 1)$ మరియు $(12 + n)$ లు అవుతాయి.

ఈ భావనను మరింతగా అవగాహన చేసుకోవడానికి మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 14 : $xy + 6 + 3x + 2y$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : సమాసంలో ఉన్న 4 పదాలలో ఏదైన సామాన్య కారణాంకం ఉందా?

లేదు కదా! అని జాగ్రతగా గమనిస్తే మొదట, మూడవ పదాలలో "x" మరియు రెండవ, నాల్గవ పదాలలో "2" ని ఉమ్మడి కారణాంకంగా చెప్పవచ్చు. కావున ఈ 4 పదాలను అనుకూల సమూహాలుగా రాయగా

$$xy + 6 + 3x + 2y = xy + 3x + 6 + 2y$$
$$= x(y + 3) + 2(3 + y)$$
$$= x(3 + y) + 2(3 + y)$$

వీటిలో మళ్ళీ $(3 + y)$ సామాన్య కారణాంకంగా ఉంది. $(3 + y)(x + 2)$

$\therefore$ $xy + 6 + 3x + 2y = (3 + y)$ & $(x + 2)$.

* పై సమాసంలోని సంఖ్యలను (పదాలను) వివిధ పద్ధతులలో సమూహాలుగా విభజిస్తూ సాధించే ప్రయత్నం చేయండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 99 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 15 : $a^2 + bc + ab + ac$ ని సరైన సమూహాలు చేయడం ద్వారా కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : $a^2 + bc + ab + ac$ అనుకూల సమూహాలుగా రాయడం ద్వారా

$= a^2 + ab + ac + bc$ అవుతుంది.

$= a(a + b) + c(a + b)$

$= (a + b)(a + c)$ [$\because$ ఇచ్చట ఉమ్మడి కారణాంకం ఏమిటి?]

ఉదాహరణ 16: $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : దత్త సమాసం $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$.

అనుకూల సమూహాలుగా రాసుకుంటే

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ వస్తుంది.

$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$

$= (x^2 + y^2)(a + b)$ [$\because$ ఎందుకు?]

ఉదాహరణ 17: $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$ ని కారణాంకాలుగా విడదీయండి.

సాధన : దత్త సమాసం $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$

$= abx^2 + y^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy$

అనుకూల సమూహాలుగా రాసుకుంటే

$= (abx^2 + a^2xy) + (aby^2 + bxy)$

$= ax(bx + ay) + by(ay + bx)$

$= ax(bx + ay) + by(bx + ay)$

$= (bx + ay)(ax + by)$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. సమూహాలుగా మార్చి రాయడం ద్వారా క్రింది సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $xy - pq + qy - pz$ (ii) $x^2 + 9y + 9x + xy$

(iii) $7ab - 12bc - 7ax + 12cx$ (iv) $4xy - 7y + 12x - 21$

(v) $2x^2 + ay - ax^2 - 2y$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 100 06-02-2021 14:53

III. ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయుట

ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన ఎలా చేయాలో కొన్ని ఉదా॥ల సహాయంతో అవగాహన చేసుకుందాము.

ఉదాహరణ 18 : $x^2 + 8x + 16$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : దత్త సమాసంలో మూడు పదాలు ఉన్నాయి మరియు అన్ని పదాలు కూడా ధనాత్మకంగా ఉండి మొదటి, చివరి పదాలు పరిపూర్ణ వర్గాలుగా ఉన్నట్లు మనం గమనించవచ్చు.

ఒకసారి మొదటి సర్వసమీకరణం గుర్తుతెచ్చుకోండి.

ఇక్కడ $x^2 + 8x + 16$ అనేది $a^2 + 2ab + b^2$ రూపంలో ఉంది.

ఇందులో $a = x$ మరియు $b = 4$

$x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$ $\quad [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

$= (x + 4)^2$

$= (x + 4)(x + 4)$

$\therefore \; x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4).$

ఉదాహరణ 19 : $81m^2 - 100$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : దత్త సమాసంలో ఉన్న 2 పదాలలో ఎలాంటి ఉమ్మడి (సామాన్య) కారణాంకం లేదు. కాని జాగ్రత్తగా గమనిస్తే రెండు పదాలు కూడా మధ్యలో ఋణగుర్తు కల్గిన పరిపూర్ణ వర్గాలే.

కావున వీటిని $x^2 - y^2$ రూపంలో రాసుకోగల్గితే

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ సర్వసమీకరణం

ద్వారా కారణాంక విభజన చేయవచ్చు.

$81m^2 - 100$ లను పరిపూర్ణ వర్గాలుగా ఎలా రాయవచ్చు?

$81m^2 - 100 = (9m)^2 - (10)^2$ $\quad$ ఇచ్చట $x = 9m$ మరియు $y = 10$

$= (9m + 10)(9m - 10)$

$\therefore \; 81m^2 - 100 = (9m + 10)(9m - 10)$

ఉదాహరణ 20: $9x^2 - 12mx + 4m^2$ ని కారణాంకాలుగా విభజించండి.

సాధన : సమస్యలో $9x^2$ మరియు $4m^2$ లు అనేవి ఈ ఖచ్చిత వర్గాలు కావున

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 101
06-02-2021 14:53

$9x^2 = (3x)^2$ మరియు $4m^2 = (2m)^2$ గా రాసుకోవచ్చు.

మధ్యపదం $12mx$ ను

$12mx = 2(3x)\ (2m)$ గా రాయవచ్చు.

కావున $9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x)^2 - 2(3x)\ (2m) + (2m)^2$

ఇప్పుడు ఇది $a^2 - 2ab + b^2$

ఇచ్చుట $a = 3x$ & $b = 2m$

కాని $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ అని తెలుసు.

$\therefore\ 9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2m) + (2m)^2$

$= (3x - 2m)^2$ [$(a - b)^2$ లో x & y విలువలు ప్రతిక్షేపిస్తే]

$9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x - 2m)\ (3x - 2m)$.

ఉదాహరణ 21 : $16x^2 + 8x + 1$ ని కారణాంకాలుగా విడగొట్టండి.

సాధన : $16x^2 + 8x + 1 = (4x)^2 + 2(4x)(1) + (1)^2$

ఇది $a^2 + 2ab + b^2$ రూపంలో ఉంది.

ఇచ్చుట $a = 4x$ & $b = 1$

$6x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2$ $[\because\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

$16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)\ (4x + 1)$.

ఉదాహరణ 22: $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : దత్తసమాసం $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ అనేది

$a^2 - b^2$ రూపంలో ఉంది. మరియు

ఇచ్చుట $a = x + 1$ & $b = x - 1$

కావున

$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x + 1 + x - 1)\ (x + 1 - x + 1)$ $[\because\ a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)]$

$= (2x)\ (2)$

$= 4x$.

ఉదాహరణ 23: $9a^2 - 30a + 25$ ని కారణాంక విభజన చేయండి.

సాధన : $9a^2 - 30a + 25$ ని మనం

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 102 06-02-2021 14:53

$9a^2 - 30a + 25 = (3a)^2 - 2(3a)(5) + (5)^2$ గా రాసుకోవచ్చు.

$= (3a - 5)^2$ [$\because$ ఎందుకు ?]

$= (3a - 5)(3a - 5)$

$\therefore\ 9a^2 - 30a + 25 = (3a - 5)(3a - 5).$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ప్రామాణిక సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగించి క్రింది సమాసాలను కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $x^2 + 10x + 25$ (ii) $4m^2 - 12mn + 9x^2$

(iii) $y^2 - 9$ (iv) $4p^2 - 20pq + 25q^2$

(v) $16x^2 - 36y^2$ (vi) $1 - 25\,(2a - 5b)^2$

(vii) $m^4 - n^4$ (Hint : $m^4 = (m^2)^2 \;\; n^4 = (n^2)^2$)

అభ్యాసము

1. క్రింది సమాసాలను కారణాంక విభన చేయండి.

(i) $2x^2 + 6x$ (ii) $6y^2 + y^3 + 6y^4$

(iii) $7y^2 + 35z^3y$ (iv) $lx^2 + mx + nx^2$

(v) $3x^3 + 6x^2 + 9x^4$

2. సరైన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి క్రింది సమాసాలను కారణాంక లబ్ధాలుగా రాయండి.

(i) $x^2 - 8x + 16$ (ii) $2x + 1 + 100x^2$

(iii) $72x^2 - 8$ (iv) $x^2 - 10x + 25$

(v) $\dfrac{m^2}{n^2} - 36$

3. క్రింది వానిని కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $c^2 - 2cd + d^2$ (ii) $a^2b^2 - 144$

(iii) $5x^2 - 80$ (iv) $p^2q^2 + 10pq + 25$

(v) $4ab - 5a - 12b + 15$

4. సర్వసమీకరణాల సహాయంతో క్రింది సంఖ్యల వర్గం కనుగొనండి.

(i) 890 (ii) 605 (iii) 99 (iv) 510 (v) 108

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 103 06-02-2021 14:53

5. క్రింది వానిని కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $6x^7 + 3x^4 - 9x^3$ (ii) $z^2 - 10z + 21$

(iii) $x^2 + 14x + 49$ (iv) $6w^4 - 7w + 3w^3 - 14w^2$

(v) $2y^6z - y^4z^{10} + 3y^2z^2$

ముఖ్యాంశాలు

1. ఇచ్చిన సమాసాన్ని దాని కారణాంకముల లబ్ధంగా రాసే ప్రక్రియనే "కారణాంక విభజన".
2. బీజీయ సర్వ సమీకరణాలలో ముఖ్యమైనవి

   (i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   (iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
3. $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ మరియు $a^2 - b^2$ రూపాలలోకి మార్చుకొని రాసే సమాసాలకు సర్వసమీకరణాల సహాయంతో కారణాంక విభజన చేయవచ్చు.
4. $(a + b)^2$ మరియు $(a - b)^2$ సర్వసమీకరణాల ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్యల వర్గములు కనుగొనవచ్చు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 104 06-02-2021 14:53

అధ్యాయం

2.3 రేఖీయ సమీకరణాలు

2.3.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- నిజజీవితములోని సంఘటనల ద్వారా ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు మరియు రెండు చరరాశులతో రేఖీయ సమీకరణాలను వ్యక్తపరుస్తారు.
- ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలను సాధిస్తారు.
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలను సాధిస్తారు.

2.3.1 పరిచయం

కిరణ్ మరియు మాధవి సంఖ్యలతో ఆడుకుంటున్నారు. కిరణ్, మాధవితో "నేను ఒక సంఖ్యను అనుకున్నాను దానిని రెట్టింపు చేసి ఫలితము నుంచి 5ను తీసివేస్తే 45 వచ్చింది, అయితే నేను అనుకున్న సంఖ్యను చెప్పగలవా? అని అడిగాడు.

ఇచ్చుట అనుకున్న సంఖ్య తెలియదు కావున ఇట్టి సంఖ్యను 'x' అనుకొనిన

దానిని రెట్టింపు చేస్తే '$2x$' అవుతుంది.

తరువాత $2x$ నుండి 5ను తీసివేస్తే ఫలిత సంఖ్య $2x - 5$

కాని దత్తాంశము ప్రకారము కిరణ్ అనుకున్న సంఖ్య 45 కు సమానము.

$\Rightarrow \quad 2x - 5 = 45$

ఇటువంటి సమీకరణమును ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణము అని అంటారు.

2.3.2 ఏకచర రాశిలో రేఖీయ సమీకరణాలు

రోహన్ 2 కి.గ్రా. ఆపిల్స్ కొనడానికి ₹ 50 ఇచ్చి తిరిగి ₹ 10 రూపాయలను తీసుకుంటే ఒక కిలో ఆపిల్స్ ధర ఎంత?

ఇచ్చుట $2x + 10 = 50$ (సమీకరణము)

LHS (సమానత్వపు గుర్తునకు ఎడమవైపు) $= 2x + 10$

RHS (సమానత్వపు గుర్తునకు కుడివైపు) $= 50$

ఒక రేఖీయ సమీకరణము అనేది స్థిరరాశులు, చరరాశులు గల బీజీయ సమాసాల సమానత్వమును తెలుపుతుంది. దీని రూపము $ax + by = c$ పరిమాణము ఒకటి గల సమీకరణము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 105 06-02-2021 14:53

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది వానిలో ఏవి రేఖీయ సమీకరణాలు

(i)	$3x + 7 = 8$	(ii)	$4x - 5y = 10$
(iii)	$6x^2 - 7xy = 20$	(iv)	$xy + yz = 12$
(v)	$4 = 2p - 3$	(vi)	$7p - 3q = 11$

2.3.3 ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణాల సాధన

ఒక సమీకరణము యొక్క LHS మరియు RHS విలువలు సమానము, అయితే ఇది సమీకరణములోని చరరాశి యొక్క విలువకు మాత్రమే సత్యమవుతుంది. చరరాశి యొక్క ఈ విలువనే సమీకరణము యొక్క సాధన అంటాము.

సమీకరణ సమతుల్యత :

సమీకరణాలను సమానత్వ ధర్మాలను ఆధారముగా చేసుకొని సాధించాలి అంటే సమానత్వపు గుర్తునకు ఇరువైపుల ఒకే సంఖ్యచే కూడిక, తీసివేత, గుణకారము మరియు భాగాహారము చేయవలయును. క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా ఎలా సాధించాలో పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 1 : సమీకరణాలను సాధించండి. i) $x + 3 = 9$, ii) $y - 4 = 7$

సాధన: i) $x + 3 = 9$

$\Rightarrow x + 3 - 3 = 9 - 3$ ($\because$ ఇరువైపుల 3ను తీసివేయగా)

$\Rightarrow x + 0 = 6$

$\Rightarrow x = 6$

ii) $y - 4 = 7$ ($\because$ ఇరువైపుల 4 ను కూడగా)

$y - 4 + 4 = 7 + 4$

$\Rightarrow y - 0 = 11$

$y = 11.$

ఉదాహరణ 2 : $m - 8 = 9$ సాధించుము.

సాధన : $m - 8 = 9$ ...(1)

దీనికి ఇరువైపుల 8 ని కూడగా

$\Rightarrow m - 8 + 8 = 9 + 8$

$\Rightarrow m + 0 = 17$

$\Rightarrow m = 17.$

సరిచూచుట : LHS

$m - 8$ [$\because m = 17$]

$17 - 8 = 9$ (RHS)

$\therefore$ LHS = RHS

ఉదాహరణ 3 : $5x = -40$ సాధించుము.

సాధన : $5x = -40$ ...(1)

దీనికి ఇరువైపుల 5 చేత భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{5x}{5} = -\frac{40}{5} \quad ...(2)$$

$$\Rightarrow x = -8$$

సరిచూచుట : $x = -8$ ప్రతిక్షేపించినచో LHS = RHS.

ఉదాహరణ 4 : $\frac{p}{7} = 4$ సాధించుము.

సాధన : $\frac{p}{7} = 4$ ... (1)

దీనికి ఇరువైపుల 7 చేత గుణించగా

$$\Rightarrow \frac{p}{7} \times 7 = 4 \times 7 \quad ... (2)$$

$$\Rightarrow p = 28.$$

ఉదాహరణ 5 : సమీకరణము $3y + 37 = 8$ సాధించుము.

సాధన : $3y + 37 = 8$ ... (1)

దీనికి ఇరువైపుల 37 ను తీసివేయగా

$\Rightarrow 3y + 37 - 37 = 8 - 37$

$\Rightarrow 3y = -29$ ఇరువైపుల 3 చేత భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-29}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-29}{3}$$

సరిచూచుట : LHS $\Rightarrow 3y + 37$

$$3\left(\frac{-29}{3}\right) + 37$$

$\Rightarrow -29 + 37$

$\Rightarrow 8$ (RHS)

$\therefore$ LHS = RHS.

ఇప్పటి వరకు మనము చూసిన సమీకరణాలలో RHS ఒక సంఖ్యయే. ఎల్లప్పుడు ఇలానే ఉండకపోవచ్చు. ఇరువైపుల చరరాశులతో కూడిన సమాసాలు కూడా వుండవచ్చు.

ఉదాహరణ 6 : $2x - 4 = x + 6$ సాధించుము.

సాధన : $2x - 4 = x + 6$

ఇరువైపుల 4ను కూడగా

$\Rightarrow 2x - 4 + 4 = x + 6 + 4$

$\Rightarrow 2x = x + 10$

ఇరువైపుల x ను తీసివేయగా

$\Rightarrow 2x - x = x - x + 10$

$\Rightarrow x = 10.$

ఉదాహరణ 7 : $4(p - 3) = 3(p - 2)$ సాధించుము.

సాధన : $4(p - 3) = 3(p - 2)$

$\Rightarrow 4p - 12 = 3p - 6$

ఇరువైపులా 12 ను కూడగా

$\Rightarrow 4p - 12 + 12 = 3p - 6 + 12$

$\Rightarrow 4p = 3p + 6$

ఇరువైపుల $3p$ ని తీసివేయగా

$\Rightarrow 4p - 3p = 3p - 3p + 6$

$\Rightarrow p = 6.$

ఉదాహరణ 8 : $5(x + 3) - 2(3 - 2x) = 3(x + 6) - 4(5 - x)$ సాధించుము.

సాధన : LHS : $5(x + 3) - 2(3 - 2x)$

$\Rightarrow 5x + 15 - 6 + 4x$

$\Rightarrow 9x + 9$

RHS : $3(x + 6) - 4(5 - x)$

$\Rightarrow 3x + 18 - 20 + 4x$

$\Rightarrow 7x - 2.$

$\therefore 9x + 9 = 7x - 2$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 108
06-02-2021 14:53

ఇరువైపులా 9 ని తీసివేయగా

$\Rightarrow 9x + 9 - 9 = 7x - 2 - 9$

$\Rightarrow \quad 9x = 7x - 11.$

ఇరువైపుల $7x$ ను తీసివేయగా

$\Rightarrow 9x - 7x = 7x - 7x - 11$

$\Rightarrow \quad 2x = -11$

ఇరువైపుల 2 చేత భాగించగా

$$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-11}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-11}{2}.$$

ఇప్పుడు హారములో చచరాశులు కల్గి ఉంటే, ఇటువంటి ఉదాహరణలు కొన్ని పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 9 : $\dfrac{5x+2}{3x+5} = \dfrac{6}{7}$ సాధించుము.

సాధన : $\dfrac{5x+2}{3x+5} = \dfrac{6}{7}$ ...(1)

సమీకరణమునకు ఇరువైపుల $(3x + 5)$ చేత గుణించగా

$$\frac{(5x+2)}{(3x+5)} \times (3x+5) = \frac{6}{7} \times (3x+5)$$

$$\Rightarrow \quad 5x+2 = \frac{6(3x+5)}{7}$$

సమీకరణమును తిరిగి 7 చేత గుణించగా

$$7(5x+2) = \frac{6(3x+5)}{7} \times 7$$

$7(5x + 2) = 6(3x + 5)$ ...(2)

$\Rightarrow \quad 35x + 14 = 18x + 30$

$\Rightarrow \quad 35x - 18x = 30 - 14$

$\Rightarrow \quad 17x = 16$

$$x = \frac{16}{17}.$$

సమీకరణము (1), (2) లను గమనించండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 109 06-02-2021 14:53

ఇవ్వబడిన సమీకరణము	సూక్ష్మీకరించబడిన సమీకరణము
$\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$	$7(5x + 2) = 6(3x + 5)$

మీరేమి గమనించినారు ? ఇచ్చట మనం చేసినదేమిటంటే

1. LHS లోని లవమును RHS లోని హారముతో గుణించుము.
2. LHS లోని హారమును RHS లోని లవముతో గుణించుము.

$$\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7} \qquad\qquad \frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$$

3. (1), (2) సోపానము నుండి వచ్చిన బీజీయ సమాసాలను సమానము చేయాలి.

   $7(5x + 2) = 6(3x + 5)$

   ఈ పద్ధతిని "అడ్డగుణకారము" అని అంటాము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $6q = 12$ (ii) $-6y = 30$ (iii) $\frac{n}{7} = -3$

(iv) $3x + 1 = 16$ (v) $3p - 7 = 0$ (vi) $6x - 3 = 3x$

(vii) $8m + 9 = 6m + 11$ (viii) $3x + 5 = 6(x + 2)$

(ix) $3(p - 4) = 5(2t - 1)$,

(x) $8(x - 3) - (6 - 2x) = 2(x + 2) - 5(5 - x)$

(xi) $\frac{3p-5}{7p+2} = \frac{2}{3}$

II. ఒక భిన్నములో లవము, హారము కంటే 4 తక్కువ, అయితే లవ హారములకు ఒకటి కలిపిన అది $\frac{1}{2}$ కు సమానమౌతుంది. అయిన భిన్నము కనుగొనుము.

2.3.4 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాలు

ఒక రేఖీయ సమీకరణములో రెండు చరరాశులుంటే ఆ సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణము అని అంటాము.

సాధారణంగా $ax + by + c = 0$ రూపములో ఉండి, a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలవుతూ $a \neq 0$, $b \neq 0$ సమీకరణాన్ని x, y లలో రేఖీయ సమీకరణము అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 110 06-02-2021 14:53

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 10 : ఒక నోట్‌బుక్ ధర పెన్నువెల రెట్టింపునకు సమానమైతే రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును వ్రాయుము.

సాధన : నోట్‌బుక్ ధర = ₹ x.

పెన్ను ధర = ₹ y అనుకొనిన

దత్తాంశము ప్రకారము

నోట్‌బుక్ ధర $= 2 \times$ పెన్ను ధర

₹ $x = 2 \times$ ₹ y

$x = 2y$ ($\because$ ఇరువైపుల $2y$ చేత భాగించగా)

$x - 2y = 0.$

ఉదాహరణ 11 : రూప వయస్సు లాస్య వయస్సు కన్నా 3 రెట్లుకు సమానం అయిన, ఈ సమాచారాన్ని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణముగా వ్రాయుము.

సాధన : రూప వయస్సు = x సం॥లు

లాస్య వయస్సు = y సం॥లు అనుకొనిన

దత్తాంశము ప్రకారము

$x = 3y$ ($\because$ ఇరువైపుల $3y$ చేత భాగించగా)

$x - 3y = 0$

ఉదాహరణ 12 : ఈ క్రింది సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపములో వ్రాసి, ప్రతి సమస్యకు a, b, c విలువలు గుర్తించుము.

సాధన :

(i) $3x + 5y = 7$

$3x + 5y = 7$ రూపములో వ్రాయగా

$3x + 5y - 7 = 0$ రూపములో వ్రాయగా

ఇది $ax + by + c = 0$ రూపము

$a = 3, b = 5, \ c = -7$

(ii) $x - \frac{y}{3} - 8 = 0$

$1.x - \frac{1}{3} \ . \ y - 8 = 0$

$a = 1, \quad b = -\frac{1}{3}, \ c = -8.$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 111
06-02-2021 14:53

(iii) $7 = 2x$

$2x - 7 = 0$

$2x + 0 - 7 = 0$

$a = 2$

$b = 0$

$c = -7.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపములో వ్రాసి, a, b, c విలువలను గుర్తించుము.
   (i) $3x + 7y = 9$ (ii) $-2x + 3y = 8$ (iii) $y - 5 = 0$ (iv) $7 = 3x$
   (v) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} - 7 = 0$ (vi) $5x = \frac{8}{3}$
2. ఈ క్రింద ఇచ్చిన సమాచారము ద్వారా రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణ రూపములో వ్రాయుము.
   1) రెండు సంఖ్యల మొత్తము 27.
   2) పెన్సిల్ ధర పెన్ను ధర సగము కంటె ₹ 3 తక్కువ.
   3) భవానికి, రేష్మా మార్కుల రెట్టింపు కన్నా 5 మార్కులు ఎక్కువగా వచ్చినవి.

2.3.5 రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల సాధన

ఏక చరరాశిలో రేఖీయ సమీకరణములకు ఒకే ఒక సాధన ఉంటుందని మనకు తెలుసు. రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల సాధన ఏమిటి?

$3x - 2y = 5$ ఉదాహరణ తీసుకొందాం.

సాధనలో ఒకే ఒక విలువ ఉంటుందా?

ఒకటి కంటే ఎక్కువ విలువలు అవసరమా?

$x = 3$ ఈ సమీకరణానికి ఒక సాధన అవుతుందని మీరు చెప్పగలరా? పరిశీలిద్దాము.

$x = 3$ ని పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$3x - 2y = 5$

$3(3) - 2y = 5$

$\Rightarrow \quad 9 - 2y = 5$

$\Rightarrow \quad 9 - 5 = 2y$

$\Rightarrow \quad 4 = 2y$

$\therefore \quad y = 2$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 112 06-02-2021 14:53

అయితే y యొక్క అన్ని విలువలకు పై సమీకరణము తృప్తి పడుతుందని చెప్పలేము. x తో పాటు y విలువ తెలిసినప్పుడే అది సాధన అవుతుంది.

అనగా $3x - 2y = 5$ సమీకరణము తృప్తి పరచే విలువలు $x = 3$ మరియు $y = 2$ అంటే రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమును తృప్తి పరచడానికి

'x' కు ఒక విలువ, 'y' కి ఒక విలువ, మొత్తము రెండు విలువలు అవసరము.

$3x - 2y = 5$ యొక్క సాధన $x = 3$ మరియు $y = 2$ అని మనము గమనించాము. దీనిని (3, 2) గా వ్రాస్తాము.

మనకు LHS :

$$3x - 2y$$

$$3(3) - 2(2)$$

$$\Rightarrow \quad 9 - 4$$

$$\Rightarrow \quad 5 \text{ RHS.}$$

ఇదే సమీకరణానికి ఇతర సాధన ఏమైనా ఉన్నాదా? ఏదైనా ఒక సంఖ్యకు ఉదాహరణ $x = 4$ తీసుకొని $3x - 2y = 5$

$$3(4) - 2y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 12 - 2y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 12 - 5 = 2y$$

$$\Rightarrow \quad 7 = 2y$$

$$\therefore \quad y = \frac{7}{2}$$

కావున $\left(4, \frac{7}{2}\right)$ కూడా మరి ఒక సాధన అవుతుంది $3x - 2y = 5$

$3x - 2y = 5$ సమీకరణమునకు ఇంకా కొన్ని సాధనలు $(1, -1)$ వద్ద సాధన అవుతుందో సరిచూచుట.

ఒక రేఖీయ సమీకరణమునకు అనేక సాధనలు (అనంత సాధనలు) ఉంటాయి అని తెలుస్తుంది.

సూచన : ఇలాంటి సమీకరణాలలో $x = 0$ ప్రతిక్షేపించి "y" విలువను $y = 0$ ప్రతిక్షేపించి x విలువను కనుగొనుట ద్వారా రెండు సాధనలను సులభంగా పొందగలము.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాము.

ఉదాహరణ 13 : $4x - y = 3$ సమీకరణానికి నాల్గు వేరు వేరు సాధనలను కనుగొనుము..

సాధన :

i) $x = 0$ అయితే $x = 0$ విలువను $4x - y = 3$ నందు ప్రతిక్షేపించగా

$$4(0) - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad 0 - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad y = -3$$

$\therefore$ సాధన $(0, -3)$.

ii) $x = 1$ అయితే

$$4(1) - y = 3$$
$$4 - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad -y = 3 - 4$$
$$\Rightarrow \quad y = 1$$

$\therefore$ సాధన $(1, 1)$.

iii) $x = -1$ అయితే

$$4(-1) - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad -4 - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad -y = 3 + 4$$
$$\Rightarrow \quad -y = 7$$
$$y = -7$$

$\therefore$ సాధన $(-1, -7)$.

ఉదాహరణ 14 : ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి $x - 2y = 4$ సమీకరణానికి సాధన అవుతాయి.

(i) $(4, 0)$ (ii) $(0, -2)$ (iii) $(2, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

సాధన : ఒక జతను $x - 2y = 4$ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు LHS = RHS అయిన ఆ జతను సమీకరణము యొక్క సాధన అంటాము.

(i) $(4, 0)$

$x = 4$ మరియు $y = 0$ సమీకరణము $x - 2y = 4$ నందు ప్రతిక్షేపించగా

$$4 - 2(0) = 4$$
$$4 - 0 = 4$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 114 06-02-2021 14:53

$4 = 4$ (RHS).

$\therefore$ (4, 0) లేదా $x = 4$ మరియు $y = 0$, $x - 2y = 4$ యొక్క సాధన అవుతుంది.

(ii) (0, −2)

$x = 0$ మరియు $y = -2$ సమీకరణము $x - 2y = 4$ నందు ప్రతిక్షేపించగా

$0 - 2(-2) = 4$

$4 = 4$ (RHS).

$\therefore$ కావున (0, −2) సమీకరణాలు $x - 2y = 4$ నకు సాధన అవుతుంది.

(iii) (2, 0)

$x = 2$ మరియు $y = 0$ సమీకరణంలో

$x - 2y = 4$ నందు ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore \quad 2 - 2(0) = 4$

$\Rightarrow \quad 2 \neq 4$ (RHS).

$\therefore$ (2, 0) సమీకరణంలో $x - 2y = 4$ నకు సాధన కాదు.

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$x = \sqrt{2}$ మరియు $y = 4\sqrt{2}$ సమీకరణం $x - 2y = 4$ నందు ప్రతిక్షేపించగా

LHS :

$\sqrt{2} - 2(4\sqrt{2})$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} - 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad -7\sqrt{2} \neq 4$(RHS)

$\therefore$ $(\sqrt{2}, \ 4\sqrt{2})$ అనునది సమీకరణ $x - 2y = 4$ నకు సాధన కాదు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. కింది వానికి ప్రతీ సమీకరణానికి మూడు వేరు వేరు సాధనలు కనుగొనుము.

   i) $5x + 2y = 10$ (ii) $-4x + 3y = 12$ iii) $2x + 3y = 7$

2. కింది వానిలో ఏవి $2x - y = 6$ సమీకరణానికి సాధన అవుతాయి.

   i) (3, 0) ii) (0, 6) iii) (2, −2) iv) $(\sqrt{3}, 0)$

3. $3x + 2y = K$ సమీకరణానికి $x = 1$, $y = 2$ సాధన అయిన K విలువను కనుగొనుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 115
06-02-2021 14:53

అభ్యాసము

1. ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి మరియు ఫలితాన్ని సరిచూడుము.
   (i) $7 - p = 6$ (ii) $2b - 5 = 3$ (iii) $16 - 26 - x$ (iv) $3(x + 2) = 27$
   (v) $by + 4 = 5y - 4$ (vi) $3(x - 3) = 5(2x + 1)$
2. 15 సంవత్సరముల తర్వాత మేరీ వయస్సు ఆమే ప్రస్తుత వయస్సుకు 4 రెట్లు అగును ఆమే ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
3. ఈ క్రింది సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపములో తెలిపి, ప్రతీ సమీకరణమునకు a, b మరియు c యొక్క విలువలు తెల్పుము.
   (i) $3x + 4xy - 7 = 0$ (ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7$
   (iii) $\frac{y}{7} = 3x$ (iv) $2x = -7y$
4. ఒక్క పెన్సిల్ ధర ₹ 8 మరియు ₹ 15 అయిన దీక్ష ₹ 140 చెల్లించినచో సమాచారానికి సరియగు సమీకరణ రూపము వ్రాయుము.
5. కింది వానికి ప్రతీ సమీకరణానికి మూడు వేరు వేరు సాధనలు కనుగొనుము.
   (i) $3x + 4y = 7$ (ii) $x + y = 0$ (iii) $10x - 11y = 21$ (iv) $x + 2y = -7$
6. $2x - 3y = 5$ సమీకరణానికి $x = -2$, $y = 1$ సాధన అయిన K విలువను కనుగొనుము.

ముఖ్యాంశాలు

రేఖీయ సమీకరణాలు నిజజీవితములోని వినియోగములో సాధించెందుకు చాలా ఉపయోగబడుతాయి.

- రేఖీయ సమీకరణాలను సమానత్వ ధర్మము ద్వారా ఈ క్రింది విధముగా సమతుల్యము చేయవలెను.
  (a) ఒకే సంఖ్య చేత సమానత్వపు గుర్తునకు ఇరువైపుల కూడాలి.
  (b) ఒకే సంఖ్య చేత సమానత్వపు గుర్తునకు ఇరువైపుల తీసివేయాలి.
  (c) ఒకే సంఖ్య చేత సమానత్వపు గుర్తునకు ఇరువైపుల గుణించాలి.
  (d) ఒకే సంఖ్య చేత సమానత్వపు గుర్తునకు ఇరువైపులా భాగించాలి.
- ఒక రేఖీయ సమీకరణము నందు ఒక చలరాశి మాత్రమే ఉంటే ఆ సమీకరణాన్ని ఏక చలరాశిలో రేఖీయ సమీకరణము అని అంటాము.
- ఒక సమీకరణము యొక్క LHS మరియు RHS విలువలు సమానమైతే సమీకరణములోని చరరాశి యొక్క విలువనే సమీకరణ సాధన అని అంటారు.
- ఒక రేఖీయ సమీకరణములో రెండు చరరాశులుంటే దానిని రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణము అని అంటారు.
- x మరియు y యొక్క ఏ విలువలు అయితే సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తామో వాటి విలువలు సాధనలు అవుతాయి.
- రెండు చరరాశులలో రేఖీయ సమీకరణమునకు చాలా సాధనలు ఉంటాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 116 06-02-2021 14:53

అధ్యాయం
2.4 వర్గ సమీకరణాలు

2.4.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు

- ప్రామాణిక రూపములో వర్గసమీకరణాన్ని వ్రాయగల్గుతారు.
- కారణాంకాల పద్ధతి ద్వార వర్గ సమీకరణాలను సాధించగల్గుతారు.
- వర్గ సమీకరణ సూత్రము ద్వారా మూలాలు కనుగొనగలరు.
- మూలాల ద్వార – వర్గసమీకరణాన్ని ఏర్పాటు చేయగల్గుతారు.
- నిజజీవితంలో ఎదురయ్యే సంఘటనలు / సమస్యల ద్వారా సాధించగల్గుతారు.

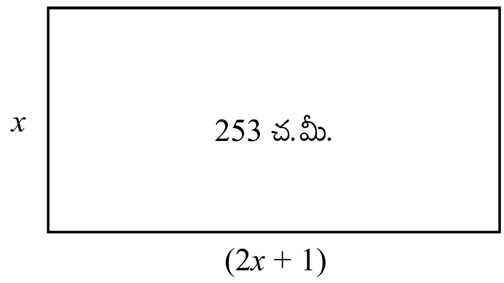
2.4.1 పరిచయం

పదము “క్వాడ్రాటమ్” అనునది లాటిన్ పదము దీని ద్వార “క్వాడ్రాటిక్” అను పదము ఉత్పన్నమైనది. పరిమాణము రెండు కల్గిన సమీకరణాలను వర్గ సమీకరణాలు అని అంటారు. నిజజీవితంలో ఎదురయ్యే సంఘటనలు వర్గసమీకరణాలు రూపములో తెలుపవచ్చును.

ఒక నివాస ప్రాంతములో 253 చ.మీ. వైశాల్యము మరియు పొడవు, వెడల్పు కంటే రెండు రెట్లు కంటే ఒకటి ఎక్కువగా ఉన్నా దీర్ఘ చతురస్రాకారము కలిగిన యోగా కేంద్రాన్ని ఏర్పాటు చేయడానికి నిర్ణయించినారు. అయినచో ఆ యోగా కేంద్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పులు ఎంత ?

యోగా కేంద్రము యొక్క పొడవు x మీ అనుకొనిన వెడల్పు $(2x + 1)$ అవుతుంది.

దీర్ఘచతురస్రాకారపు యోగా కేంద్రం



దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము = పొడవు × వెడల్పు

$= (2x + 1) \times (x)$

$= (2x^2 + x)$ చ.మీ.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 117 06-02-2021 14:53

అయితే యోగా కేంద్రము యొక్క వైశాల్యము = 253 చ.మీ. అవి ఇవ్వబడినది.

$\therefore \quad 2x^2 + x = 253$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + x - 253 = 0 \qquad ...(1)$

మనము ముందు అధ్యాయాలలో $ax + by = c$ రూపములో ఉన్న రేఖీయ సమీకరణాలును సాధించి 'x' విలువను కనుగొన్నాము. అదేవిధంగా సమీకరణము (1) ద్వారా సాధించి "x" విలువను కనుగొనగలిగితే యోగా కేంద్రము యొక్క వెడల్పు వస్తుంది.

2.4.2 వర్గ సమీకరణములు

$5x^2 + 3x - 8 = 0$ అనునది వర్గ సమీకరణ రూపము. ఇటు వంటి సమీకరణాల ద్వార భౌతిక శాస్త్రము నందు ఒక వాహనము నకు బ్రేకులు వేసినప్పుడు అది ఆగే దూరమును గణించుటలో వర్గ సమీకరణము ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ : ఒక సంఖ్య దాని రెట్టింపు కంటే 2 ఎక్కువగా ఉన్న రెండవ సంఖ్య లబ్దము 60 అయితే ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము. ఈ సమాచారాన్ని ఉపయోగించి సమీకరణము రూపంలో రాయగలరా ?

మొదటి సంఖ్య : x అనుకొనిన దాని రెట్టింపు $2x$ అవుతుంది.

అప్పుడు, రెండవ సంఖ్య = $2 \times (x) + 2$

$\Rightarrow 2x + 2$ అవుతుంది.

పై ఇచ్చిన సమాచారము ప్రకారము

$x \times (2x + 2) = 60$

లేదా

$2x^2 + 2x = 60 \qquad ...(1)$

పై సమీకరణంలో ఇరువైపుల 2చేత భాగించగా

$x^2 + x = 30$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 30 = 0 \qquad ...(2)$

ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం ఎందుకంటే ఈ సమీకరణం యొక్క పరిమాణం 2.

మరియొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తము 78. అయితే n యొక్క విలువ ఎంత ?

మనకు 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తము = $\dfrac{n(n+1)}{2}$ అని తెలుసు. (లేదా ముందు పాఠ్యాంశంలో తెలుసుకుంటారు)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 118 06-02-2021 14:53

$\therefore \frac{n(n+1)}{2} = 78$

ఇరువైపుల 2 చేత గుణించగా

$\Rightarrow n(n+1) = 156$

$\Rightarrow n^2 + n = 156$

$\Rightarrow n^2 + n - 156 = 0$ ... (3)

ఇది 2వ పరిమాణంలో సమీకరణం. కావున ఇది వర్గ సమీకరణం అవుతుంది.

పరిమాణము రెండు కల్గినటువంటి బీజీయ సమీకరణాలను వర్గసమీకరణాలు అంటారు.

a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a \neq 0$ అయిన $ax^2 + bx + c = 0$ ను 'x' లో వర్గ సమీకరణము అని అంటారు.

సమీకరణం (1) $5x^2 + 3x - 8 = 0$ నందు

$a = 5, b = 3$ మరియు $c = -8$

వర్గ సమీకరణం (2)

$x^2 + x - 30 = 0$ నందు $a = 1, b = 1$ మరియు $c = -30$ అవుతుంది. వర్గసమీకరణము (3) నందు $a = 1, b = 1$ మరియు $c = -156$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 1 : క్రింద ఇచ్చిన సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవుతాయా ? కాదా? తెల్పుము.

(i) $(x-2)^2 + 3 = 2x - 5$ (ii) $x(x+2) + 7 = (x+3)(x-3)$

సాధన : (i) LHS $(x-2)^2 + 3$

$= x^2 - 4x + 4 + 3$

$= x^2 - 4x + 7$

కావున $x^2 - 4x + 7 = 2x - 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x + 7 + 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 12 = 0$

ఈ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ రూపములో ఉందా?

$\therefore x^2 - 6x + 12 = 0$ అనునది ఒక వర్గ సమీకరణము.

(ii) $x(x+2) + 7 = (x+3)(x-3)$

LHS $\Rightarrow x(x+2) + 7$

$x^2 + 2x + 7$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 119
06-02-2021 14:53

RHS $\Rightarrow$ $(x + 3)(x - 3)$

$\Rightarrow$ $x^2 - 9$

$\therefore$ $x^2 + 2x + 7 = x^2 - 9$

$2x + 7 + 9 = 0$

$2x + 16 = 0$

ఈ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ రూపములో లేదు కావున ఇచ్చిన సమీకరణము వర్గసమీకరణము కాదు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి వర్గ సమీకరణాలు అవుతాయో లేదా కాదో తెల్పుము.

i) $3x^2 = 8$ ii) $ax + b = d$ iii) $4x^2 = 3(x + 5)$

iv) $x(4x + 7) = x^2 + 3$ v) $x(x - 7) + 6 = (x - 3)(x + 2)$

వర్గసమీకరణమును వ్రాయుట

వర్గ సమీకరణ సాధనలో పద సమస్యలు ఇచ్చినప్పుడు పరిస్థితులకు అనుగుణంగా సాధించు పద్ధతిని పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ:

రెండు సంఖ్యల మొత్తము 48 మరియు వాటి లబ్దము 432 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

మొదటి సంఖ్యను = x అనుకొనిన

రెండవ సంఖ్యను = y అనుకొనిన

$x + y = 48$ ...(1)

$\Rightarrow y = (48 - x)$

$xy = 432.$

$y = (48 - x)$ వ్రాయగా

$\Rightarrow x(48 - x) = 432$

$\Rightarrow 48x - x^2 = 432$

$\Rightarrow x^2 + 48x - 432 = 0$ ($\because$ ఈ సమీకరణాన్ని (−1)చే గుణించగా)

$\Rightarrow x^2 - 48x + 432 = 0$

కావున వర్గ సమీకరణము $x^2 - 48x + 432$ అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 120 06-02-2021 14:53

(ii) రెండు వరుస సరి ధనపూర్ణాంకాల వర్గాల మొత్తము 290 అయితే ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

చిన్న సరి ధన పూర్ణాంకము = x అనుకొనిన

కావున తర్వాత వచ్చు సరి ధన పూర్ణాంకము = $(x + 2)$.

కావున ఇచ్చిన దత్తాంశము ప్రకారము

$x^2 + (x + 2)^2 = 290$ కావున ఇది ఒక వర్గ సమీకరణము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. రెండు వరుస ధన పూర్ణాంకాల లబ్ధము 306 అయితే వర్గ సమీకరణమును వ్రాసి సంఖ్యలను కనుగొనుము.
2. రెండు అంకెల సంఖ్యలోని అంకెల లబ్ధము 12 మరియు సంఖ్యలోని స్థానాలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్యల మొత్తము 36 అయినచో వర్గ సమీకరణ రూపములో వ్యక్తపరుచుము.
3. రోహన్ తల్లి వయస్సు అతని కంటె 26 సంవత్సరములు పెద్దది. అలాగే ఇప్పటి నుండి 3 సంవత్సరముల తర్వాత వారి వయస్సుల లబ్ధము 360 అయిన వర్గ సమీకరణములో వ్యక్త పరుచుము.

2.4.3 వర్గసమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము

$ax^2 + bx + c$ సమాసమును మనము 'వర్గబహుపది' అని అంటాము అని తెలుసు. $ax^2 + bx + c = 0$ రూపములో ఉన్న వాటినన్నింటిని వర్గ సమీకరణాలు అని అంటారు. అనగా ఒక వర్గ బహుపది సున్నాకి సమానము అయినచో దీనిని మనము $ax^2 + bx + c = 0$. వర్గసమీకరణముగా వ్రాస్తాము.

$\therefore$ వర్గ సమీకరణము యొక్క ప్రామాణికరూపము $ax^2 + bx + c = 0$.

ఉదాహరణ 2 : ఈ క్రింది సమీకరణాలను "ప్రామాణిక రూపము" లో వ్రాసి a, b, c విలువలు కనుగొనుము.

(i) $2x^2 - 3x = 7$ (ii) $6 = x^2 - 3x$

(iii) $x^2 = -9$ (iv) $x^2 = \sqrt{7}x$

సాధన :

(i) $2x^2 - 3x = 7$

దీనిని ప్రామాణి రూపము $ax^2 + bx + c = 0$ గా వ్రాయగా

$\therefore\ 2x^2 - 3x = 7$

$\Rightarrow\ 2x^2 - 3x - 7 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపములో ఉంది.

$\therefore\ a = 2,\ b = -3$ మరియు $c = -7$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 121 06-02-2021 14:53

(ii) $6 = x^2 - 3x$

దీనిని $ax^2 + bx + c = 0$ ప్రామాణిక రూపములో వ్రాయగా

$\Rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపము

$a = 1, \ b = -3$ మరియు $c = -6$

(iii) $x^2 = -9$

దీనిని $ax^2 + bx + c = 0$ ప్రామాణిక రూపములో వ్రాయగా

$\Rightarrow x^2 + 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 + (0)(x) + 9 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపము

$\therefore \ a = 1, \ b = 0$ మరియు $c = 9$

(iv) $x^2 = \sqrt{7}x$

దీనిని $ax^2 + bx + c = 0$ ప్రామాణిక రూపములో వ్రాయగా

$\Rightarrow x^2 - \sqrt{7}x = 0$

$\Rightarrow x^2 - \sqrt{7}x + 0 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపము

$\therefore a = 1, \ b = -\sqrt{7}$ మరియు $c = 0$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

ఈ క్రింది వర్గ సమీకరణాలను ప్రామాణిక రూపములో వ్రాసి a, b మరియు c యొక్క విలువలను తెల్పుము.

(i) $x^2 = 2x - 3$

(ii) $6 = x^2 - 4\sqrt{2}\,x$

(iii) $\frac{1}{2} = 3x^2 - 4x$

(iv) $4x = -\frac{3}{2}x^2$

2.4.4 కారణాంక పద్ధతిన వర్గసమీకరణమును సాధించుట

గణిత పరంగా తెలియని చరరాశి "x" విలువ ఏవిధంగా కనుగొంటామో పరిశీలిద్దాము.

$x^2 + 6x - 7 = 0$ వర్గ సమీకరణమును తీసుకుందాము. దీనిలో x కు బదులు 1ని ప్రతిక్షేపించిన

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 122 06-02-2021 14:53

$(1)^2 + 6(1) - 7 = 0$

$1 + 6 - 7 = 0$

$= 0$ (RHS)

$x = 1$ కి సమీకరణము సంతృప్తి చెందినది కావున $x = 1$ అనునది $x^2 + 6x - 7 = 0$ కు మూలము లేదా సాధన అవుతుంది.

సాధారణంగా $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన 'α' ను వర్గసమీకరణము యొక్క మూలము అని అంటాము. మరియు $x = \alpha$ అవద్ద సమీకరణము యొక్క సాధన అని కూడా అంటాము లేదా 'α' వద్ద సమీకరణము తృప్తి పరుస్తుంది అంటాము.

గమనిక : $ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువలు, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\ (a \neq 0)$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు ఒక్కటే అని గుర్తించగలరు.

ఒక వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం.

ఉదాహరణ 3 : కారణాంక పద్ధతిన $x^2 + 6x + 5 = 0$ యొక్క మూలాలు కనుగొనుము.

సాధన : మొదట మధ్య పదమును రెండింటిగా విడగొట్టుదాం. $ax^2 + bx + c$ ఒక వర్గ బహుపది అయితే మధ్యపదమును విడగొట్టుటకు $p + q = b$ మరియు $p \times q = a \times c$ అయ్యే విధముగా p, q అనే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

అయితే $x^2 + 6x + 5 = 0$ మధ్యపదమును విడగొట్టుటకు

$p + q = 6$ మరియు $p \times q = 1 \times 5 = 5$ అయ్యే విధముగా p, q రెండు సంఖ్యలను కనుగొనాలి. దీని కొరకు 5 యొక్క కారణాంకాల జతల జాబితాను తయారుచేద్దాము. $p = 5, q = 1$ లేదా $p = 1, q = 5$.

$\therefore\ x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + x + 5$

$\Rightarrow x(x + 5) + 1(x + 5)$

$\Rightarrow (x + 1)(x + 5)$

దీనిని $(x + 1)(x + 5) = 0$ గా వ్రాయగా

$x + 1 = 0$ లేదా $x + 5 = 0$

$x + 1 = 0$ లేదా $x + 5 = 0$

$x = -1$ మరియు $x = -5$

కావున $x = -1$ మరియు $x = -5$ అనునవి $x^2 + 6x + 5 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు అవుతాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 123 06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 4 : కారణాంక పద్ధతిన క్రింది వర్గసమీకరణం మూలాలు కనుగొనుము.

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

(iii) $x^2 - 9 = 0$ (iv) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

సాధన :

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = 0$

$\Rightarrow x(x - 6) + 1(x - 6) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0$ లేదా $x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = -1$ మరియు $x = 6.$

$\Rightarrow x = 6$ మరియు $x = -1$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణము యొక్క సాధనలు.

(ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

ఇచ్చిన మొదటి పదము $9x^2$ ఉన్నది కావున $3x$ ను సంకలనము మరియు వ్యవకలనము చేస్తూ సమీకరణాన్ని ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయగా

$\Rightarrow 9x^2 - 6x + 3x - 2 = 0$

ఇక్కడ మొదటి పదాలను పరిశీలించినచో $(9x^2 - 6x)$ ను తీసుకొని $3x$ ను ఉమ్మడి కారణాంకంగా రాయగా మనకు $(3x - 2)$ లభించును, మరియు మిగిలిన పదము కూడా $(3x - 2)$ వస్తుంది.

$\Rightarrow 3x(3x - 2) + 1(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow (3x + 1)(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow 3x + 1 = 0$ or $3x - 2 = 0$

$3x + 1 = 0$ $3x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ లేదా $x = \frac{2}{3}$

కావున $9x^2 - 3x - 2 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు $x = -\frac{1}{3}$ మరియు $x = \frac{2}{3}$.

(iii) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు $x = 3$ మరియు $x = -3$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 124 06-02-2021 14:53

(iv) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

స్థిరపదము -6 ఉన్నది కావున $\sqrt{2}x$ ను కలిపి మరియు తీసివేయగా

$\Rightarrow \quad x^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x + 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}(x + 3\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - \sqrt{2})\ (x + 3\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow \quad x - \sqrt{2} = 0$ లేదా $x + 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$ మరియు $x = -3\sqrt{2}$

$\therefore$ కావున వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు $x = \sqrt{2}$ మరియు $x = -3\sqrt{2}$.

వర్గసమీకరణాల సాధనలు – వివిధ సందర్భాలు

పైన వర్గ సమీకరణ రూపములో వ్యక్త పరుస్తూ సమీకరణాలను కూడా సాధించినాము. ఇటువంటి కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ 5 : రెండు సంఖ్యల మొత్తము 48 మరియు వాటి లబ్ధము 432 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి సంఖ్య x అనుకొనిన రెండవ సంఖ్య $(48 - x)$ అవుతుంది.

కావున $(x)\ (48 - x) = 432$

$\Rightarrow \quad 48x - x^2 = 432$

$\Rightarrow \quad x^2 - 48x + 432 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 36x - 12x + 432 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x - 36) - 12(x - 36) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 36)\ (x - 12) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 36 = 0$ లేదా $x = 12.$

$\therefore$ కావున సంఖ్యలు $x, (48 - x)$

$x = 36$ అయిన $36, (48 - 36)$

$36, 12$

$x = 12$ అయిన $12, (48 - 12)$

$12, 36$

$\therefore$ సంఖ్యలు = 12 మరియు 36.

ఉదాహరణ 6 : రెండు వరుస సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము 313 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన : వరుస సహసంఖ్యలను $x, (x + 1)$ అనుకొనిన ఇచ్చిన దత్తాంశము ప్రకారము

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 125

06-02-2021 14:53

$$(x)^2 + (x+1)^2 = 313$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2x - 312 = 0$$

ఇరువైపుల 2 చేత భాగించగా

$$\Rightarrow \quad \frac{2x^2}{2} + \frac{2x}{2} - \frac{312}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 156 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 13x + 12x - 156 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+13) - 12(x+13) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-12)(x+13) = 0$$

$\Rightarrow \quad x - 12 = 0$ లేదా $x + 13 = 0$

$x = 12$ లేదా $x = -13$

ఇచ్చిన దత్తాంశములో ధన సహజసంఖ్యలు అన్నారు. కావున $x = 12$.

కావున వరుస ధన సహజసంఖ్యలు $x, x+1$

$x = 12, \ x + 1 = 13$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది వాటిని కారణాంక పద్ధతిన మూలాలు కనుగొనుము.

   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

2. రెండు సంఖ్యల మొత్తము 27 మరియు వాటి లబ్ధము 182 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
3. రెండు సంఖ్యల వర్గాల బేధము 180. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము, పెద్ద దానికి 8 రెట్లు యిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
4. తండ్రి మరియు కుమారుని వయస్సుల మొత్తము 45 సం॥లు, 5 సంవత్సరముల తర్వాత వారి వయస్సుల లబ్ధము 124 సం॥లు అయినచో వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంత?

2.4.4 వర్గసమీకరణ సూత్రము ద్వారా సమీకరణాల సాధన

అన్నీ సందర్భాలలో ఇచ్చిన సమీకరణానికి కారణాంక పద్ధతి ద్వారా మధ్య పదాన్ని రెండు పదాలుగా విడదీస్తూ మూలాలు కనుగొనడము సాధ్యపడదు. కావున ఇటువంటి సందర్భాలలో లేదా సాధారణంగా ప్రతీ వర్గ సమీకరణమునకు మూలాలు సాధించుటకు వర్గ సమీకరణ సూత్రము ద్వారా మూలాలు ఎలా సులభంగా కనుగొనవచ్చునో పరిశీలిద్దాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 126 06-02-2021 14:53

కావున $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ సమీకరణము తీసుకొనిన

స్టెప్ I : పై సమీకరణాన్ని ఇరువైపుల 'a' భాగించగా $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

స్టెప్ II : $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$

స్టెప్ III: సమీకరణము (II) నకు ఇరువైపుల $\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ ను కలుపగా

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 = \frac{-c}{a}\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$$ (ఇచ్చట $\frac{-c}{a}$ ఋణాత్మక సంఖ్య)

ధనాత్మకముగా మార్చుడానికి సంపూర్ణ వర్గము తయారుచేయగా

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{-c}{a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

స్టెప్ IV : $b^2 - 4ac \geq 0$ అనుకొని ఇరువైపులా వర్గమూలాలను తీసుకొనగా

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore$ $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినప్పుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ మరియు } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ఒకవేళ $b^2 - 4ac \geq 0$ అయిన సమీకరణమునకు వాస్తవమూలాలు ఉండవు (ఎందుకు?)

కనుక $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినప్పుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

పై సూత్రము ఉపయోగించి ఏ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలైనా సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కావున కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 127　　06-02-2021 14:53

ఉదాహరణ 7 : దీర్ఘచతురస్రాకారపు పార్కు యొక్క వెడల్పు x మీటర్లు. పొడవు $(2x + 1)$ మీటర్లు మరియు పార్కు వైశాల్యము 528 మీ^{2}. అయిన పార్కు యొక్క పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము.

సాధన : పార్కు యొక్క వైశాల్యము $= (x) \times (2x + 1)$

కావున దత్తాంశము ప్రకారము $2x^2 + x = 528$

$$\therefore\ 2x^2 + x - 528 = 0$$

ఈ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ రూపము

కావున $a = 2, b = 1$ మరియు $c = -528$

వర్గ సమీకరణ సూత్రము ద్వారా

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1 - 65}{4} = \frac{-66}{4} = \frac{-33}{2}$$

లేదా

$$x = \frac{-1 + 65}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

i.e., $x = 16$ లేదా $x = \frac{-33}{2}$

x యొక్క ఋణాత్మక విలువకు వైశాల్యము వ్యవస్థితము కాదు . కావున పార్కు యొక్క వైశాల్యము కనుగొనుటకు ధన విలువను తీసుకోవలయును.

పార్కు యొక్క వెడల్పు = x = 16 మీ

పొడవు = $(2x + 1)$

$2(16) + 1$ = 33 మీ.

ఉదాహరణ 8 : రెండు వరుస ధన బేసి సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము 290 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన : సమీకరణము మనము ఎలా వ్రాయాలి? మొదటి బేసి సంఖ్యను 'x' అనుకొనిన

రెండవ బేసి సంఖ్య $(x + 2)$ అవుతుంది

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 - 290 = 0$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 128	06-02-2021 14:54

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 143 = 0$

ఇది 'x' లో ఒక వర్గ సమీకరణము మరియు 'x' బేసి సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ సూత్రం ప్రకారం

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$x = 11$ లేదా $x = -13.$

అయితే 'x' ఒక ధన బేసి సంఖ్య కనుక $x = 11$

$\therefore (x + 2) = 11 + 2 = 13$

రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలు = 11, 13.

సరిచూచుట : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 298.$

ఉదాహరణ 9 : వర్గ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు ఉంటే సూత్రము ద్వారా కనుగొనుము.

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

సాధన : $3x^2 - 5x + 2 = 0$

ఇచ్చుట $a = 3, b = -5$ మరియు $c = 2$

కనుక $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} = x = 1 \text{ లేదా } x = \frac{-2}{3}$$

So the roots are $\dfrac{-2}{3}$ and -1.

ఉదాహరణ 10 : $x + \dfrac{1}{x} = 3$ సమీకరణ మూలాలు కనుగొనుము.

సాధన : $x + \dfrac{1}{x} = 3$ సమీకరణము ఇరువైపుల 'x' చేత గుణించగా

$x^2 + 1 = 3x$

i.e., $x^2 - 3x + 1 = 0.$

ఇచ్చుట $a = 1,\ b = -3$ మరియు $c = 1$ కనుక

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 129
06-02-2021 14:54

$$b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$ (ఎందుకు ?)

$\therefore x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ లు మూలాలు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది వర్గసమీకరణాలను వర్గసమీకరణ సూత్రం ద్వారా సాధించుము.
   (i) $2x^2 - 7x + 3$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$
   (iii) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ (iv) $6x^2 + x - 2 = 0$
2. $x - \frac{1}{x} = 3$ వర్గ సమీకరణ మూలాలు కనుగొనుము.
3. వర్గ సమీకరణాలుగా వ్రాసి మూలాలుగా కనుగొనుము.
   (i) పొలము యొక్క కర్ణము పొడవు. పొలము చిన్న భుజము కొంతకు 60 మీటర్లు ఎక్కువ. పొలము యొక్క పెద్ద భుజము పొడవు చిన్న భుజము పొడవు కంటె 30 మీ ఎక్కువ. అయిన పొలము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము.
   (ii) రెండు సంఖ్య బేధము 180. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము పెద్ద సంఖ్య యొక్క 8 రెట్లుకు సమానమైన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనము.

2.4.5 ఇచ్చిన మూలాల ద్వార వర్గ సమీకరణము ఏర్పాటు చేయుట

వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు α, β అనుకొనిన దీని ద్వారా వర్గ సమీకరణమును ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయగా

$$x^2 - (\alpha + \beta)(x) + \alpha\beta = 0$$

ఇది

$$x^2 - (\text{మూలాల మొత్తము}(x)) + \text{మూలాల లబ్దము} = 0$$

పై దానిని పరిశీలించగా వర్గ సమీకరణము యొక్క గుణకాలకు మరియు మూలాలకు సంబంధముగా ఉన్నది.

ఒక వేళ ఇచ్చినది వర్గసమీకరణ ప్రామాణిక రూపములో ఉంటే, మనము మూలాల మొత్తము మరియు లబ్దము. సమీకరణము లోని x^2 గుణకము, x గుణకము మరియు స్థిరాంకము ద్వారా పోల్చగా ఈ క్రింది విధముగా సూచించవచ్చును.

కావున వర్గ సమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము

$$ax^2 + bx + c = 0$$

కావున "α" మరియు "β" వర్గసమీకరణ మూలాలుగా తీసుకొంటే

మూలాల మొత్తము మరియు లబ్దము యొక్క సూత్రం

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ యొక్క గుణకము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

గమనిక : వర్గ సమీకరణ యొక్క మూలాలు "కరణులు" అయితే ఒక మూలము $(m+\sqrt{n})$ మరియు దీని యొక్క సంయుగ్మము $(m-\sqrt{n})$ రెండవ మూలము అవుతుంది.

ఉదాహరణ 11 : మూలాలు 2 మరియు 3 ద్వారా వర్గసమీకరణము ఏర్పాటు చేయుము.

సాధన : $\alpha = 2$ మరియు $\beta = 3$ అనుకొనిన

మూలాల మొత్తము $(\alpha + \beta) = (2 + 3) = 5$

మూలాల లబ్దము $= \alpha\beta = (2) \times (3) = 6$

వర్గసమీకరణమును ఏర్పాటు చేయగా

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$
$$x^2 - (5) \times (x) + 6 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6$$

$\therefore$ వర్గ సమీకరణము $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0.$

ఉదాహరణ 12 : $\frac{1}{4}$ మరియు -1 మూలాల ద్వార వర్గసమీకరణము ఏర్పాటు చేయుము.

సాధన : $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = -1$ తీసుకొనిన

$\therefore$ మూలాల మొత్తము $(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} + (-1)$

$$= \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

మూలాల లబ్దము $= \left(\frac{1}{4}\right) \times (-1) = \frac{-1}{4}$

వర్గసమీకరణము రూపము

$$x^2 - x(\text{మూలాల మొత్తము}) + \text{మూలాల లబ్దము} = 0$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 131

06-02-2021 14:54

$$x^2 - x\left(\frac{-3}{4}\right) + \left(\frac{-1}{4}\right) = 0 \;=\; x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

ఇరువైపుల 4 చేత గుణించగా $4x^2 + 3x - 1 = 0$.

ఉదాహరణ 13 : వర్గ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము $(2+\sqrt{3})$ అయిన వర్గ సమీకరణము వ్రాయుము.

సాధన :

$(2+\sqrt{3})$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య

ఇంతకు ముందే మనము నేర్చుకున్నాము. ఒక వర్గ సమీకరణమునకు ఒక మూలము కరణీయమైతే రెండవ మూలము దాని యొక్క సంయుగ్మము అవుతుంది.

ఇక్కడ $(2+\sqrt{3})$ అనునది ఒక మూలము. కావున రెండవ మూలము దీని యొక్క సంయుగ్మము $(2-\sqrt{3})$ అవుతుంది.

కావున $(2+\sqrt{3})$ మరియు $(2-\sqrt{3})$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు అవుతాయి.

$\therefore$ మూలాల మొత్తము $\Rightarrow (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

మూలాల మొత్తము $\Rightarrow (2+\sqrt{3})\ (2-\sqrt{3})$

$$= 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

$\therefore$ కావున వర్గ సమీకరణమును ఏర్పాటు చేయగా

$x^2 - x$(మూలాల మొత్తము) + మూలాల లబ్దము = 0

$\therefore\ x^2 - x\,(4) + 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow\ x^2 - 4x + 1 = 0.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది మూలాల ద్వార వర్గసమీకరణము ఏర్పాటుచేయుము.

   (i) 1, 1		(ii) 4, 1

2. వర్గ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము $(5-\sqrt{7})$ అయిన రెండవ మూలము కనుగొనుము.

2.4.6 రాత సమస్యల సాధనలో వర్గ సమీకరణాల అనువర్తనం

1. ఒక సంఖ్య మరియు దాని వ్యుత్క్రమము యొక్క మొత్తము $2\frac{1}{30}$ అయిన ఆ సంఖ్య కనుగొనుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 132		06-02-2021 14:54

2. దీర్ఘచతురస్రాకారపు పొలము యొక్క చుట్టుకొలత 82 మీటర్లు మరియు వైశాల్యము 400 చ.మీ. అయిన పొలము పొడవు, వెడల్పు కొలతలను కనుగొనుము.

3. సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము 60 చ.సెం.మీ మరియు సమాన భుజాల పొడవు 13 సెం.మీ. అయిన భూమి కొలత ఎంత?

4. 60 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో ప్రతి అబ్బాయి, అమ్మాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును, ప్రతి అమ్మాయి, అబ్బాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును చందాగా ఇచ్చారు. మొత్తము వసూలు అయిన సొమ్ము రూ. 1600 అయిన తరగతిలో ఎంత మంది అబ్బాయిలు గలరు.

అభ్యాసము

1. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి వర్గ సమీకరణాలు అవుతాయి గుర్తుంచుము.

(i) $x^2 + 8x = 0$ (ii) $x^2 + \frac{1}{x} = 2, \ (x \neq 0)$

(iii) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (iv) $x + 2 = 0$

(v) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ (vi) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$.

2. కారణాంక పద్ధతి ద్వార ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $100x^2 - 20x + 1$

(v) $x - \frac{3}{x} = 2$

3. వర్గ సమీకరణ సూత్రం ద్వార ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $6x^2 + 7x - 10 = 0$

(iii) $15x^2 - 28 = x$ (iv) $12x^2 + 17x + 6 = 0$

4. ఈ క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30} \ (x \neq -4, 7)$

5. మూలాలు 2 మరియు 3 ద్వార వర్గ సమీకరణము ఏర్పాటు చేయుము.

6. వర్గసమీకరణము యొక్క ఒక మూలము $(5 + \sqrt{3})$ అయిన వర్గ సమీకరణ రూపములో వ్రాయుము.

7. $ax^2 + 7x + 12 = 0$ యొక్క మూలాలు α, β లు అయితే $(\alpha + \beta)$ మరియు $(\alpha - \beta)^2$ మూలాలు గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 133 06-02-2021 14:54

8. $x^2+px+q=0$ యొక్క మూలాలు α, β లు అయితే, $\frac{\alpha}{\beta}$ మరియు $\frac{\beta}{\alpha}$ మూలాలు గల వర్గసమీకరణమును కనుగొనుము..

9. ఒక క్రికెట్ మ్యాచ్ నందు బూమ్రా, షమి తీసుకున్న రెట్టింపు వికెట్ల కన్నా మూడు తక్కువగా వికెట్లు తీసుకున్నాడు. వీరిద్దరు తీసుకున్న వికెట్ల సంఖ్య లబ్దము 20 అయిన ఇరువురు తీసుకున్న వికెట్ల సంఖ్య ఎంత?

10. రెండుఅంకెలు గల సంఖ్యలోని, రెండు అంకెల లబ్దము 20. ఈ సంఖ్యకు 9 కలిపిన వచ్చే సంఖ్య మొదటి సంఖ్య లోని అంకెలను తారుమారు చేయగా వచ్చె సంఖ్యఒక్కటే. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

11. ఒక భిన్నము లోని లవము, హారము కన్నా 3 తక్కువ. లవ, హారములకు 2 కలిపి కూడగా ఏర్పడు భిన్నము $\frac{29}{20}$ అయినచో, భిన్నమును కనుగొనుము.

12. ఒక సంవత్సరము క్రింతము ఒక వ్యక్తి యొక్క వయస్సు తన కుమారుని వయస్సు కన్నా 8 రెట్లు ఎక్కువ. ప్రస్తుతము తన కుమారుని వయస్సు యొక్క వర్గమునకు సమానమైతే, వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

ముఖ్యాంశాలు

- ఈ అధ్యాయము ద్వారా వర్గ బహుపది మరియు వర్గ సమీకరణము యొక్క సంబంధము, $p(x)$ ఒక వర్గ బహుపది అయితే $p(x) = 0$ ఒక వర్గ సమీకరణము అని అంటారు.
- $p(x) = 0$ అనునది ఒక వర్గ సమీకరణమైతే, $p(x)$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువలు మరియు $p(x) = 0$ వర్గ సమీకరణ యొక్క మూలాలు ఒక్కటి.
- చరరాశి 'x' లో వర్గ సమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము $ax^2 + bx + c = 0$, ఇచ్చట a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.
- $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు α, β లు అయిన వర్గసమీకరణ రూపము

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

లేదా

$x^2 - x$ (మూలాల మొత్తము) $+$ మూలాల లబ్దము $= 0$.

- $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినప్పుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, దీనినే వర్గ సమీకరణ సూత్రం అని అంటారు.
- $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్దంగా రాసి ప్రతిదానికి సున్నాకు సమానము చేయటం ద్వారా $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొన గల్గుతాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 134 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

2.5 సంఖ్యా అమరికలు

2.5.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు

- ఇచ్చిన సంఖ్యా క్రమాల నుండి అంకశ్రేఢిని గుర్తించగలుగుతారు.
- అంకశ్రేఢిలోని సామాన్య పదము ('n' వ పదము)ను లెక్కించగలుగుతారు.
- అంకశ్రేఢిలోని n పదాల మొత్తంను కనుగొనగలుగుతారు.
- ఇచ్చిన సంఖ్యల క్రమాల నుండి గుణశ్రేఢిని గుర్తించగల్గుతారు.
- గుణశ్రేఢిలోని సామాన్యపదము (nవ పదము) ను లెక్కించగల్గుతారు.

2.5.1 పరిచయం

ప్రకృతిలో పువ్వులు, తేనెపట్టు, అనాస పండులోని సర్పిలాకారము, పక్షులు గుంపులుగా ఎగురుతున్నప్పుడు వాటి వరుసలు మొదలగు సందర్భాలలో మనం వివిధ అమరికలను చూసే ఉంటాము.

ఈ చిత్రాన్ని పరిశీలించండి. :

1 చదరం

3 చదరాలు

5 చదరాలు

1 చదరం, 3 చదరాలు, 5 చదరాలు, ఈ సంఖ్యలు ఒక వర్గానికి చెందినవి. వీనటి "శ్రేణులు" అంటారు.

ఇప్పుడు ఈ క్రింది వాటికి సమాధానాలు చేసే ప్రయత్నం చేయండి.

(i) తర్వాత వరుసలో రావలసినవి 7 చదరాలు. (సరైనది/కాదు)

(ii) 6 వ వరుసలో రావలసినవి 11 చదరాలు. (సరైనది/కాదు)

(iii) 12 వ వరుసలో రావలసినవి 22 చదరాలు. (సరైనది/కాదు)

(iv) ఈ అమరికలో వర్గసంఖ్యలు సరిసంఖ్యలు కావచ్చు లేదా బేసి సంఖ్యలు కావచ్చు. (సరైనది/కాదు)

ఈ క్రమం 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25…

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 135 06-02-2021 14:54

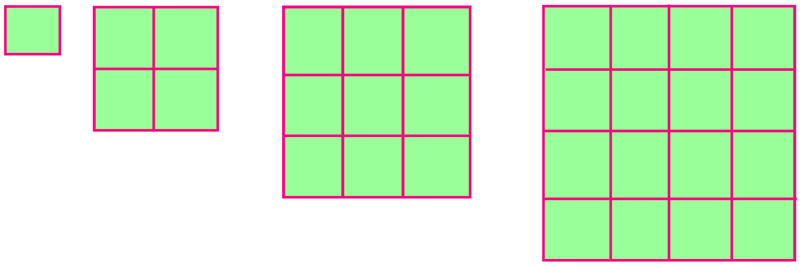
మనం పటాల నుండి ఒక సామాన్య ధర్మాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని ఎన్నుకొని వాటిద్వారా కొన్ని శ్రేణులను ఏర్పరచవచ్చు. ఉదాహరణకు సరిసంఖ్యలు ఏర్పరిచే శ్రేణి 2,4,6,8,10, …… మరియు గుణకారంలో, ఒక సంఖ్య యొక్క గుణిజాల నుండి కూడా శ్రేణి ఏర్పరచవచ్చు. ఉదాహరణకు –

$3 \times 1 = 3$	$5 \times 1 = 5$	$7 \times 3 = 21$	$8 \times 5 = 40$
$3 \times 2 = 6$	$5 \times 2 = 10$	$7 \times 4 = 28$	$8 \times 6 = 48$
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 3 = 15$	$7 \times 5 = 35$	$8 \times 7 = 56$
$3 \times 4 = 12$	$5 \times 4 = 20$	$7 \times 6 = 42$	$8 \times 8 = 64$

3 యొక్క గుణిజాల నుండి మనం 3,6,9,12,15….. శ్రేణిని రాయవచ్చు.

ఇదేవిధంగా 10 యొక్క గుణిజాల నుండి 10,20,30,40,50…. శ్రేణిని రాయవచ్చు.

(ii) చదరాల వైశాల్యలు : ప్రమాణ చదరాల సంఖ్యపై ఆధారపడి భుజంగా గల చదరాల వైశాల్యాలు 1, 2, 3, 4, ... వరుసగా 1, 4, 9, 16,...



ఈ సంఖ్యలలో అమరికను గుర్తించండి. వీటిని పరిశీలించగా $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, అనగా ఇవన్నీ సహజ సంఖ్యల వర్గాలు.

ఇప్పుడు, వీలైతే క్రింది సంఖ్యలలో గల అమరికను గుర్తిద్దాం.

1, 3, 5, 7, 9 ..... (1)

1, 4, 7, 10, 13 ..... (2)

5, 3, 1, –1, –3 ..... (3)

1, 3, 9, 27, 81, ... (4)

5, 5, 5, 5, 5, ... (5)

2, 4, 8, 16 , 32, ... (6)

ఈ సంఖ్యల వరుసలను “సంఖ్యా అమరికలు” అని లేదా “శ్రేణి” అని కొన్ని సందర్భంలో పిలుస్తుంటాము. ఈ “శ్రేణులు” నుండి మనకు కావలసిన సంఖ్యలు, మరియు ఒకశ్రేణిలో ఇచ్చిన సంఖ్యల మొత్తం మొదలగునవి కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణకు, ఒక నెలకు నిర్ధేశించిన మనం ఆధారంగా ఒక వ్యక్తి యొక్క సంవత్సర ఆదాయం ఎంత; ఎలా లెక్కిస్తావు?

మరియు ₹ 50 చొప్పున 100 రోజుల తర్వాత నీవు పొదుపు చేసిన మొత్తం ఎంత? ఎలా చెప్పగలవు?

₹ 575 లను ఎన్ని రోజులలో పొదుపు చేయగలవు? ఎలా?

శ్రేణిలోని తార్కిక నియమాన్ని గుర్తించడం ద్వారా ఆ ఒక్కొక్క నియమాన్ని ఉపయోగించడం ద్వారా చెప్పవచ్చు.

ఇక్కడ చర్చిద్దాం. ఇలాంటి సంఖ్యల శ్రేణులను "శ్రేఢులు" అంటారు. శ్రేఢులలోని రకాల గురించి ఈ పాఠ్యాంశంలో చర్చిద్దాం. అవి

(1) అంకశ్రేఢి

(2) గుణశ్రేఢి

2.5.2 అంకశ్రేఢి

ఈ సందర్భాన్ని గమనించండి.

సోను మరియు కౌశిక్ సూర్యాస్తమయంలోని అందాన్ని పరిశీలించడానికి కొండపైకి వెళ్ళాలను కొనివచ్చారు. ఒకరోజు వారు మొదటమార్గం ద్వారా పైకి ఎక్కడం మొదలు పెట్టారు. ప్రతిమెట్టుకు 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10… ఇలా సంఖ్య ఇవ్వబడినవి.

చర్చిద్దాం

సోను ప్రతీసారి 2 మెట్ల చొప్పున ఎక్కుతూ త్వరగా కొండపైకి చేరుకోవాలని ఎక్కుతున్నాడు. అలా సోను వెళుతున్న మెట్ల సంఖ్య 2,4,6,8,10,….గా ఉంది.

కౌశిక్ ప్రతి 3 నిమిషాల్లో 10 మెట్ల చొప్పున కొండపైకి ఎక్కుతున్నాడు. ఇలా కౌశిక్ ప్రతి 3 నిమిషాలలో ఎక్కుతున్న మెట్ల సంఖ్యలతో ఏర్పడిన శ్రేణి 10,20,30,40,50,……

సోనూ మెట్లు ఎక్కుతున్న సందర్భం నుండి అతడు ఎక్కుతున్న మెట్ల సంఖ్యతో ఏర్పడిన శ్రేణి 2,4,6,8,10, ………. ఏమి గమనించావు ?

ప్రతీ సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యకు 2 కలపడం వల్ల వచ్చింది.

ప్రతి సంఖ్య (పదం) నకు 2 కలుపుతూ ఈ శ్రేణిని అర్థం చేసుకొని కొనసాగించవచ్చు.

కావున పదవసారి, సోను 20వ మెట్టు దగ్గర ఉంటాడు.

అదేవిధంగా, 15వ సారి పూర్తయ్యేసరికి, అతడు 30వ మెట్టు వద్ద, 20వ సారికి 40వ మెట్టు వద్ద ఉంటాడు.

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , **20** , 22 , 24, 26 , 28 , **30** , 32 , 34 , 36 , 38 , **40** , 42 , ….

ఇప్పుడు, రెండవ సందర్భాన్ని గురించి చర్చిద్దాం.

కౌశిక్ కొండపైకి చేరుకొనుటకు ప్రతి 3 నిమిషాలలో 10 మెట్లు చొప్పున ఎక్కుతున్నాడు. అనగా

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 137   06-02-2021 14:54

ఈ సందర్భంలో ఏర్పడు శ్రేణి 10 , 20 , 30 , 40 , 50 ,…………..దీన్ని పరిశీలించి చర్చించండి.

అవును, ఈ శ్రేణి **10, 20, 30, 40, 50, …….** నుండి

ప్రతి సంఖ్య (పదం) దానిముందున్న సంఖ్య (పదం)కు 10ని కలపడం వల్ల వచ్చింది.

ఇంకా శ్రేణిలోని ప్రతి రెండు వరుస పదాల (సంఖ్యల) మధ్య భేదం 10. ఇది స్థిరంగా ఉంది.

కౌశిక్ 15 నిమిషాలలో 50 మెట్లు ఎక్కడం పూర్తి చేశాడు. అలాగే 18 నిమిషాలలో కౌశిక్ 60 మెట్లు ఎక్కడం పూర్తిచేస్తాడు. (50కి 10 ని కలపడంతో 60 వస్తుంది.)

3 ని॥, 6ని॥, 9ని॥, 12 ని॥, 15ని॥, 18ని॥, 21ని॥, 24ని॥, 27ని॥, 30ని॥, 34ని॥, …….

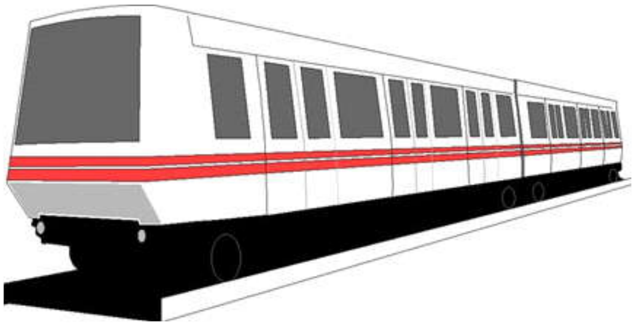
10 , 20 , 30 , 40 , 50 , **60**, 70 , **80** , 90 , **100** , 110 ,……..

ఈ విధంగా కౌశిక్ 30నిమిషాలలో 100 మెట్లు ఎక్కడం పూర్తి చేస్తాడు.

ఇలాంటివే సంఖ్యాశ్రేణులు ఏర్పడే సందర్భాలు గమనించండి.

1) ఒక మెట్రో రైలు రద్దీగా ఉన్న సమయాల్లో ప్రతి 3 నిమిషాలకు స్టేషన్‌కు చేరుకుంటుంది. అలా ఆ రైలు వచ్చు సమయాల ఆధారంగా ఏర్పడిన శ్రేణి (ఒక గంటలో)

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 33,36, 39, 42,45, 48, 51, 54, 57, 60 ఈ శ్రేణిలో, ప్రతి సంఖ్య (పదం) దాని ముందున్న సంఖ్య (పదం)కు 3 కలుపగా వచ్చింది.



ఈ శ్రేణిలో, ప్రతి రెండు వరుస సంఖ్యలు (పదాలు) మధ్యభేదం 3 (స్థిరం)

ఇలాంటివే శ్రేణులు ఏర్పడు మరికొన్ని సందర్భాలను ఆలోచించి చెప్పండి. వాటిని ఏమంటారు?

ఈ సంఖ్యాశ్రేణులను పరిశీలించండి.

(i) 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ……….

(ii) 10 ,20 , 30 , 40 , 50 ,…………..

(iii) 10, 15, 20, 25, 30, …..

(iv) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 33,36, …………

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 138 06-02-2021 14:54

ఇలాంటివే మరికొన్ని చూద్దాం.

(v) −3, −2, −1, 0,…..

(vi) 5, 5, 5, 5, 5, 5,…….

(vii) −1.0 , −1.5 , −2.0 , −2.5 , −3.0 , −3.5 , ……

పై శ్రేణులలో, మొదటి పదం నుండి వచ్చు ప్రతి తర్వాత సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యకు ఒక స్థిరసంఖ్యను కలపడం ద్వారా వచ్చింది. ఈ రకమైన సంఖ్యాశ్రేణి "**అంకశ్రేఢి Arithmetic Progression (AP)**"ని ఏర్పరుస్తాయి.

కావున, అంకశ్రేఢి అనగా ఒక సంఖ్యాశ్రేణి, అందులోని మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన ప్రతీ పదం దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపడం వల్ల ఏర్పడింది. అంకశ్రేఢిలో ఇలా కలపబడుతున్న ఈ స్థిర సంఖ్యను "సామాన్య భేదం" లేదా పదాంతరం (ధన సంఖ్య లేదా ఋణ సంఖ్య లేదా సున్నా) అంటారు.

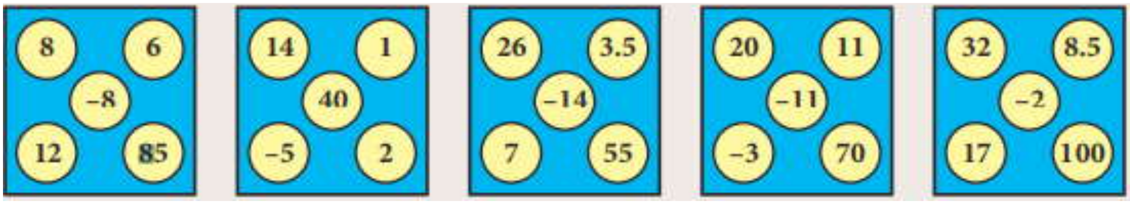
అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదం 'a_1' మరియు రెండవ పదం 'a_2' మూడవ పదం 'a_3', ఇలా nవ పదం a_n అయితే పదాంతరం లేదా సామాన్యభేదం 'd'

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ అనే అంకశ్రేఢిలో (AP)లో

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = d$$

కృత్యం

ఇక్కడ ఐదు బాక్స్‌లు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి బాక్సులో నుండి ఒక సంఖ్యను ఎన్నుకొని వాటి ద్వారా 5 అంక్రశ్రేఢులను రాయండి.



ఉదాహరణ 1 : ఈ క్రింది సంఖ్యాశ్రేణుల్లో ఇవి అంకశ్రేఢులో కనుగొనండి. ఒకవేల 6వ అంకశ్రేఢి (AP) అయితే వాటిలోని మొదటి పదం మరియు పదాంతరం కనుక్కోండి.

(i) 2, 7, 12, 17, 22, ...

(ii) 4, 0, −4, −8, −12 ...

(iii) 3, 7, 12, 18, 25 ...

(iv) 2, 6, 18, 54, 162 ...

సాధన :

(i) ఇది అంకశ్రేఢి (AP)లో ఉంది. ఎందుకంటే

ఈ విధంగా 7 − 2 = 5, 12 − 7 = 5, 17 − 12 = 5 మరియు 22 − 17 = 5

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 139   06-02-2021 14:54

కాబట్టి, మొదటి పదం మరియు పదాలు ప్రతి పదం (మొదటి పదం తప్ప) దానిముందున్న దానికి 5ను కలపడం వల్ల వచ్చింది.

కాబట్టి, మొదటి పదం a = 2

మరియు పదాలు d = 5.

(ii) దీన్ని పరిశీలించగా 0 – 4 = – 4, – 4 – 0 = – 4, – 8 – (–4) = – 4, – 12 – (–8) = – 4

అంకశ్రేఢి APలో ఉంది a = 4

మరియు పదాంతరం d = – 4.

(iii) 3, 7, 12, 18, 25, ... శ్రేణిని పరిశీలించగా

7 – 3 = 4, 12 – 7 = 5, 18 – 12 = 6, 25 – 18 = 7

దీనిలో పదాంతరం సమానంగా, స్థిరంగా లేదు. కావున ఇది APకి చెందదు.

(iv) 2, 6, 18, 54, 162, ... శ్రేణిలో

6 – 2 = 4, 18 – 6 = 12

రెండి పదాంతరం సమానంగా లేదు. స్థిరంగా లేదు. కావున ఇది AP కి చెందదు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింది వాటిలో ఏవి AP కి చెందినవి ? అవి AP ఉన్నట్లయితే మొదటి పదం పదాంతరం కనుగొనండి.

1) –5, –1, 3, 7, 11, ...

2) 6, 7, 8, 9, 10, ...

3) 1, 4, 6, 7, 6, 4, ...

4) –6, – 3, 0, 3, 6, 9, ...

2.5.3 అంకశ్రేఢిలో "సామాన్యపదం"

ఇప్పుడు, సోనూ కొండపైకి మెట్లు ద్వారా ఎక్కుతున్న సందర్భంను మరొకసారి గుర్తుచేసుకుందాం. దీని నుండి 2, 4, 6, 8, 10 … అంకశ్రేఢిగా రాయవచ్చు.

ఆలోచించండి.

మొదటి పదం నుండి ప్రతీసారి 2ను కలుపుతూ దాని తర్వాత పదాలు రాయడం అనే నియమాన్ని ఆధారంగా క్రింది విధంగా అంకశ్రేఢి (AP) ని రాయగలమా ?

$(2 + 0\times2), (2+1\times2), (2+2\times2), (2+3\times2), (2+4\times2), \ldots$

$\mathbf{(2+9\times2)\ldots\ldots(2+14\times2)\ldots\ldots(2+19\times2)\ldots\ldots}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 140   06-02-2021 14:54

ఈ అంకశ్రేఢిలో, ప్రతి పదం (మొదటిపదం మినహాయించి) దాని ముందున్న పదానికి 2 కలపడం వల్ల వచ్చింది. దీని నుండి (AP) అంకశ్రేఢి & సామాన్య రూపంను రాయగలమా?

ఇపుడు దీన్ని పరిశీలించండి.

పదం	పదమును సూచించు విధం	పదం యొక్క విలువను రాయ గలిగే విధం	సామాన్యరూపం
1	a_1	$(2 + 0 \times 2) = 2$	$a = a + (0)d = a + (1 - 1)d$
2	a_2	$(2 + 1 \times 2) = 4$	$a + 1d = a + (2 - 1)d$
3	a_3	$(2 + 2 \times 2) = 6$	$a + 2d = a + (3 - 1)d$
4	a_4	$(2 + 3 \times 2) = 8$	$a + 3d = a+(4 - 1)d$
…	…..	….	
….	……	….	
….	…..	…..	
5	a_n	$[2+ (n-1)\times 2]$	$[a + (n-1)d]$

ఇక్కడ, అంకశ్రేఢి "సామాన్యరూపం" (AP) ని క్రింది విధంగా **('n' పదాల వరకు)**

$a, (a + 1d), (a + 2d), (a + 3d), (a + 4d)$, …. $\mathbf{(a + 9d)}$ ….... $\mathbf{(a + 14d)}$ ……. $\mathbf{[a + (n-1)d]}$.

అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదం :

అంకశ్రేఢిలో 'ఙ' వ పదం కనుగొనుటకు సూత్రం

$$a_n = a + (n - 1) \times d$$

ఇందులో

a = **మొదటి పదం,** d = **పదాంతరం,**

n = **పదాల సంఖ్య** a_n = n **వ పదం**

సాధనకై ప్రయత్నించండి.

సోను ప్రతిసారీ కొండపైకి త్వరగా చేరుకొనుటకు 2 మెట్లు చొప్పున ఎక్కుతున్నాడు.

26వ సారి సోను ఎన్ని మెట్లు ఎక్కగలుగుతాడు?

సాధనను కనుగొనుటకు మనకు ఏమేమి తెలియాలి! ఆలోచించండి.

ఇపుడు సోపానాల వారీగా సాధనను కనుగొందాం.

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి (AP) 2, 4, 6, 8, 10, …….దీన్ని పరిశీలించండి.

ఇందులో మొదటి పదం 'a' , పదాంతరం 'd' మరియు 'n' పదాల సంఖ్య.

ఇప్పుడు ప్రశ్ననుండి, మనం అర్థం చేసుకోవలసినది,

మనం అంకశ్రేఢి (AP) 2, 4, 6, 8, 10, …. లో 26వ పదం కనుగొనాలి.

మొదటి పదం **'a'= 2**

పదాంతరం 'd' = 4 – 2 = 6 – 4= 2, so **'d'=2**

పదాల సంఖ్య **'n'=26**

అంకశ్రేఢి (AP) లో 'n' వ పదం కనుగొనుటకై సూత్రం

$$\boldsymbol{a_n = [a + (n - 1)\, d]}$$

దీని నుండి, $a_{26} = 2 + (26 - 1)2$

$= 2 + (25) \times 2$

$a_{26} = 2 + 50 = 52.$

కాబట్టి, 26 వ సారికి సోను 52 మెట్లు ఎక్కగలుగుతాడు.

ఇప్పుడు (AP) అంకశ్రేఢి **2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ….** లో

'n'వ పదం కనుగొనే ప్రయత్నం చేద్దాం.

$a_n = [a + (n - 1)\, d]$

దీని నుండి, $a_n = [2+ (n - 1)\, 2]$

$= 2 + 2n - 2$

అప్పుడు $a_n = 2n$

మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 2: ఒక అంకశ్రేఢి (AP) 16, 11, 6, 1, – 4, – 9, ... లోని 15వ పదం మరియు nవ పదం కనుక్కోండి.

సాధన :

16, 11, 6, 1, – 4, – 9, ... AP లో ఉంది.

ఇక్కడ $a = 16$ మరియు $d = 11 - 16 = -5$, $n = 15$

AP లో 'n' వ పదాన్ని కనుగొనడానికి సూత్రం

$$a_n = [a + (n - 1)\, d]$$

దీని నుండి, $a_{15} = a + (15 - 1)d$

$= a + 14d$

$= 16 + 14(-5)$

$= 16 - 70$

$= -54$

అందువల్ల, 15 పదం

$a_{15} = -54$

ఇప్పుడు, $a_n = a + (n - 1)d$

$= 16 + (n - 1) \times (-5)$

$= 16 - 5n + 5 = 21 - 5n$

దీని నుండి, n వ పదం

$a_n = 21 - 5n$

ఉదాహరణ 3 : ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదం – 3 మరియు 12వ పదము 41. అయిన ఈ అంకశ్రేఢి యొక్క పదాంతరం కనుగొనండి.

సాధన : అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదం 'a' పదాంతరం 'd'. ఇక్కడ $a = -3$, $n = 12$, $a_{12} = 41$, $d = ?$

కాబట్టి,

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_{12} = (-3) + (12 - 1)d = 41 \quad [\because\ a = -3]$

$11d = 44$

$d = 4$

కాబట్టి, పదాంతరం 4.

ఉదాహరణ 4: ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క పదాంతరం 5 మరియు 10 వ పదం 43, అయిన మొదటి పదం కనుగొనండి.

సాధన : $d = 5$, $n = 10$, $a_{10} = 43$ ఇవ్వబడినవి.

$a_n = a + (n - 1)d$

$a_{10} = a + (10 - 1) \times 5 = 43$

So, $43 = a + 9 \times 5$

$43 = a + 45$

$a = -2$ కాబట్టి పై అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదం – 2.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 143 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 5: ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటిపదం – 2 మరియు 11 వ పదం 18 అయిన 15వ పదం కనుక్కోండి.

సాధన : 15 వ పదం కనుగొనడానికి మీకు పదాంతరం (d) అవసరం. $a = -2$, $a_{11} = 18$, $a_{15} = ?$

ఇక్కడ,

$a_n = a + (n-1)d$

$a_{11} = a + (11-1)d$

$18 = -2 + 10d$

$10d = 20$ అప్పుడు

$d = 2$

ఇక్కడ $a_{15} = ?$

$a_{15} = a + (15 - 1)d$

$a_{15} = a + 14d$

$= -2 + 14 \times 2$

$= 26$ కాబట్టి $a_{15} = 26$.

ఉదాహరణ 6: ఒక అంకశ్రేఢిలో p పదము యొక్క p, q పదము యొక్క q రెట్లు సమానమైన $(p+q)$ వ పదము సున్నా అని నిరూపించబడింది. (ఇక్కడ $p \neq q$).

సాధన : అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదం 'a' మరియు పదాంతరం 'd' అనుకొనిన

$$a_p = a + (p-1)d$$

$$a_q = a + (q-1)d$$

దీని నుండి $pa_p = qa_q$,

కాబట్టి $p[a + (p-1)d] = q[a + (q-1)d]$

$$pa + p(p-1)d = qa + q(q-1)d$$

$pa + p(p-1)d - qa - q(q-1)d = 0$

$pa + p^2d - pd - qa - q^2d + qd = 0$

$(p-q)a + (p^2 - q^2)d - pd + qd = 0$

$(p-q)a + (p^2 - q^2)d - (p-q)d = 0$

$(p-q)a + (p-q)(p+q)d - (p-q)d = 0$

$(p-q)[a + (p+q)d - d] = 0$

$a + (p+q)d - d = 0$ [as $p - q \neq 0$]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 144 06-02-2021 14:54

$a + (p + q - 1)d = 0$

దీన్ని a_{p+q} వ పదంగా గమనించవచ్చు అవునా?

కాబట్టి, $a_{p+q} = 0$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదం 4 మరియు పదాంతరం – 3 అయిన 12వ పదం ఎంత?
2. ఒక అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదం 2 మరియు 9వ పదం 26 పదాంతరం ఎంత?
3. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 12వ పదం – 28 మరియు 18వ పదం – 46. అయిన మొదటి పదం మరియు పదాంతరం కనుగొనండి.
4. 5, 2, –1, ... అంకశ్రేఢిలో – 22 అనేది ఎన్నవ పదం?

2.5.4 అంకశ్రేఢిలో 'n' పదాల మొత్తం

దీన్ని పరిశీలిద్దాం.

మొదటి 100 సహజ సంఖ్యల మొత్తం ఎంత? ఎలా కనుగొంటావు?

దీని కోసం ప్రముఖ గణితవేత్త, గాస్ అతని టీచర్‌కు ఇలా సమాధానమిచ్చాడు.

మొదటి 100 సహజసంఖ్యల మొత్తం

1, 2, 3, 4, ……………., 99, 100

మొదటి 100 సహజసంఖ్యల మొత్తం

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots.\ 101 + 101 + 101$$

$$2S = 100 \times 101 = S = \frac{100}{2} \times 101$$

$$= 50 \times 101 = 5050.$$

మొదటి 100 సహజ సంఖ్యల మొత్తం = 5050.

మొదటి "n" సహజ సంఖ్యల మొత్తం

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

పై పద్ధతిని ఉపయోగించి అంకశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తంనకు సాధారణ రూపంను పొందవచ్చు.

$$S = a + [a + d] + [a + 2d] + [a + 3d] + [a + 4d] \ldots\ldots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d]$$

తర్వాత 'S' ను చివరి పదం నుండి మొదటి పదం నకు ఇలా వ్రాయగా

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 145 06-02-2021 14:54

$S = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a+4d] + [a+3d] + [a+2d] + [a+d] + a$

ఇప్పుడు పై రెండింటిని సంకలనం చేయగా

$S = a + [a + d] + \ldots\ldots\ldots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d]$

$S = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \ldots\ldots\ldots + [a + d] + a$

$2S = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots\ldots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]$

ప్రతి పదం ఒకే విధంగా ఉండి "n" సార్లు ఉంది.

$2S = n \times [2a + (n-1)d]$

ఇప్పుడు దీన్ని 2చే భాగించగా మనకు

$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$.

అంకశ్రేఢిలోని "n" వ పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$

ఆలోచించండి.

అంకశ్రేఢిలో n వ పదాలను కనుగొను ప్రక్రియ నుండి

$2 + 5 + 8 + 11 + \ldots. + 59$

(ఇది పరిమిత అంకశ్రేఢి)

$S_{20} = 610 = 10 \times [61]$

$= 10 \times [4 + 57]$, దీన్ని మనం ఈ క్రింది విధంగా రాయండి.

$10 \times [4 + 57]$

$= \frac{20}{2} \times [2 + 2 + 57]$

$= \frac{20}{2} \times [2 + 59]$

ఇప్పుడు, పరిశీలించండి. ఏమి గమనించారు?

(పదాల సంఖ్య) $n = 20$,

(మొదటి పదం) $a = 2$,

(చివరి పదం) $a_n = 59$

అంకశ్రేఢిలో nవ పదాల మొత్తం

$S_n = \frac{n}{2} \times$[మొదటి పదం + చివరి పదం]

$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a_n]$

మనం ఎలా సాధారణీకరించవచ్చు?

ఉదాహరణ 7 : అంకశ్రేఢి 1, 3, 5, 7, 9, ... లో మొదటి 50 పదాల మొత్తం కనుగొనండి.

సాధన : 1, 3, 5, 7, 9, ... అనునది ఒక అంకశ్రేఢి మరియు దీని నుండి

$a = 1, \quad d = 3 - 2 = 5 - 3 = 2, \quad n = 50.$

n పదాల మొత్తం

$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$

$S_{50} = \frac{50}{2} \times [2 \times 1 + (50-1) \times 2]$

$= 25 \times (2 + 49 \times 2) = 25 \times (2 + 98) = 2500.$

ఉదాహరణ 8 : 4 యొక్క మొదటి 30 గుణిజాల మొత్తం ఎంత?

సాధన : మనకు 4 యొక్క గుణిజాలు తెలుసు. దీనితో ఏర్పడు అంకశ్రేఢి 4 , 8 , 12 , 16 , 20 , ……..(30 గుణిజాలు)

నుండి $a = 4$, $n = 30$, $d = 8 - 4 = 12 - 8 = 4$

మీకు తెలుసు.

$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 146 06-02-2021 14:54

$$S_{30} = \frac{30}{2} \times [2(4) + (30 - 1) \times 4]$$

$$S_{30} = 15 \times [8 + 116] = 15 \times 124$$

$$S_{30} = 1860.$$

ఆలోచించండి.

1. ఒక అంకశ్రేఢిలో 'n' ధనాత్మకం ఎందుకు?
2. ఒక అంకశ్రేఢిలో ప్రతీ పదం 3చే గుణించగా ఏర్పడు కొత్త శ్రేఢిలో పదాంతరం మారుతుందా?

ఉదాహరణ 9: క్రింది అంకశ్రేఢుల యొక్క మొదటి 12 పదాల మొత్తం కనుక్కోండి.

(i) 11, 16, 21, 26 ....

(ii) – 151, – 148, – 145, – 142

సాధన :

(i) 11, 16, 21, 26 .... అంకశ్రేఢి ఇవ్వబడినది.

ఇక్కడ, $a = 11$, $d = 16 - 11 = 5$ మరియు $n = 12$.

అంకశ్రేఢిలో n పదాలు మొత్తం

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$$

కాబట్టి, $S_{12} = \frac{12}{2} \times [2 \times 11 + (12 - 1)5]$

$= 6 \times [22 + (60 - 5)]$

$= 6 \times [22 + 55]$

$= 6 \times 77 = 462$ కాబట్టి కావలసిన మొత్తం 462.

(ii) – 151, – 148, – 145, – 142 ... అంకశ్రేఢి ఇవ్వబడినది.

ఇక్కడ, $a = -151$, $d = -148 - (-151) = 3$ మరియు $n = 12$.

$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$ అని మనకు తెలుసు.

కాబట్టి, మొదటి 12 పదాల మొత్తం

$$S_{12} = \frac{12}{2} \times [2 \times (-151) + (12 - 1) \times 3]$$

$$S_{12} = 6 \times [-302 + (36 - 3)]$$

$$S_{12} = 6 \times [-302 + 33]$$

$$S_{12} = 6 \times (-269) = -1614$$

కాబట్టి కావలసిన మొత్తం – 1614.

ఉదాహరణ 10: అంకశ్రేఢి 2, 4, 6, 8, 10 .... లోని పదాల మొత్తం 210 కావడానికి కావలసిన పదాల సంఖ్య ఎంత?

సాధన : ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి నుండి $a = 2$, $d = 4 - 2 = 6 - 4 = 2$ మరియు $S_n = 210$.

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$$ అని మనకు తెలుసు.

$$210 = \frac{n}{2} \times [2 \times 2 + (n-1) \times 2]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [4 + 2n - 2]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [2n + 2]$$

$$420 = n[2n + 2]$$

$$420 = 2n^2 + 2n$$

$$2n^2 + 2n - 420 = 0$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$n^2 + 15n - 14n - 210 = 0$$

$$n(n + 15) - 14(n + 15) = 0$$

$$(n + 15)(n - 14) = 0$$

$$n + 15 = 0 \text{ or } n - 14 = 0$$

$$n = -15 \text{ or } n = 14$$

ఇక్కడ, అంకశ్రేఢిలో పదాల సంఖ్య ఋణ సంఖ్య కారాదు. కాబట్టి $n = 14$.

ఇచ్చిన అంకశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం 210 కావడానికి దానికి మొదటి 14 పదాలు అవసరం.

ఉదాహరణ 11: 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59 యొక్క మొత్తం ఎంత?

సాధన : అక్కడ 2, 5, 8, 11, ... అంకశ్రేఢిలో ఉన్నది.

మరియు $a = 2$, $d = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$ మరియు $a_n = 59$.

మొత్తమును కనుగొనుటకు ముందు మీరు 'n' విలువను కనుగొనాల్సి ఉంది.

ఇప్పుడు, $a_n = a + (n-1) \times d$

అందువల్ల, $59 = 2 + (n-1)3$

$$59 = 3n - 1$$

$$60 = 3n$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 148 06-02-2021 14:54

కాబట్టి, $n = 20$

ఇప్పుడు, $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 2 + (20-1) \times 3]$$

$$S_{20} = 10 \times [4 + 19 \times 3]$$

$$S_{20} = 10 \times [4 + 57]$$

$$S_{20} = 10 \times [4 + 57]$$

$$S_{20} = 10 \times [61]$$

$$S_{20} = 610$$

చివరి పదం 'l' గా కలిగిన అంకశ్రేఢిలోని పదాల మొత్తం

ఆలోచించండి.

అంకశ్రేఢిలోని "n" పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$

అని మనకు తెలుసు.

దీని నుండి మనం ఈ విధంగా రాయవచ్చు.

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + \{a + (n-1)d\}]$$

$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a_n]$, ఎందుకంటే $\{a + (n-1)d\}$ అనేది అంకశ్రేఢిలో 'n' వ పదం కనుగొను సూత్రం. ఇక్కడ 'n' చివరి పదం.

ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం 'a' చివరి పదం 'l' అయినప్పుడు

అంకశ్రేఢిలో పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$.

ఉదాహరణ 12: 1 నుండి 100 మధ్య గల 5 యొక్క గుణజాల మొత్తం కనుగొనండి.

మీ కోసం మీరేమి చేయాల్సి ఉంటుంది?

మనకు 1 నుండి 100 ల మధ్య గల 5 యొక్క గుణిజాలు

5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , ……………………….85 , 90 , 95

దీని నుండి

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 149
06-02-2021 14:54

మొదటి పదం 'a' = 5

రెండవ పదం 'l' = 95

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$$ అను సూత్రం మనకు తెలుసు.

ఇందులో 'n'=?

'n' ఎలా కనుగొంటారు? ఆలోచించండి.

అవును 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , ...85 , 90 , 95

ఇక్కడ $a = 5$; $d = 10 - 5 = 15 - 10 = 5$

$\boldsymbol{a_n = a + (n - 1) \times d}$ అను సూత్రము నుండి

$$95 = 5 + (n - 1) \times 5$$

$$95 = 5 + 5n - 5$$

$$95 = 5n$$

$$n = 19.$$

ఇప్పుడు $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]}$

$$= \frac{19}{2} \times [5 + 95]$$

$$= \frac{19}{2} \times [100] = 19 \times 50 = 950$$

$$S_n = 950$$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది అంకశ్రేఢులలో మొదటి. 15 పదాల మొత్తం కనుగొనండి.
   (i) 11, 6, 1, – 4, –9 ... (ii) 7, 12, 17, 22, 27 ...
2. పదాల మొత్తం 1070 అగుటకు అంకశ్రేఢి 25, 28, 31, 34, ... లో ఎన్ని పదాలు అవసరం?
3. 1 + 4 + 7 + 10 + ... +118 యొక్క మొత్తం ఎంత?
4. 100 వరకు గల సహజ సంఖ్యలలో 3చే భాగించబడే సంఖ్యలన్నింటి మొత్తం ఎంత?
5. ఒక అంకశ్రేఢిలోని మూడు వరుస సంఖ్యల మొత్తం 21 మరియు వాటి లబ్ధం 231. ఆ అంకశ్రేఢిలోని 3 పదాలు కనుగొనండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 150 06-02-2021 14:54

6. a, n, d మరియు S_n, విలువల ఆధారంగా ఇచ్చిన వాటిని ఉపయోగించి ఇవ్వని దాని విలువ కనుగొనండి.

(i) $a = -2, d = 5, S_n = 568.$

(ii) $l = 8, n = 8, S_8 = -20$

(iii) $a = -3030, l = -1530, n = 5$

(iv) $d = 2/3 , l = 10, n = 20$

2.5.5 గుణశ్రేఢి

ఒక కృత్యం చేద్దాం.

కృత్యం

ఒక దీర్ఘ చతురస్రం లేదా చతురస్రాకార కాగితం తీసుకొని సాధ్యమైనన్ని సార్లు మడవండి. కాగితాన్ని ఎన్నిసార్లు మడవగలరు. నాలుగు లేదా ఐదుసార్లు సాధ్యమవు తుందా?

ప్రతీ సారీ మళ్ళించినప్పుడు ఆ కాగితం యొక్క ఎత్తు కనుగొనగలరా?

ఎలా కనుగొంటారు?

వాటి ద్వారా ఒక శ్రేణిగా రాయగలరా ?

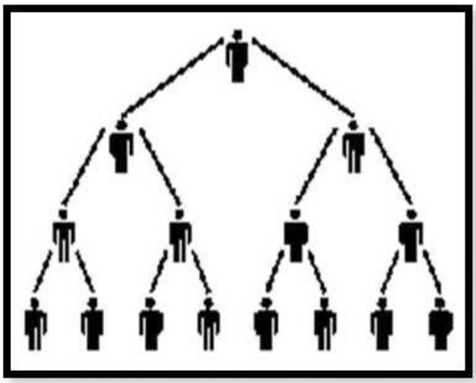
ఆ శ్రేణి అంకశ్రేఢి అవుతుందా?

కాకపోతే, దానిని ఏమంటారు?

ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ఆలోచిద్దాం

చాలా కాలం నుండి ప్రపంచ వ్యాప్తంగా ప్రజలు శరీరానికి హాని కల్గించు బాక్టీరియా మరియు వైరస్‌లతో వ్యాధుల బారిన పడుతున్నారు. ఇలాంటి సందర్భంలో ప్రతి ఒక్కరూ తమ తమ ఆరోగ్యం గురించి తగు జాగ్రత్తలు తీసుకుంటుండాలి. మన తెలంగాణ ప్రభుత్వం ఒకవేళ రాష్ట్రంలోని ప్రతి ఒక్కరికీ పరిశుభ్రత – ఆరోగ్యం, సుఖజీవనం నకు సూత్రాలను త్వరితగతిన తెలిసేలా చేయాలనుకుంటే దానికోసం వారు గొలుసు కట్టు పద్ధతిని ఎన్నుకుంటే సాధ్యం అవుతుంది. ఒక వ్యక్తి ఆ సూత్రాలను కనీసం ఇద్దరికి తెలియజేయాలి. ఇలా సూత్రాలను తెలుసుకున్న ప్రతీ వ్యక్తి వాటిని కనీసం ఇద్దరికి తెలియజేయాలి.

చిత్రం చూపినట్లు, ఈ ప్రక్రియ ఒక్కరితో ప్రారంభం అయి అతని నుండి ఇద్దరికీ ఆ ఇద్దరు మళ్ళీ ఒక్కొక్కరికి ఇద్దరికి చొప్పున (అనగా నలుగురికి) తెలియజేస్తూ, ఆ నలుగురిలో ప్రతి ఒక్కరూ ఇద్దరి చొప్పున ... ఇలా గొలుసు పద్ధతిన కొనసాగించబడుతుంది.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 151 06-02-2021 14:54

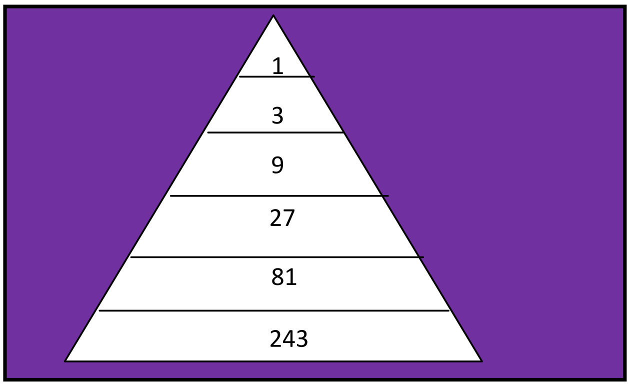
ఆలోచించండి.

ఇలా గొలుసు పద్ధతిలో కొనసాగిన సమాచారం అందిచే ప్రక్రియ ఆధారంగా మనం శ్రేణిని రాయగలమా?

అవును, దాని నుండి 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... ఇలా శ్రేణిని రాయగలం.

మొదటి సంఖ్య మినహాయించి తర్వాత వచ్చు ప్రతీ సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యను 2 (ఒక స్థిర సంఖ్యచే) గుణించగా వచ్చింది.

మరియు ఒకవేళ అవే ఆరోగ్యసూత్రాలను ఒక వ్యక్తి ముగ్గురికి తెలియజేసి ఆ ముగ్గురిలో ప్రతీ ఒక్కరు ఈ సమాజంలోని ముగ్గురు చొప్పున తెలియజేస్తు గొలుసు పద్ధతి ప్రక్రియ కొనసాగిస్తే దాని ఆధారంగా మం శ్రేణిని రాయగలం. (చిత్రం చూడండి)



1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...

1 , 1×3 , 3×3 , 9×3 , 27×3 , 81×3...

ఈ శ్రేణి మొదటి పదం మినహాయించి తర్వాత వచ్చు సంఖ్య దాని ముందున్న సంఖ్యను 3 (ఒక స్థిర సంఖ్య)చే గుణించగా వచ్చింది.

ఇప్పుడు, ఈ శ్రేణులను పరిశీలించండి.

(i) 10 , 1000 , 10000 , 100000 , 1000000........ or $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$...........

(ii) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... or $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ . ...

(iii) 5 , 25 , 125 , 625 , ... or $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, ...

వీటిని 'గుణశ్రేఢి' అంటారు.

ఒక శ్రేణిలోని మొదటి పదం (మొదటి సంఖ్య) మినహాయించి తర్వాత వచ్చు ప్రతీ పదం (సంఖ్య) దాని ముందున్న పదాన్ని ఒక స్థిర సంఖ్యతో (శూన్యేతర సంఖ్యతో) గుణించగా వచ్చినట్లయితే దానిని 'గుణశ్రేఢి' అంటారు. ఆ స్థిర సంఖ్యను "సామాన్య నిష్పత్తి" అంటారు. ఈ సామాన్య నిష్పత్తిని 'r' తో సూచిస్తాము.

గుణశ్రేఢి - సామాన్య నిష్పత్తి

ఒక గుణశ్రేఢిలో సామాన్య నిష్పత్తి ఎలా కనుగొంటామో చూద్దాం.

ఒక గుణశ్రేఢిని తీసుకుందాం.

10 , 1000 , 10000 , 100000 , 1000000........లేదా $10 , 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5$..............

సామాన్యనిష్పత్తి 'r' = (రెండవ పదం) / (మొదటి పదం) = (మూడవ పదం)/(రెండవ పదం) = ...

ఇక్కడ, పై గుణశ్రేఢి నుండి సామాన్య నిష్పత్తి 'r' = 100/10 = 1000/100 = 10000/1000 = 10

గుణశ్రేఢిలో మొదటి పదం 'a' మరియు సామాన్య నిష్పత్తి, 'r' అయితే ఆ గుణశ్రేఢి

a_1, a_2, a_3, ... మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 'r' $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 152 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 13:

కింది గుణశ్రేఢుల నుండి సామాన్య నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

(i) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... లేదా $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ . ...

(ii) 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ... లేదా $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^5$ . ...

(iii) 5 , 25 , 125 , 625 , ... లేదా $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, ...

సాధన :

(i) ఇచ్చిన గుణశ్రేఢి

1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... లేదా $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ ....

సామాన్య నిష్పత్తి 'r' $= \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$ లేదా 'r' $= \frac{2^1}{2^0} = \frac{2^2}{2^1} = \frac{2^3}{2^1} = 2$

(ii) అదేవిధంగా 'r' $= \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \mathbf{3}$ లేదా 'r' $= \frac{3^1}{3^0} = \frac{3^2}{3^1} = \frac{3^3}{3^1} = 3$

(iii) 'r' $= \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = \mathbf{5}$ లేదా 'r' $= \frac{5^2}{5^1} = \frac{5^3}{5^2} = 5$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

క్రింద ఇచ్చిన గుణశ్రేఢిలోని సామాన్య నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

(1) 6 , 12 , 24 , 48 ,...

(2) 7 , 21 , 62 , 186 , ...

(3) 8 , 8 , 8 , 8 , ...

(4) 4^0 , 4^1 , 4^2 , 4^3 , 4^4 , 4^5 . ...

గుణశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపం (గుణశ్రేఢి యొక్క 'n' వ పదం)

ఏదైనా ఒక గుణశ్రేఢిని తీసుకోండి.

4 , 16 , 64 , 256 , ... ఇది ఒక పరిమిత గుణశ్రేఢి

దీని నుండి మనం ఈ క్రింది విధంగా రాయగలం.

$4 , 4 \times 4, 4 \times (4 \times 4), 4 \times (4 \times 4 \times 4)$, ...

$4 \times 4^0, 4 \times 4^1, 4 \times 4^2, 4 \times 4^3$, ...

మొదటి పదం 'a' మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 'r' గా గల గుణశ్రేఢి

a_1, a_2, a_3 , ... మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 'r' $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ .....

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 153
06-02-2021 14:54

$a \times r^0, \; a \times r^1, \; a \times r^2, \; a \times r^3, \; a \times r^4 \; \ldots\ldots\ldots\ldots$

అయితే 'n' వ పదము ఏమవుతుంది?

ఆలోచిద్దాం.

పదం	పదంను సూచించు విధం	పదం యొక్క విలువ రాసే విధం	గుణశ్రేఢి సామాన్య రూపం (మొదటి పదం 'a', మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 'r')
1	a_1	$4 \times 4^0 = 4$	$a = a \times r^0 = a \times r^{1-1}$
2	a_2	$4 \times 4^{2-1} = 16$	$a \times r^1 = a \times r^{2-1}$
3	a_3	$4 \times 4^{3-1} = 64$	$a \times r^2 = a \times r^{3-1}$
4	a_4	$4 \times 4^{4-1} = 256$	$a \times r^3 = a \times r^{4-1}$
…	…..	….	
….	……	….	
….	…..	…..	
5	a_n	$4 \times 4^{n-1}$	$a \times r^{n-1}$

గుణశ్రేఢి యొక్క 'n'వ పదం

మొదటి పదం 'a' మరియు సామాన్య నిష్పత్తి 'r' గా గల గుణశ్రేఢిలో (GP లో)

$a \times r^0, a \times r^1, \; a \times r^2, \; a \times r^3, a \times r^4 \ldots\ldots\ldots\ldots \; a \times r^{n-1}$

గుణశ్రేఢిలో nవ పదం

$a_n = a \times r^{n-1}$

ఆలోచించండి.

1. 64 ను మూడు భాగాలుగా చేయండి. ఆ సంఖ్యలు గుణశ్రేఢిలో (G.P.) ఉండేలా చూడండి.
2. $a, b, c, \ldots$ లు G.P. లో ఉండే $2a, 2b, 2c, \ldots.$ లు ______
3. $3, x, 6.75$ లు G.P. లో ఉంటే x విలువ ______

ఉదాహరణ 14 :

కింది శ్రేఢులలో ఏవి గుణశ్రేఢులు ?

(i) 7, 14, 21, 28, … (ii) 1/2 , 1, 2, , 4 ...

(iii) 5, 25, 50, 75, …

సాధన : ఇచ్చిన శ్రేఢి గుణశ్రేఢి (G.P.) అవునా ? కాదా? సరిచూడాలంటే

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 154 06-02-2021 14:54

మనం ఇందులో ప్రతీ రెండు సంఖ్యల మధ్యన సామాన్య నిష్పత్తి సమానంగా ఉందా? లేదా? చూడాల్సి ఉంది.

(i) 7, 14, 21, 28, …

సామాన్య నిష్పత్తి 'r' $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

$= \frac{14}{7} = 2$ మరియు $\frac{21}{14} \neq 2$

ఇక్కడ ఏ రెండు పదాల మధ్య ఉండవలసిన సామాన్య నిష్పత్తి సమానంగా లేదు. కాబట్టి 7, 14, 21, 28, … అనేది గుణశ్రేఢి కాదు.

(ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 ...

సామాన్య నిష్పత్తి 'r' $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$.

$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$ మరియు $\frac{2}{1} = 2$ $= 2$ మరియు $\frac{4}{2} = 2$

ఇందులో సామాన్య నిష్పత్తి సమానం. కాబట్టి $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 ...అనేది గుణశ్రేఢి అవుతుంది.

(iii) 5, 25, 50, 75, …

సామాన్య నిష్పత్తి 'r' $= \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$.

$= \frac{25}{5} = 2$ మరియు $\frac{50}{25} = 2$ మరియు $\frac{75}{50} \neq 2$

శ్రేఢిలో ఏ రెండు పదాల మధ్య సామాన్య నిష్పత్తులు, సమానంగా లేదు. కాబట్టి 5, 25, 50, 75, … అనేది గుణశ్రేఢి కాదు.

ఉదాహరణ 15 : క్రింద ఇవ్వబడిన వాటిలో మొదటి పదం, సామాన్య నిష్పత్తి విలువలు ఆధారంగా గుణశ్రేఢిని, ఆ గుణశ్రేఢి (n వ పదం) సామాన్య పదాన్ని రాయండి.

(i) $a = -7, \quad r = 6$ (ii) $a = 256, r = 0.5$

సాధన :

(i) గుణశ్రేఢి $a, ar, ar^2, \ldots$ యొక్క సామాన్యరూపం

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 155 06-02-2021 14:54

$a = -7,$

$ar = -7 \times 6 = -42,$

$ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$

అందువల్ల $-7, \ -42, -252, \ldots$

పై గుణశ్రేఢి సామాన్యరూపం (n వ పదం) $a_n = -7 \times 6^{n-1}$

(ii) GP యొక్క సాధారణ రూపం $a, ar, ar^2, \ldots$

$a = 256,$

$a^r = 256 \times 0.5 = 128,$

$ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$

కాబట్టి కావలసిన GP 256, 128, 64,....

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

(1) ఒక GP లో $a = 11, \ r = 3$ అయితే ఆ లోని మొదటి నాల్గు పదాలు మరియు సామాన్య పదాన్ని కనుగొనండి.

(2) $a = 1$ మరియు $r = 2$ గా గల GPలో 256 ఎన్నవ పదం?

(3) $a = \frac{1}{11}, \ r = 11$ గా గల GP లో 123321 ఉంటుందా?

(4) $a = \frac{1}{3}, \ r = 2$ గా గల GP ని మరియు సామాన్యపదాన్ని కనగొనండి.

అభ్యాసము

1. క్రింది వాటిలో ఏవి అంకశ్రేఢులు ? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

   (A) 1, 4, 9, 16 ..... (B) 1, 3, 9, 27

   (C) –2, 0, 2, 4, 6, ... (D) 1, 2, 4, 8, ...

2. అంకశ్రేఢి 3, 1, –1, –3, ... లోని పదాంతరం

   (A) –2 (B) 2 (C) –3 (D) 3

3. 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

   (A) 31 (B) 30 (C) 29 (D) 11

4. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం మరియు పదాంతరం వరుసగా 2 మరియు 4. అయితే అందులోని మొదటి 40 పదాల మొత్తం

(A) 3200 (B) 2800 (C) 1600 (D) 200

5. అంకశ్రేఢి 3, 4, 5, 6, ... లోని మొదటి 10 పదాల మొత్తం

(A) 65 (B) 75 (C) 85 (D) 110

6. 7 + 12 + 17 + 22 + ... +1002 యొక్క పదాల మొత్తం కనుక్కోండి.

7. అంకశ్రేఢి –11, –7, –3, ..., 53 లోని మధ్యపదం కనుక్కోండి.

8. అంకశ్రేఢి 9, 14, 19, ... లో124 ఎన్నవ పదం?

9. అంకశ్రేఢిలో 7వ పదం మరియు 13వ పదం వరుసగా 32 మరియు 62. అయిన ఆ అంకశ్రేఢిని కనుక్కోండి.

10. అంకశ్రేఢి 7, 10, 13, ..., 184లో చివరి నుండి 8వ పదంను కనుగొనండ

11. $2x$, $x + 10$, $3x + 2$ లు ఉంటే x విలువ ఎంత?

12. అంకశ్రేఢి –10, –7, –4, –1, ... లో పదాల మొత్తం 104 కావడానికి ఎన్నిపదాలు అవసరం?

13. కింది వాటిలో ఏవి గుణశ్రేఢులు

(i) 3, 9, 27, 81,… (ii) 4, 44, 444, 4444,...

(iii) 0.5, 0.05, 0.005,… (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, ...$

(v) 1, –5, 25, –125 , … (vi) 120, 60, 30, 18,…

(vii) $16, 4, \frac{11}{4}, ...$

14. కింద ఇవ్వబడిన మొదటి పదం మరియు సామాన్య నిష్పత్తి ఆధారంగా గుణశ్రేఢి యొక్క మూడు మొదటి పదాలు కనుక్కోండి. (i) $a = 6$, $r = 3$ (ii) a =*sqrrt* 2, r = *sqr rt* 2 (iii) $a = 1000$, r = 2 5

15. గుణశ్రేఢి 729, 243, 81,… లో a_7 ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 157 06-02-2021 14:54

ముఖ్యాంశాలు

- అంకశ్రేఢి అనగా ఒక సంఖ్యాశ్రేణి, అందులోని మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన ప్రతీ పదం దాని ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపడం వల్ల ఏర్పడింది. ఇలా అంకశ్రేఢిలో కలపబడుతున్న ఈ స్థిర సంఖ్యను "**సామాన్య భేదం**" లేదా పదాంతరం (ధన సంఖ్య లేదా ఋణ సంఖ్య లేదా సున్నా) అంటారు.

- అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదం 'a_1' మరియు రెండవ పదం 'a_2' మూడవ పదం 'a_3', ఇలా nవ పదం a_n అయితే పదాంతరం లేదా సామాన్య భేదం 'd'.

  $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, అనే అంకశ్రేఢి (AP)లో

  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = d$

- **అంకశ్రేఢిలో 'n'వ పదం** $a_n = a + (n-1) \times d$, ఇందులో

  a = మొదటి పదం, d = పదాంతరం,

  n = పదాల సంఖ్య, a_n = nవ పదం

- **మొదటి "n" సహజ సంఖ్యల మొత్తం** $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- **ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం 'a' మరియు చివరి పదం 'l' అయితే**

  $$S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$$

- గుణశ్రేఢి అనగా ఒక శ్రేణిలోని మొదటి పదం మినహాయించి తర్వాత వచ్చు ప్రతీ పదం దాని ముందున్న పదాన్ని ఒక స్థిర సంఖ్యలో (శూన్యేతర సంఖ్యతో) గుణించగా ఏర్పడిన శ్రేఢి. ఆ స్థి సంఖ్యను "సామాన్య నిష్పత్తి" అంటారు. సామాన్య నిష్పత్తి ని 'r'తో సూచిస్తాం.

- మొదటి పదం 'a' మరియు సామాన్య నిష్పత్తి, 'r' గా గాల గుణశ్రేఢి $a_1, a_2, a_3, ...$ లో

  $$'r' = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

- మొదటి పదం 'a' మరియు సామాన్య నిష్పత్తి, 'r' గా గాల గుణశ్రేఢి
- మరియు nవ పదం (గుణశ్రేఢిలో) $a_n = a \times r^{n-1}$.

యూనిట్ 3 అంకగణితం

అధ్యాయం 3.1 నిష్పత్తి - అనుపాతాలు

3.1.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- నిష్పత్తులు గూర్చి నేర్చుకుంటారు.
- నిష్పత్తులు మరియు అనుపాతాలు - వాటి మధ్య సంబంధం గురించి తెలుకుంటారు.
- విలోమ అనుపాతం మరియు అనులోమానుపాతాలను అవగాహన చేసుకుంటారు.
- సాధారణ నిష్పత్తి సమస్యలను పరిష్కరించడానికి విద్యార్థులు ఏక వస్తుమార్గ పద్ధతిని ఉపయోగించగలగుతారు.
- మిశ్రమ అనుపాతంతో కూడిన సమస్యలు సాధిస్తారు.
- కాలం, పనితో గల సమస్తము సాధిస్తారు.
- కాలం, దూరం, వడి/వేగాలతో కూడిన సమస్యలు సాధిస్తారు.

3.1.1 పరిచయం

మన రోజువారి పనులలో మనం కొన్నిసార్లు రాశులను పోల్చవలసి వస్తుంది. వస్తువుల యొక్క ధరలను, పరిమాణాము, భారము వంటివాటిని అంచనా వేయడం, లెక్కించడం, ఒకదానితో మరొక దానిని పోల్చడం వంటివి చేస్తుంటాము.

వివిధ వస్తువులను వివిధ రకాలుగా పొల్చుతాం ఉదాహరణకు

ఉదాహరణ - 1 : ఒక విద్యార్థి 165 సెం.మీ. పొడవు మరొక్క విద్యార్థి 163 సెం.మీ. ఉన్నచో, ఆ ఇద్దరు విద్యార్థులలో ఎవరు పొడవుగా ఉన్నారో చెప్పగలవా?

ఉదాహరణ - 2 : దుకాణం A లో ఒక వస్తువు యొక్క వెల ₹ 120/- గా ఉండి, దుకాణం - B లో అదే వస్తువు యొక్క వెల ₹ 115/- గా ఉన్నచో. వీరిద్దరిలో ఎవరు చౌకగా ఆ వస్తువును అమ్ముతున్నారు?

ఉదాహరణ - 3 : హైదరబాదులో లీటరు పెట్రోల్ ధర ₹ 78/-, ముంబాయిలో లీటరు పెట్రోల్ ధర ₹ 75/- అయినచో ₹ 100/- కు ఎక్కువ పెట్రోలు ఎక్కడ వస్తుంది?

పై ఉదాహరణలు అన్నింటిలో వాటి విలువలలో వ్యత్యాసాన్ని గమనించవచ్చును.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 159 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ-1 లో ఆ ఇద్దరు విద్యార్థుల మధ్య వ్యత్యాసం 2 సెం.మీ. (165 – 163).

ఉదాహరణ-2 లో రెండు దుకాణాల మధ్య ధరల వ్యత్యాసం 120 – 115 = ₹ 5/-

ఉదాహరణ-3 లో రెండు నగరాలలో లీటరు పెట్రోల్ ధరల వ్యత్యాసం ₹ 3/- (78 – 75).

ఈ ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదాహరణ - 4 : ఒక పుస్తకము వెల ₹ 200/- అయిన ఒక కలం యొక్క వెల ₹ 20/- అయినచో, ఆ పుస్తకం యొక్క వెల మరియు కలం వెలకు ఎన్ని రెట్లో చెప్పగలరా?

ఉదాహరణ - 5 : సరళ 60 కి.గ్రా. ల బరువు ఉండి ఆమె కొడుకు 20 కి.గ్రా. ల బరువు ఉన్నచో, సరళ యొక్క భారం ఆమె కుమారుని భారం కంటే ఎన్ని రెట్లో చెప్పగలరా?

ఉదాహరణ - 6 : తోలు సంచి యొక్క ధర ₹ 400/-, నార (బట్ట) సంచి యొక్క ధర ₹ 150/-. తోలు సంచి యొక్క ధర, నార సంచి యొక్క ధరకు ఎన్ని రెట్లో చెప్పగలరా?

పై ఉదాహరణలలో ఒకటి మరొక దానికి ఎన్ని రెట్లో పోల్చబడినవి.

ఒకటి మరొక దానికి ఎన్ని రేట్లో పోల్చే ప్రక్రియనే నిష్పత్తి అంటాము.

ఒకే ప్రమాణంలో గల రాశుల క్రమానుగత పోలికే నిష్పత్తి దానిని $a : b$ ద్వారా సూచిస్తాము.

ఉదాహరణ-1లో ఆ ఇద్దరు విద్యార్థుల పొడవుల యొక్క నిష్పత్తి = 165:163

ఉదాహరణ-4లో పుస్తకం మరియు కలం యొక్క ధరల నిష్పత్తి = 200/20 = 200:20 = 10:1

నిష్పత్తిలోని రెండు పరిమాణాలు కనిష్టంగా చూపబడి వాటి యొక్క గ.సా.భ. 1 అయితే, అట్టి నిష్పత్తిని కనిష్ఠ నిష్పత్తి లేదా సాధారణ నిష్పత్తి అంటారు.

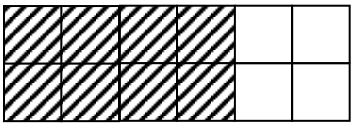
$a : b$, ఒక నిష్పత్తిలోని మొదటి పరిమాణం 'a' ను పూర్వ పదం అని రెండవది 'b' పర పదం అంటారు.

కృత్యం - 1 : ఈ క్రింది పట్టికను ఇచ్చిన ఉదాహరణ అధారంగా పూరించండి.

క్ర.సం.	పూర్వం పదం	పర పదం	పోల్చుట	భిన్న రూపం	సాధారణ నిష్పత్తి
1	మొదటి బుట్టలో 10 బంతులు ఉన్నవి	రెండవ బుట్టలో 15 బంతులు ఉన్నవి	10 : 15	$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$	2:3
2	2 కి.గ్రా.ల బియ్యం	500 గ్రాముల బియ్యం	2కి.గ్రా.: 500గ్రా. = 2000 : 500	$\frac{2000}{500}$	4:1
3	5 మీ. పొడవు ఎర్ర రిబ్బను	3 మీ. పొడవు నల్ల రిబ్బను			
4	మొదటి అగ్గిపెట్టెలో 45 అగ్గిపుల్లలు ఉన్నవి	రెండవ అగ్గిపెట్టెలో 30 అగ్గిపుల్లలు ఉన్నవి			

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 160 06-02-2021 14:54

కృత్యం - 2 :



ప్రక్క చిత్రాన్ని పరిశీలించి ఈ క్రింది ఖాళీలను పూరించండి

(i) షేడ్ చెయబడిన చతురస్రాల సంఖ్య షేడ్ చేయబడని చతురస్రాల సంఖ్యకు _______ రెట్లు

(ii) షేడ్ చేయబడని చతురస్రాల సంఖ్య షేడ్ చెయబడిన చతురస్రాల సంఖ్యకు _______ రెట్లు

(iii) షేడ్ చెయబడిన చతురస్రాలమరియు షేడ్ చేయబడని చతురస్రాల నిష్పత్తి = ______

నిష్పత్తి - వివిధ సందర్భాలు

ఒక వ్యాపారంలో లక్ష్మణ్ ₹ 5000/- మరియు దేవి ₹ 10,000/- పెట్టుబడి పెట్టెను.

లక్ష్మణ్ యొక్క పెట్టుబడి = 5,000

దేవి యొక్క పెట్టుబడి = 10,000

లక్ష్మణ్ మరియు దేవిల పేట్టుబడుల యొక్క నిష్పత్తి = 5000 : 10,000 = 1 : 2

ఈ సందర్భంలో లక్ష్మణ్ యొక్క వాటా 1 భాగం మరియు దేవి యొక్క వాటా 2 భాగాలు. మొత్తం 3 భాగాలు అవుతుంది.

నిష్పత్తి ఆధారంగా విభజించుట

ఉదాహరణ - 7

రాధ వద్ద గల 20 పువ్వులలో గులాబి పువ్వులు మరియు బంతి పువ్వులు 2 : 3 నిష్పత్తిలో ఉన్నచో, అందులో గులాబి పూలు మరియు బంతి పూలు ఎన్ని?

సాధన : నిష్పత్తి = 2 : 3

నిష్పత్తుల మొత్తం = 2 + 3 = 5

మొత్తం భాగాలు = 5 భాగాలు

మొత్తం పూల సంఖ్య = 20

5 భాగాలు = 20 పూలు

ప్రతి భాగం = $\frac{20}{5}$ = 4 పూలు

గులాబిలు = 2 భాగాలు

గులాబిల సంఖ్య = 2 × 4 = 8 పూలు

బంతులు = 3 భాగాలు

బంతుల సంఖ్య = 3 × 4 = 12 పూలు

రాధ వద్ద 8 గులాబిలు మరియు 12 బంతి పూలు ఉన్నాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 161 06-02-2021 14:54

కృత్యం - 3

ఈ రేఖా ఖండాన్ని దాని భాగాలను పరిశీలించి క్రింది సూచించిన వాటి నిష్పత్తిని తెల్పండి.

(i) AB : BD = ____________

(ii) AC : CD = ____________

(iii) AB : AD = ____________

(iv) AB : CD = ____________

(v) AC : BD = ____________

కృత్యం - 4

బొమ్మలాధారంగా ఈ క్రింది పట్టికను పూరించుట.

క్ర.సం.	మొదటి రాశి	రెండవ రాశి	నిష్పత్తి
1.			
2.			
3.			

కృత్యం - 5

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణ అధారంగా పట్టికను పూరింపుము

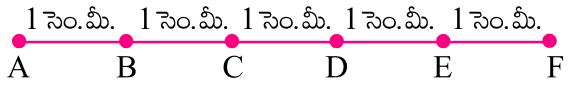
క్ర.సం.	రాశులు	నిష్పత్తి	భిన్నము	సాధారణ నిష్పత్తి
1	15 మీ. నీళ్ళపైపు మరియు 12 మీ. ఇనుప కమ్మీల నిష్పత్తి	15:12	$\frac{15}{12}$	5:4
2	6 అబ్బాయిలు మరియు 10 అమ్మాయిల నిష్పత్తి			
3	ఒక గంట మరియు 40 నిమిషాల నిష్పత్తి			
4	75 పైసలు మరియు 3 రూపాయల నిష్పత్తి			
5	750 సె.మీ. మరియు 2 మీ. నిష్పత్తి			

3.1.2 అనుపాతాలు

ఒక కప్పు కాఫీకి 10గ్రాముల చక్కెర అవసరం అయితే, 5 కప్పుల కాఫీకి ఎంత చక్కెర అవసరం అవుతుంది. 5×10 = 50 గ్రాముల చక్కెర సరిపోతుందా?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 162 06-02-2021 14:54

ఈ క్రింది రేఖాఖండం AF దాని పై గల బిందువుల మధ్య దూరాన్ని పరిశీలించండి.



AB = BC = CD = DE = EF = 1 cm

నిష్పత్తి – AD: DF = 3 : 2

ఈ క్రింది రేఖాఖండం LQ దాని పై గల బిందువుల మధ్య దూరాన్ని పరిశీలించండి.

LM = MN = NO = OP = PQ = 3cm

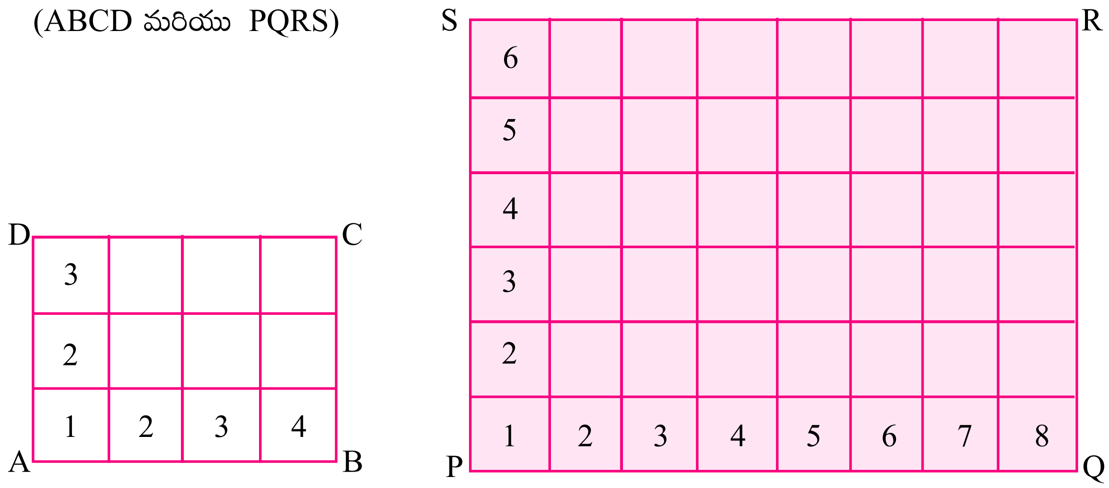
నిష్పత్తి – LO : OQ = 3 : 2

రేఖాఖండం AF పై గల బిందువుల మధ్య దూరం 1 సెం.మీ. మరియు రేఖా ఖండం LQ పై గల బిందువుల మధ్య దూరం 3 సెం.మీ. కాని AD : EF మరియు LO : OQ నిష్పత్తులు సమానంగా ఉన్నాయి.

రెండు రేఖా ఖండాల పై ఉన్న భాగాల నిష్పత్తులు సమానంగా ఉన్నాయి. అవి AD : EF మరియు LO : OQ అనుపాతంగా ఉన్నయి అని చెప్పవచ్చును.

ఈ క్రింది దీర్ఘచతురస్రాలను, పరిశీలించండి.

(ABCD మరియు PQRS)



దీర్ఘచతురస్రం ABCD, పొడవు AB = 4 యూనిట్లు మరియు వెడల్పు AD = 3 యూనిట్లు

దీర్ఘచతురస్రం ABCD, పొడవు మరియు వెడల్పుల నిష్పత్తి AB : CD = 4 : 3

దీర్ఘచతురస్రం PQRS, పొడవు PQ = 8 యూనిట్లు మరియు వెడల్పు PS = 6 యూనిట్లు

దీర్ఘచతురస్రం PQRS, పొడవు మరియు వెడల్పుల నిష్పత్తి PQ : RS = 8 : 6 = 4 : 3

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 163
06-02-2021 14:54

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{PQ}{PS}$ రెండు నిష్పత్తులు సమానంగా ఉన్నాయి.

$\therefore$ AB : AD = PQ : PS అనుపాతంగా ఉన్నాయి.

ఒక పాఠశాలలోని 100 విద్యార్థుల కోసం 15 కిలో గ్రాముల బియ్యాన్ని మధ్యాహ్న భోజనం కోసం వినియోగిస్తారు. మరొక పాఠశాలలో 40 విద్యార్థుల కోసం 6 కిలో గ్రాముల బియ్యాన్ని వినియోగిస్తారు. ఈ రెండు పాఠశాలలో ప్రతి విద్యార్థికి వినియోగించిన బియ్యాని గూర్చి చెప్పగలరా?

	వినియోగించిన బియ్యం	విద్యార్థుల సంఖ్య	నిష్పత్తి	సాధారణ నిష్పత్తి
మొదటి పాఠశాల	15	100	15:100	3:20
రెండవ పాఠశాల	6	40	6:40	3:20

మొదటి పాఠశాలలో వినియోగించిన బియ్యం మరియు విద్యార్థుల నిష్పత్తి = 15 : 100 = 3 : 20

రెండవ పాఠశాలలో వినియోగించిన బియ్యం మరియు విద్యార్థుల నిష్పత్తి = 6 : 40 = 3 : 20

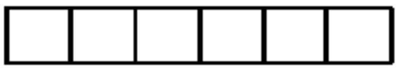
రెండు పాఠశాలలో వినియోగించిన బియ్యం మరియు విద్యార్థుల సాధారణ నిష్పత్తులు సమానంగా ఉన్నాయి. 15 : 100 = 6 : 40 అనుపాతంగా ఉన్నాయి.

ఏవేని రెండు వేరువేరు నిష్పత్తుల **a : b** మరియు **c : d** ల సాధారణ నిష్పత్తులు సమానంగా ఉన్నచో **a : b** నిష్పత్తి **c : d** కి అనుపాతంగా ఉన్నది అని చెప్పవచ్చును. **a : b :: c : d** సూచిస్తాము.

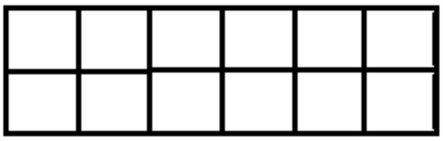
కృత్యం - 6

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి పటంలో సగం గడులను షేడ్ చెయ్యండి మరియు పూర్తి గడులకు షేడ్ చేసిన గడులకు గల నిష్పత్తిని పరిశీలించుము.

(i) షేడ్ చేయబడ్డ గడుల సంఖ్య = _________

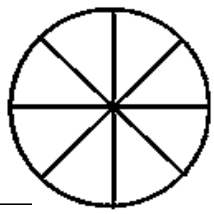


షేడ్ చేయబడ్డ గడుల మరియు మొత్తం గడుల నిష్పత్తి =_____



(ii) షేడ్ చేయబడ్డ గడుల సంఖ్య = ________

షేడ్ చేయబడ్డ గడుల మరియు మొత్తం గడుల నిష్పత్తి = _____



(iii) షేడ్ చేయబడ్డ సెక్టార్ల సంఖ్య = ___________

షేడ్ చేయబడ్డ సెక్టార్ల మరియు మొత్తం సెక్టార్ల నిష్పత్తి = ________________

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 164 06-02-2021 14:54

గమనిక : రెండు నిష్పత్తులు $a : b$ మరియు $c : d$ లు అనిపాతంగా ఉన్నచో అంత్యముల లబ్ధం మధ్యమాల లబ్ధమునకు సమానం $a \times d = b \times c$

$a : b :: c : d$ అనుపాతం అయితే $a \times d = b \times c$ అగును.

ఉదాహరణ - 8 : $a : 3 :: 4 : 6$ నిష్పత్తులు అనుపాతంగా ఉన్నచో a విలువ ఎంత?

సాధన : $a : 3 :: 4 : 6$ $\quad\quad$ ∵ అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యమాల లబ్ధము

$a \times 6 = 3 \times 4$

$a = \dfrac{3 \times 4}{6} = 2$

$\therefore a = 2$

కృత్యం - 7 : ఈ క్రింది గడులను పూరింపుము

పొడవు	4	8			36	44
వెడల్పు	3		15	21		

కృత్యం - 8 : ఇచ్చిన అనుపాతాల అధారంగా ఖాళీలను పూరింపుము

క్ర.సం.	అనుపాతాలు	అంత్యాల లబ్ధం	మధ్యాల లబ్ధం
1	2 : 3 4 : 6		
2	5 : 4 20 : 16		
3	25 : 1 75 : 3		

బహుళ నిష్పత్తి : కొన్ని సందర్భాలలో రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా చూపించవలసి వస్తుంది. అందులో రెండింటి పూర్వ పదాల లబ్ధం మరియు పర పదాల లబ్ధాన్ని నిష్పత్తిగా సూచించబడుతుంది.

$a : b,\ c : d = a \times c : b \times d$

ఒక వ్యాపారంలో A ఒక సంవత్సర కాలానికి రూ. 10, 000/- లను పెట్టుబడి పెడితే, B తొమ్మిది నెలల కాలానికి రూ. 15, 000/- లను పెట్టుబడిగా పెడితె, వారు ఏ నిష్పత్తిలో లాభాన్ని పంచుకోవాలి.

పెట్టుబడుల నిష్పత్తి = 10,000 : 15,000 = 2 : 3

పెట్టుబడి పెట్టిన కాలం యొక్క నిష్పత్తి = 12 : 9 = 4 : 3

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 165 06-02-2021 14:54

బహుళనిష్పత్తి = $2 : 3,\ 4 : 3 = 2 \times 4 : 3 \times 3 = 8 : 9$

వారు 8 : 9 నిష్పత్తిలో లాభాన్ని పంచుకోవ్వాలి.

అనులోమానుపాతము

ఒక నిష్పత్తినిలో పూర్వ పదం వృద్ధి చెందితే అదేవిధంగా పర పదం కూడా వృద్ధి చెందితే, అట్టి నిష్పత్తిలోని రెండు రాశులు అనులోమానుపాతాలు అని చెప్పవచ్చును. $a : b$ = స్థిరం లేదా $\frac{a}{b} = \text{K}$.

ఉదాహరణ - 9 : ఒక నల్లా 4 బకెట్ల నీళ్ళను 10 నిమిషాలలో నింపును మరి అదె నల్ల 6 బకెట్లలో నీళ్ళను ఎంత సేపటిలో నింపగలదు.

సాధన : బకెట్ల సంఖ్యకు మరియు నిండడానికి పట్టు సమయము యొక్క నిష్పత్తి = 4 : 10

సాధారణ నిష్పత్తి = 2 : 5

బకెట్ల సంఖ్య = 6

అవసరమైన సమయం = x నిమిషాలు

బకెట్ల సంఖ్యకు మరియు అవసమగు సమయము యొక్క నిష్పత్తి = $6 : x$

బకెట్ల సంఖ్య నీళ్ళ నింపు సమయం నిష్పత్తి అనులోమానుపాతముగా ఉన్నాయి

$\therefore 2 : 5 = 6 : x$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\therefore x = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

$\therefore$ 6 బకెట్లు నింపుటకు 15 నిమిషాలు అవసరం.

విలోమానుపాతము

ఒక నిష్పత్తిలోని రెండు రాశులలో ఒక రాశిలో పెరుగుదల రెండవ రాశిలో తగ్గుదల ఉండి అవి అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రాశులు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి అంటాము. అనగా $a : b$ నిష్పత్తిలో a మరియు b రాశులు విలోమానుపాతాలు అయితే వాటి లబ్ధం స్థిరం ఉంటుంది లేదా $a \times b = k$ స్థిరం

ఉదాహరణ - 10 : కృష్ 10 పెన్నులను ₹ 6/- చొప్పున కొన్నచో, షాపు యజమానికి ఎంత చెల్లించాలి? ఒక వేళ ఆ షాపు యజమాని ప్రతి పెన్నును ₹ 5/- కే అమ్ముతున్నట్లైతే, అద్దె పైకంకు కృష్‌కు ఎన్ని పెన్నులు వస్తాయి.

సాధన :

పెన్నుల సంఖ్య	పెన్నుల ధర	చెల్లింపు
10	6	$10 \times 6 = 60$
X	5	$\text{X} \times 5 = 60$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 166 06-02-2021 14:54

$$x \times 5 = 10 \times 6$$

$$x = \frac{10 \times 6}{5} = 12$$

ప్రతి పెన్నును ₹ 5/- చొప్పున అమ్మినట్లైతే కృష్‌కు 12 పెన్నులు వచ్చును.

ఉదాహరణ – 11 : ఒక పని చేయుటకు అవసరమైన మనుషులకు వారు పని చేయు రోజులు విలోమానుపాతాలు.

సాధన :

No. of Men	32	16	8	4	64
No. of work	8	16	32	64	4
	256	256	256	256	256

బహుళ అనుపాతాలు

ఉదాహరణ – 12 : ఇద్దరు దర్జీలు 6 చొక్కాలను 3 రోజులలో కుట్టగలిగితే, ఎంత మంది దర్జీలు 12 చొక్కాలను 4 రోజులలో కుట్టడాని అవసరం అవుతారు.

సాధన :

గమనిక : రెండుకన్నా ఎక్కువ రాశులు ఉన్నప్పుడు అనులోమానుపాతము లేదా విలోమానుపాతములో ఉండవచ్చు.

దర్జీల సంఖ్య మరియు చొక్కాల సంఖ్య అనులోమానుపాతాలు $\rightarrow \frac{\text{దర్జీల సంఖ్య}}{\text{చొక్కాల సంఖ్య}}$

చొక్కాల సంఖ్య మరియు పని దినాలు కూడా అనులోమానుపాతాలు? $\rightarrow \frac{\text{చొక్కాల సంఖ్య}}{\text{రోజుల సంఖ్య}}$

$$\rightarrow \frac{\text{దర్జీలు సంఖ్య}}{(\text{చొక్కాల సంఖ్య})/(\text{రోజుల సంఖ్య})} = \frac{\text{దర్జీల సంఖ్య} \times \text{రోజుల సంఖ్య}}{\text{చొక్కాల సంఖ్య}}$$

దర్జీల సంఖ్య	చొక్కాల సంఖ్య	రోజులు
2	6	3
X	12	4

$$\frac{2 \times 3}{6} = \frac{4 \times X}{12}$$

$$X = 3$$

12 చొక్కాలను 4 రోజులలో కుట్టుటకు ముగ్గురు (3) దర్జీలు అవసరం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 167 06-02-2021 14:54

3.1.3 నిష్పత్తి, అనుపాతం - అనువర్తనాలు

పని మరియు సమయం (కాలము)

ఒక కాలువను 10 మంది పనివారు 24 రోజులలో తవ్వగలిగితే, ఆ కాలువను 16 రోజులలో తవ్వుటకు ఎంత మంది పనివారు అవసరం?

పనివారి సంఖ్యా మరియు పని రోజులు ఒక దానికి మరొకటి విలోమానుపాతాలు.

ఆ కాలువను 16 రోజులలో తవ్వుటకు x మంది పనివారు అవసరం అనుకుందాం

$$\therefore x \times 16 = 10 \times 24$$

$$x = \frac{10 \times 24}{16} = 15$$

15 మంది పని వారు ఆ కాలువను 16 రోజులలో తవ్వగలరు.

కాలం, దూరం మరియు వేగం

మీ ఇంటి నుండి నీ పాఠశాల ఎంత దూరం, నీకు మీ ఇంటి నుండి పాఠశాలకు చేరుకోవడానికి ఎంత సమయం పడుతుంది. ప్రతి రోజూ ఒకే సమయానికే పాఠశాలకు చేరుకొగలిగెవాడివా? ఒకొక్క సారి ఆలస్యం ఎందుకు అయ్యేది?

ఒకొక్కసారి త్వరగా బయలు దేరినా పాఠశాలకు ఆలస్యంగా చేరుకోవడం, ఒకొక్క సారి ఆలస్యంగా బయలుదేరినా పాఠశాలకు ముందుగా చేరుకోవడం జరిగినదా? అది ఎందువల్లనో ఊహించగలరా?

ఇందుకు కారణం వేగం

$$\text{వేగం} = \frac{\text{దూరం}}{\text{కాలం}}$$

స్థిర వేగం ఉన్నప్పుడు, ప్రయాణ కాలం ప్రయణ దూరం అనులోమానుపాతంగా ఉంటాయి

జరా కారులో 120 కి.మీల దూరాన్ని 4 గంటలలో ప్రయాణించ గలిగితే, 90 కి.మీ.ల దూరాన్ని ఎన్ని గంటలలో ప్రయాణించగలదు

స్థిర వేగం ఉన్నప్పుడు $\frac{\text{దూరం}}{\text{కాలం}} = \frac{120}{4} = \frac{90}{t}$

't' విలువను కనుగొనుము?

ధర మరియు ఏకవస్తుమార్గం

ఉదాహరణ - 13 : ఒక కూరగాయల సంతలో, ఒక వర్తకుడు 5 కి.గ్రా. ల ఉల్లిపాయలను ₹ 40/- కు అమ్ముతున్నడు, అదే సంతలో మరో వర్తకుడు 6 కి.గ్రా. ల ఉల్లిపాయలను ₹ 42/- కు అమ్ముతున్నాడు. లక్కికి 3 కి.గ్రా. ల ఉల్లిపాయలు అవసరమైతే, ఎవరి వద్ద కొనవచ్చును?

సాధన : మొదటి వర్తకుడు 5 కి.గ్రా. ల ఉల్లిపాయలను ₹ 40/- కు అమ్ముతున్నడు,

$\therefore$ మొదటి వర్తకుని వద్ద ఒక కి.గ్రా. ఉల్లిపాయల ధర $= \frac{40}{5} = 8$

రెండవ వర్తకుడు 6 కి.గ్రా. ల ఉల్లిపాయలను ₹ 42/- కు అమ్ముతున్నాడు

రెండవ వర్తకుని వద్ద ఒక కి.గ్రా. ఉల్లిపాయల ధర $= \frac{42}{6} = 7$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 168
06-02-2021 14:54

కావున మొదటి వర్తకుడు 1 క్రి.గ్రా. ఉల్లిపాయలను ₹ 8/- లను అమ్ముతున్నాడు.

రెండవ బవర్తకుడు 1 క్రి.గ్రా. ఉల్లిపాయలను ₹ 7/- లను అమ్ముతున్నాడు.

$\because$ $8 > 7$

లక్ష్మీ రెండవ వ్యాపారి వద్ద కొనవచ్చును.

చెల్లించాల్సిన రూపాయలు = $3 \times 7 = 21$/-

మొదటగా ఒక రాశి విలువని కనుగొని తర్వాత కావలసిన రాశుల విలువను కనుగొనే పద్ధతినే ఏకవస్తు మార్గం అంటాం.

అభ్యాసము

1. రాణి 20 నిమిషాలలో తన ఇంటి నుండి పాఠశాలకు చేరుకుంటే ఈషా 25 నిమిషాలలో తన ఇంటి నుండి పాఠశాలకు చేరుకొగలదు, వారు పాఠశాలకు చేరుకునే సమయాన్ని నిష్పత్తి రూపంలో వ్యక్తపరచండి.
2. ఈ క్రింది వాటిని సాధారణ నిష్పత్తిలో చూపండి.
   (i) 5 : 10 (ii) 16 : 18 (iii) 14 : 21 (iv) 8 : 24
3. 40 మంది విద్యార్థుల తరగతిలో 24 మంది అబ్బాయిలు అయితే
   (i) ఆ తరగతిలోని అమ్మాయిలు మరియు అబ్బాయిల నిష్పత్తిని సూచించండి.
   (ii) ఆ తరగతిలోని అమ్మాయిలు మరియు మొత్తం విద్యార్థుల నిష్పత్తిని సూచించండి.
4. విశ్వనాథ్ తన వద్ద ఉన్న ఆపిల్ పండు నుండి 2/5 వ భాగాన్ని అమర్‌నాథ్‌కు ఇచ్చినచో, వారు ఆపిల్ పండుని పంచుకున్న నిష్పత్తిని తెలుపండి.
5. ఒక బుట్టలో డజను అరటి పండ్లు ఉన్నవి, వాటిని 1 : 3 నిష్పత్తిలో రీటా మరియు నీతుకు పంచినట్లైతే, రీటాకు ఎన్ని అరటి పండ్లు మరియు నీతుకు ఎన్ని అరటి పండ్లు వస్తాయో తెలుపండి?
6. ₹ 2400/- ను శ్యాం మరియు కల్యాణ్‌ల మధ్య 3 : 5 నిష్పత్తిలో విభజించి ఇచ్చినట్లైతే ఎవరికి ఎంత వచ్చునో చెప్పండి.
7. ₹ 7000/– సంపాదించే ఒక ఉద్యోగస్తుని అదాయము మరియు ఆదా చేయు సొమ్ము 10 : 3 నిష్పత్తిలో ఉన్నచో, అతడు ఆదా చేయు సొమ్ము ఎంత?

10. నాలుగు బిస్కేట్ ప్యాకేట్లు ₹ 40/- అయినచో, అట్టి 6 బిస్కేట్ ప్యాకెట్లు ఎంత చెల్లించాలి.
11. పల్లవి వద్ద 5 : 3 నిష్పత్తిలో నీలం మరియు పసుపు రంగు బంతులు ఉన్నవి.
    (i) పల్లవివద్ద 9 పసుపు రంగు బంతులు ఉంటే, ఎన్ని నీలం రంగు బంతులు ఉండే అవకాశం ఉంది.
    (ii) పల్లవివద్ద ఉన్న 24 బంతులలో ఎన్ని నీలం మరియు పసుపు రంగు బంతులు ఉన్నవో చెప్పగలరా?
12. ఒక డజను టెన్నిస్ బంత్తుల ధర ₹ 180/- అయితే, 5 టెన్నిస్ బంత్తుల కొనడానికి హరి ఎంత చెల్లించాలి?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 169 06-02-2021 14:54

13. ఈ క్రింది అనుపాతాల యొక్క అంత్యాల లబ్దాలు మరియు మధ్యాల లబ్దాలను కనుగొనండి.
   (i) 78 లీటర్లు : 130 లీటర్లు మరియు 12 బాటిళ్ళు : 20 బాటిళ్ళు
   (ii) 400 గ్రాములు : 50 గ్రాములు మరియు 496 రూపయలు : 62 రూపాయలు

14. ఒక క్విజ్ పోటిలో 10 : 11. నిష్పత్తిలో మంగ్లీ మరియు సాంబాలు సరైన జవాబులు ఇచ్చారు, ఒక వేళ ఇద్దరికి కలిపి 84 మార్కులు వచ్చినట్లైతే, ఎవరికి ఎన్ని మార్కులు వచ్చాయో చెప్పండి.

15. 180 మీటర్ల చాపను 15 మంది ఆడవారు 12 రోజులలో అల్లితే, 512 మీటర్ల చాపను 32 మంది ఆడవారు ఎన్ని రోజులలో అల్లగలరు?

16. ఒక సిమెంటు కర్మాగారములో, 12 రోజులలో 36 మంది పనివారు 700 సంచుల సిమెంటును ఉత్పత్తి చేయగలిగితే, 18 రోజులలో 24 మంది పనివారు ఎన్ని సంచుల సిమెంటును ఉత్పత్తి చేయగలరు?

17. ఒక కారు 16 లీటర్ల పెట్రొల్‌తో 240 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించ గలిగితే, ఆ కారు 25లీటర్ల పెట్రొల్‌తో 450 కిలోమీటర్లు ప్రయాణించగలదా?

18. ఒక విమానం, ఢిల్లీలో ఉదయం 9:00 గం.లకు బయలుదేరి 1200 కిలోమీటర్ల దూరంలో ఉన్న ముంబాయి నగరానికి అదే రోజు ఉదయం 11:00 గం.లకు చేరుకుంటే, మధ్యాహ్నం 12:00 గం.లకు ముంబాయిలో బయలుదేరిన ఆ విమానం 1500 కిలోమీటర్ల దూరాన ఉన్న కన్యాకుమారి పట్టణానికి ఎన్ని గంటలకు చేరుకుంతుంది.

ముఖ్యాంశాలు

- ఏవేని రెండు రాశులను, వాటి మధ్యన గల వ్యత్యాసం ద్వారా గాని భాగాహారం ద్వారా గాని పోల్చవచ్చును.
- రెండు రాశులలో, ఒకటి మరొక దానికి ఎన్ని రెట్లో పోల్చే ప్రక్రియనే నిష్పత్తి అంటాము.
- రెండు నిష్పత్తుల సూక్ష్మ నిష్పత్తులు సమానమైనచో ఆ నిష్పత్తులు ఒకదానికి మరొకటి అనుపాతంగా ఉన్నాయని లేదా అనుపాతాలు అనవచ్చును.
- ఏవేని రెండు నిష్పత్తుల అనుపాతంగా ఉంటే, వాటి అంత్యాల లబ్ధం మధ్యాల లబ్దానికి సమానం.
- రెండు నిష్పత్తులను గుణించినప్పుడు, పూర్వ పదాల లబ్దం మరియు పర పదాల లబ్ధాల నిష్పత్తిని బహుళ నిష్పత్తి అంటారు.
- ఒక నిష్పత్తిని పూర్వ పదం వృద్ధి చెందితే తత్ అనుగుణంగా పర పదం కూడా వృద్ధి చెందితే, అట్టి నిష్పత్తిలోని రెండు రాశులు అనులోమానుపాతాలు అని చెప్పవచ్చును.
- ఒక నిష్పత్తి లోని రెండు రాశులలొ ఒక రాశిలో పెరుగుదల రెండవ రాశిలో తగ్గుదల ఉండి అవి అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రాశులు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి అంటాము. అనగా **a:b** నిష్పత్తిలో **a** మరియు **b** రాశులు విలోమానుపాతాలు అయితే వాటి లబ్ధం స్థిరం ఉంటుంది
- కాలము మరియు పని ఒకదానిపై మరొకటి ఆధారపడి ఉంటాయి. $\text{వేగం} = \frac{\text{దూరం}}{\text{కాలం}}$
- మొదటగా ఒక రాశి విలువని కనుగొని తర్వాత కావలసిన రాశుల విలువను కనుగొనే పద్ధతినే ఏకవస్తు మార్గం అంటాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 170 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

3.2 శాతాలు మరియు లాభనష్టాలు

3.2.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- శాతాల గురించి నేర్చుకుంటారు.
- కొనుగోలు ధర, అమ్మకపు వెల, లాభ నష్టాలు మరియు వాటి శాతాల గురించి తెలుసుకుంటారు.
- ప్రకటన వెల, ప్రకటన వెల పై తగ్గింపు మరియు తగ్గింపు శాతం గూర్చి తెలుసుకుంటారు.
- రుణాలు, సాధారణ వడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ సమస్యలను సాధించగలుగుతారు.

3.2.1 శాతములు

మన నిత్యజీవితంలో కొన్ని కొన్నిసార్లు రాశులను శాతాల రూపంలో వ్యక్తపరుస్తాము. ఉదాహరణకు పరిక్షలలో వచ్చిన మొత్తం మార్కులను శాతరూపంలో వ్యక్తపరుస్తాము. మార్కులే కాకుండా లాభనష్టాలను, తగ్గింపులను, వడ్డీలను కూడా శాతరూపంలో వ్యక్తపరుస్తాము.

వాసుదేవ్‌కు వివిధ సబ్జెక్టులలో వచ్చిన మార్కులు ఈ క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

సబ్జెక్టు	మొత్తం మార్కులు	సాధించిన మార్కులు
తెలుగు	100	76
ఆంగ్లము	50	36
గణితము	75	66
సామాన్యశాస్త్రము	50	40

వాసుదేవ్‌కు ఏ సబ్జెక్టులో ఎక్కువ మార్కులు వచ్చినవి, తెలుగులో 100కు 76 మార్కులు వచ్చినందున తెలుగులో ఎక్కువ మార్కులు వచ్చినట్లుగా భావించవచ్చునా? నీవు ఏకీభవిస్తావా?

పట్టికలో అన్ని సబ్జెక్టుల మార్కుకు 100కు ఇవ్వబడలేదు. కావున ప్రతి సబ్జెక్టు యొక్క మార్కులను 100కు గుణిద్దాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 171 06-02-2021 14:54

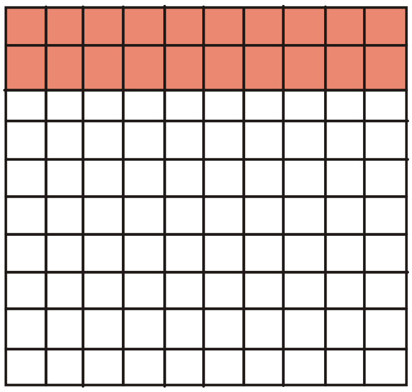
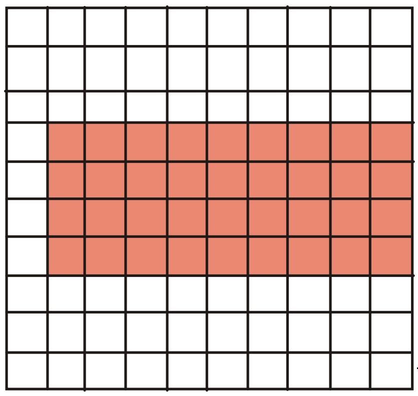
సబ్జెక్టు	మొత్తం మార్కులు	వచ్చిన మార్కులు	వందకు వచ్చిన మార్కులు	
తెలుగు	100	76	$\frac{76}{100} \times 100$	76
ఆంగ్లము	50	36	$\frac{36}{100} \times 100$	72
గణితం	75	66	$\frac{66}{75} \times 100$	88
సామాన్యశాస్త్రం	50	40	$\frac{40}{50} \times 100$	80

ఈ విధంగా 100 మార్కులకు గణించడం మూలంగా ఏ సబ్జెక్టులో ఎక్కువ వచ్చాయో ఖచ్చితంగా చెప్పవచ్చును.

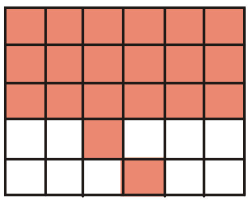
రాశుల యొక్క విలువను ప్రతి 100కు గణించడాన్ని శాతము అంటాము.

మీ కోసం

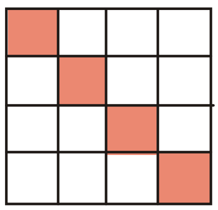
ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటాలలో 100 గడులున్నాయి. కొన్ని గడులు రంగుతో నింపబడినవి, రంగుతో నింపిన గడులకు మరియు మొత్తము గడులకు గల శాతాలను గుర్తించండి.

(i)  __:100 (ii)  _:100

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పటాలలో రంగు గడుల మరియు మొత్తం గడుల నిష్పత్తి మరియు శాతాలను తెల్పండి.

(a)  నిష్పత్తి =

శాతము =

b)  నిష్పత్తి =

శాతము =

భిన్నాలను శాత రూపములో వ్యక్తపరుచుట.

భిన్నాలను $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0.)$ రూపములో ఉంటాయని మనకు తెలుసు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 172 06-02-2021 14:54

ఇక్కడ p అనునది లవము మరియు q అనునది హారము అని అంటారు.

భిన్నములో సున్నా తప్పా ఇతర సంఖ్యలున్నప్పుడు కంటి హారములో 100 ఉన్నప్పుడు శాతాలను సులభంగా తెలుపవచ్చును.

భిన్నాలను, శాతాలుగా మార్చుటకు ప్రయత్నించుము.

ఉదాహరణ - 1 : ఈ క్రింది భిన్నాలను శాత రూపంలో వ్యక్తపరచుట.

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{19}{25}$

సాధన : (a) $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

(b) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 100 = 3 \times 25 = 75\%$

(c) $\frac{19}{25} = \frac{19}{25} \times 100 = 19 \times 4 = 76\%$

ఉదాహరణ - 2 : దశాంశాలను శాతరూపంలో వ్యక్తపరచుట

(a) 0.12 (b) 1.5

సాధన: (a) $0.12 = \frac{12}{100} = \frac{12}{100} \times 100 = 12\%$

(b) $1.5 = \frac{15}{10} = \frac{15}{10} \times 100 = 150\%$

ఉదాహరణ - 3 : శాతాలను దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరుచుట

(a) 35% (b) 67%

సాధన : (a) $35\% = \frac{35}{100} = 0.35$ (b) $67\% = \frac{67}{100} = 0.67$

ఉదాహరణ - 4 : శాతాలను భిన్న రూపంలో వ్యక్తపరుచుట

(a) 75% (b) 66%

సాధన : (a) $75\% = \frac{75}{100} = \frac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{100}_{4}} = \frac{3}{4}$

Ratio = 3 : 4

(b) $66\% = \frac{66}{100} = \frac{\cancel{66}^{33}}{\cancel{100}_{50}} = \frac{33}{50}$

Ratio = 33 : 50

ఉదాహరణ - 5 : 40లో 25% ఎంత

సాధన : 40లో 25 యొక్క శాతం $= \frac{25}{100} \times 40 = 10$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 173 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ - 6 : 60లో ఎంత శాతం 12 అగును?

సాధన : 60లో 12 యొక్క శాతం $= \frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

ఉదాహరణ - 7 : ఒక 50 విద్యార్థులు ఉన్న తరగతిలో 28 మంది బాలికలు, 22 మంది బాలురు ఉన్నారు. తరగతిలో బాలికల మరియు బాలుర శాతాన్ని తెల్పండి.

సాధన:

	సంఖ్య	భిన్నం	గణన	శాతము
బాలికలు	28	$\frac{28}{50}$	$\frac{28}{50} \times 100 = 56$	56%
బాలురు	22	$\frac{22}{50}$	$\frac{22}{50} \times 100 = 44$	44%
మొత్తం	50			

కృత్యం- 9 :

ఉదాహరణ అధారంగా ఖాళీలను పూరింపుము

క్ర.సం.	పూర్వ పదం	పర పదం	భిన్న రూపం	పదంతో పూర్వపదం యొక్క శాతం	దశాంశ రూపం
1.	16	40	$\frac{16}{40}$	$\frac{16}{40} \times 100 = 40\%$	0.40
2.	33	60	-	-	-
3.	-	72	-	50%	-
4.	18	-	-	36%	-

3.2.2 లాభ నష్టాలు

వ్యాపారము నందు ఒక వస్తువును అమ్మిన ధరను అమ్మిన వెల (SP) అని ఒక వస్తువును కొన్న ధరను కొన్న వెల (CP) అని అంటారు.

కొన్న వెల కంటే అమ్మిన వెల ఎక్కువగా ఉంటే లాభం వచ్చినట్లుగా లాభాన్ని P లేదా g తో సూచిస్తాము.

లాభము = అమ్మిన వెల - కొన్న వెల (అ.వె > కొ.వె)

కొన్న వెల కంటే అమ్మిన వెల తక్కువగా ఉంటే నష్టం వచ్చినట్లుగా నష్టాన్ని L తో సూచిస్తాము.

నష్టము = కొన్న వెల – అమ్మిన వెల (కొ.వె < అ.వె)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 174 06-02-2021 14:54

లాభము మరియు నష్టమును శాతాలలో తెల్పుట

$$\text{లాభ శాతం - } g\% = \frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \frac{(\text{అ.వె} - \text{కొ.వె})}{\text{కొ.వె}} \times 100$$

$$\text{నష్ట శాతం - } L\% = \frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \frac{(\text{కొ.వె} - \text{అ.వె})}{\text{కొ.వె}} \times 100$$

ఉదాహరణ – 8 : ఒక వర్తకుడు ₹ 1000/- లకు ఒక డ్రెస్సును కొని ₹1500/- లకు అమ్మినట్లైతే, అతనికి ఎంత లాభం వచ్చింది. ఆ లాభ శాతము ఎంత?

సాధన : ఒక వర్తకుడు నుండి డ్రెస్సును కొన్న వెల = ₹1000/-

ఒక వర్తకుడు నుండి డ్రెస్సును అమ్మిన వెల = ₹1500/-

అ.వె > కొ.వె

∴ లాభం = అ.వె – కొ.వె = 1500 – 1000 = 500

$$\therefore \text{ లాభ శాతం } = g\% = \frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100$$

$$= \frac{500}{1000} \times 100 = 50\%$$

ఉదాహరణ – 9 : Mr. బాబు ₹ 20,000/- లకు ఒక ఫ్రిజ్జ్ కొన్నాడు, కాని ట్రాన్స్ఫర్ మూలంగా ఆ ఫ్రిజ్జ్‌ను అమ్మదలచుకున్నాడు, అతడి స్నేహితుడు ఆ ఫ్రిజ్జ్‌కు ₹18,000/- ఇస్తే, బాబుకు లాభమా? నష్టమా? వివరించండి.

సాధన : ఫ్రిజ్జ్ కొన్న వెల = CP = రూ. 20,000/-

ఫ్రిజ్జ్ అమ్మిన వెల = SP = రూ. 18,000/-

SP < CP

∴ నష్టం = CP – SP = 20,000 – 18,000 = 2000

$$\text{నష్ట శాతం} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100$$

$$= \frac{2000}{20000} \times 100 = 10\%$$

నష్ట శాతం = 10%

కృత్యం - 10 : ఉదాహరణ అధారంగా ఈ క్రింది పట్టికను పూరింపుము

క్ర.సం.	కొన్న వెల	అమ్మిన వెల	లాభం/ నష్టం	శాతం
1.	₹150/-	₹ 162/-	లాభం = ₹ 12/-	$g\% = \frac{12}{150} \times 100 = 8\%$
2.	₹ 60/-	₹ 54/-	నష్టం = ₹ 6/-	$L\% = \frac{6}{60} \times 100 = 10\%$
3.	₹ 2000/-	₹ 2800/-	-	-
4.	₹ 10/-	₹ 8/-	-	-
5.	₹ 100		లాభం = ₹ 10/-	g% =
6.	₹ 30	లాభం = ₹ 5/-	-	g% = 20%
7.	₹ 500	-	-	L% = 10 %
8.	₹ 270	నష్టం = ₹30/-	-	-

ఉదాహరణ - 10 : పుచ్చకాయలను 10% నష్టానికి అమ్మినట్లు అయితే ప్రతి పుచ్చకాయ మీద ₹ 5/- నష్టం వస్తుంది. అప్పుడు ప్రతి పుచ్చకాయను ₹ 45/- లకు అమ్మే అవకాశం ఉందా?

సాధన : పుచ్చకాయను కొన్న వెల = CP

నష్ట శాతం = L% = 10%   నష్టం = ₹ 5/-

$$\text{కానీ, నష్ట శాతం} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100$$

$$\therefore \text{కొ.వె} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{నష్ట శాతం}} \times 100$$

$$= \frac{5}{10} \times 100 = 50$$

$\Rightarrow$ ప్రతి పుచ్చకాయను కొన్న వెల = ₹ 50/-

కావున పుచ్చకాయను ₹ 50 – 5 = ₹ 45/- కు అమ్మి అవకాశము లేదు.

ఉదాహరణ - 11 : కృష్ణా ₹ 4000/- లకు ఒక సైకిల్‌ను కొని 25% లాభానికి అమ్మినట్లు అయితే, అ సైకిల్‌ను నీవు కొనాలి అంటే కృష్ణాకు ఎంత చెల్లించాలి?

సాధన : కృష్ణా కొన్న వెల = 4000

లాభ శాతం = g% = 25%

కొన్న వెలపై లాభ శాతం $= \frac{g\%}{100} \times$ కొన్న వెల

$$= \frac{25}{100} \times 4000 = 1000$$

అమ్మిన వెల = కొన్న వెల + లాభం

$$= 4000 + 1000 = 5000$$

ఆ సైకిల్‌ను కొనుటకు ₹ 5000/- చెల్లించవలసి ఉంటుంది.

3.2.3 తగ్గింపు మరియు తగ్గింపు శాతం

కొన్ని కొన్ని సందర్భాలలో కొన్ని దుకాణాలు వాటి దగ్గర వస్తువుల యొక్క ధరలను తగ్గించి అమ్ముతున్నట్లుగా ప్రకటిస్తాయి, దానిని డిస్కౌంట్ అని లేదా తగ్గింపు అంటాము. తగ్గింపు అనేది ఆ వస్తువుపై పేర్కొనబడిన ప్రకటన వెలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. తగ్గింపు (d), ప్రకటనవెల (MP)తో సూచిస్తారు.

తగ్గింపు = d = ప్రకటన వెల – అమ్మిన వెల

తగ్గింపు శాతం $= d\% = \frac{\text{తగ్గింపు}}{\text{ప్రకటన వెల}} \times 100$

తగ్గింపు, ప్రకటన వెల మరియు అమ్మిన వెలపై సమస్యలను సాధించండి.

కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదాహరణ - 12 : ఒక దుకాణంలో ₹30/- ప్రకటన వెల గల సబ్బు - A పై 10% తగ్గింపును, ₹ 25/- ధరను ముద్రించిన సబ్బు - B పై 12% తగ్గింపును ఇస్తే, ఏ సబ్బుకు ఎంత చెల్లించాలో చెప్పండి?

సాధన : ప్రకటన వెల గల సబ్బు - A = రూ. 30

సబ్బు - A పై తగ్గింపు శాతం = 10%

సబ్బు - A పై తగ్గింపు = తగ్గింపు శాతం × ప్రకటన వెల

$$= \frac{10}{100} \times 30 = ₹\ 3$$

సబ్బు - A అమ్మకపు వెల = ప్రకటన వెల – తగ్గింపు

= 30 – 3 = ₹ 27

సబ్బు - B ప్రకటన వెల = ₹ 25

సబ్బు-B పై తగ్గింపు శాతం = 12%

సబ్బు - B తగ్గింపు $= \frac{12}{100} \times 25 = ₹\ 3$

సబ్బు- B యొక్క అమ్మకపు వెల = 25 – 3 = ₹ 22.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 177 06-02-2021 14:54

3.2.4 వస్తువు సేవా పన్ను (GST-Goods and Services Tax)

ప్రతి పౌరుడి నుండి ప్రభుత్వం వసులు చేసే పైకాన్ని పన్ను అంటాము. ఈ పన్నులను ప్రభుత్వం ప్రజల అవసరార్థం కోసం వినియోగిస్తుంది. ఉత్పత్తి కాబడ్డ వస్తువు యొక్క ధర పై కొంత శాతాన్ని పన్ను రూపేణ ప్రభుత్వాలు వసులు చేస్తాయి. అలానే కొన్ని రకాల సేవలపై కూడ పన్ను వసూలు చేయబడుతుంది.

ఈ విధంగా వస్తువు మరియు సేవలపై విధించే పన్నును GST అంటాము.

ఆదాయ పన్ను : ఒక వ్యక్తి లేదా సంస్థ యొక్క ఆదాయంపై విధించే పన్నును ఆదాయ పన్ను అంటాం.

వస్తువు మరియు సేవాలపై పన్ను (GST) : GST మూలంగా యావత్ భారత దేశం అంతా ఒకే పన్ను విధానం ఉంటుంది. ఇందులో కేంద్ర రాష్ట్రాలకు సమాన వాటా ఉంటుంది. ఇందులో పాలు, గుడ్లు మొదలగు వాటికి మిన్హాయింపు ఇచ్చారు. GST 5%, 12%, 18% మరియు 28% గా వివిధ వాటిపై వసులు చేస్తారు. GST (సెంట్రల్ గూడ్స్ అండ్ సర్వీస్ టాక్స్), SGST (స్టేట్ గూడ్స్ అండ్ సీర్వస్ టాక్స్) IGST(ఇంటిగ్రేడెట్ గూడ్స్ అండ్ సర్వీస్ టాక్స్) UTGST (యూనియన్ టెర్రొటెర్రీస్ గూడ్స్ అండ్ సర్వీస్ టాక్స్) – పెట్రోల్, డీజిల్ మొదలగునవి GST క్రిందికి రావు. వీటికి వే రకంగా పన్ను ఉంటుంది. GST కౌన్సిల్ 1300 రకాల వస్తువులపైన మరియు 500 రకాల సేవలపై పన్ను ఉంటుంది.

ఉదాహరణ – 13 : ఒక వాటర్ హీటర్ ధర ₹1000, దాని పై 18% GST ని వసూలు చేస్తే, మొత్తం ఎంత చెల్లించవలసి వస్తుంది.

సాధన : వాటర్ హీటర్ ధర = ₹ 1000

GST = 18%

$$\text{GST} = \frac{\text{GST\%}}{100} \times \text{MP}$$

$$= \frac{18}{100} \times 1000 = 180$$

అమ్మకపు వెల = మార్కెట్ ధర + GST

=1000 + 180

వాటర్ హీటర్ మొత్తం అమ్మకపు ధర = ₹ 1180.

ఉదాహరణ – 14 : ఒక కుటుంబము హోటలుకు వెళ్ళి ₹ 350 ఖర్చు పెట్టినారు మరియు 5% GST అదనముగా చెల్లించినారు. అయితే SGST మరియు CGST లను కనుగొనుము. (SGST మరియు CGST లు సమానము)

సాధన : కుటుంబము హోటల్ నందు చెల్లించిన రూపాయలు = ₹ 350

GST అదనము = 5%

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 178 06-02-2021 14:54

నోట్ : GST $= 50\%$ సెంట్రల్ GST + 50% స్టేట్ GST

$$= \frac{1}{2}\ \text{CGST} + \frac{1}{2}\ \text{SGST}$$

$\therefore$ 5% GST = 2.5% CGST + 2.5% SGST

$$\text{CGST} = \frac{2.5}{100} \times 350 = ₹\ 8.75$$

$$\text{SGST} = \frac{2.5}{100} \times 350 = ₹\ 8.75$$

అభ్యాసము

1. ఈ క్రింది భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చండి.

   (i) $\frac{1}{20}$ (ii) $\frac{13}{25}$ (iii) $\frac{27}{50}$ (iv) $\frac{18}{72}$

2. ఈ క్రింది శాతాలను భిన్నాలుగా మార్చండి.

   (i) 35% (ii) 70% (iii) 125% (iv) $30\frac{1}{5}\%$
   (v) 7.2% (vi) 90%

3. 40 కిలోగ్రాముల ఉల్లిపాయలు ఉన్న సంచిలో 10% ఉల్లిపాయలు కుళ్ళిపోతే, సంచిలో బాగున్న ఉల్లిపాయలు ఎన్ని కిలోగ్రాములో తెలపండి.

4. ఒక కంపెని 100 గ్రాముల సబ్బుకు 25% అదనంగా ఇస్తుంది. ఇప్పుడు ఆ సబ్బు యొక్క మొత్తం బరువు ఎంత?

5. 1.2 కి.గ్రా. ల కోడిని కోసి శుభ్రపరిస్తే 800 గ్రా. వృధా వస్తే, వృధా శాతం ఎంత?

6. 10వ తరగతిలో 12 : 13 నిష్పత్తిలో బాలురు మరియు బాలికలు ఉంటే, ఆ తరగతిలో బాలుర శాతం ఎంత?

7. రంజిత్ తను సంపాదించే ₹ 7,500 లలో 25% దాచుకుంటే, ఆయన దాచుకున్న సొమ్ము విలువ ఎంత?

8. ఒక తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులలో 14% మంది హాజరుకానట్లయితే, హాజరు అయిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

9. ఒక వ్యక్తి ₹ 1,20,000 పెట్టుబడి పెట్టి ₹ 1,50,000 పొందితే, ఆయనకు వచ్చిన లాభ శాతం ఎంత?

10. ఒక దుకాణదారుడు 20% లాభంతో లలితకు నీళ్ళ క్యాన్‌ను ₹ 300 కు అమ్మినట్లైతే, ఆ దుకాణదారుడు నీళ్ళ క్యాన్‌ను కొన్న వెల ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 179 06-02-2021 14:54

11. ఒక కూల్ డ్రింక్ కంపెని, దాని ఉత్పత్తులన్నింటిపై 10% తగ్గింపు ఇస్తుంది. ₹ 90 ధర కలిగిన కూల్ డ్రింకును కొన్నట్లయితే తగ్గింపు తీసివేయగా ఎంత చెల్లించాలి?

12. అమర్ ఆన్‌లైన్‌లో ₹ 500. విలువ గల హెడ్‌ఫోను తెప్పించుకునే ప్రయత్నం చేస్తాడు. ఆ హెడ్‌ఫోనుపై 18% GST కట్టవలసి వస్తే, అమర్ మొత్తం ఎంత చెల్లించాలి?

ముఖ్యాంశాలు

- రాశుల యొక్క విలువను ప్రతి 100కు గణించడాన్ని శాతము అంటాము.
- హారం 100 గా గల భిన్నాలను శాతాలుగా చూపవచ్చును.
- సూక్ష్మీకరణ ద్వారా శాతాలను కూడా భినాలు గా చూపవచ్చును
- ఒక వస్తువును కొనుగోలు చేసిన వెలను కొనుగోలు ధర/ వెల అంటారు. CP గా గుర్తిస్తారు.
- ఒక వస్తువును అమ్మే వెలను అమ్మకపు వేల అంటారు. SP గా గుర్తిస్తారు.
- అమ్మకపు వెల, కొన్న వెల కన్నా అధికం అయితే లాభం వచ్చినట్లుగా భావిస్తారు.
- లాభాన్ని P గా G గా గుర్తిస్తారు.
- లాభం = అమ్మకపు వెల – కొన్న వెల
- అమ్మకపువెల, కొన్నవెల కన్నా తక్కువ అయితే నష్టం వచ్చినట్లుగా భావిస్తారు. నష్టాన్ని L గా గుర్తిస్తారు.
- నష్టం = కొన్న వెల – అమ్మకపు వెల
- లాభం % $= \frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$
- నష్టం % $= \frac{\text{నష్టం}}{\text{అమ్మినవెల}} \times 100$
- వస్తువు పై ముద్రించిన లేక ప్రకటించిన వెలను ప్రకటన వెల అంటారు
- ప్రకటన వెల పై తగ్గించిన దానిని తగ్గింపు లేదా డిస్కౌంట్ అంటారు
- తగ్గింపు % = ప్రకటన వేల - అమ్మకపు వేల
- డిస్కౌంట్ $= \frac{\text{డిస్కౌంట్}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$
- తగ్గింపు $= \frac{\text{తగ్గింపు}}{\text{ప్రకటన వెల}} \times 100$
- అమ్మకపు వెల = ప్రకటన వెల - తగ్గింపు
- పరిపాలానార్థం ప్రభుత్వాలు ప్రజలనుండి సేకరించే ధనం/ పైకం ను పన్ను అంటాము
- వస్తు మరియూ సేవల పై విధించే పన్నును GST అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 180 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

3.3 సాధారణ వడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ

3.3.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- సాధారణ వడ్డీ భావనను అవగాహన చేసుకోగలరు.
- సాధారణ వడ్డీతో కూడిన సమస్యలు సాధించగలుగుతారు.
- సాధారణ వడ్డీ సహాయంతో అసలు, మొత్తములను లెక్కిస్తారు.
- చక్రవడ్డీ భావనను అవగాహన చేసుకుంటారు.

3.3.1 సాధారణ వడ్డీ

ఒకరి వద్దనుండి అవసరార్థం తీసుకున్న సొమ్మును అప్పు అంటాము. ఆ అప్పుకు వడ్డీ కట్టవలసి ఉంటుంది. వడ్డీ తీసుకున్న అసలు మరియు తిరిగి చెల్లించే కాలం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. తీసుకున్న అసలుకు ప్రతి 100/– లకు నెలకు/ సంవత్సరానికి అధికంగా చెల్లించవలసిన దానిని వడ్డీ శాతం అంటాము.

అసలుని P తో సూచిస్తాము.

వడ్డీని I తో సూచిస్తాము.

సాధారణ వడ్డీని SI తో సూచిస్తాము.

వడ్డీ శాతాన్ని R తో సూచిస్తాము.

ఒక వ్యక్తి రూ. 100/- అప్పును 3 సంవత్సరాల కాలానికి 5% వడ్డీకి తీసుకున్నచో

అసలు = రూ. 1000/-, వడ్డీ శాతం = 5% సమయం = 3 సంవత్సరాలు.

మొదటి సంవత్సరానికి కట్టవలసిన వడ్డీ $= 1000 \times \frac{5}{100} =$ ₹ 50

రెండవ సంవత్సరానికి కట్టవలసిన వడ్డీ $= 1000 \times \frac{5}{100} =$ ₹ 50

మూడవ సంవత్సరానికి కట్టవలసిన వడ్డీ $= 1000 \times \frac{5}{100} = 50$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 181 06-02-2021 14:54

మొత్తం మూడవ సంవత్సరానికి కట్టవలసిన వడ్డీ $= 50 + 50 + 50 = 3 \times 50$

$$= 1000 \times 3 \times \frac{5}{100}$$

అసలు ₹ 1000, వడ్డీ శాతము = 5% కాలము = 3సం॥లు

సాధారణ వడ్డీ = అసలు × కాలం × వడ్డీ శాతము

$$SI = P \times T \times \frac{R}{100}$$

$$SI = \frac{PTR}{100}$$

అసలు మరియు వడ్డీ కలిపి మొత్తంగా పరిగణిస్తాము. (మొత్తాన్ని 'A' తో సూచిస్తాము)

మొత్తము = అసలు + వడ్డీ

$$A = P + \frac{PTR}{100} \text{ or}$$

$$A = P\left[1+\frac{TR}{100}\right] = P\left[\frac{100+TR}{100}\right]$$

3.3.2 చక్రవడ్డీ

కొన్ని సందర్భాలలో వడ్డీపై వడ్డీని గణించడం జరుగుతుంది, దానిని చక్రవడ్డీ అంటాము. CI

ఒక వ్యక్తి 10% వడ్డీకి 1000/- అప్పు తీసుకున్నట్లయితే,

మొదటి సంవత్సరానికి కట్టవలసిన మొత్తం = అసలు + సాధారణ వడ్డీ

కాలము T = 1 సంవత్సరం వడ్డీ శాతం R = 10%

$$A_1 = 1000 + \frac{1000 \times 1 \times 10}{100}$$

$$= 1000 + 100$$

$A_1 = 1100$ (మొదటి సంవత్సరానికి కట్టవలసిన మొత్తం)

మొదటి సంవత్సర మొత్తం A_1 రెండవ సంవత్సరానికి అసలు అవుతుంది.

కాలము T = 1 సంవత్సరం వడ్డీ శాతం R = 10%

$$A_2 = 1100 + \frac{1000 \times 1 \times 10}{100}$$

$$A_2 = 1100 + 110$$

$A_2 = 1210$ (రెండవ సంవత్సరానికి కట్టవలసిన మొత్తం)

మూడవ సంవత్సరానికి అసలు $= A_2$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 182 06-02-2021 14:54

$$A_3 = 1210 + \frac{1210 \times 1 \times 10}{100}$$

$$A_3 = 1210 + 121$$

$A_3 = 1331$(మూడవ సంవత్సరానికి కట్టవలసిన మొత్తం)

ఈ విధంగా గుణీస్తే

$$A_1 = 1100 = 1000 \times \frac{110}{100} = 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)$$

$$= 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$A_2 = 1210 = 10 \times 121 = 10 \times 11 \times 11 = 1000 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

$$= 1000 \times \left(\frac{110}{100}\right)^2 = 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)^2 = 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$A_3 = 1331 = 11 \times 11 \times 11 = 1000 \times \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = 1000 \times \left(\frac{110}{100}\right)^3$$

$$= 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)^3 = 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

తద్వారా చక్రవడ్డీతో కలిపి మొత్తాన్ని కనుగొనే సూత్రం ఈ విధంగా వచ్చును.

$$A = P \times \left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

గమనిక : చక్రవడ్డీ సూత్రం వాయిదాల సంఖ్యపై అధారపడి ఉంటుంది, వాయిదా కాలము ఒక సంవత్సరము, అర్థ సంవత్సరము, మూడు నెలలు లేదా రెండు సంవత్సరాలుగా కూడా ఉండవచ్చును.

Where ‘n’ = number of terms.

If the Rate of interest is calculated yearly for ‘t” years, then $n = t$

If the Rate of interest is calculated half yearly for ‘t” years, then $n = 2t$

If the Rate of interest is calculated quarterly for ‘t” years, then $n = 4t$

If the Rate of interest is calculated biannually for ‘t” years, then $n = \frac{t}{2}$

$\therefore$ To calculate only the compound interest cumulated on a certain principle is

$$CI = A - P$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 183 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ - 1 : మహేష్‌కు 8% వడ్డీకి బద్రి ₹ 25,000 అప్పు ఇచ్చినచో, నాలుగు సంవత్సరాల తరువాత మహేష్ ఎంత చెల్లించవలసి ఉంటుంది.

సాధన : Principle lend by Badri to Mahesh = P = 25000

కాలం(సంవత్సరం) = T = 4

సంవత్సరానికి వడ్డీ శాతం = R% = 8%

సాధారణ వడ్డీ $SI = \frac{PTR}{100} = \frac{25000 \times 4 \times 8}{100} = 250 \times 4 \times 8 = 8000$

మహేష్ చెల్లించ వలసిన మొత్తం = A = అసలు + సాధారణ వడ్డీ

= 25000 +8000

A = ₹ 33,000

ఉదాహరణ - 2 : ₹ 6000 అసలు పై 2 సంవత్సరాలకు ₹ 1200 సాధారణ వడ్డీ వచ్చినట్లు అయితే, వడ్డీ శాతం ఎంత?

సాధన : P = 6000 SI = 1200

కాలం T = 2 R% = ?

$$SI = \frac{PTR}{100}$$

$$1200 = \frac{6000 \times 2 \times R}{100}$$

$$1200 \times \frac{100}{6000 \times 2} = R$$

$$R = 1200 \times \frac{100}{6000 \times 2} = 10\%$$

∴ సంవత్సరానికి వడ్డీ శాతం = 10%.

కృత్యం 1 : ఈ పట్టికలోని ఖాళీలను పూరింపుము

క్ర.సం.	అసలు	వడ్డీ శాతం	మొదటి సం॥రానికి వడ్డీ	రెండవ సం॥రాలకి వడ్డీ	మూడవ సం॥రాలకి వడ్డీ	నాలుగవ సం॥రాలకి వడ్డీ
1.	1000/-	5%	50/-	100/-	150/-	200/-
2.	2000/-	4%				
3.	750	10%				
4.	20000	$2\frac{1}{2}\%$				

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 184 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ – 3 : యాదగిరి ₹1,40,000 మల్లయ్య వద్ద అప్పుగా తీసుకున్నాడు. 5 సంవత్సరాల తర్వాత 7% వడ్డీ రేటుతో యాదగిరి ఎంత చెల్లించవలసి ఉంటుంది.

సాధన : P = 1,40,000 T = 5 R = 7

$$A = P\left[\frac{100+TR}{100}\right] = 1,40,000 \times \left[\frac{100+5\times 7}{100}\right]$$

$$A = 140000 \times \frac{135}{100} = 1400 \times 135 = 1,89,000/-$$

యాదగిరి ₹1,89,000 మల్లయ్యకు చెల్లించాలి.

కృత్యం 2 : ఈ పట్టికను పూరింపుము

క్ర.సం.	అసలు (P)	కాలం (T)	వడ్డీ శాతం (R)	సాధారణ వడ్డీ S.I.	మొత్తం (A)
1.	100/-	2	9%	18/-	118/-
2.	2500	6	7%		
3.	5000/-		10%	1500	
4.		5	6%	1200	
5.	7000	2		1120	

ఉదాహరణ – 4 : ఒక ఫైనాన్స్ కంపెనీ నుండి హరి ₹ 1,00,000/- అప్పు 10% చక్రవడ్డీకి తీసుకొనెను. రెండు సంవత్సరాల తరువాత హరి ఫైనాన్స్ కంపెనీకి ఎంత కట్టవలసి ఉంటుంది?

సాధన : అసలు మొత్తం = P = 1,00,000/-

సంవత్సరానికి వడ్డీ = R = 10%

కాలం = 2 సంవత్సరాలు

వాయిదాల సంఖ్య = n = 2 ($\because$ చక్రవడ్డీ సంవత్సరానికి గణించబడును)

$$\text{మొత్తం} = A = P \times \left[\frac{100+R}{100}\right]^n = 1,00,000 \times \left[\frac{100+10}{100}\right]^2$$

$$= 1,00,000 \times \left[\frac{110}{100}\right]^2 = 1,00,000 \times \left[\frac{110}{100}\right] \times \left[\frac{110}{100}\right]$$

$$= 1,00,000 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

$$A = 1000 \times 11 \times 11 = 1,21,000$$

రెండు సంవత్సరాల తరువాత హరి చెల్లించవలసిన మొత్తం = 1,21,000/-

చక్ర వడ్డీ = CI = A – P = 1,21,000 – 1,00,000 = 21,000/-

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 185 06-02-2021 14:54

అభ్యాసము

1. రెండు సంవత్సరాలకు 9% వడ్డీతో ₹ 50,000 అప్పుపై సాధారణ వడ్డీ ఎంతో గణించండి.
2. జోసెఫ్ కిరణ్ నుండి ₹ 8,000 అప్పు 5% వడ్డీకి తీసుకొనెను. రెండు సంవత్సరాల తరువాత జోసెఫ్ కిరణ్‌కు చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?
3. రాం తను తీసుకున్న అప్పుపై 9.5% వడ్డీతో 4 సంవత్సరాలకు ₹ 21,280 సాధారణ వడ్డీ కడితే రాం తీసుకున్న అసలు ఎంత?
4. ఎంత కాలానికి ₹ 16,500 అప్పు 13% వడ్డీతో మొత్తం ₹ 22,935 అవుతుంది?
5. ఫసి, తను తీసుకున్న ₹ 48,000 అప్పు 2 సంవత్సరాల మూడు నెలల కాలానికి ₹55,560 మొత్తాన్ని కడితే, ఫసి కట్టిన వడ్డీ శాతం ఎంత?
6. మూడు సంవత్సరాల కాలానికి 12% వడ్డీకి మొత్తం ₹ 17,000 కట్టినట్లయితే, తీసుకున్న అసలు ఎంత?
7. ఒక వారస్తునికి పద్మ ₹ 40,000 అప్పును 10% చక్రవడ్డీకి 2 సంవత్సరాల కాలానికి ఇస్తే, ఆమెకు రావలసిన మొత్తం ఎంత?
8. ఒక ఫైనాన్స్ కంపెనీ అర్ధ సంవత్సరానికి 6% చక్రవడ్డీ ఇస్తుంది. ఒకవేళ 1 అక్టోబర్ 2020 న ₹ 6000 అందులో వెచ్చించినట్లు అయితే, 1 ఏప్రిల్ 2022 నాటికి ఎంత వస్తుంది?

ముఖ్యాంశాలు

- అప్పుగా తీసుకున్న పైకమును అసలు అందురు.
- తీసుకున్న అసలు అప్పుపై అధికముగా చెల్లించ వలసిన పైకమును వడ్డీ అందురు
- వడ్డీ, తీసుకున్న అసలు మరియు సమయం పై అధారపడును
- ప్రతి ₹100 లకు ఒక సంవత్సరం కాలానికి అధికంగా చెల్లించవలసిన వడ్డీని శాతం అంటారు R.
- అప్పు తీసుకున్న కాలం T
- సాదారణ వడ్డీని SI గా గుర్తిస్తారు.
- సాదారణ వడ్డీ $S.I. = \frac{PTR}{100}$
- అసలు మరియు వడ్డిని కలుపుకుని మొత్తం అప్పుగా పరిగణిస్తారు, మొత్తాన్ని A గా గుర్తిస్తారు.
- మొత్తం $= P + SI$
- తీసుకున్న అప్పుకు వడ్డీపై వడ్డిని గణించే విధానాన్ని చక్రవడ్డి అంటారు. చక్రవడ్డిని CI గా గుర్తిస్తారు.
- చక్రవడ్డి ప్రకారం వాయిదాలు సంవత్సరం లేదా అర్ధ సంవత్సరం లేదా రెండు సంవత్సరకాల వ్యవధి కలిగి ఉంటాయి. $A = P\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 186 06-02-2021 14:54

యూనిట్ 4 రేఖాగణితం

అధ్యాయం

4.1 ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు

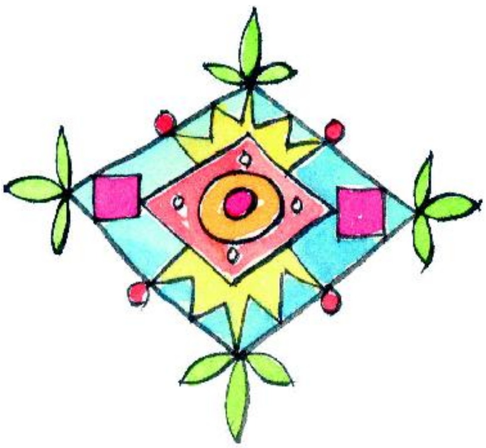
4.1.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలైన బిందువు, రేఖాఖండము, సరళరేఖ, తలము, కిరణము మరియు కోణాల గురించి తెలుసుకుంటారు.
- విద్యార్థులు పరిసరాల నుండి ప్రాథమిక జ్యామితీయ ఆకారాలకు ఉదాహరణలు ఇవ్వగల్గుతారు.
- విద్యార్థులు ప్రాథమిక జ్యామితీయ ఆకారాలను పటరూపంలో గీయగల్గుతారు.
- విద్యార్థులు కోణాలను వర్గీకరించగలరు, పోల్చగల్గుతారు
- విద్యార్థులు ఇచ్చిన రేఖలను సమాంతర రేఖలు, ఖండన రేఖలు మరియు లంబ రేఖలుగా విభజించగలరు.
- విద్యార్థులు రేఖాఖండాలను, రేఖలను మరియు కిరణాలను వర్గీకరించగలరు.

4.1.1 పరిచయం

మన ఇళ్ళ, ముందు వేసే ముగ్గులను మీరెప్పుడైన నిశితంగా పరిశీలించారా ? చేతులపై మనం వేసుకునే గోరింటాకు ఆకృతులను జాగ్రత్తగా గమనించారా ?



"అన్ని వస్తువుల ఆకృతులు వివిధ రకాలయిన జ్యామితీయ ఆకారాలతో తయారు చేయబడి ఉంటాయి".

మన ఇళ్ళల్లో కనిపించే టెలివిజన్, అగ్గిపెట్టె, నీరు తాగే గ్లాసు, పౌడరు డబ్బా, బంతి మొదలగువన్నీ కూడా వివిధ రకాల జ్యామితీయ ఆకారాలు.

జ్యామితీయ ఆకారాలు, జ్యామితి గురించి ఇంకా వివరంగా ఈ అధ్యాయములో తెలుసుకుందాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 187 06-02-2021 14:54

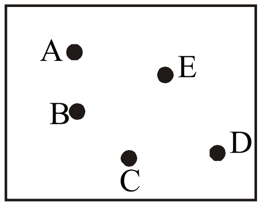
4.1.2 ప్రాథమిక జ్యామితీయ ఆకారాలు

ఒక పెన్సిల్‌తో కాగితంపై చుక్కను పెట్టండి.

అలాంటి చిన్న చుక్క బిందువును సూచిస్తుంది.

"బిందువు అనునది ఒక స్థానాన్ని సూచిస్తుంది".

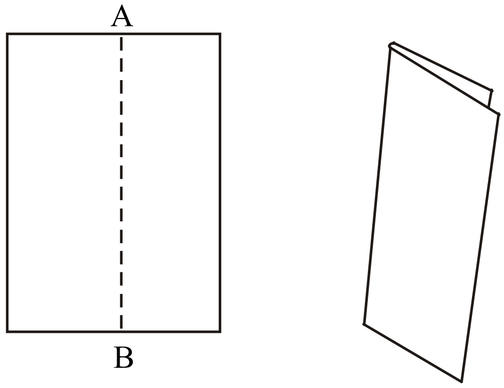
బిందువును ఆంగ్ల భాషలోని పెద్ద అక్షరంతో సూచిస్తారు.



రేఖాఖండము (Line Segment)

ఒక కాగితమును తీసుకొని ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా మడవండి. ఈ కాగితపు మడత ఒక రేఖాఖండ భావనను తెలుపుతుంది.

ఈ రేఖాఖండం రెండు చివరి బిందువులను కలిగి ఉంటుంది.



దీనిని $\overline{AB}$ లేదా $\overline{BA}$ తో సూచిస్తారు.

సరళరేఖ (Line)

AB రేఖాఖండాన్ని రెండు చివరి బిందువుల గుండా A వైపు మరియు B వైపు అనంతముగా అదే దిశలో పొడిగిస్తే, అది సరళరేఖను సూచిస్తుంది.

సరళరేఖ ABను, $\overleftrightarrow{AB}$ గా వ్రాయవచ్చు. అదేవిధంగా l, m, n, ... మొదలగు చిన్న అక్షరాలతో కూడా సూచించవచ్చు. సరళరేఖకు చివరి బిందువు ఉండవు దీనినే రేఖ అని కూడా అంటారు.

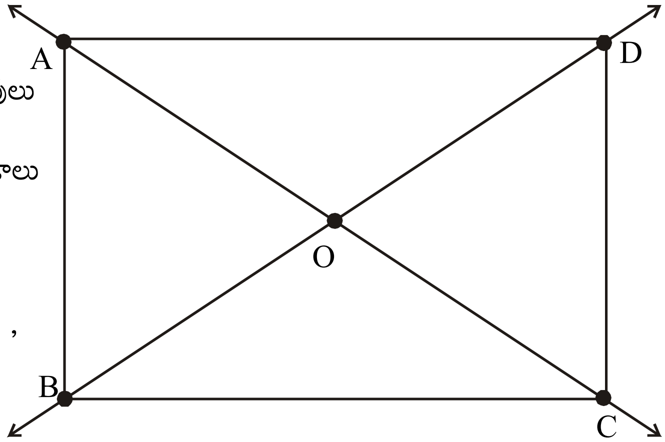
కిరణము (Ray)

సూర్యని నుంచి, కాంతి నుంచి వచ్చేవి కిరణాలు. కిరణము తొలిబిందువు నుంచి బయలదేరి అనంతంగా నిర్దేశిత దిశలో సాగుతూ పోతుంది. కిరణానికి ఒకే ఒక చివరి బిందువు ఉంటుంది. పటంలో

AB కిరణము $\overrightarrow{AB}$, AC కిరణము $\overrightarrow{AC}$ గా వ్రాయవచ్చు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 188 06-02-2021 14:54

కృత్యము - 1



పటం నుంచి **A, B, C, D, O** బిందువులు

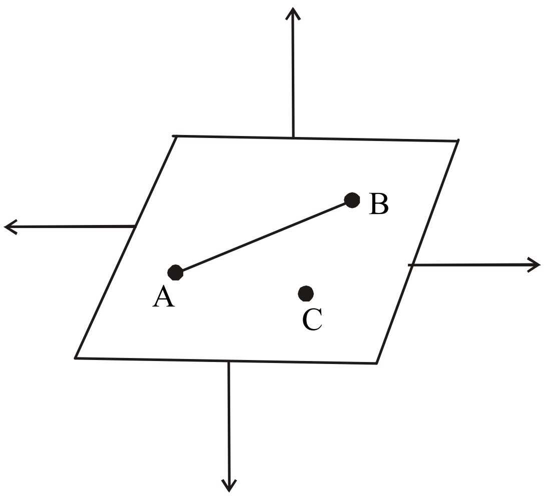
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ రేఖా ఖండాలు

$\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ లు సరళరేఖలు.

మరియు కిరణాలు $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ లు అవుతాయి.

తలము (Plane)

ఒక చదునైన ఉపరితలాన్ని తలము అనవచ్చు. పటంలో చూపిన విధంగా తలం అంచులను విస్తరించవచ్చు. చదునైన బల్ల, బ్లాక్‌బోర్డ్, మరియు గోడ అనునది తలమునకు ఉదాహరణ.



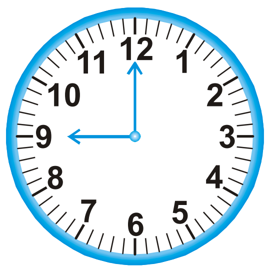
అదేవిధంగా A, B బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము $\overline{AB}$ అదే తలంలోనే ఉండవలెను.

ఒక తలాన్ని సరేఖీయాలు కాని ఏవైనా మూడు బిందువులచే సూచిస్తాయి. లేదా గ్రీకు అక్షరాలైన α(ఆల్ఫా), β(బీటా), γ(గామా) లతో సూచిస్తారు.

పై తలాన్ని ABC తలము అని చెప్పవచ్చు.

కోణము (Angle)

ఒక గోడ గడియారంలోని ముల్లులను గమనించండి. ఆ రెండు ముల్లుల మధ్య కోణం ఏర్పడుతుంది.



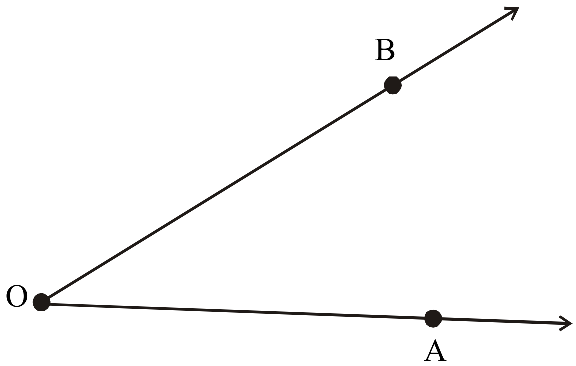
కోణము అంటే ఏమిటి?

ఒకే ఉమ్మడి బిందువును కలిగిన రెండు కిరణాల సమ్మేళనాన్ని కోణము అంటారు.

రెండు కిరణాలు ఒక కోణాన్ని ఏర్పరుస్తున్నాయి. ఆకిరణాలను ఆ కోణము యొక్క భుజాలు అని ఉమ్మడి బిందువును కోణ శీర్షం అని అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 189
06-02-2021 14:54

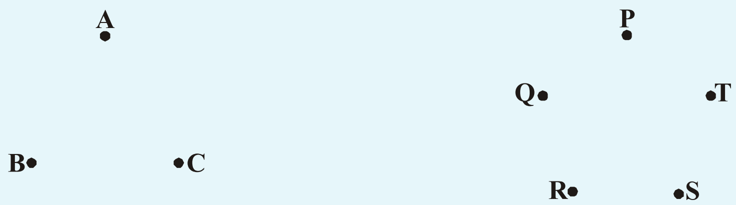
ప్రక్క పటంలో $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ కిరణాలను కోణము యొక్క భుజాలు అని 'O' ను శీర్షము అని అంటారు.



'O' వద్ద కోణము ఏర్పడింది. కాబట్టి దానిని AOB కోణము లేదా కోణం BOA తో సూచిస్తారు. దానిని మనం $\angle AOB$ లేదా $\angle BOA$ లేదా $\angle O$ గా సూచిస్తాము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి

1. క్రింది బిందువులను కలపండి. పటంలో ఏర్పడిన రేఖాఖండాలను పేర్లతో సూచించండి.



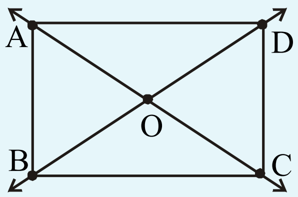
2. ప్రక్క చిత్రాన్ని చూసి క్రిందివాటిని వ్రాయండి.

   i) ఏవైని ఐదు బిందువులు

   ii) ఏవైనా ఐదు రేఖాఖండాలు

   iii) ఏవైనా మూడు కిరణాలు

   iv) ఏవైనా రెండు రేఖలు.



3. కింద ఇచ్చిన బిందువుల గుండా ఎన్ని రేఖలను గీయవచ్చో తెలిపి దానికి సరిపోయే చిత్తుపటము గీయండి.

   i) ఒక బిందువు ii) రెండు విభిన్న బిందువులు

4. కిందివాటిలో ఏవి నిర్ధిష్టమయిన పొడవును కలిగి వుంటాయి?

   i) రేఖ ii) బిందువు iii) రేఖాఖండము iv) కిరణము

5. కింద ఇవ్వబడిన వాటికి చివరి బిందువులు ఎన్ని వుంటాయి?

   i) రేఖాఖండము ii) కిరణము iii) రేఖ

7. పటాన్ని గీసి పేరుతో సూచించండి.

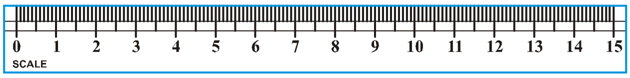
   i) P బిందువును కలిగి ఉన్న రేఖ

   ii) R బిందువు గుండా పోయే రేఖ.

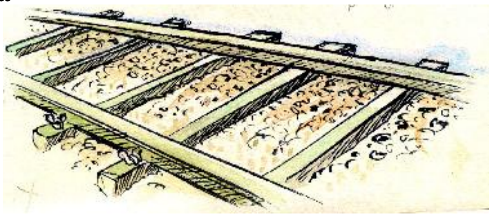
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 190 06-02-2021 14:54

4.1.3 సమాంతర రేఖలు (Parallel Lines)

స్కేలు యొక్క అంచులు లేదా రైలు పట్టాలు గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.



స్కేలు

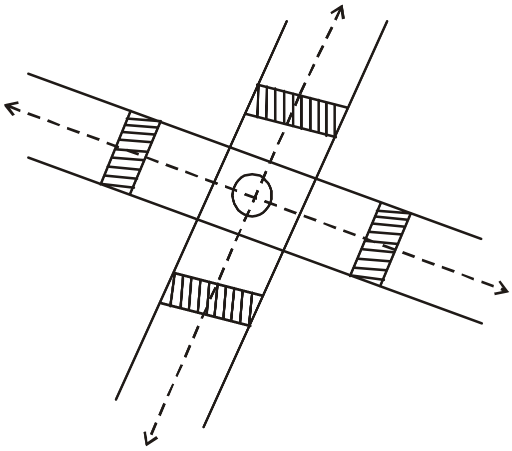


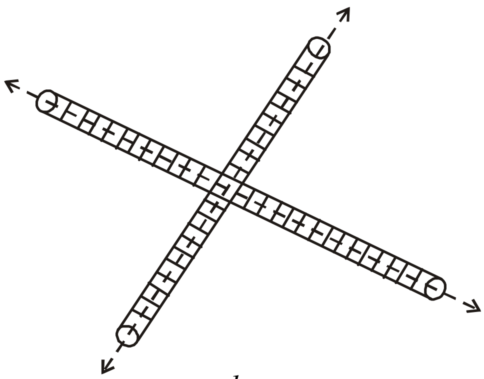
రైలు పట్టాలు

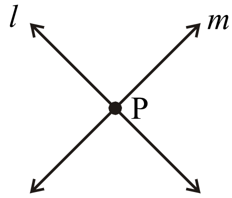
ఒకే తలానికి చెందిన రెండు పరస్పరం ఖండించుకొనని రేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటారు.

పటంలో l , m లు సమాంతర రేఖలు. వీటిని $\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}$ గా వ్రాసి $\boldsymbol{l}$ సమాంతరము $\boldsymbol{m}$ అని చదువుతాము.

ఖండన రేఖలు (Intersecting Lines)

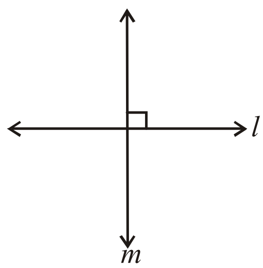






రెండు వేరు వేరు రేఖలు $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ అనునవి P అను బిందువు వద్ద కలుసుకుంటే వాటిని ఖండన రేఖలు అంటారు రెండు ఖండన రేఖలకు ఒకే ఉమ్మడి బిందువు ఉంటుంది.

ఖండన రేఖలు లంబకోణాలను ఏర్పరిస్తే వాటిని లంబరేఖలు అని అంటాము.

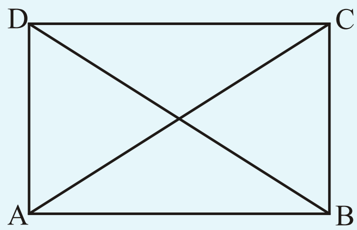


రెండు రేఖలు 90^0ల కోణంలో ఖండించుకుంటే వాటిని పరస్పరం లంబరేఖలు అంటాము.

వీటిని $\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{m}$ అని సూచిస్తాము. $\boldsymbol{l}$ అనునది m రేఖకు లంబంగా ఉంది అంటాము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి

1. నిత్యజీవితంలో ఖండన రేఖలకు, సమాంతర రేఖలకు రెండు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
2. పటంలో ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం, అయితే (i) సమాంతర రేఖలు, (ii) లంబరేఖలు (iii) ఖండన రేఖలు జతలను వ్రాయండి.



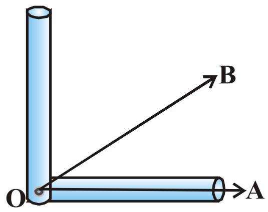
4.1.4 కోణాల రకాలు (Types of angles)

కృత్యము

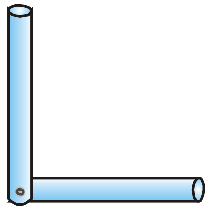
రెండు స్ట్రాలు తీసుకోండి.

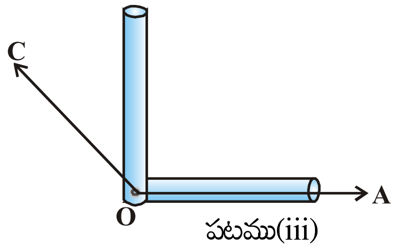
పటము(i) ఒక స్ట్రా యొక్క చివరను మరొక స్ట్రా యొక్క చివరపై 'L' ఆకారంలో ఉంచి ఒక గుండి సూదిని గుచ్చాలి. ఇది లంబకోణము.

పటము(ii) $\angle AOB$ లంబకోణం కంటే తక్కువగా ఉంది. కాబట్టి పటం (iii)లో చూపించిన విధంగా వంచితే $\angle AOC$ లంబ కోణం కంటే ఎక్కువగా ఉంది కాబట్టి ఇది అధిక కోణము.



పటము(ii)


పటము(i)



పటము(iii)

పట్టిక

కోణము	కోణం కొలత
శూన్య కోణం	0^0
లంబకోణం	90^0
సరళ కోణం	180^0
సంపూర్ణ కోణం	360^0
అల్పకోణం	$0^0 - 90^0$ మధ్య గల కోణము
అధిక కోణం	$90^0 - 180^0$ మధ్య గల కోణము
పర్యావర్తన కోణం	$180^0 - 360^0$ మధ్య గల కోణము

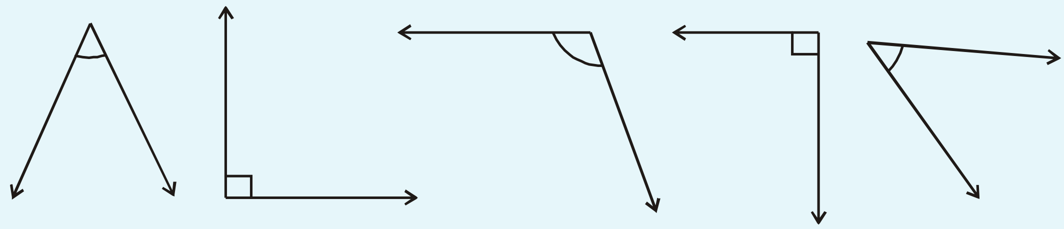
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది వానిలో అల్ప, అధిక, లంబ, సరళ మరియు పరావర్తన కోణాలు గుర్తించి వ్రాయండి.

i) 65^0 ii) 109^0 iii) 90^0 iv) 125^0
v) 270^0 vi) 180^0

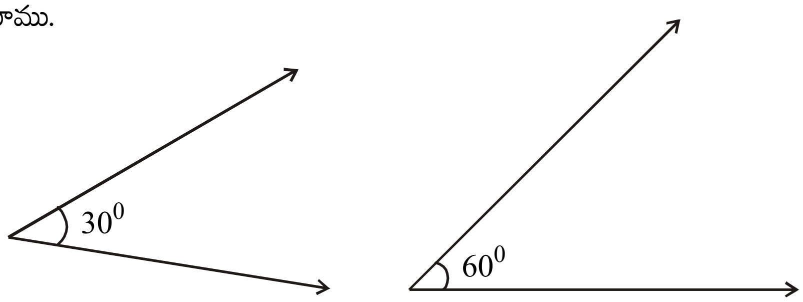
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 192 06-02-2021 14:54

2. పటాలను పరిశీలించి ఏ రకమైన కోణాలు ఏర్పడినాయో తెల్పండి.



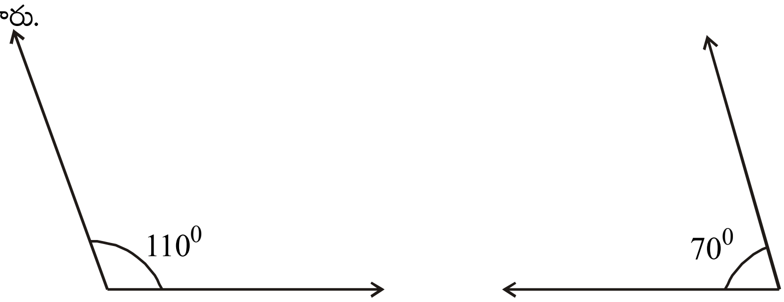
4.1.5 కోణాల జతలు (Pairs of angles) :

పూరక కోణాలు : ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తం 90^0 కు సమానం. అయితే ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి పూరక కోణాలు అంటాము.



ఇక్కడ $30^0 + 60^0 = 90^0$ కాబట్టి $30°$ కు $60°$ పూరక కోణం, $60°$ కు $30°$ పూరకకోణం అవుతుంది.

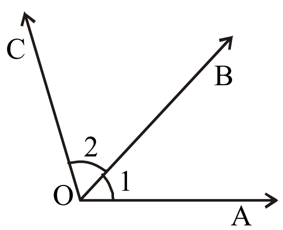
సంపూరక కోణాలు: ఏదేని రెండు కోణాల మొత్తం $180°$ అయిన ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి సంపూరక కోణములు అంటారు.



ఇచ్చట $110° + 70° = 180°$ కాబట్టి $110°$ కు $70°$ సంపూరక కోణం, $70°$ కు $110°$ సంపూరక కోణం అవుతుంది.

ఆసన్న కోణాలు :

ఉమ్మడిభుజం, ఉమ్మడి శీర్షాలను కలిగి ఇతర భుజాలు ఉమ్మడి భుజానికి ఇరువైపులా ఉంటే ఆకోణాలను "**ఆసన్న కోణాలు**" అంటారు.

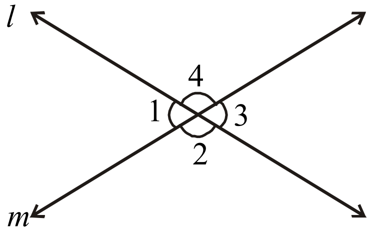


ఇచ్చిన పటము నందు $\angle AOB$, $\angle BOC$ లు ఆసన్న కోణాలు ఎందుకనగా ఉమ్మడి శీర్షం 'O' ఉమ్మడి భుజం $\overrightarrow{OB}$ అవుతుంది.

ఇతర భుజాలు $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OC}$ లు $\overrightarrow{OB}$కి రెండు వైపులా ఉన్నాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 193 06-02-2021 14:54

శీర్షాభిముఖకోణాలు : రెండు రేఖలు ఖండించుకున్నప్పుడు ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడు ఎదురెదురు కోణాలను "శీర్షాభిముఖ కోణాలు" అంటారు.

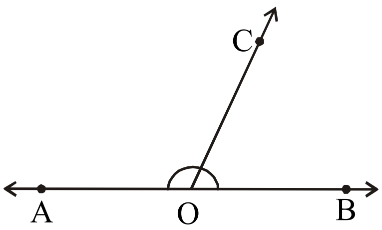


ప్రక్క పటంలో

l, m రేఖలు 'O' వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి. $\angle 1$, $\angle 3$ కు ఎదుటికోణం, $\angle 2$, $\angle 4$ కు ఎదుటికోణం, $\angle 1$, $\angle 3$ లు $\angle 2$, $\angle 4$ లు శీర్షాభిముఖకోణాల జతలు అవుతాయి.

రేఖీయ ద్వయము :

ఒక జత ఆసన్న కోణాల మొత్తము $180°$ అయితే దానిని "రేఖీయ ద్వయము" అంటారు.



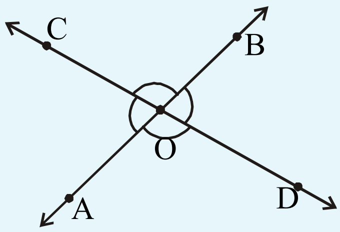
పటంలో $\angle AOC$, $\angle BOC$ లు ఆసన్నకోణాలు వాటి మొత్తం $180°$ అవుతుంది. ఇది ఒక రేఖీయ ద్వయం అవుతుంది.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. అమాష "పూరకకోణాలు ఎల్లప్పుడూ అల్పకోణాలు" అంటున్నది అమాష నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు ?
2. క్రింది కోణాలకు సంపూరక కోణాలను కనుగొనుము.

   (i) $115°$ (ii) $95°$ (iii) $10°$ (iv) $40°$

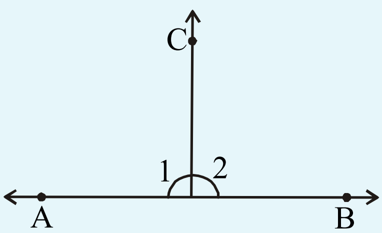
3.



(i) ప్రక్క పటంలోని ఆసన్నకోణాల జతలను వ్రాయండి.

(ii) శీర్షాముఖ కోణాల జతలు కూడా రాయండి.

4.



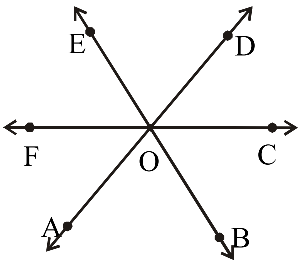
పటం నుంచి (i) రఘు $\angle 1$, $\angle 2$ లు ఆసన్నకోణాలు మరియు సంపూరకాలు అన్నాడు.

(ii) రాము $\angle 1$, $\angle 2$ లు రేఖీయ ద్వయమును ఏర్పరుస్తాయి. అన్నాడు.

ఇద్దరితో నీవు ఏకీభవిస్తావా ? ఎందుకు?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 194 06-02-2021 14:54

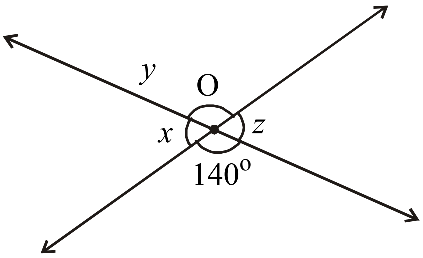
అభ్యాసము

1. 

ప్రక్క పటం నందలి

(i) ఏవైనా నాలుగు ఆసన్నకోణాలు జతలు

(ii) నాలుగు శీర్షాభిముఖ కోణాల జతలను వ్రాయండి.

2. 

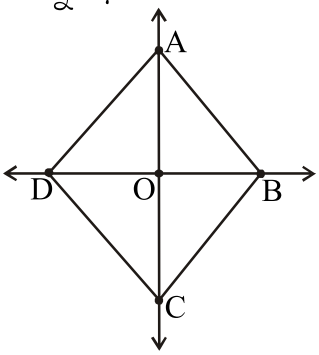
రెండుసరళరేఖలు 'O' వద్ద ఖండించుకొన్నాయి. పటాన్ని పరిశీలించి x, y మరియు z కోణాల కొలతలు వ్రాయుము.

3. క్రింద ఇచ్చిన సమయాలలో గడియారంలోని ముళ్ళ మధ్య కోణం ఏ కోణమవుతుందో తెలపండి.

(i) ఉదయం 9 గంటలు (ii) మధ్యాహ్నం 12 గంటలు

(iii) సాయంత్రం 6 గంటలు (iv) రాత్రి 8 గంటలు

4. ప్రక్క పటాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని



(i) ఏదైనా ఐదు బిందువులు

(ii) ఏవైనా ఐదు రేఖాఖండాలు

(iii) ఏవైనా రెండు కిరణాలు

(iv) ఏవైనా రెండు రేఖలు వ్రాయండి.

5. క్రింది వానిలో ఏవి లంబరేఖలు, సమాంతర రేఖలు సూచిస్తాయి ?

(i) రైలు పట్టాలు (ii) ఆంగ్ల భాషలోని 'T' అక్షరము

(iii) తలుపు యొక్క అంచులు (iv) గణితంలోని '+' కూడిక గుర్తు

6. ఏవైనా రెండు అల్పకోణాలను, రెండు అధికోణాలను గీయండి.

7. "రెండు కోణాలు సమానములు మరియు సంపూరకాలు" అవి ఏవి ?

8. సత్యము లేక అసత్యము అని గుర్తించి వ్రాయండి.

(i) రేఖలో కిరణము ఒక భాగము [ ]

(ii) రేఖాఖండానికి ఒకే చివరి బిందువు ఉంటుంది. [ ]

(iii) సంపూర్ణ కోణము అనగా 360°. [ ]

(iv) ఒక బిందువు నుంచి మనం ఎన్ని రేఖలయినా గీయవచ్చు. [ ]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 195 06-02-2021 14:54

9. క్రింది వానిలో సరళకోణము ________

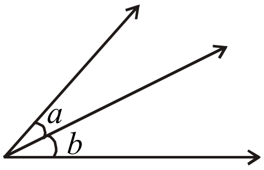
(A) 90° (B) 180° (C) 270° (D) 360°

10. క్రింది వానిలో ఏది సంపూరక కోణాలు జత కానిది ?

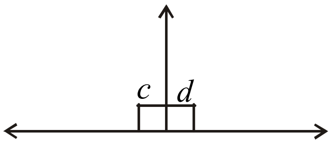
(A) 110° , 70° (B) 90°, 90° (C) 50°, 140° (D) 105°, 75°

11. క్రింది వాటిలో ఏది ఆసన్నకోణాల జత కానిది ?

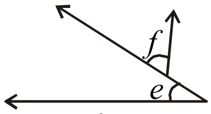
A)



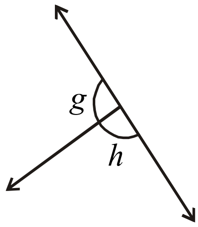
B)



C)

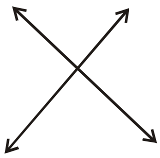


D)

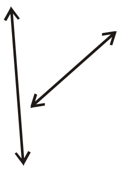


12. క్రింద ఇవ్వబడిన రేఖల జతలలో ఏవి లంబరేఖలు?

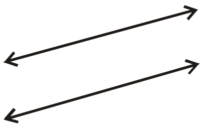
A)



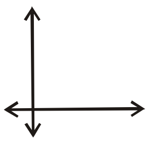
B)



C)



D)



ముఖ్యాంశాలు

- రేఖాగణితము ఆకారాల ధర్మాలు. వాటి కొలతలకు అధ్యయనము చేస్తుంది.
- ఒక తలము అనేది ఒక చదునైన ఉపరితలము మరియు ఏ రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము అదే ఉపరితలం ఉంటుంది.
- ఒకే తలానికి చెందిన రెండు పరస్పరం ఖండించుకొని రేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటారు.
- రెండు రేఖలకు ఒకే ఉమ్మడి బిందువు ఉన్నట్లయితే ఖండన రేఖలు అంటారు.
- ఉమ్మడి రెండు కిరణాల తుదిబిందువు ద్వారా కోణాలు ఏర్పడుతుంది.
- ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తము 90^0 లకు సమానము ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి పూరక కోణాలు అంటారు.
- ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తం 180^0 లకు సమానం అయిన ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి సంపూరక కోణాలు అంటారు.
- ఉమ్మడి భుజము మరియు ఉమ్మడి శీర్షాలు గల కోణాలు "ఆసన్నకోణాలు" అంటారు.
- రెండు రేఖలు ఖండించుకున్నప్పుడు ఉమ్మడి భుజము దీని రేఖల ఖండన బిందువు(శీర్షము) వద్ద ఏర్పరచే కోణాల జతను "శీర్షాభిముఖ కోణాలు" అని అంటారు.
- ఒక జత ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° అయితే దాని "రేఖీయ ద్వయము" అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 196 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.2 సమాంతర రేఖల ధర్మాలు

4.2.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- రెండు రేఖలను రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించే తిర్యగ్రేఖను మరియు, ఏర్పడే కోణాల రకాలను వివరించగల్గుతారు.
- రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించునపుడు ఏర్పడే సదృశకోణాలు, ఏకాంతర కోణాలు మరియు అంతర కోణాల ఫలితాలను వివరించగలుగుతారు.
- నిజజీవితంలో పలు సందర్భాలలో సమాంతర రేఖలు, తిర్యగ్రేఖ. సదృశ కోణాలు మొ॥నవి అన్వయించుకొని ఫలితాలు నిర్ధారించుకుంటారు.
- సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు కోణాల ధర్మాలను ఉపయోగించి సమస్యలు సాధించగలుగుతారు.

4.2.1 పరిచయం

రైలు పట్టాలను మీరందరూ చూసే ఉంటారు. రైలు పట్టాలు రెండు సమాంతర రేఖలను సూచిస్తాయి. అదేవిధంగా ఆ రెండు రైలు పట్టాలను ఖండించే విధంగా మధ్య, మధ్యలో ఉన్న అడ్డ పట్టీలు కూడా కనిపిస్తాయి. అడ్డ పట్టీలను ఏమంటారు?

పటం. 1 రైలు పట్టాలు

అదేవిధంగా నిచ్చెనను మనమందరమూ ఉపయోగిస్తూనే ఉంటాము. నిచ్చెన రెండు అంచులను ఖండిస్తూ మధ్య, మధ్యలో అడ్డుపట్టీలు ఉంటాయి. ఈ అడ్డుపట్టీలను కూడా ఏమంటారు?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 197 06-02-2021 14:54

మొదటి మరియు రెండవ సందర్భాలలోని అడ్డు పట్టీలను రేఖలుగా భావిస్తే,

ఇట్టి రేఖలను "తిర్యగ్రేఖలు" అంటారు.

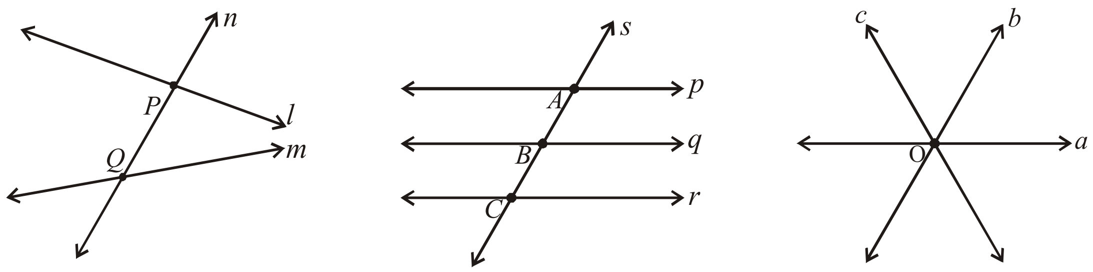
"ఒక రేఖ విభిన్న రేఖలను, విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే ఈ రేఖను "తిర్యగ్రేఖ" అని అంటారు.

పటం. 3

4.2.2 సమాంతర రేఖలు

తిర్యగ్రేఖ

క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



పటం. 1 పటం. 2 పటం. 3

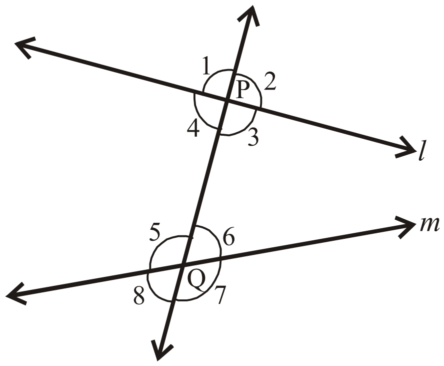
పటం (1)లో l, m అను రెండు రేఖలను "n" అను రేఖ P, Q రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి l, m లకు n తిర్యగ్రేఖ.

పటం (2)లో p, q, r అను మూడు రేఖలను "s" రేఖ A, B మరియు C మూడు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి p, q మరియు r లకు "s" తిర్యగ్రేఖ.

పటం (3)లో a, b లను c ఒకే బిందువు "O" వద్ద ఖండిస్తుంది. కాబట్టి a, b లకు "c" తిర్యగ్రేఖ కాదు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 198 06-02-2021 14:54

తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడు కోణాలు



రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించునపుడు 8 కోణాలు ఏర్పడుతాయి. కారణము, ప్రతి ఖండన బిందువు వద్ద 4 కోణాలు ఏర్పడుతాయి.

ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలిస్తే "l", "m" అనురేఖలను "n" అను తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ అనే ఎనిమిది కోణాలు ఏర్పడుతాయి.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ లను బాహ్యకోణాలు అంటాము.

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 6$ లను అంతర కోణాలు అంటాము.

$(\angle 1, \angle 5)$, $(\angle 2, \angle 6)$, $(\angle 4, \angle 8)$ మరియు $(\angle 3, \angle 7)$ జతలను సదృశకోణాలు అంటారు.

ప్రతి జతలోని విభిన్న శీర్షాల వద్ద ఏర్పడి, తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున ఉంటూ, ఒక కోణము బాహ్యకోణముగాను మరియొక కోణము అంతర కోణముగానూ ఉన్నది. కావున పై కోణాల జతలలో ప్రతి జత కోణాలను సదృశ (అనురూప) కోణాలు అంటాము.

పై పటం నుంచి $(\angle 3, \angle 5)$ మరియు $(\angle 4, \angle 6)$ కోణాల జతలను ఏకాంతర కోణాలు అంటారు.

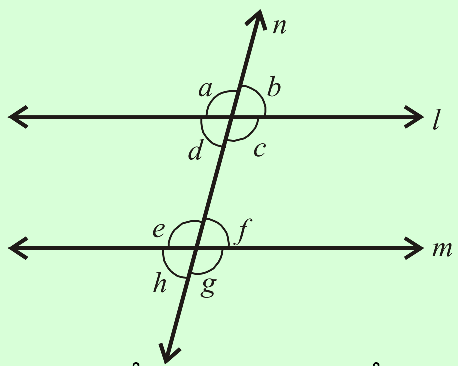
"ఇవి విభిన్న శీర్షాల వద్ద ఉంటూ, తిర్యగ్రేఖకు ఇరువైపులా గల మరియు రెండు రేఖల అంతరములో గల కోణాలు "కాబట్టి వీటిని ఏకాంతర కోణాలు" అంటారు.

అదేవిధంగా, $\angle 2, \angle 8$ మరియు $\angle 1, \angle 7$ కోణాలను ఏకబాహ్య కోణాలు అంటారు.

పై పటం నుంచి $\angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 3, \angle 6$ అనునవి తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు. వీటిని 'సహ అంతర కోణాలు అంటారు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1.

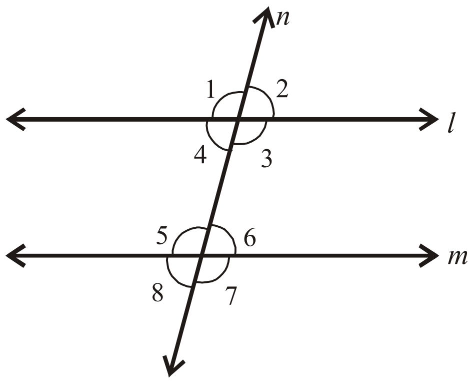


ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించి అందులో తిర్యగ్రేఖ ద్వారా ఏర్పడిన బాహ్యకోణాలు, అంతర కోణాలు ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించి వ్రాయండి.

2. పై 1వ సమస్యలోని పటాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని, సదృశ కోణాల జతలు, ఏకాంతర, ఏక బాహ్య కోణాల జతలు వ్రాయండి.

4.2.3 సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ

ప్రక్కపటములో l, m అనునవి రెండు సమాంతర రేఖలు "n" తిర్యగ్రేఖ.



కావున అన్ని జతల సదృశ కోణాలు సమానం అవుతాయి.

$\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8$

అదేవిధంగా ఏకాంతర కోణాలు సమానము.

$\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8$

ఏక బాహ్య కోణాలు కూడా సమానము

$\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$

$\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4, \angle 5 = \angle 7$ మరియు $\angle 6 = \angle 8$

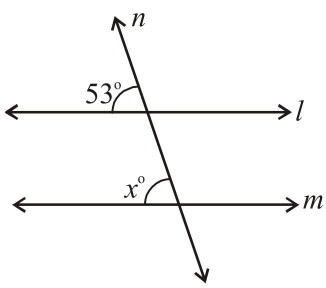
సహ అంతర కోణాల మొత్తం సంపూరకాలు

$\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ కాబట్టి $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$.

ఒక తలంలోని

రెండు విభిన్న రేఖలకు ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినప్పుడు ఏర్పడు ఒక జత సదృశ కోణాలు సమానమూ (లేదా ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు సమానమైన (లేదా) ఒక జత సహఅంతర కోణాలు సంపూరకాలు అయిన రెండు రేఖలు సమాంతరాలు అవుతాయి.

ఉదాహరణ 1 :



ప్రక్క పటంలో l, m లు సమాంతర రేఖలు మరియు "n" తిర్యగ్రేఖ. అయిన "x" కోణము విలువ ఎంత ?

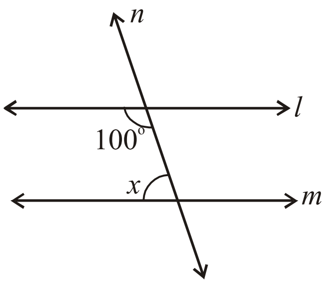
సాధన :

l, m లు సమాంతర రేఖలు కాబట్టి సదృశకోణాలు సమానము. కావున, $53^0 = x^0$

$\angle x = 53^o$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 200 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 2 :



ప్రక్క పటంలో $l \parallel m$, మరియు "n" తిర్యగ్రేఖ. అయిన "x" కోణం ఎంత?

సాధన :

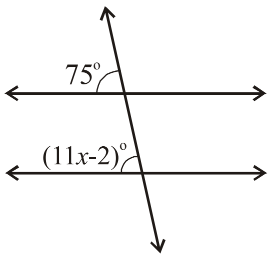
$l \parallel m$ కాబట్టి, తిర్యగ్రేఖ కు ఒకే వైపున ఉన్న అంతర కోణాల జత సంపూరకాలు.

కావున, $100^0 + x^0 = 180^0$

$x = 180 - 100$

$\boxed{x = 80^0} \Rightarrow \angle x = 80^0$.

ఉదాహరణ 3 :



ప్రక్క పటంలో

$l \parallel m$, మరియు "n" తిర్యగ్రేఖ అయిన

x విలువ ఎంత?

సాధన :

పటం నుంచి $l \parallel m$ కావున, సదృశ కోణాలు సమానము.

కాబట్టి, $75 = 11x - 2$

$\Rightarrow 75 + 2 = 11x$

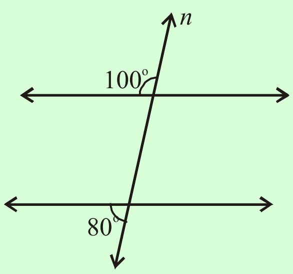
$\Rightarrow 11x = 77$

$\Rightarrow x = \frac{77}{11} = 7^0$.

$x = 7^0$.

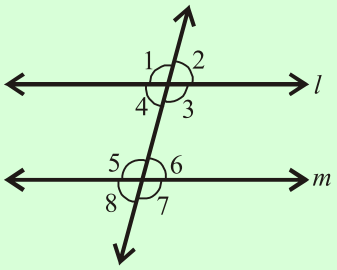
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1.

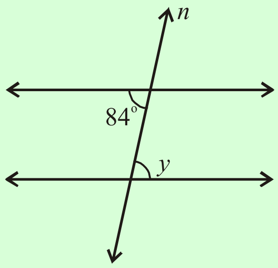


ఇవ్వబడిన పటములో l మరియు m రేఖలకు n తిర్యగ్రేఖ $l \parallel m$ అవుతుందా? (l సమాంతరము m)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 201 06-02-2021 14:54

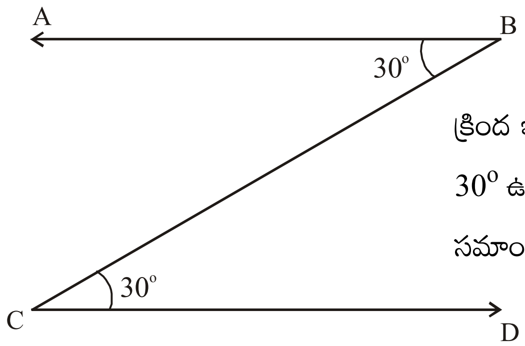
2. 

ప్రక్కన చూపబడిన పటంలో "l" మరియు "m" లు సమాంతర రేఖలు మరియు "n" వాటి తిర్యగ్రేఖ. అయితే $\angle 2 = 75^0$ అయిన మిగిలిన కోణాలన్నింటిని వ్రాయుము.

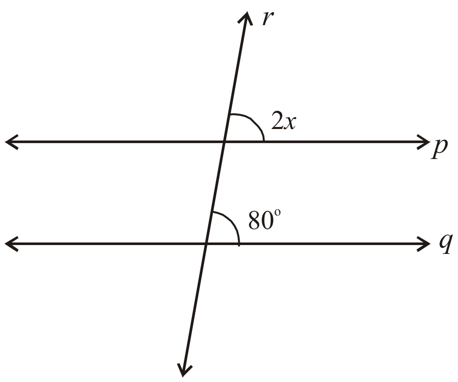
4. 

ప్రక్క పటంలో $l \parallel m$, మరియు "n" తిర్యగ్రేఖ అయిన, "y" కోణము విలువ ఎంత ?

అభ్యాసము

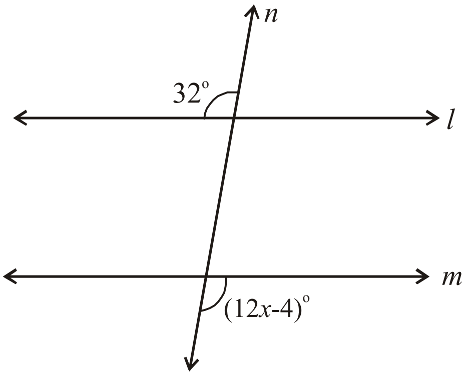
1. 

క్రింద ఇవ్వబడిన పటంలో, రెండు కోణాలను ప్రతి ఒక్కటి 30^0 ఉండేలా గుర్తించబడినవి. అయితే AB, CD లు సమాంతర రేఖలు అవుతాయా ? ఎందుకు ?

2. 

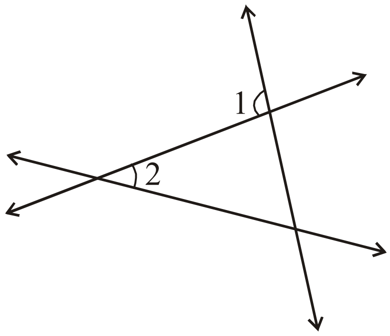
ప్రక్క పటంలో $p \parallel q$, "r" తిర్యగ్రేఖ అయిన "x" విలువ ఎంత ?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 202 06-02-2021 14:54

3. 

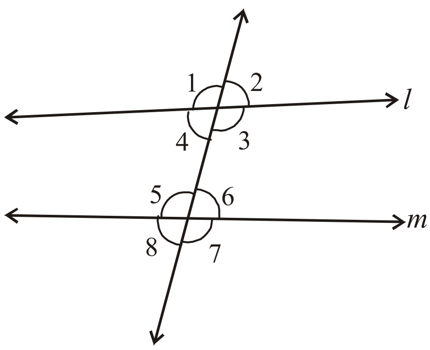
ప్రక్క పటంలో $l \parallel m$, "n" తిర్యగ్రేఖ అయిన x విలువ ఎంత ?

4. మూడు రేఖలకు ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండిస్తే ఏర్పడు మొత్తం కోణాలు ఎన్ని? సరియగు పటం ద్వారా చూపండి.

5. 

ప్రక్క పటములో కోణాల జతల పేరు వ్రాయండి.

6. పటం ఆధారంగా క్రింది వాటిని సరైన సమాధానంతో జతపరచండి.



(i) ఏకాంతర కోణాలు [ ] A) ($\angle 3$, $\angle 6$)

(ii) సదృశ కోణాలు [ ] B) ($\angle 1$, $\angle 7$)

(iii) ఏకబాహ్య కోణాలు [ ] C) ($\angle 2$, $\angle 6$)

(iv) తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతరకోణాలు [ ] D) ($\angle 3$, $\angle 5$)

ముఖ్యాంశాలు

- ఒక రేఖ రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే ఆ రేఖను "తిర్యగ్రేఖ" అని అంటారు.

- విభిన్న శీర్షాల వద్ద ఉంటూ, తిర్యగ్రేఖకు ఇరువైపులా గల రెండు రేఖల అంతరములో గల కోణాలను "ఏకాంతర కోణాలు" అంటారు.
- రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడు

  1. ప్రతి జతలోని సదృశ కోణాలు సమానము.
  2. ప్రతిజత ఏకాంతర కోణాలు సమానము.
  3. ప్రతి జత ఏక బాహ్య కోణాలు సమానము.
  4. తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు సంపూరకాలు అవుతాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 204 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం 4.3 త్రిభుజములు

4.3.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

* త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 అని నిరూపించగలరు.
* త్రిభుజంలోని బాహ్యకోణం, వానికి ఎదురుగా గల అంతర కోణాల మొత్తానికి సమానం అని సరిచూడగలరు.
* త్రిభుజంలో గల సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాలు సమానం అని సరిచూడగలరు.
* త్రిభుజంలో గల సమాన కోణాలకు ఎదురుగా ఉన్న భుజాలు సమానం అని సరిచూడగలరు.
* త్రిభుజంలో గల అసమానతా ధర్మాలను సరిచూడగలరు.
* త్రిభుజంలో గల ఏవేని రెండు భుజాల మొత్తమైనా మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువ అని సరిచూడగలరు.
* త్రిభుజ ధర్మాలపై ఆధారపడిన సమస్యలు సాధించగలరు.

4.3.1 పరిచయం

వివిధ రకాల పటాలు మరియు వాటి ధర్మాలను అధ్యయనం చేయు శాస్త్రాన్ని 'జ్యామితి' అంటారు. పూర్వకాలంలో, గృహనిర్మాణంలో పాటించవలసిన నియమాల కొరకై "జ్యామితి"ని అభివృద్ధి చేయబడింది.

మనం, మన చుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలో గల అనేక వస్తువులలో జ్యామితీయ ఆకారాల ప్రభావం విశేషంగా ఉంటాయని గమనించవచ్చును కదా! ఉదాహరణకు, సైకిలు, కారు, మోటార్ బైకు, బస్, లారీ వంటి వాహనాలలో జ్యామితీయ ఆకారాలను, భావనలను విరివిగా ఉపయోగించడం గమనించవచ్చు.

ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం "త్రిభుజాలు" అను జ్యామితీయ భావనలను గూర్చి నేర్చుకోవడం జరుగుతుంది.

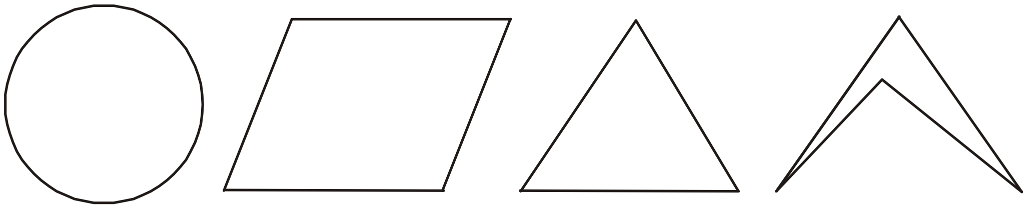
4.3.2 త్రిభుజము వాని ధర్మములు

ఒక జ్యామితీయ ఆకారం సరళరేఖలు లేదా వక్రరేఖలతో నిర్మితమై ఉంటుంది. ఒక్కోసారి సరళరేఖలు మరియు వక్రరేఖలు రెండింటినీ కలిగి ఉంటుంది. జ్యామితీయ ఆకారం సంవృత పటమైనా లేదా వివృత పటమైనా అయి ఉండవచ్చు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 205 06-02-2021 14:54

దిగువ నీయబడిన ఆకారాలను చూడండి.

(i)



(ii)

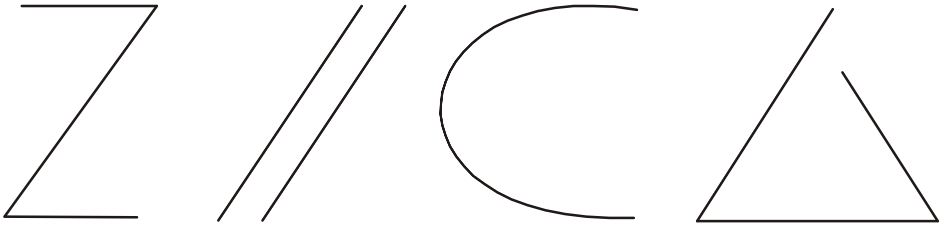


Fig. 4.3.1

పైన చూపబడిన ఆకారాలలో ఏది త్రిభుజాన్ని సూచిస్తుంది ?

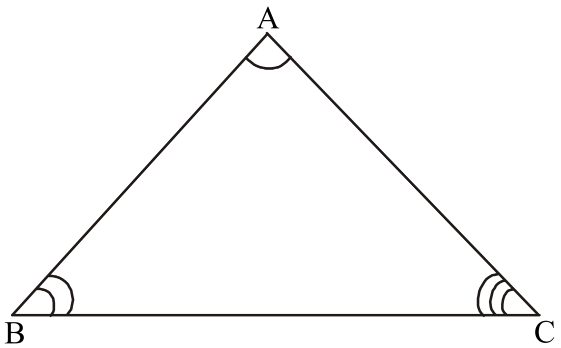
పటం (ii) ఒక త్రిభుజం. కేవలం పటం (ii) ను మాత్రమే త్రిభుజం అని ఎలా పరిగణిస్తాము?

మనం గమనించగా, ఈ పటం 3 రేఖాఖండములచే ఏర్పడిన ఒక సంవృత పటం అని గమనించగలము.

త్రిభుజం అనగా నేమి ?

ఏవేని మూడు రేఖా ఖండములచే ఏర్పడిన సంవృత పటాన్ని "త్రిభుజం" అంటారు.

దిగువనీయబడిన పటాన్ని గమనించండి.



(i) పైన ఉన్న పటం ఒక సంవృతపటం.

(ii) $\overline{AB}, \overline{BC}$ మరియు $\overline{CA}$ అను రేఖా ఖండములచే ఆవరించబడి ఉన్నది. వాటిని "భుజములు" అని అంటారు.

(iii) $\overline{AB}, \overline{BC}$ మరియు $\overline{CA}$ లచే ఆవరించబడి ఉన్న సంవృత పటములో మూడు కోణములు $\angle ABC = \angle B$, $\angle ACB = C$ మరియు $\angle CAB = \angle A$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 206 06-02-2021 14:54

(iv) A, B, C లను "శీర్షములు" అని అంటారు.

వీటిని మనము ఏమని పిలుస్తాము ?

వీటిని త్రిభుజం యొక్క మూలకములు అని కూడా పిలుస్తాము.

ఇవి మొత్తం 6 మూలకాలు (3 భుజములు, 3 కోణములు)

ఈ త్రిభుజాన్ని ఏమని పిలుస్తారు ? దీనిని మనం ΔABC లేదా ΔBAC లేదా ΔCBA.

$\Delta ABC \rightarrow$ త్రిభుజం ABC
లేదా
$\Delta BAC \rightarrow$ త్రిభుజం BAC
లేదా
$\Delta CBA \rightarrow$ త్రిభుజం CBA

కావున, ΔABC నందు మనము దిగువనీయబడిన వానిని గమనించగలము.

భుజములు : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ } → మూలకముల
కోణములు : $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$
శీర్షములు : A, B, C.

త్రిభుజం గురించి మరింత తెలుసుకొనుటకు మనం చర్చను కొనసాగిద్దాం.

శీర్షము Aకు ఎదురుగా ఉన్న భుజం ఏది ?

$\overline{BC}$ భుజము శీర్షము A కు ఎదురుగా ఉన్నది.

అదేవిధంగా, శీర్షము B మరియు C లకు ఎదురుగా $\overline{CA}$ భుజము మరియు $\overline{AB}$ భుజములు కలవని గమనించగలము.

BC భుజమునకు ఎదురుగా గల కోణము నకు ఏమని పేరు కలదో నీవు చెప్పగలవా ?

$\overline{BC}$ భుజమునకు ఎదురుగా గల కోణం $\angle BAC$ లేదా $\angle A$.

అదేవిధంగా $\angle B$ మరియు $\angle C$ లు CA భుజము మరియు AB భుజములకు ఎదురుగా గల కోణాలు.

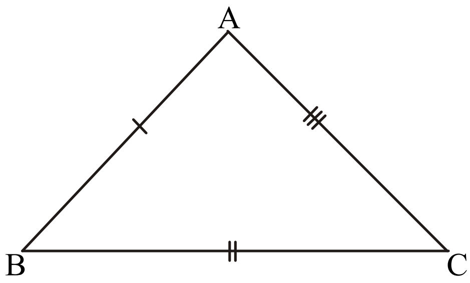
త్రిభుజాలను మనం వర్గీకరించగలమా ? ఒకవేళ వర్గీకరించగలిగితే ఎలా ? త్రిభుజాల వర్గీకరణ లేదా త్రిభుజాల రకములను గూర్చి వివరంగా తెలుసుకొందాము.

4.3.3 త్రిభుజాల రకాలు

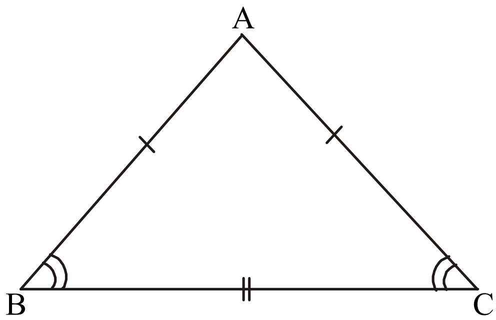
త్రిభుజాలను రెండు విధాలుగా వర్గీకరించవచ్చును.

I. భుజాల ఆధారంగా వర్గీకరణ

(i) విషమబాహు త్రిభుజం : ఒక త్రిభుజంలో అన్ని భుజాల పొడవుల కొలతలు వేరువేరుగా ఉంటే, ఆ త్రిభుజాన్ని "విషమబాహు త్రిభుజం" అంటారు.



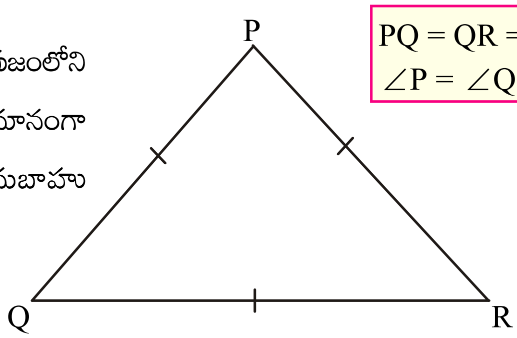
(ii) సమద్విబాహు త్రిభుజం : ఒక త్రిభుజంలోని ఏవేని రెండు భుజాల పొడవులు సమానం అయితే ఆ త్రిభుజాన్ని "సమద్విబాహు త్రిభుజం" అంటారు.



* BC $\rightarrow$ భూమి
* $\angle B, \angle C \rightarrow$ భూ కోణాలు
* $\angle A \rightarrow$ శీర్ష కోణం

AB = AC మరియు $\angle B = \angle C$

(iii) **సమబాహు త్రిభుజం** : ఒక త్రిభుజంలోని అన్ని భుజాల పొడవులు సమానంగా ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని "సమబాహు త్రిభుజం" అంటారు.

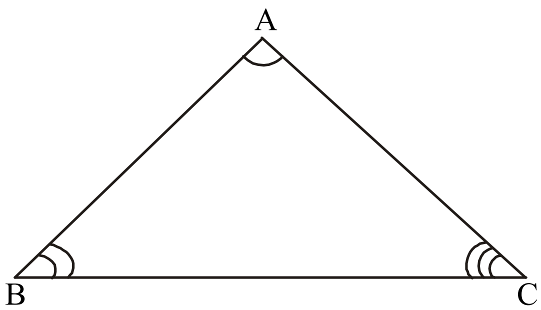


PQ = QR = PR
$\angle P = \angle Q = \angle R = 60^0$

[గమనిక : సమానత్వ గుర్తు కలిగిన భుజాల పొడవులు సమానం].

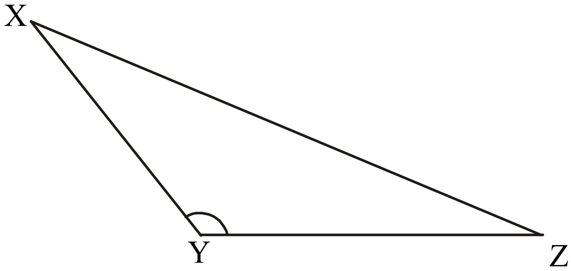
II. కోణాల ఆధారంగా వర్గీకరణ :

(i) అల్పకోణ త్రిభుజం : ఒక త్రిభుజంలో గల అన్ని కోణాలు అల్పకోణాలైతే ఆ త్రిభుజాన్ని "అల్పకోణ త్రిభుజం" అంటారు.



[గమనిక : $\lfloor A$, $\lfloor B$ మరియు $\lfloor C$ లు మూడు 90^0 కంటే తక్కువ గల కోణములు].

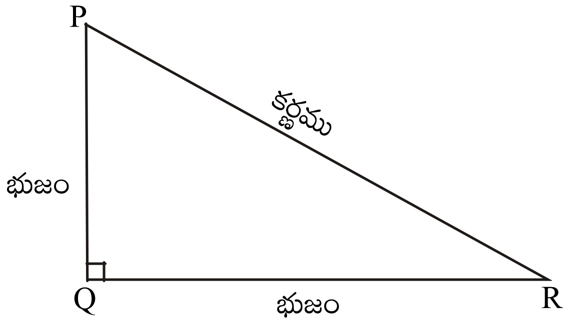
(ii) **అధిక కోణ త్రిభుజం :** ఒక త్రిభుజంలోని ఏదేని ఒక కోణం మాత్రమే అధిక కోణం అయినట్లయితే ఆ త్రిభుజాన్ని "అధిక కోణ త్రిభుజం" అంటారు.



[గమనిక : $\angle Y$ అనేది 90^0 ల కంటే అధికంగా గల కోణం].

(iii) లంబకోణ త్రిభుజం : ఒక త్రిభుజం లోని ఒక కోణం మాత్రమే లంబకోణం ను కలిగి ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని "లంబకోణ త్రిభుజం" అంటారు.

[గమనిక : $\angle Q = 90^0$]



గమనిక: 1. లంబకోణమునకు ఎదురుగా ఉన్న భుజము కర్ణము అంటారు.

2. మిగిలిన రెండింటినే భుజములు అంటారు.

ఇప్పుడు, త్రిభుజ ధర్మముల గురించి పరీక్షించుకుందాం.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

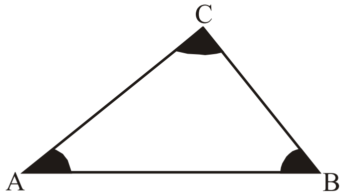
1. ΔPQR లో ఆరుమూలకాలను (ie 3 భుజాలు, 3 కోణాలను) వ్రాయుము.
2. ΔABC లో B శీర్షంనకు ఎదురుగా గల భుజమును తెల్పుము.
3. ΔRAT లో RT భుజంనకు ఎదురుగా గల శీర్షం తెలుపుము.
4. ఏదేని ఒక త్రిభుజం నందలి భుజాల పొడవులు వరుసగా 8 సెం.మీ, 5 సెం.మీ మరియు 8 సెం.మీ అయినచో, ఆ త్రిభుజం గురించి నీవేమి చెప్పగలవు ?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 209 06-02-2021 14:54

4.3.4 త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మము

కృత్యము 1

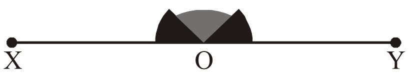
ఒక తెల్ల కాగితముపై త్రిభుజము ABC గీచి పటములో చూపిన విధంగా దాని కోణాలకు రంగులు వేయండి.



రంగులు వేసిన కోణభాగాలను కత్తిరించండి.

వేరే కాగితముపై XY రేఖను గీచి దానిమీద ఒకచోట 'O' ను గుర్తించుము.

కత్తిరించిన మూడు కోణీయ భాగాల శీర్షాలు 'O' వద్ద కలిసే విధంగా క్రింది పటములో చూపిన విధముగా అతికించుము.



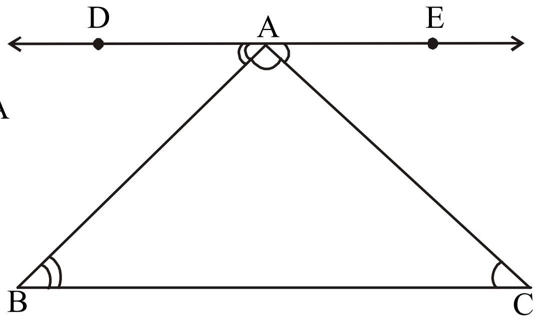
ఇలా అతికించినపుడు ఈ మూడూ కలిసి ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^o.

తార్కిక పద్ధతిలో ఈ సాధనను సిద్ధాంతంగా నిరూపించుదాం.

సిద్ధాంతం 1 : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0.

దత్తాంశం : ABC ఒక త్రిభుజం

నిరూపణ : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.



నిర్మాణం : $\overline{BC}$ కి సమాంతరంగా ఉండునట్లు, శీర్షం A గుండా పోయే $\overleftrightarrow{DE}$ అను మరో రేఖను నిర్మించుము.

దత్తాంశం : AB ఒక తిర్యగ్రేఖ

$\therefore \angle B = \angle DAB$ [$\because$ ఏకాంతర కోణాల జత]

$\angle C = \angle EAC$ [$\because$ ఏకాంతర కోణాల జత]

అనగా $\angle B + \angle CC = \angle DDAAB + \angle EAC$ ...(1)

$\angle A$ ఇరువైపులా కలుపగా

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle DAB + \angle EAC$

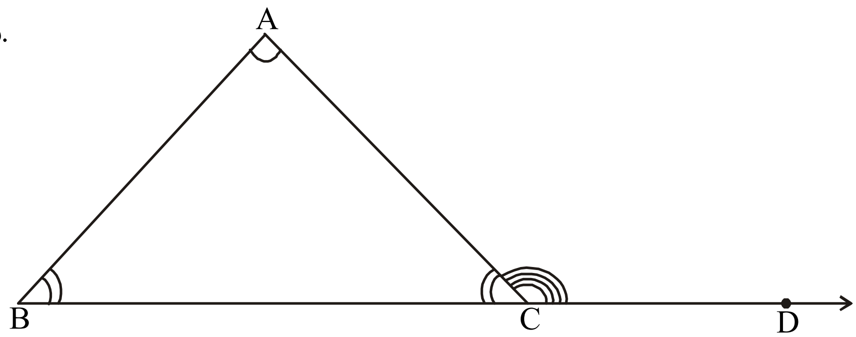
$= 180^0$ [$\because$ శీర్షం A వద్ద 180^0 ఒక సరళకోణం]

నిరూపించబడినది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 210 06-02-2021 14:54

4.3.5 త్రిభుజానికి గల బాహ్యకోణములు

కృత్యం 2 : ΔABC ని నిర్మించి ఏదేని ఒక భుజము $\overline{BC}$ ని పటంలో చూపిన విధంగా పొడిగించుము. శీర్షం C వద్ద ∠ACD ఏర్పడినది.



పటంలో ∠ACD ఎక్కడ ఏర్పడినది ? గమనించండి ! ∠ACD అనునది ΔABC యొక్క బాహ్యంతో ఏర్పడినది. దీనిని బట్టి ∠ACD గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు ? ∠ACD అనునది ΔABC కి శీర్షం C వద్ద ఏర్పడిన ఒక బాహ్యకోణము.

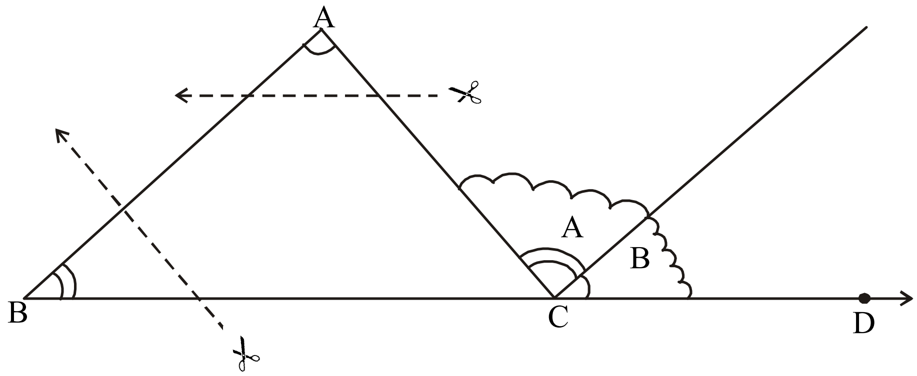
పటంలో ∠BCA గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? ∠BCA అనునది ∠ACDకి శీర్షం C వద్ద గల ఆసన్నకోణము.

మరియు ∠A, ∠B లు ∠ACD కి గల ఎదురెదురు అంతరకోణాలు.

మీరు ∠ACD, ∠A మరియు ∠B ల మధ్య ఏదేని సంబంధాన్ని గుర్తించగలరా ?

అవును, ∠ACD, ∠A మరియు ∠B ల మధ్య ఒక కృత్యం ద్వారా సంబంధాన్ని స్థాపించగలము.

∠A, ∠B లను కత్తిరించి ∠ACD వద్ద ఆసన్న కోణాల మాదిరిగా క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా అమర్చగలము.



అలా అమర్చిన కోణములు ∠A, ∠B లు ∠ACD ని పూర్తిగా ఆక్రమించబడినవా ? అవును. దీనిని బట్టి నీవేమి చెప్పగలవు.

$$\angle ACD = \angle A + \angle B$$

దీనిని బట్టి మనము ఏమని నిర్ధారించగలము?

పై సమాధానమును బట్టి తార్కికంగా మనము దిగువ చూపిన ప్రవచనాన్ని నిర్ధారించగలం.

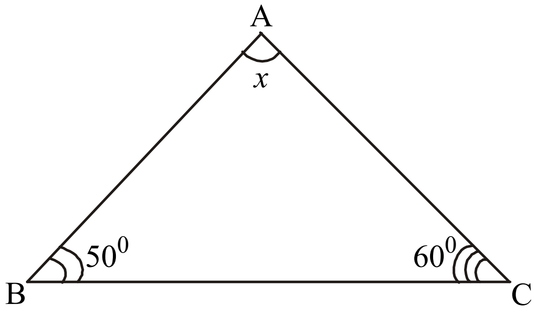
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 211 06-02-2021 14:54

"ఒక త్రిభుజం యొక్క బాహ్యాకోణం. దాని ఎదురెదురు అంతర కోణాల మొత్తానికి సమానం".

దీనినే త్రిభుజం యొక్క బాహ్యాకోణం ధర్మంగా చెప్పవచ్చు. దీనినే ఒక సిద్ధాంతముగా కూడా నిరూపణ చేయవచ్చు. పై తరగతులలో దీనికి సంబంధించి నిరూపణను చదువు కుంటాము.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : దిగువ చూపిన పటం నుండి "x" విలువను కనుగొనుము.



సాధన : ΔABCల నందు

$\angle A = x, \angle B = 50^0, \angle C = 60^0$ అని దత్తాంశము

త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad x + 50^0 + 60^0 = 180^0$

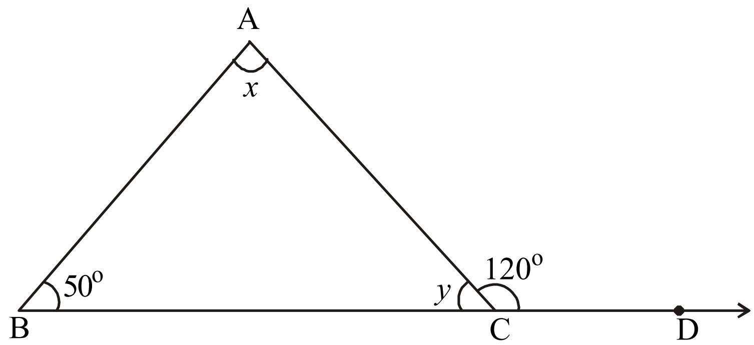
$\Rightarrow \quad x + 110^0 = 180^0$

$\therefore \quad x = 180^0 - 110^0$

$= 70^0$

$\boxed{\therefore\ x = 70^0}$.

ఉదాహరణ 2 : దిగువ చూపిన పటం నుండి x , y ల విలువలు కనుగొనుము.



సాధన : ΔABC నందు

$\angle A = x, \angle B = 50^0, \angle C = y$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

$\angle ACD = 120^0$

త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad x + 50^0 + y = 180^0$ [$\because$ 50^0 ను RHS వైపు పక్షాంతరం

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 212   06-02-2021 14:54

$\Rightarrow \quad x + y = 180^0 - 50^0$ చెందించగా]

$x + y = 130^0 \quad ....(1)$

ఇప్పుడు $\angle C + \angle ACD = 180^0$ [$\because$ రేఖీయ ద్వయం స్వీకృతం ప్రకారం]

$\Rightarrow \quad y + 120^0 = 180^0$ [$\because$ 120^0 ను RHS కు పక్షాంతరం చెందించగా]

$y = 180^0 - 120^0 = 60^0$

(1) వ సమీకరణం నుండి $x = 130^0 - y$

$= 130^0 - 60^0$ [$\because$ $y = 60^0$ ప్రతిక్షేపించగా]

$= 70^0$

$\therefore \quad x = 70^0$

$y = 60^0$.

ఉదాహరణ 3 : ఒక త్రిభుజంలోని కోణాలు $30^0, 80^0$ అయిన మూడవ కోణమును కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC

$\angle A = 30^0$

$\angle B = 80^0$

$\angle C = x$ అనుకొనుము.

త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad 30^0 + 80^0 + x = 180^0$ [$\because$ 110^0 ను RHS కు పక్షాంతరం చెందించగా]

$\Rightarrow \quad 110^0 + x = 180^0$

$\Rightarrow \quad x = 180^0 - 110^0$

$= 70^0$

$\therefore$ మూడవకోణము $= 70^0$.

ఉదాహరణ 4 : ఒక త్రిభుజంలోని కోణాలు వరుసగా $2 : 3 : 4$ నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆకోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : త్రిభుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి $= 2 : 3 : 4$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

నిష్పత్తిలోని పదాల మొత్తము $= 2 + 3 + 4 = 9$

$\therefore$ మొదటి కోణం $= \frac{2}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 40^0$

రెండవ కోణం $= \frac{3}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 60^0$

మూడవ కోణం $= \frac{4}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 80^0$

$\therefore$ త్రిభుజంలోని మూడుకోణాలు $40^0, 60^0$ మరియు 80^0.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 213 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 5 : ΔABC నందు ఒక కోణం 50^0 అయి, మిగిలిన రెండుకోణాలు సమానమైతే ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC నందు $\angle A = 50^0$ మరియు $\angle B = \angle C = x^0$ అనుకొనుము.

త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow 50^0 + x^0 + x^0 = 180^0$

$\Rightarrow 50^0 + 2x^0 = 180^0$ [$\because$ 50^0 ను RHS వైపు పక్షాంతరం చెందించగా]

$\Rightarrow 2x^0 = 180^0 - 50^0$ [$\because$ ఇరువైపులా 2చే భాగించగా]

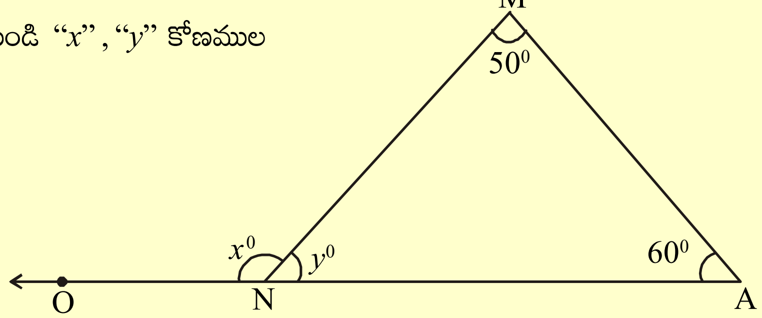
$= 130^0$

$x = \dfrac{130^0}{2} = 65^0$

$\therefore$ మిగిలిన రెండు కోణాలు $65^0, 65^0$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక త్రిభుజంలోని ఏవేని రెండు కోణాలు 38^0 మరియు 102^0 అయిన మూడవ కోణం విలువ ఎంత?
2. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక అల్పకోణము 30^0. మిగిలిన అల్పకోణమును కనుగొనుము.
3. ఒక త్రిభుజంలో కోణాలు వరుసగా 1 : 4 : 5 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. త్రిభుజంలోని అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.
4. "ఒక త్రిభుజంలో రెండు లంబకోణాలు ఉంటాయి" అని రాజేందర్ అన్నాడు. నీవు అతనితో ఏకీభవిస్తావా? నీ జవాబును సమర్థించుము.
5. క్రింద నీయబడిన పటం నుండి "x", "y" కోణముల విలువలు కనుగొనుము.



మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 6 : ఒక త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణం 70^0 మరియు ఎదురెదురు అంతరాభిముఖ కోణాల జతలో ఒక కోణం 25^0 అయిన మరియొక అంతరాభిముఖ కోణంను కనుగొనుము.

సాధన : దత్త బాహ్యకోణం $= 70^0$.

ఎదురెదురు అంతరాభిముఖ కోణాల జతలో ఒక కోణం $= 25^0$

మరియొక కోణం $= x^0$ అనుకొనుము.

త్రిభుజంలోని బాహ్యకోణం ధర్మం ఆధారంగా

బాహ్యకోణం = ఎదురెదురుగా ఉన్న అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తం

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 214 06-02-2021 14:54

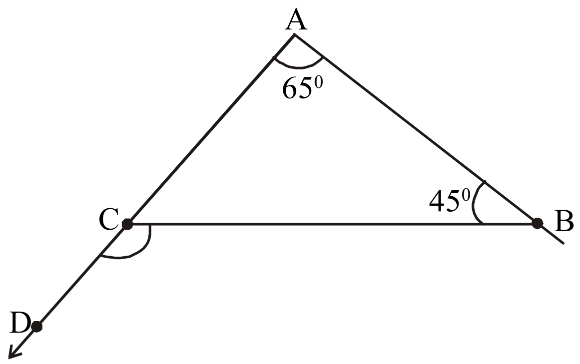
$\Rightarrow 70^0 = 25^0 + x^0$

$\Rightarrow x^0 + 25^0 = 70^0$ [$\because$ 25^0 ను LHS పక్షాంతరం చెందించగా]

$\Rightarrow x^0 = 70^0 - 25^0 = 45^0$

మరియొక అంతరాభిముఖ కోణం $= 45^0$.

ఉదాహరణ 7 : దిగువనీయబడిన పటం నందు గల బాహ్యకోణం x^0 ను కనుగొనుము.



సాధన : ΔABC నందు

$\angle A = 65^0$, $\angle B = 45^0$, $\angle BCD = x$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

త్రిభుజ బాహ్యకోణ ధర్మం ఆధారంగా

బాహ్యకోణం = ఎదురెదురు అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తం

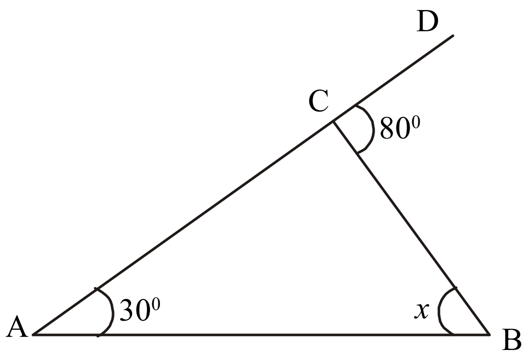
$\Rightarrow \angle BCD = \angle A + \angle B$

$\Rightarrow x = 65^0 + 45^0$

$= 110^0$

$\boxed{\therefore\ x = 110^0}$

ఉదాహరణ 8 : దిగువ నీయబడిన పటం నందు గల చర అంతరకోణంను కనుగొనుము.



సాధన : పై పటం ననుసరించి, ఒక దత్త అంతరాభిముఖ కోణం 30^0

మరియొక అంతరాభిముఖ కోణం $= x^0$

బాహ్యకోణం $= 80^0$

త్రిభుజం నందలి బాహ్యకోణం ధర్మం ఆధారంగా

బాహ్యకోణం = ఎదురెదురు అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తం

$\Rightarrow 80^0 = 30^0 + x^0$ తారుమారు చేయగా

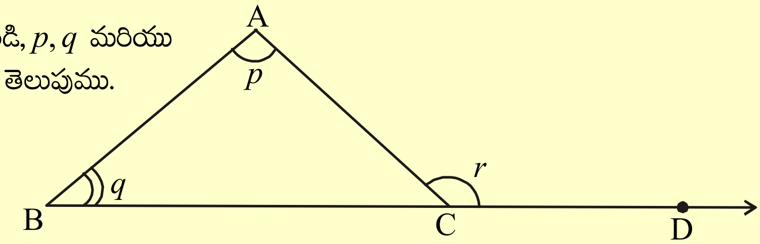
$\Rightarrow x + 30^0 = 80^0$ [$\because$ 30^0 ను RHS వైపు పక్షాంతరం చెందించగా]

$\Rightarrow x = 80^0 - 30^0 = 50^0$

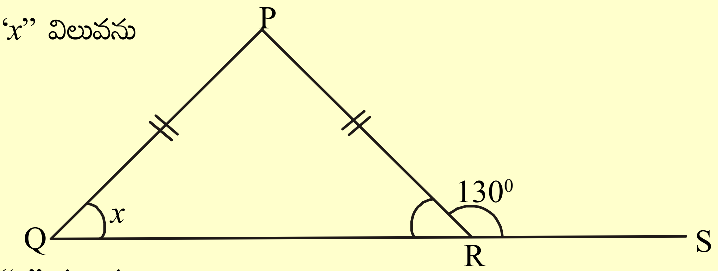
$\boxed{\therefore\ x = 50^0}$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

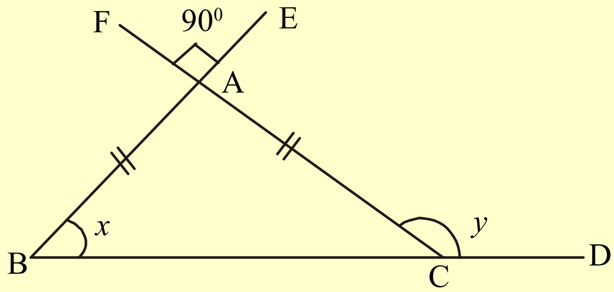
1. "త్రిభుజం యొక్క ఒక బాహ్యకోణం సరళకోణము అవుతుంది" అని దత్తు అన్నాడు. నీవు ఏకీభవిస్తావా? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము.
2. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి, p, q మరియు r ల మధ్యగల సంబంధాన్ని తెలుపుము.



3. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి "x" విలువను కనుగొనుము.



4. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి "x" మరియు "y" విలువలను కనుగొనుము.



4.3.6 త్రిభుజము నందలి అసమానతలు

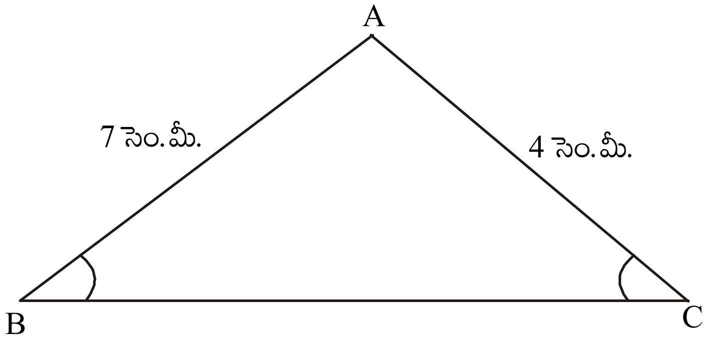
మనము ఇదివరకే త్రిభుజంలో గల భుజాలు మరియు కోణాలు సమానమైనప్పుడు, వాని మధ్యగల సంబంధం గురించి తెలుసుకున్నాము. ఇప్పుడు మనం త్రిభుజంలోని భుజాలు మరియు కోణాలు అసమానములైనప్పుడు వాని మధ్యగల సంబంధం గురించి చర్చిద్దాం. వాటి గురించి చర్చించే ముందు, అసమానతా ధర్మాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

అసమానత తెలియజేయుటకు ఉపయోగించు గుర్తులు.

గుర్తు	అర్థము	ఉదాహరణలు
$>$	కన్నా పెద్దది	$90^0 > 30^0$ ని మనం "90^0, 30^0 ల కన్నా పెద్దది అని చదువుతాం.
$<$	కన్నా చిన్నది	$30^0 < 90^0$ ని మనం "30^0, 90^0 ల క్నా చిన్నది అని చదువుతాం.
$\neq$	సమానం కాదు	$90^0 \neq 30^0$ ని మనం "90^0, 30^0 లకు సమానం కాదు. అని చదువుతాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 216 06-02-2021 14:54

దిగువనీయబడిన త్రిభుజాన్ని గమనించుము.



నీవేమి గమనించావు.

ΔABC నందు, AB భుజం యొక్క పొడవు, AC భుజం పొడవు కన్నా పెద్దది. అని గమనించాము. ఇప్పుడు $\angle B$, $\angle C$ ల కొలతలు కొలవగా, మీరేమి గమనించారు?

$\angle B$, $\angle C$ కి సమానంగా లేదని గమనించాము.

i.e., $\angle B \neq \angle C$ మరియు $\angle C > \angle B$

$AB > AC \Rightarrow \angle C > \angle B$

$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$

దీనిని బట్టి మనం "ఏదేని ఒక త్రిభుజంలో ఏవేని రెండు భుజాలు సమానం. కాకపోతే అప్పుడు పెద్దగా ఉన్న భుజంకు ఎదురెదురుగా గరిష్ఠ కోణం ఉంటుంది". అని నిర్ధారించవచ్చు.

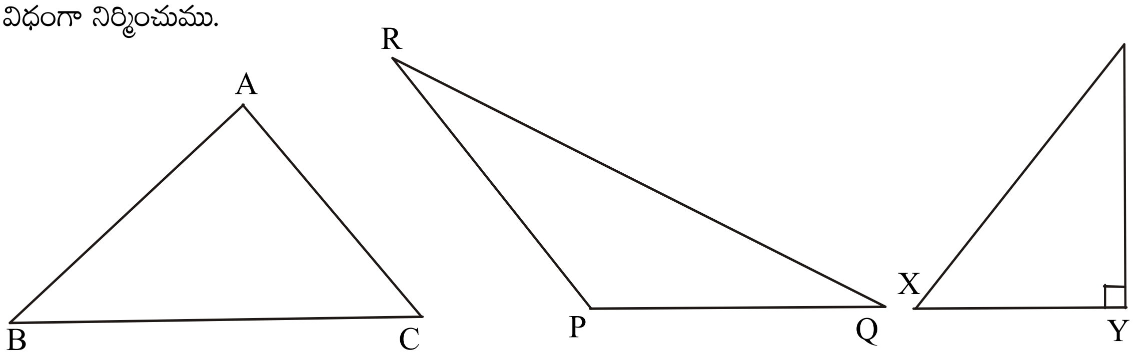
అదేవిధంగా "త్రిభుజంలో గరిష్ఠ కోణానికి ఎదురుగా ఉన్న భుజం కూడా పెద్దదిగా ఉంటుంది".

త్రిభుజంలోని భుజాల మధ్యగల మరిన్ని సంబంధాలను తెలుసుకుందాం.

4.3.7 త్రిభుజము నందలి ఏవేని రెండు భుజాల పొడవులు మొత్తము

కృత్యం :

ఇప్పుడు మరో కృత్యం చేద్దాం. మీ నోటు పుస్తకము నందు ΔABC, ΔPQR, ΔXYZ లను మీకు నచ్చిన విధంగా నిర్మించుము.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 217
06-02-2021 14:54

వాని భుజముల పొడవులు కనుగొని, దిగువనీయబడిన పట్టికలో నమోదు చేద్దాము.

త్రిభుజము యొక్క పేరు	త్రిభుజ భుజాలు	భుజాల మొత్తం	సరియైనదా ?	అవును/కాదు
ΔABC	AB =	AB + BC =	AB + BC > CA	
	BC =	BC + CA =	BC + CA > AB	
	CA =	CA + AB =	CA + AB > BC	
ΔPQR	PQ =	PQ + QR =	PQ + QR > RP	
	QR =	QR + RP =	QR + RP > PQ	
	RP =	RP + PQ =	RP + PQ > QR	
ΔXYZ	XY =	XY + YZ =	XY + YZ > ZX	
	YZ =	YZ + ZX =	YZ + ZX > XY	
	ZX =	ZX + XY =	ZX + XY > YZ	

పై పట్టికనుండి మనం ఏం గ్రహించగలం ? "ఒక త్రిభుజం నందలి ఏవేని రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం, మూడవ భుజం పొడవు కన్నా ఎక్కువ" అని గ్రహించగలం.

4.3.8 త్రిభుజము నందలి ఏవేని రెండు భుజాల పొడవుల మధ్యగల భేదం

కృత్యం : 4.3.10 లో చూపిన విధంగా మూడు త్రిభుజాలను తీసుకుని, దిగువ చూపిన పట్టికను పూర్తి చేయండి.

త్రిభుజము యొక్క పేరు	త్రిభుజ భుజాలు	భుజాల మధ్య పరమ భేదం	సరియైనదా ?	అవును/కాదు
ΔABC	AB =	$\lvert BC - CA\rvert =$	$\lvert BC - CA\rvert < AB$	
	BC =	$\lvert CA - AB\rvert =$	$\lvert CA - AB\rvert < BC$	
	CA =	$\lvert AB - BC\rvert =$	$\lvert AB - BC\rvert < CA$	
ΔPQR	PQ =	$\lvert QR - RP\rvert =$	$\lvert QR - RP\rvert < PQ$	
	QR =	$\lvert RP - PQ\rvert =$	$\lvert RP - PQ\rvert < QR$	
	RP =	$\lvert PQ - QR\rvert =$	$\lvert PQ - QR\rvert < RP$	
ΔXYZ	XY =	$\lvert YZ - ZX\rvert =$	$\lvert YZ - ZX\rvert < XY$	
	YZ =	$\lvert ZX - XY\rvert =$	$\lvert ZX - XY\rvert > YZ$	
	ZX =	$\lvert XY + YZ\rvert =$	$\lvert XY - YZ\rvert < ZX$	

గమనిక : $|6 - 5| = |5 - 6| = 1$

$|x - y|$ విలువ ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకము, x మరియు y ల మధ్య పరమమూల్య విలువ = $|x - y|$

పైన గమనించిన అంశాల వారీగా మనము ఏం నిర్ధారించగలము?

"ఏదేని ఒక త్రిభుజంలో ఏవేని రెండు భుజాల మధ్య పరమ భేదమయిననూ, మూడవ భుజం కన్నా తక్కువ ఉంటుంది". అని నిర్ధారించగలము.

త్రిభుజాల ధర్మాలననుసరించి కొన్ని ఉదాహరణలు ప్రయత్నిద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : "ఒక త్రిభుజంలోని భుజాల పొడవులు 6 సెం.మీ, 5 సెం.మీ మరియు 8 సెం.మీ" ఉండవచ్చు. అని ఆమీనా అన్నది? నీవు ఆమెతో ఏకీభవిస్తావా? నీ జవాబును సమర్థించుము.

సాధన : త్రిభుజంలోని భుజాలు వరుసగా

$AB = 6$ సెం.మీ.

$BC = 5$ సెం.మీ.

$CA = 8$ సెం.మీ.

ఏవేని రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం పరిశీలించగా

$\Rightarrow \quad AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$

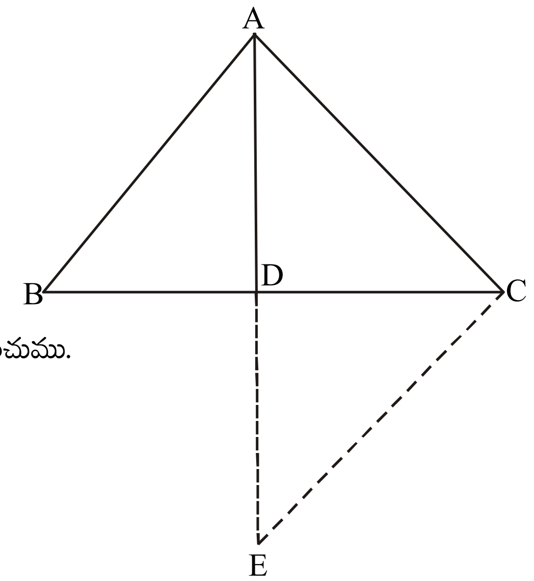
$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$

$CA + AB = 6 + 8 = 14 > 5$

ఏవేని రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడవ భుజం కన్నా ఎక్కువ ఉంది కావున త్రిభుజం నిర్మించవచ్చు.

అవును, నేను ఆమెతో ఏకీభవిస్తాను.

ఉదాహరణ 10 : క్రింద నీయబడిన పటంలో ΔABC నందు AD మధ్యగతము, అయిన $AB + AC > 2AD$ అని నిరూపించుము.



సాధన : $AD = DE$ అగునట్లు AD ని E వరకు పొడిగించుము.

C నుండి E ని కలుపుము.

$\Delta ABD, \ \Delta ECD$ నందు

$BD = DC$

[D మధ్యబిందువు దత్తాంశం ప్రకారం BC]

$\angle ADB = \angle EDC$　　　[$\because$ శీర్షాభిముఖకోణాలు]

మరియు $AD = DE$ (నిర్మాణం ప్రకారం)

$\therefore \ \Delta ADB \cong \Delta EDC$

$\therefore \ AB = EC$ [$\because$ సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 219　　06-02-2021 14:54

ఇప్పుడు ΔACE నందు

$EC + AC > AE$ [∵ త్రిభుజం నందు ఏవేని రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తమైననూ, మూడవ భుజం కన్నా ఎక్కువ]

$\Rightarrow EC + AC > AD + DE$ $| \because AE = AD + DE$

$\Rightarrow EC + AC > AD + AD$ $| \because DE = AD$

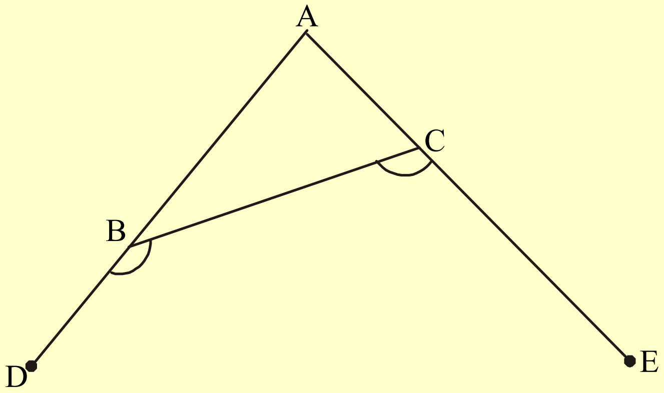
$\therefore EC + AC > 2AD$

$AB + AC > 2AD$ $(\because EC = AB)$

నిరూపించబడినది.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ΔABC నందు, $AB = 5.7$ సెం.మీ, $BC = 6.2$ సెం.మీ మరియు $CA = 4.8$ సెం.మీ. అతిపెద్దదైన, అతి చిన్నదైన కోణాల పేర్లను తెలుపుము.
2. త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు వరుసగా 6 సెం.మీ మరియు 9 సెం.మీ. ఈ దత్తాంశం అనుసరించి సాధ్యపడు మూడవ భుజం కొలతను తెలపండి.
3. దిగువ నీయబడిన పటంలో $\angle CBD > \angle BCE$ అయినట్లయితే $AB > AC$ అని నిరూపించుము.



4. త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల మొత్తం, ఎల్లప్పుడూ మూడు మధ్యగతాల పొడవుల మొత్తం కన్నా ఎక్కువే ఉంటుందని నిరూపించండి.

[**Hint :** 1. ఒక శీర్షం నుండి ఎదుటి భుజం యొక్క మధ్య బిందువు గీయబడిన రేఖాఖండమును "మధ్యగతము" అంటారు. 2. ఉదాహరణ 10లో చూడుము].

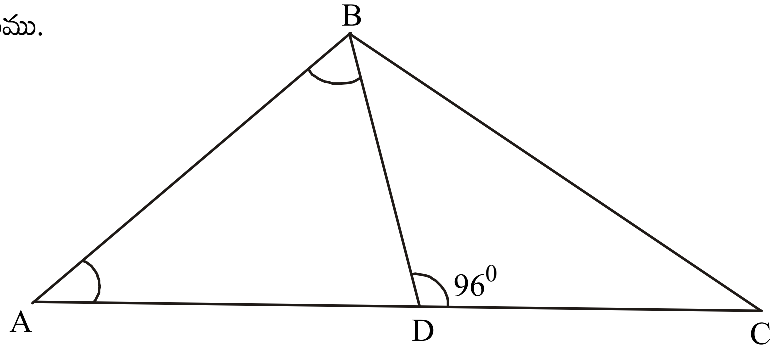
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 220 06-02-2021 14:54

అభ్యాసము

1. ΔABC నందు $\angle A = 3\angle B$ మరియు $\angle C = 2\angle B$. అయినట్లయితే ఆ త్రిభుజంలో గల మూడు కోణాలను కనుగొనుము.

   [Hint : Let $\angle B = x$, then $\angle A = 3x$ and $\angle C = 2x$ use $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$]

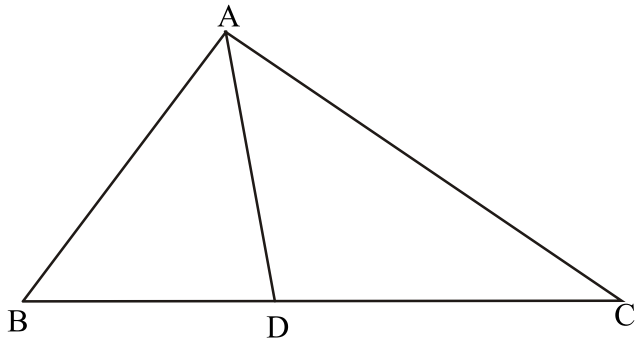
2. దిగువనీయబడిన పటం నుండి $\angle ABD = 3\angle DAB$ మరియు $\angle BDC = 96^0$ అయిన $\angle ABD$ ని కనుగొనుము.



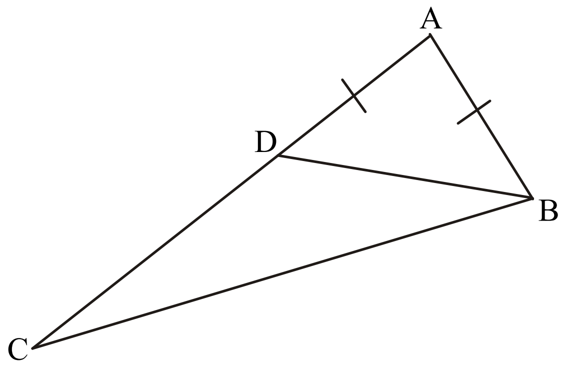
3. ఏదేని ఒక త్రిభుజంలో రెండు లంబకోణాలు ఉండవచ్చా ?

4. త్రిభుజం యొక్క ఒక బాహ్యకోణం 125^0 మరియు ఎదురెదురు అంతరకోణాలు $2:3$ నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

5. దిగువ నీయబడిన పటం ΔABC నందు, BC పై D ఏదో ఒక బిందువు. $AB > AC$ అయినట్లయితే $AB > AD$ అని నిరూపించుము.

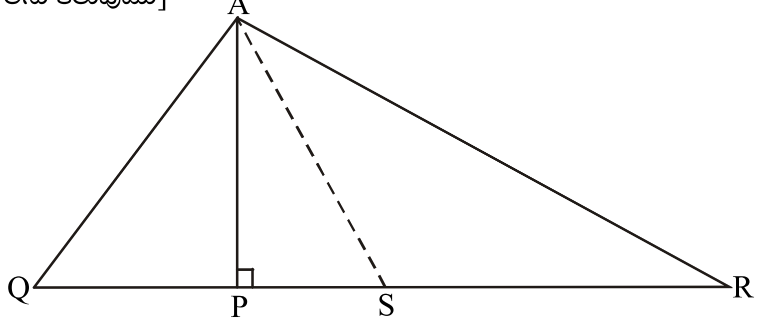


6. దిగువ నీయబడిన పటం నుందు, $AB = AD$ అయినట్లయితే $BC > AD$ అని నిరూపించుము.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 221 06-02-2021 14:54

7. దిగువనీయ బడిన పటం నందు, $AP \perp QR$, $PR > PQ$ మరియు $PS = PQ$. అయినచో $AR > AQ$ అని చూపుము. [Hint : A, S లను కలుపుము]



ముఖ్యాంశాలు

- మూడు రేఖాఖండములచే ఆవరించబడి ఉన్న సరళ సంవృత పటాన్ని త్రిభుజం అంటారు.
- భుజాల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు.
- ఒక త్రిభుజంలోని అన్ని భుజాల పొడవుల కొలతలు వేరువేరుగా ఉంటే, ఆ త్రిభుజాన్ని "విషమబాహ్య త్రిభుజం" అంటారు.
- ఒక త్రిభుజంలోని ఏవేని రెండు భుజాల పొడవులు సమానం అయితే ఆ త్రిభుజాన్ని "సమద్విబాహు త్రిభుజం" అంటారు.
- ఒక త్రిభుజంలోని అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం అయితే ఆ త్రిభుజాన్ని "సమబాహు త్రిభుజం" అంటారు.
- కోణాల ఆధారంగా, త్రిభుజాలు మూడు రకాలు.
- ఒక త్రిభుజంలో గల అన్ని కోణాలు అల్పకోణాలైతే ఆ త్రిభుజాన్ని "అల్పకోణ త్రిభుజం" అంటారు.
- ఒక త్రిభుజంలో గల ఏదేని ఒక కోణం మాత్రమే అధిక కోణం అయినట్లయితే ఆ త్రిభుజాన్ని "అధిక కోణ త్రిభుజం" అంటారు.
- ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణం మాత్రమే లంబకోణం అయినట్లయితే, ఆ త్రిభుజాన్ని "లంబకోణ త్రిభుజం" అంటారు.
- త్రిభుజంలోని 3 భుజాలు, 3 కోణాలను మూలకాలు అంటారు.
- త్రిభుజంలోని మూడుకోణాల మొత్తం 180^0.
- త్రిబుజం యొక్క బాహ్యకోణం, దాని ఎదురెదురు అంతర కోణాల మొత్తానికి సమానం.
- త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాలు సమానం కాకపోతే, పెద్ద భుజానికి ఎదురుగా గరిష్ఠకోణం ఉంటుంది.
- త్రిభుజంలోని గరిష్ఠ కోణానికి ఎదురుగా ఉండే భుజం కూడా పెద్దదిగా ఉంటుంది.
- త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం అయిననూ మూడవ భుజం కన్నా పెద్దదిగా ఉంటుంది.
- త్రిభుజంలోని ఏవైనా రెండు భుజాల పరమ భేదము అయిననూ, మూడవ భుజం కన్నా చిన్నదిగా ఉంటుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 222 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.4 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

4.4.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

* ఇచ్చిన రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమో, కాదో సరిచూడగలరు, వివరించగలరు.
* రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వంనకు నియమములను తెలుపగల్గుతారు.
* సర్వసమానత్వ నియమాలను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించగల్గుతారు.

4.4.1 పరిచయం

మనము దైనందిన జీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో ఎన్నో జ్యామితయ పటాలు టవర్లు, బిల్డింగులు, చెట్ల మొదలగునవి గమనిస్తుంటాం. టవర్లు, బిల్డింగులలో మనం సాధారణంగా త్రిభుజాకారాలు గమనిస్తాం. ఈ టవర్లు, బిల్డింగ్‌లలో గల త్రిభుజాల ఒకే విధంగా కనిపిస్తాయి.

ఒకే పరిమాణం కల ఆకారాలను సర్వసమానం అని చెప్పవచ్చు. ఈ ధర్మాన్నే సర్వసమానత్వ ధర్మం అంటారు.

ఈ అధ్యాయంలో మనం రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం గురించి, వాటి అనురూప భుజాలు, కోణాల మధ్యగల సంబంధాన్ని గురించి విపులంగా అధ్యయనం చేద్దాం.

కృత్యం

రెండు ₹100 రూపాయల నోట్లను తీసుకొని ఒకదానిని ఒక నోటుపై అమర్చండి. మీరు ఏమి గమనించారు ?

పటం. 4.4.1

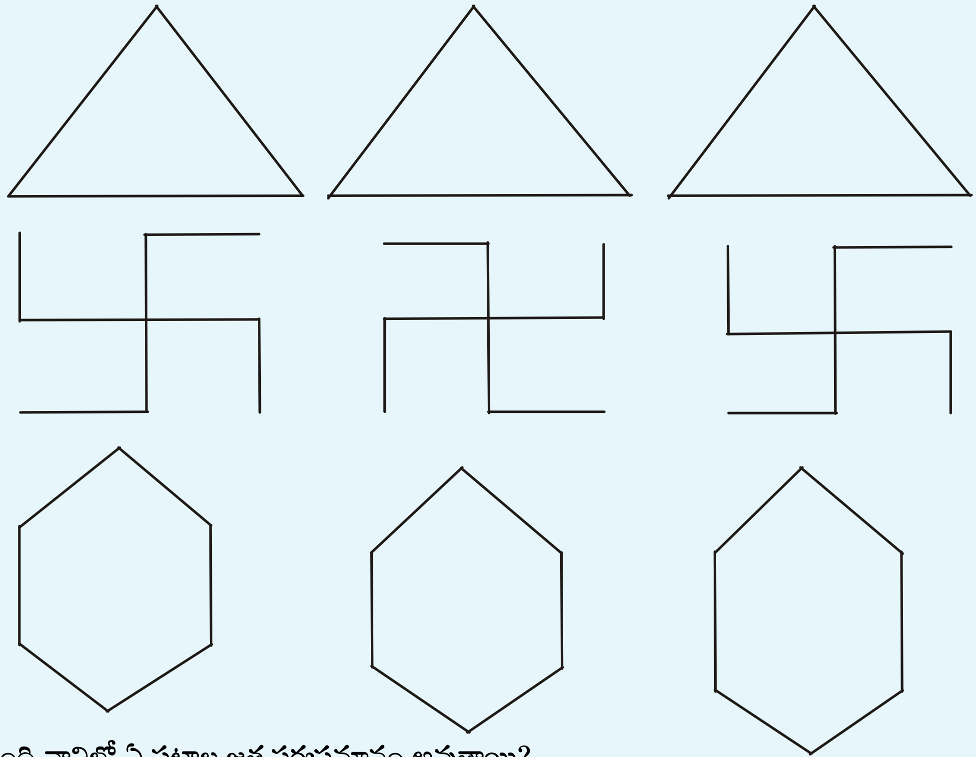
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 223 06-02-2021 14:54

ఒక నోటును మరొకటి సంపూర్ణంగా, మరియు ఖచ్చితంగా ఆక్రమిస్తుందని గమనించగలము. అంటే ఒక దానిపై ఒకటి అధ్యారోహణం చేయబడతాయి. ఈ చిన్న పరీక్ష ద్వారా రెండు నోట్లు ఒకే ఆకారం. ఒకే పరిమాణం కలవని నిరూపించగలము. ఇలాంటి వస్తువులు సర్వసమానం అని చెప్పవచ్చు. సర్వసమాన వస్తువులు ఒకదానికి ఒకటి ప్రతి రూపాలుగా ఉంటాయి.

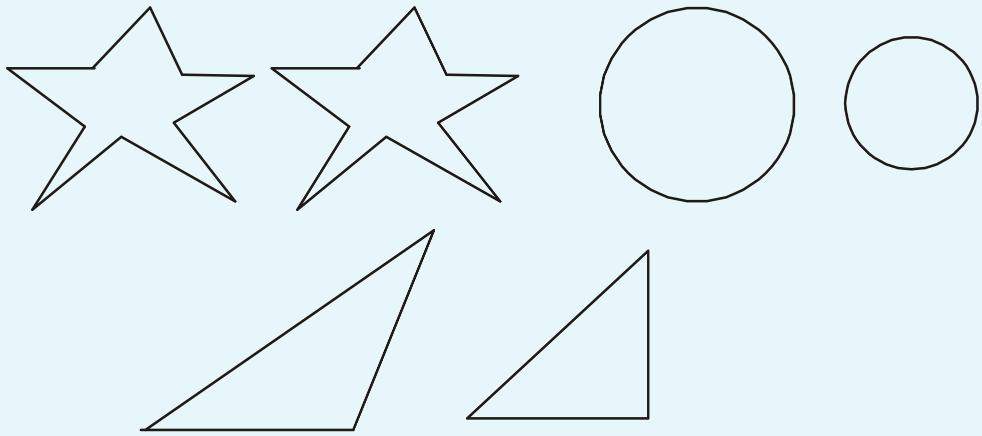
మీరు మరికొన్ని సర్వసమాన వస్తువులకు, పటాలకు ఉదాహరణలు ఇవ్వగలరా?

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. దిగువ నీయబడిన పటాలు సర్వసమానమో కాదో పరీశీలించండి.



2. క్రింది వానిలో ఏ పటాల జత సర్వసమానం అవుతాయి?



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 224
06-02-2021 14:54

4.4.2 రేఖాఖండాల సర్వసమానత్వం

దిగువ నీయబడిన రేఖాఖండాల జతను గమనించండి.

పటం – (1) **పటం – (2)**

CD రేఖాఖండముపై AB రేఖాఖండమును ఉంచండి. మీరేమి గమనించారు?\'

CD ని AB రేఖ సంపూర్ణంగా ఆక్రమించిందని చెప్పవచ్చు. దీనిని బట్టి ఈ రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానం అని చెప్పగలము.

సంజ్ఞారూపంలో $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ అని వ్రాస్తాము.

> $\cong$ → సర్వసమానత్వ గుర్తు

అదే విధంగా, RS రేఖాఖండముపై PQ రేఖాఖండాన్ని ప్రతిక్షేపించగా నీవు ఏమి గమనించావు? $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ లు సర్వసమానాలు అవుతాయా?

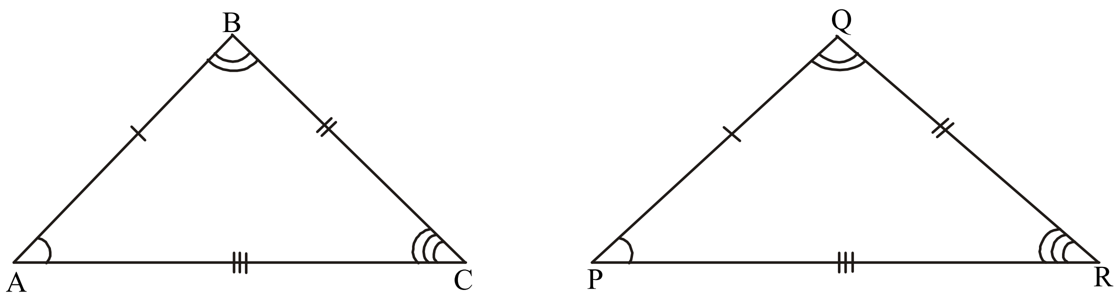
రేఖాఖండాల జత $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$ లు ఒకదానికొకటి సరిపోల్చడం లేదు. కావున ఇవి సర్వసమానం కావు.

“రెండు రేఖా ఖండాలు ఒకే పొడవు ఉన్నట్లయితే వాటిని సర్వసమానం” అని నిర్ధారించవచ్చు. విపర్యయంగా “రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానం అయితే అవి సమానం”. కొన్ని సందర్భాలలో రెండు రేఖాఖండాలు సమానమైతే AB = CD అని రాస్తాము. దీనినే మరో విధంగా $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ అని కూడా రాస్తాము.

4.4.3 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానమైతే, వాటి పొడవులు సమానం అని మనం నేర్చుకున్నాం. ఇదే భావనను మనం త్రిభుజాలకు విస్తరించవచ్చా? త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం గురించి నేర్చుకుందాం. రెండు త్రిభుజాలు ఒక దానిపై ఒకటి అధ్యారోహణం చెందించడం వల్ల ఒకదానిని మరొకటి సంపూర్ణంగా ఆక్రమించబడుతుంది.

క్రింది త్రిభుజాలను గమనించండి.



ΔABC, ΔPQR ల గురించి మీరేమి గమనించారు?

ΔABC, ΔPQR ఒక దానినొకటి సంపూర్ణంగా ఆక్రమించబడుతున్నాయి. అనగా అవి ఒకే ఆకారం, ఒకే పరిమాణం కలిగి ఉన్నవి. కావున ΔABC, ΔPQR లు సర్వసమాన త్రిభుజాలు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 225
06-02-2021 14:54

కావున వీటిని $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని రాస్తాం.

ΔABC పై ΔPQR ను అధ్యారోహణం కావించినప్పుడు శీర్షం P. శీర్షం A పై, శీర్షం Q పై, శీర్షం B పై శీర్షం R శీర్షం C పై అదేవిధంగా $\overline{PQ}$ భుజము $\overline{AB}$ పై, $\overline{QR}$ భుజము $\overline{BC}$ పై, $\overline{PR}$ భుజము $\overline{AC}$ పై పడుచున్నది.

దీనిని బట్టి అనురూప భాగాలు (శీర్షములు, కోణములు మరియు భుజములు) ఒకదానితో ఒకటి సరిపోలి, ఒకదానితో నొకటి సమానంగా ఉన్నవి. కావున ఈ రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలలో మనకు

$\Delta ABC, \Delta PQR$ లలో

$A \rightarrow P, B \rightarrow Q, C \rightarrow R$ (అనురూప శీర్షములు)

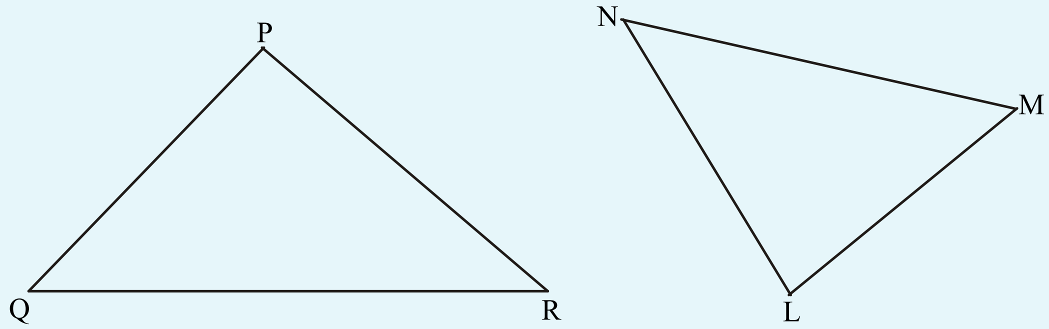
$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ (అనురూప కోణములు)

$\overline{AB} \cong \overline{PQ}, \overline{BC} \cong \overline{QR}, \overline{AC} \cong \overline{PR}$ (అనురూప భుజములు)

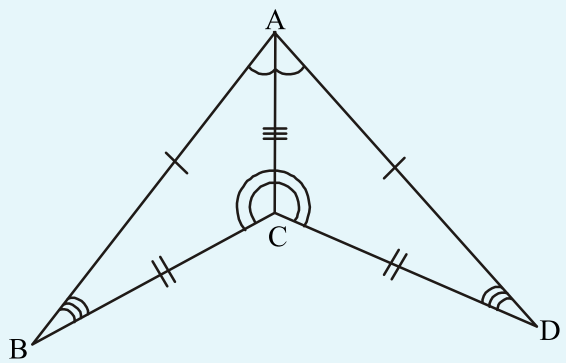
కావున $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని చెప్పవచ్చు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది పటంలో $\Delta PQR \cong \Delta LMN$ అని ఈయబడినది. వాటి అనురూప శీర్షములు, అనురూప కోణములు మరియు అనురూప భుజములను తెలపండి.



2. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అయినచో, ఆ త్రిభుజాల అనురూప సర్వసమాన భాగాలను తెలుపుము.
3. సర్వసమాన ఆకారాల గురించి ఏవైనా రెండు మీ నిజజీవిత ఉదాహరణలు తెలపండి.
4. పక్క పటం నుండి సర్వసమాన త్రిభుజాలను తెలపండి. ఆ ప్రవచనాన్ని " $\cong$ " గుర్తు ఉపయోగించి వ్రాయండి.



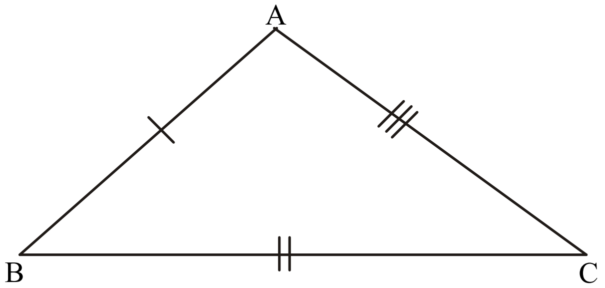
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 226　　06-02-2021 14:54

4.4.4 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నియమాలు

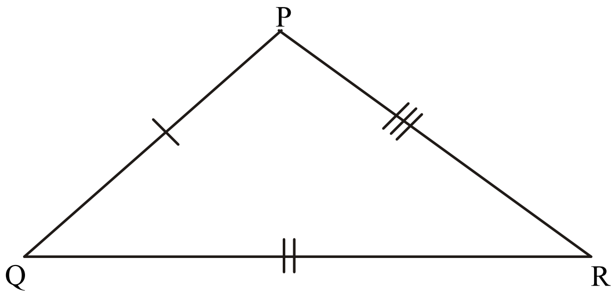
ఏవేని రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం పరిశీలించవలెను మీరు ఎలా పరిలిస్తారు ? సాధారణంగా ఒక త్రిబుజంపై మరో త్రిభుజాన్ని అధ్యారోహణం చెందించడం ద్వారా పరిశీలించవచ్చు. కాని ప్రతిసారీ ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి పరిశీలించడం సాధ్యం కాకపోవచ్చు. దీనిని అధిగమించుటకు మనం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం నియమాలను అతి తక్కువ ప్రామాణికాలతో పరీక్షించుకుంటూ నేర్చుకోవలసి ఉంటుంది. త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నియమాలను నేర్చుకొనటం ద్వారా వాటికి సంబంధించిన సమస్యలు సాధించవచ్చు.

కృత్యం 1

దిగువ పటంలో చూపిన విధంగా మరొక ΔABC ని తీసుకుందాం.



$PQ = AB$, $QR = BC$ మరియు $PR = AC$ అయ్యే విధంగా త్రిభుజము PQR ను నిర్మించుము.



ΔABC ని కత్తిరించి ΔPQR పై అధ్యారోహణం చేయగా (ఒకదానిపై మరో పటాన్ని ఉంచగా) నీవేమి గమనించావు?

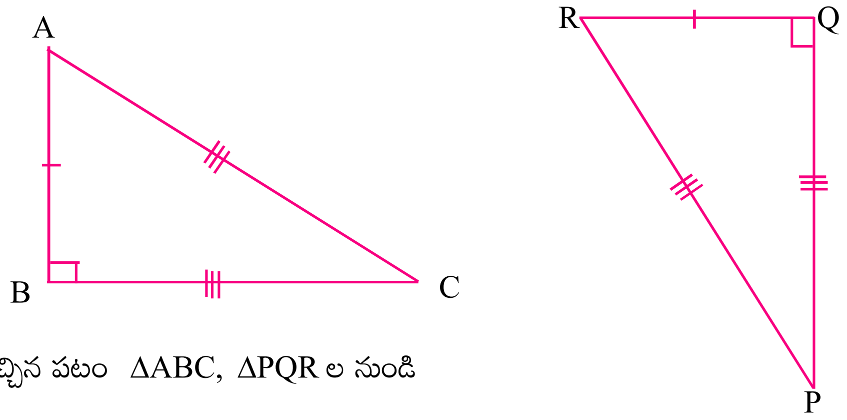
ఒక త్రిభుజం, మరో త్రిభుజాన్ని పూర్తిగా ఆక్రమించినది. కావున ఈ రెండు త్రిభుజాలు ఒకదానికి మరొకటి సర్వసమానం అని చెప్పవచ్చు. అదే విధంగా అన్ని అనురూప భాగాలు కూడా సమానం అని గమనించగలము.

ΔPQR నిర్మించునప్పుడు కేవలం ΔABC నందలి $PQ = AB$, $QR = BC$ మరియు $PR = AC$ లను మాత్రమే పరిగణనలోనికి తీసుకుని సర్వసమాన త్రిభుజాలు నిర్మించుదాం.

అనగా ఈ మూడు అనురూప భాగాల సమానత్వం ఆధారంగా సర్వసమాన త్రిభుజాలు నిర్మించుదాం. దీనినే మనం భుజం, భుజం, భుజం (భు.భు.భు) త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం నియమం అని రాస్తాము. ఏదేని ఒక త్రిభుజంలోని 3 భుజాలు వేరొక త్రిభుజంలోని అనురూప భుజాలు సమానమైతే ఆ త్రిభుజాలను సర్వసమాన త్రిభుజాలు అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 227
06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 1 : దిగువ నీయబడిన పటం నుండి $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అవుతుందో కాదో. తెల్పండి?



సాధన : ఇచ్చిన పటం ΔABC, ΔPQR ల నుండి

$AB = PQ$ భుజం

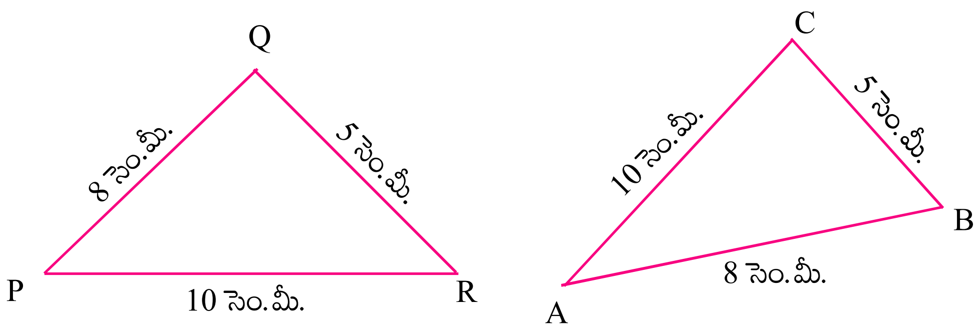
$BC = QR$ భుజం

$AC = PR$ భుజం

భు.భు.భు సర్వసమానత్వం నియమ ప్రకారం

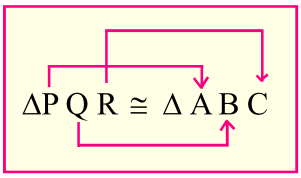
$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

ఉదాహరణ 2 : $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ అవుతుందా ? మరియు వీటి నుండి అనురూప కోణాలను గుర్తించి వ్రాయుము.



సాధన : ఇచ్చిన పటం ΔPQR, మరియు ΔABC నుండి

$PQ = AB = 8$ cm
$QR = BC = 5$ cm
$PR = AC = 10$ cm



భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

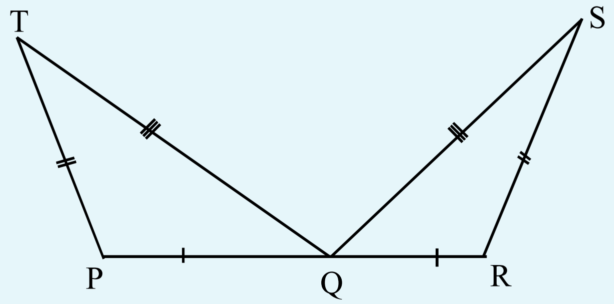
వీటి నుండి పరిశీలించగా శీర్షం P శీర్షం A యొక్క, శీర్షం Q శీర్షం B యొక్క, శీర్షం R శీర్షం C యొక్క అనురూప బిందువులు.

కావున $\angle P = \angle A$; $\angle Q = B$; $\angle R = \angle C$.

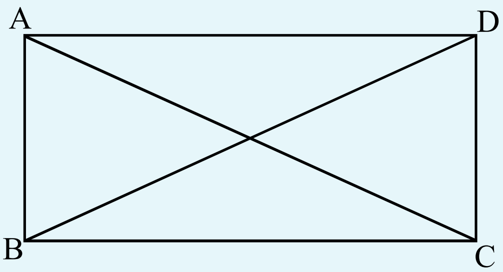
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 228 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

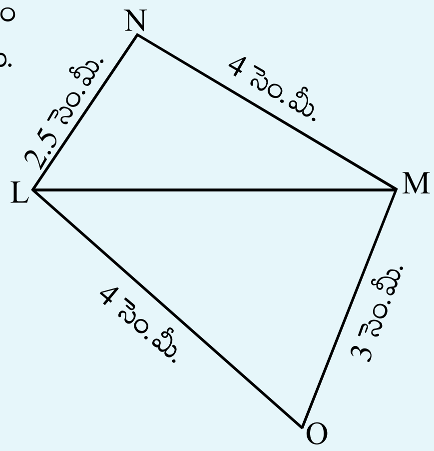
1. క్రింద నీయబడిన సర్వసమాన త్రిభుజాల నుండి, అనురూప కోణాల జతలను పేర్కొనుము.



2. ఇచ్చిన పటంనకు, భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం వర్తిస్తుందా, పరిశీలించుము? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము. AB = DC మరియు AC = DB. అయితే $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ అని చూపండి.

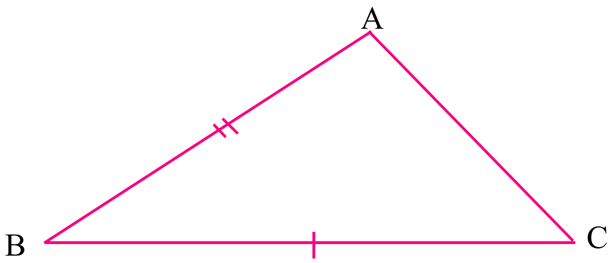


3. దిగువనీయబడిన పటంనకు, భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమం వర్తిస్తుందా, పరిశీలించుము? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము.



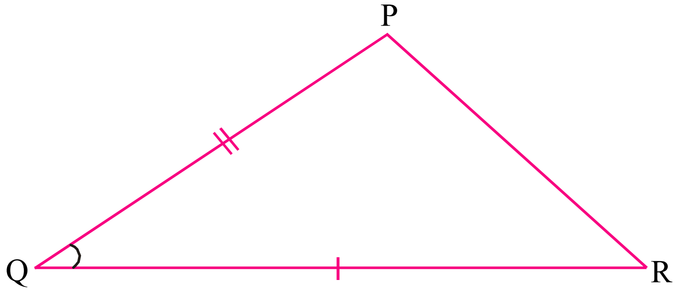
కృత్యం 2

దిగువ చూపబడిన పటం నుండి ΔABC ని పరిశీలించండి.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 229
06-02-2021 14:54

$QR = BC$, $\angle Q = \angle B$ మరియు $PQ = AB$ అగునట్లు మరియొక త్రిభుజం ΔPQR ను నిర్మించుము.



ΔABC ని కత్తిరించి ΔPQR పై అధ్యారోషణము చెందించగా నీవేమి గమనించితివి?

ఒక త్రిభుజం మరొక త్రిభుజాన్ని సంపూర్ణంగా ఆక్రమించింది. అనగా ఆ రెండు త్రిభుజాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమానం.

మిగిలిన భాగాలను కూడా గణించి చూడగా, మనకు

$AC = PR$, $\angle A = \angle P$; $\angle C = \angle R$

గమనించగలము

కావున $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

ఇదే కృత్యమునకు కొనసాగింపుగా ΔABC సర్వసమానం అగు ΔPQR ను నిర్మించుటకు రెండు భుజములు $PQ = AB$, $QR = BC$ మరియు ఆ రెండు భుజాల ఉమ్మడి అంతరకోణం $\angle Q = \angle B$ ను తీసుకుంటాం.

ఈ మూడు భాగాల సమానత్వం కూడా త్రిభుజాల సర్వసమానత్వంనకు ఆధారమవుతుంది. వీటి నుండి గ్రహించిన భావనను క్రింది విధంగా వ్యక్తపరచగలం.

భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం : ఒక త్రిభుజములోని ఏవేని రెండు భుజములు వాని మధ్య గల అంతరకోణం, వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు అనురూప భుజాలు, అదేవిధంగా అనురూప అంతరకోణానికి సర్వసమానం అయితే, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయి.

ఉదాహరణ 3 : ΔPQR నందు $PQ = PR$ మరియు PS అనునది $\angle P$ యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ. అయిన $\Delta PQS \cong \Delta PRS$ అని నిరూపించుము.

సాధన : ΔPQS, ΔPRS ల నుండి

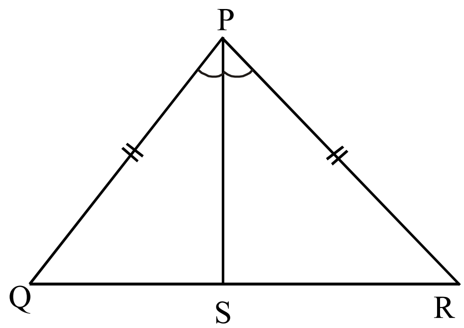
$PQ = PR$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

$PS = PS$ (సామాన్య భుజం)

$\angle QPS = \angle RPS$ [$\because$ PS కోణ సమద్విఖండన రేఖ]

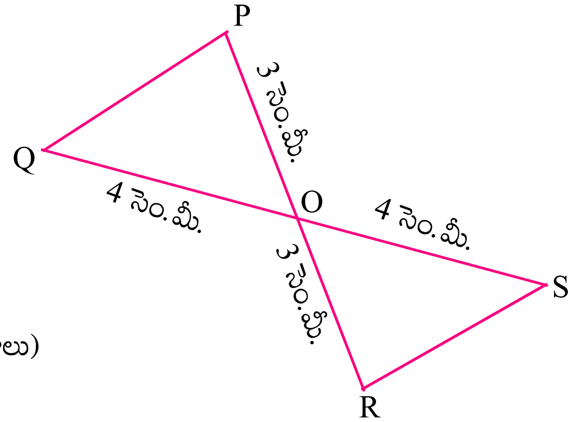
భుకోభు సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\Delta PQS \cong \Delta PRS$ నిరూపించబడినది.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 230 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 4 : ప్రక్క నీయబడిన జత త్రిభుజాలను గమనించండి. అవి సర్వ సమానాలు అవుతాయా? ఒకవేళ అయియితే వాని అనురూప భాగాలను గుర్తించుము?



సాధన : ΔOQP, ΔOSR ల నుండి

$OQ = OS = 4$ సెం.మీ.

$\angle QOP = \angle ROS$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$OP = OR = 3$ సెం.మీ.

భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

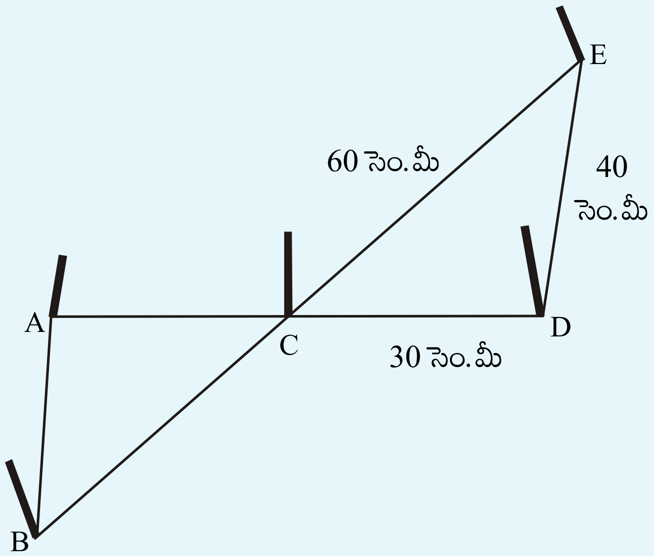
$\Delta OQP \cong \Delta OSR$

అవును, జత త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

ఇచ్చట $PQ = SR$, $\angle Q = \angle R$, $\angle Q = \angle S$ ($\because$ సర్వ సమాన అనురూప భాగాలు)

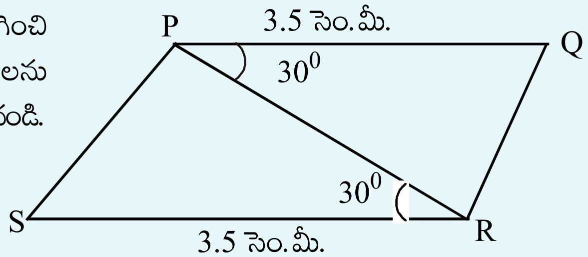
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ప్రక్క నీయబడిన పటం ఐదు వేర్వేరు స్థంభములచే ఏర్పడినది. స్థంభం C అనే స్థంబము A స్థంబము, D స్థంబము మరియు B స్థంబము, E స్థంబము కలుపు రేఖల మధ్యలో ఉన్నది. అయిన $\Delta BAC \cong \Delta EDC$ అవుతుందా లేదా తెల్పండి.



2. భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమాన్ని అనుసరించి $\Delta PQR \cong \Delta FED$ ని సాధించవలసి ఉన్నది. $PQ = FE$ మరియు $RP = DF$ అని మాత్రమే దత్తాంశంలో ఇవ్వబడినది. రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం నిరూపించుటకు మనకు ఇంకా ఎలాంటి అదనపు సమాచారం అవసరం?

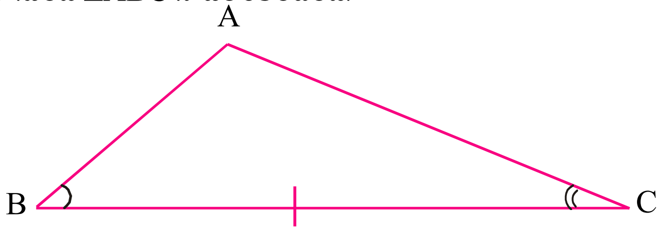
3. భు.కో.భు సర్వసమానత్వ నియమం ఉపయోగించి ప్రక్క పటం నుండి సర్వసమాన త్రిభుజాలను పేర్కొనుము? వాటిని సంజ్ఞారూపంలో వ్యక్తపరచండి.



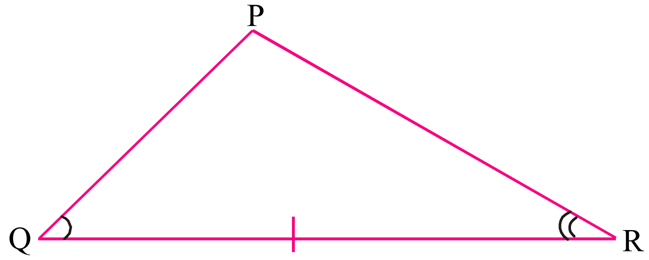
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 231
06-02-2021 14:54

కృత్యం 3

క్రింది పటం నుండి ΔABC ని పరిశీలించండి.



$QR = BC$, $\angle Q = \angle B$ మరియు $\angle R = \angle C$ అగునట్లు ΔPQR ను నిర్మించుము.

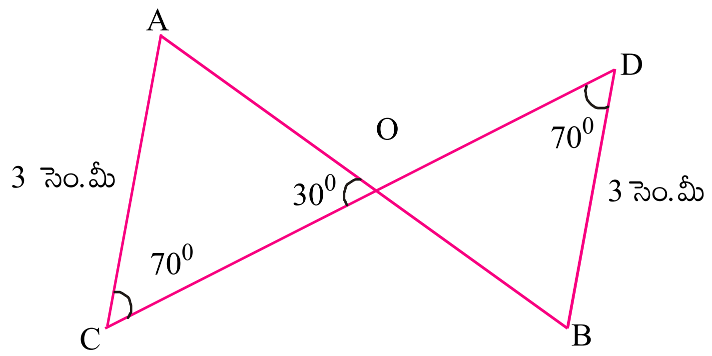


ΔABC ని కత్తిరించి ΔPQR పై అధ్యారోహణం చేయగా, నీవేమి గమనించావు. ఒకదానిపై నొకటి పూర్తిగా ఆక్రమించబడతాయి. కావున ఆ రెండూ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు. $\angle P = \angle A$, $PQ = AB$ మరియు $PR = AC$ అని కూడా మనం గమనించవచ్చు. అనగా $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అనుసంబంధాన్ని ఏర్పరచుట అనగా దత్త త్రిభుజాల మూడు అనురూపభాగాలు (రెండు కోణాలు, వాటి అంతర భుజము) సమానం అయినప్పుడు ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయని నిరూపితం అవుతుంది.

ఈ విషయాన్ని మనం క్రింద చూపిన విధంగా తెలుపవచ్చు.

కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమం : ఒక త్రిభుజం నందలి ఏవేని రెండు కోణములు మరియు వాని మధ్యగల అంతర భుజము, వేరొక త్రిభుజంలోని అనురూప కోణాలు మరియు వాని మధ్యగల అంతర భుజమునకు సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయి.

ఉదాహరణ 5 : ఇచ్చినపటం నుండి, $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ అని చూపుము.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 232 06-02-2021 14:54

సాధన : ΔAOC, ΔBOD ల నుండి

$\angle C = \angle D = 70^0$

$\angle AOC = \angle BOD = 30^0$ [$\because$ శీర్షాభిముఖ కోణాలు]

ΔAOC నందు

$\angle A + \angle C + \angle AOC = 180^0$ [$\because$ త్రిభుజంలోని అంతర కోణాల మొత్తం = 180^0]

$\Rightarrow \angle A + 70^0 + 30^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle A + 100^0 = 180^0$ [$\because$ 100^0 ను కుడివైపు పక్షాంతరం చెందించగా]

$\Rightarrow \angle A = 180^0 - 100^0 = 80^0$ ...(1)

ΔBOD నందు

$\angle B + \angle D + \angle BOD = 180^0$ [$\because$ త్రిభుజం లోని అంతరకోణాల మొత్తం180^0]

$\Rightarrow \angle B + 70^0 + 30^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle B + 100^0 = 180^0$ [$\because$ 100^0 ను కుడివైపు పక్షాంతరం చెందించగా]

$\Rightarrow \angle B = 180^0 - 100^0 = 80^0$ ...(2)

(1), (2) ల నుండి, మనం $\angle A = \angle B$ అని గమనించవచ్చు.

$\therefore \angle AOC = \angle BOD, \; AC = BD, \; \angle C = \angle D$

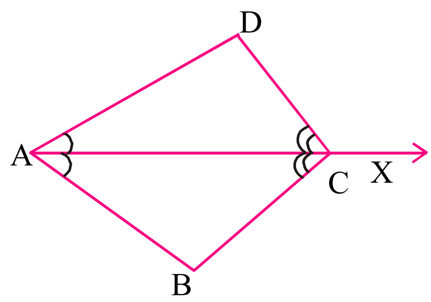
కావున కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\therefore \Delta AOC \cong \Delta BOD$

కావున నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 6 : ప్రక్క నీయబడిన పటంలో $\angle DAB$, $\angle DCB$ లను AX కిరణము సమద్విఖండన చేయుచున్నది.

అయిన $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ అని చూపుము.



సాధన : దత్తపటం నుండి $\angle DAB$, $\angle DCB$ లను కిరణము AX సమద్విఖండన చేయుచున్నది.

కావున $\angle DAC = \angle BAC$ మరియు $\angle DCA = \angle BCA$

ΔBAC, ΔDAC ల నుండి

$\angle BAC = \angle DAC$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

$AC = AC$ (సామాన్య భుజం)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 233 06-02-2021 14:54

$\angle BCA = \angle DCA$ (దత్తాంశం ప్రకారం)

$\therefore$ కో.భు.కో. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\Delta BAC \cong \Delta DAC$ నియమించబడినది.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం $\Delta DEF \cong \Delta XYZ$ అని నిరూపించవలసి ఉంది. మీకు $\angle D = \angle X$ మరియు $\angle F = \angle Z$ అని మాత్రమే ఇవ్వబడినది రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమును నిరూపించుటకు కావలసిన అదనపు సమాచారం ఏమిటి? [సూచన : దత్తాంశమునకు తగిన చిత్తుపటం గీయుము].

2. ఈ దిగువ రెండు త్రిభుజాల యొక్క కొన్ని భాగాల కొలతలు ఇవ్వబడినాయి. కో.భు.కో సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయో కాదో పరీక్షించండి. ఒకవేళ సర్వసమానాలు అయితే వాటిని సంజ్ఞా రూపంలో వ్రాయుము.

	ΔABC	ΔDEF
(i)	$\angle Q = 60^0$, $\angle R = 80^0$, $QR = 5$ సెం.మీ	$\angle D = 60^0$, $\angle F = 80^0$, $DF = 5$ సెం.మీ
(ii)	$\angle A = 80^0$, $PQ = 5$ సెం.మీ $\angle R = 30^0$,	$\angle E = 80^0$, $\angle F = 30^0$, $EF = 5$ సెం.మీ

3. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ మరియు $\angle A = 30^0$ అయితే $\angle E + \angle F$ విలువను కనుగొనుము.

అదేవిధంగా, ఏవేని రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలకు మరియొక సర్వసమానత్వ నియమమును కూడా ఏర్పరచవచ్చును. దానిని క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

లం.క.భు సర్వసమానత్వ నియమం : ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణము, ఏదేని ఒక భుజము మరియు లంబకోణము, వేరొక లంబకోణ త్రిభుజంలోని అనురూప కర్ణము, అనురూప భుజము మరియు అనురూప లంబకోణమునకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయి.

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నియమాన్ని ఉపయోగించి, దిగువ తెలిపిన సిద్ధాంతాలను తెలుపవచ్చును.

(i) త్రిభుజంలోని సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉండే కోణాలు సమానం.

(ii) విపర్యయంగా, త్రిభుజంలోని సమాన కోణాల కెదురుగా ఉండే భుజాలు సమానం.

ఉదాహరణ 7 : ఈ దిగువన కొన్ని త్రిభుజాల కొలతలు ఇవ్వబడ్డాయి. లంక.భు సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం ఈ జత త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయో పరీశీలించండి. సర్వసమాన త్రిభుజాలు అయితే వాటిని సంజ్ఞారూపంలో వ్రాయుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 234 06-02-2021 14:54

	ΔABC	ΔDEF
(i)	$\angle B = 90^0$, AC = 8సెం.మీ, AB = 3సెం.మీ	$\angle P = 90^0$, PR = 3సెం.మీ, QR = 8సెం.మీ
(ii)	$\angle A = 90^0$, AC = 5 సెం.మీ BC = 9సెం.మీ,	$\angle Q = 90^0$, PR = 8సెం.మీ, PQ = 5సెం.మీ

సాధన:

(i) దత్తాంశం ప్రకారం

$\angle B = \angle P = 90^0$

AC = PR = 8 సెం.మీ (కర్ణము)

AB = PQ = 3సెం.మీ

లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(ii) దత్తాంశం ప్రకారం

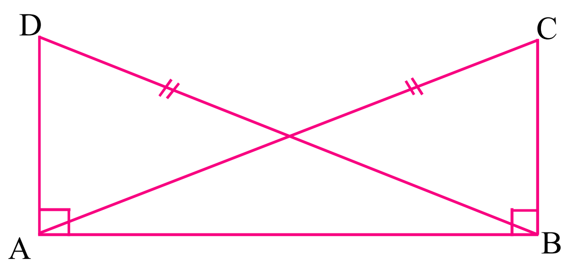
$\angle A = \angle Q = 90^0$

AC = PQ = 5 సెం.మీ.

కాని, $BC \neq PR$ [$\because$ BC = 5 సెం.మీ, PR = 8 సెం.మీ.]

కావున రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం కావు.

ఉదాహరణ 8 : దిగువనీయబడిన పటం నుండి, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ మరియు AC = BD అయిన $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ అని చూపుము.



సాధన : $\Delta ABC, \Delta BAD$ ల నుండి

$\angle ABC = \angle BAD = 90^0$

AC = BD (దత్తాంశం ప్రకారం)

AB = BA (సామాన్య భుజము)

లం.క.భుజ సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం

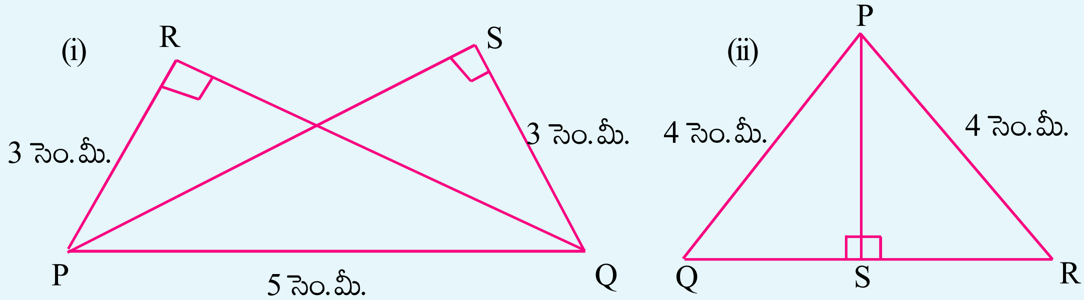
$\Delta ABC \cong \Delta BAD$

నిరూపించబడినది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 235 06-02-2021 14:54

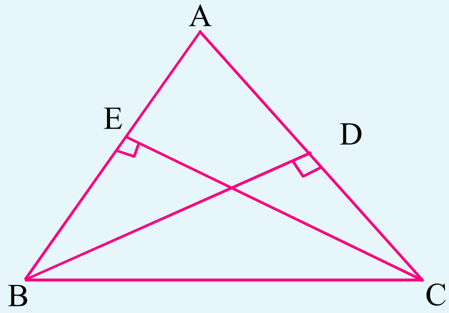
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి త్రిభుజం నందలి కొన్ని భాగాల కొలతలు ఇవ్వబడినవి. లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం నుపయోగించి, ఏయే జతల త్రిభుజాలు సర్వసమానమో తెల్పండి. అవి సర్వసమానం అయితే వాటిని సంజ్ఞారూపంలో వ్రాయండి.



2. లం.క.భు. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ అని నిరూపించబడినది. మరియు $\underline{|B} = \underline{|P} = 90^0$, AB = RP అని మాత్రమే ఇవ్వబడిన ఇంకనూ కావలసిన అదనపు సమాచారం ఏమిటి?

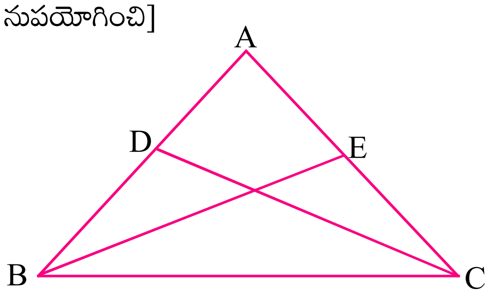
3. దిగువనీయబడిన పటం నుండి, ΔABC యొక్క ఉన్నతులు BD మరియు CE అని, BD = CE అనియూ ఇవ్వబడినది. అయినచో $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ అని నిరూపించుము.



అభ్యాసము

1. ΔABC నందు భూమి BC పై మధ్యగతము AD లంబంగా యున్నది. అయిన ఆ త్రిభుజం సమద్విబాహు త్రిభుజం అని చూపండి. [సూచన : లం.కో.భు నియమం నుపయోగించి]

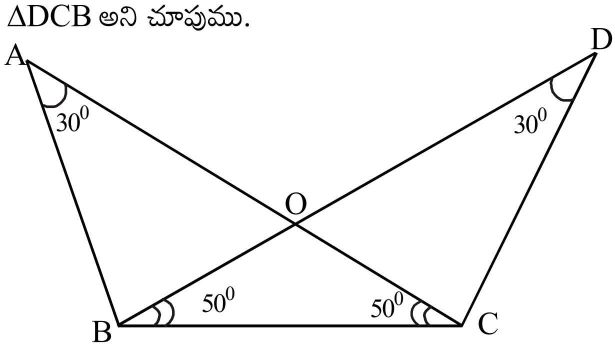
2. సమద్విబాహు త్రిభుజం నందలి సర్వసమాన భుజాల పైకి సమద్విఖండన చేయునట్లుగా గీయబడిన మధ్యగతములు కూడా సమానమని నిరూపించుము.



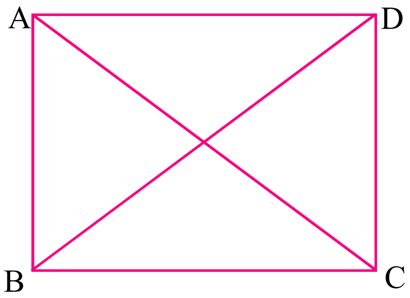
[సూచన : $\Delta DBC \cong \Delta ECB$ అని నిరూపించుట ద్వారా]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 236	06-02-2021 14:54

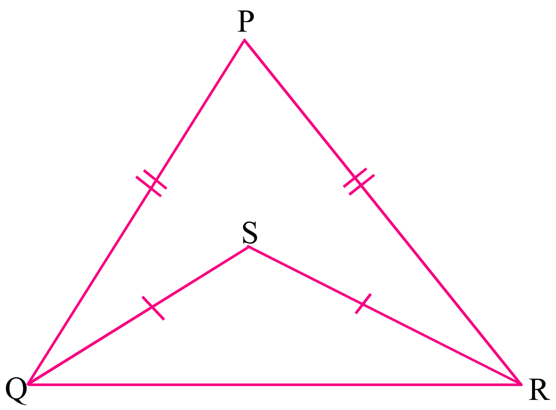
3. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ అని చూపుము.



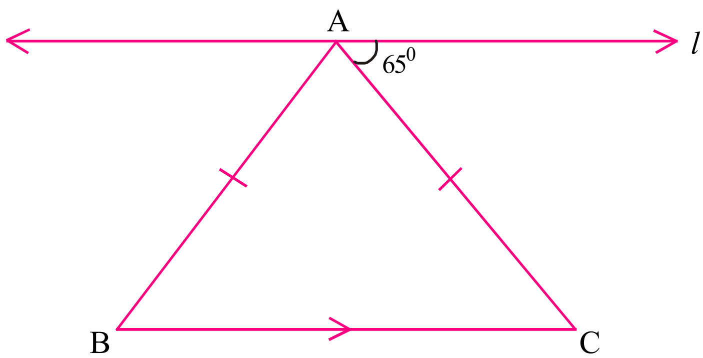
4. చతురస్రము ABCD నుండి $\Delta ABC \cong \Delta BCD$ అని చూపుము.



5. పటం నుండి, PQ = PR మరియు SQ = SR అని ఈయబడినది $\angle PQS = \angle PRS$ అని చూపుము.



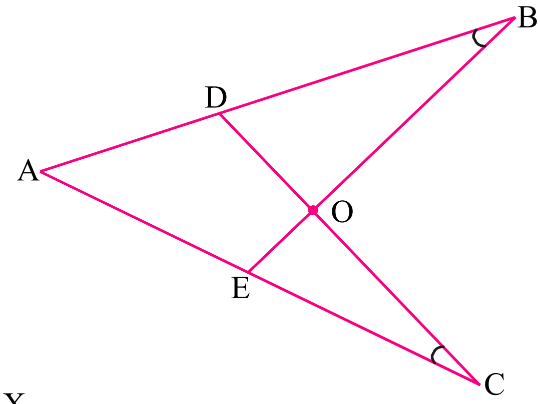
6. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి, సమద్విబాహు త్రిభుజం ABC నందు l, BC కి సమాంతరంగా గీయబడినది. అయిన త్రిభుజమునకు గల అన్ని కోణములను కనుగొనుము.



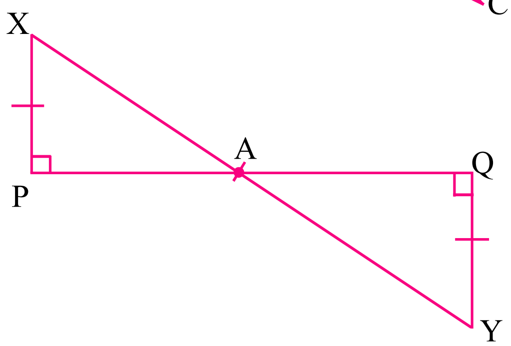
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 237
06-02-2021 14:54

7. ΔABC నందు, $AB = AC$, త్రిభుజం యొక్క అంతరంలోని ఏదేని బిందువు P. $\angle ABP = \angle ACP$ అగునట్లు గుర్తించబడినది. అయిన AP, $\angle BAC$ ని సమద్విఖండన చేయునని నిరూపించుము.

8. దిగువనీయబడిన పటం నుండి $\angle B = \angle C$ మరియు $AB = AC$, అని ఈయబడినది. $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ అని నిరూపించుము.



9. ప్రక్క నీయబడిన పటం నుండి, PX మరియు QY లు PQ నకు క్షితిజ లంబాలు మరియు $PX = QY$. అయిన $AX = AY$ అని చూపుము.



ముఖ్యాంశాలు

* ఒకే ఆకారం, ఒకే పరిమాణం గల పటాలన్నింటినీ, సర్వసమాన పటాలు అంటారు.

* రెండు సర్వసమాన పటాలను ఒకదానిపై మరొకటి అధ్యారోహణం చెందించినప్పుడు అవి పూర్తిగా ఆక్రమించబడతాయి. ఒక పటం యొక్క అన్ని భాగాలు మరియొక అన్ని అనురూప భాగాలకు సమానం అవుతాయి. ఈ పద్ధతినే అధ్యారోహణం చెందించటం అంటారు.

* రెండు రేఖాఖండాలు, $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ లు ఒకే సమాన పొడవు కలిగి ఉంటే వాటిని సర్వసమానం అని అంటారు. వాటిని $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ అని రాస్తాము. దీనినే సర్వసాధారణంగా $AB = CD$ అని కూడా రాస్తాము.

* రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అని నిరూపించుటకు మనం ఏవేని మూడు అనురూప భాగాల సమానత్వాన్ని తెలిసికొని ఉండాలి. ఈ అనురూప భాగాలు దిగువ చూపిన ప్రాతిపదికలలో ఏదేని ఒక ప్రాతిపదికనైననూ తృప్తి పరచాలి.

  (i) భు.భు.భు (ii) భు.కో.భు (iii) కో.భు.కో (iv) లం.క.భు

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 238 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.5 చతుర్భుజాలు

4.5.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- వివిధ రకాల చతుర్భుజాలను అనగా సమలంబ చతుర్భుజము, సమాంతర చతుర్భుజాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, ట్రెపీజియం మరియు చతురస్రాల గురించి నేర్చుకుంటారు.
- వివిధ రకాల చతుర్భుజాల ధర్మాలను సరిచూడగలరు.
- సమాంతర చతుర్భుజాలను కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించగల్గుతారు.
- చతుర్భుజాల భావనలపై ఆధారపడిన సమస్యలు సాధించగలరు.

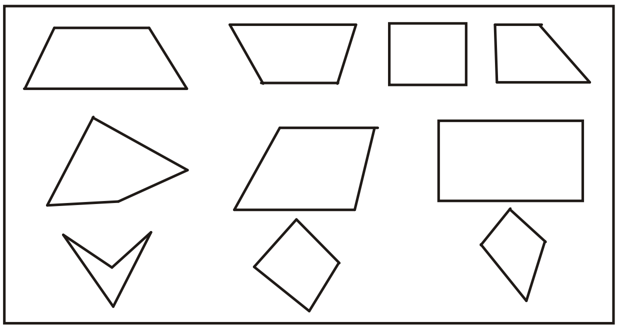
4.5.1 పరిచయం

మన నిజజీవితంలోని అనేక సందర్భాలలో నాలుగు రేఖాఖండాలచే ఆవరించబడి ఉన్న ఎన్నో పటాలు గమనించవచ్చు. నల్లబల్ల యొక్క ఉపరితలం, కిటికీ తలుపు, బ్రెడ్ ముక్కలు, గది నేల లాంటివి అన్ని నాలుగు రేఖాఖండాలచే ఆవరించబడి ఉన్న పటాలకు ఉదాహరణలు. ఇలాంటి పటాలనే చతుర్భుజాలు అంటారు.

ఈ పాఠ్యాంశంలో మనం మరిన్ని చతుర్భుజాల గురించి నేర్చుకుందాం.

4.5.2 చతుర్భుజాలు

దిగువనీయబడిన పటాలను గమనించండి. వాటిని సంబంధించిన శీర్షములు, భుజములు మరియు కోణముల సంఖ్యలను తెల్పండి.



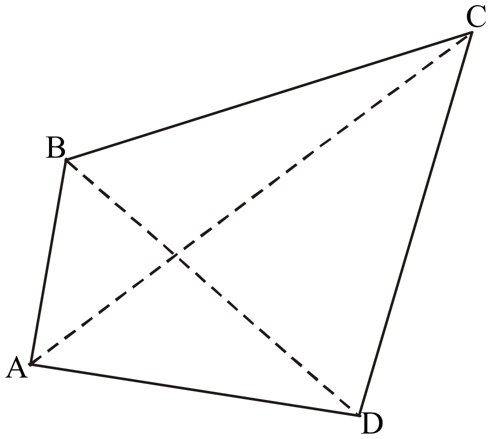
పటం. 4.5.1

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 239 06-02-2021 14:54

పై పటాల నుండి మీరేమి గమనించారు ?

అన్ని రకాల పటాల యందు ఒకే సంఖ్యలో భుజాలు, కోణాలు మరియు శీర్షాలు కలవని గమనించి ఉంటారు. మరియు ఇవన్నీ సంవృత పటాలు అని గమనిస్తాము. అదే విషయాన్ని క్రింద విధంగా తెలపగలము.

"నాలుగు రేఖాఖండాలచే ఆవరించబడి ఉన్న సరళ సంవృత పటాన్ని చతుర్భుజమని అంటారు".



ఈ చతుర్భుజాల గురించి మరింత అధ్యయనం చేద్దాం. ఇచ్చిన్న పటంలో చూపిన పటాన్ని మనం చతుర్భుజం ABCD లేదా ▭ABCD అని పిలుస్తాము. అదే విషయాన్ని చతుర్భుజం ABCD నందు

(i) AB, BC, CD మరియు DA లను భుజాలనీ,

(ii) A, B, C మరియు D లను శీర్షాలనీ,

(iii) $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ మరియు $\angle DAC$ లను కోణాలని పిలుస్తారు.

(iv) చతుర్భుజాలలో ఎదురెదురు శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండాలను కర్ణాలు అని అనగా AC మరియు BD లు కర్ణాలు.

(v) ఉమ్మడి శీర్షం గల భుజాలను ఆసన్న భుజాలని అనగా AB, BC లు ఆసన్న భుజాలు మరియు BC, CD లు ఆసన్న భుజాలు.

(vi) చతుర్భుజంలోని ఉమ్మడి భుజం కల ఏ రెండు కోణాలైన, ఆసన్న కోణాల జత అని అనగా $\angle ABC$, $\angle BCD$ లు ఆసన్న కోణాల జత మరియు $\angle BAD$, $\angle ADC$ లు ఆసన్న కోణాల జత అని పిలుస్తారు.

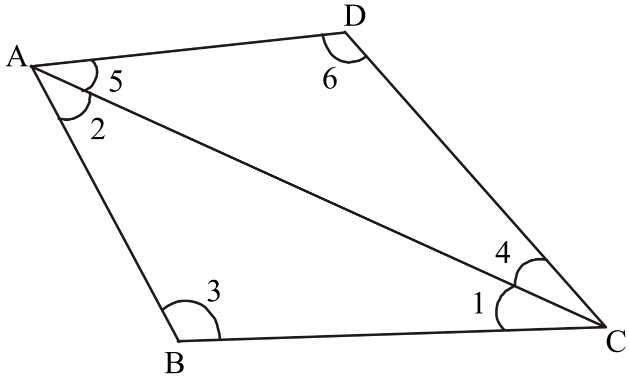
(vii) చతుర్భుజాలలో ఉమ్మడి భుజం లేని ఏ రెండు భుజాలనైనా 'ఎదుటి భుజాల జత" అనగా ABకి CD ఎదుట భుజము అలాగే ADకి BC ఎదుటి భుజము అని రెండు జతలుంటాయి.

(viii) చతుర్భుజంలోని ఉమ్మడి భుజం లేని ఏ రెండు కోణాలైనా "ఎదుటి కోణాల జత" అనగా $\angle CBA$ కి $\angle ADC$ అదేవిధంగా $\angle BAD$ కి $\angle DCB$ ఎదుటి భుజాల జత అవుతుంది.

4.5.3 చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తానికి ధర్మము

త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం గుర్తుకు తెచ్చుకుంటే, "త్రిభుజం" లోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 అవుతుంది అని తెలుసు. ఈ ధర్మానికి చతుర్భుజాల ధర్మంగా పొడిగించవచ్చా? అవును. దీనిని చతుర్భుజాల కోణాల ధర్మంగా పొడిగించవచ్చు. చతుర్భుజాల కోణాల మొత్తం ధర్మాన్ని రాబడతాం.

కృత్యం



పటంలో చూపిన విధంగా చతుర్భుజం ABCD నుండి

AC ఒక కర్ణమని తెలుసు. AC పటాన్ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని తెలుసు. అయిన పై పటంలో ఎన్ని కోణాలు ఏర్పడ్డాయి ? $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 6$ అనే 6 కోణాలు ఏర్పడతాయని గమనించవచ్చు.

ΔABC నందు కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ ...(1)

అలాగే ΔACD నందు కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^0$ ...(2) అని తెలుసు.

సమీకరణములు (1), (2) లను కూడగా, మనకేమి లభిస్తుంది ?

$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180^0 + 180^0$

పదాలను తిరిగి రాయగా

$(\angle 2 + \angle 5) + \angle 3 + (\angle 1 + \angle 4) + \angle 6 = 360^0$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$ | $\because \angle 1 + \angle 4 = \angle C$, $\because \angle 2 + \angle 5 = \angle A$

$\therefore$ A + B + C + D = 360^0 అని నిర్ధారించగలము.

$\therefore$ చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం 360^0.

చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మంపై ఆధారపడిన కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : చతుర్భుజంలోని కోణాలు వరుసగా 55^0, 65^0 మరియు 105^0. అయిన నాలుగవ కోణంను కనుగొనుము.

సాధన : దత్తకోణాలు వరసగా 55^0, 65^0 మరియు 105^0.

$\angle A = 55^0$, $\angle B = 65^0$ $\angle C = 105^0$, $\angle D = ?$

చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ప్రకారం

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$.

$\Rightarrow \quad 55^0 + 65^0 + 105^0 + \angle D = 360^0$

$\Rightarrow \quad 225^0 + \angle D = 360^0$

$\Rightarrow \angle D = 360^0 - 225^0 = 135^0$

$\therefore$ నాల్గవ కోణం = 135^0.

ఉదాహరణ 2 : చతుర్భుజంలోని కోణాలు వరుసగా x^0, $(x - 10)^0$, $(x + 30)^0$ మరియు $2x^0$ అయితే ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle A = x^0$, $\angle B = (x - 10)^0$, $\angle C = (x + 30)^0$ అ $\angle D = 2x^0$ అనుకొనుము.

చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ఆధారంగా

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$.

$\Rightarrow \quad x + (x - 10) + (x + 30) + 2x = 360^0$

$\Rightarrow \quad 5x + 20^0 = 360^0$

$\Rightarrow \quad 5x = 360^0 - 20^0$

$= 340^0$

$$x = \frac{340}{5} = 68$$

కావున $\angle A = x = 68^0$

$\angle B = (x - 10)^0 = 58^0$

$\angle C = (x + 30)^0 = 98^0$

$\angle D = (2x)^0 = 136^0$.

ఉదాహరణ 3 : చతుర్భుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి 3 : 4 : 5 : 6. అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle A = 3x$, $\angle B = 4x$, $\angle C = 5x$, $\angle D = 6x$ అనుకొనుము.

చతుర్భుజం ABCD నందలి కోణాల మొత్తం ధర్మం ఆధారంగా.

$\Rightarrow \quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$\Rightarrow \quad 3x + 4x + 5x + 6x = 360^0$

$\Rightarrow \quad 18x = 360$

$$x = \frac{\overset{20}{\cancel{360}}}{\cancel{18}_1} = 20$$

కోణాలు వరుసగా

$\angle A = 3 \times 20 = 60^0$

$\angle B = 4 \times 20 = 80^0$

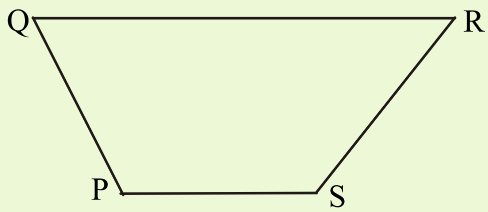
$\angle C = 5 \times 20 = 100^0$

$\angle D = 6 \times 20 = 120^0$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 242 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఇచ్చిన PQRS చతుర్భుజం నందు,
   (i) భుజాల, కోణాల, శీర్షాల మరియు కర్ణాల పేర్లను తెలుపుము.
   (ii) ఆసన్న భుజాల జతలను, ఆసన్న కోణాల జతలను, ఎదుటి భుజాల జతలను మరియు ఎదుటి కోణాల జతలను పేర్కొనుము.

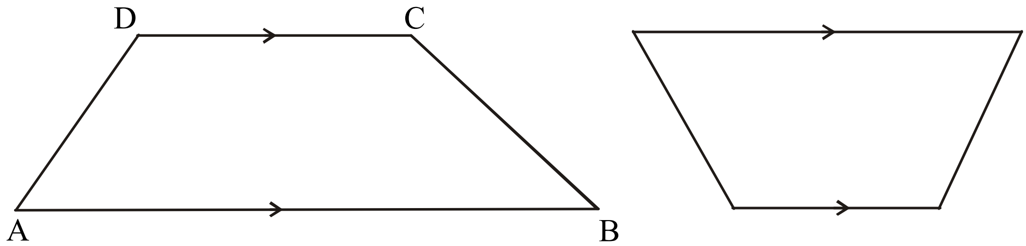


2. చతుర్భుజములోని మూడు కోణాలు వరుసగా 60^0, 80^0 మరియు 120^0 అయిన నాల్గవ కోణమును కనుగొనుము.
3. చతుర్భుజంలోని కోణాలు వరుసగా x^0, $(x + 10)^0$, $(x + 20)^0$ మరియు $(x + 30)^0$అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.
4. సాయి "చతుర్భుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి 1 : 2 : 3 : 6 లో వ్యవస్థితము కాదు" అని వాదించాడు. నీవు అతనితో ఏకీభవిస్తావా? కారణాలతో వివరించండి.

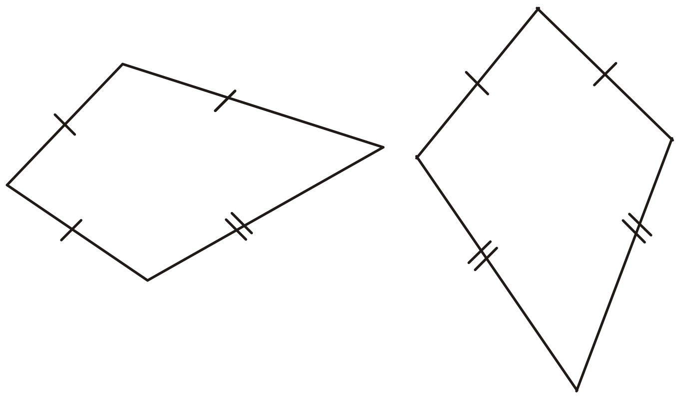
4.5.4 చతుర్భుజాల రకాలు

వేరు వేరు ఆకారాలు కలిగిన చతుర్భుజాలు మనకు పరిచయమే మరియు కోణాల మొత్తంనకు గల ధర్మం కూడా నేర్చుకున్నాము. ఇప్పుడు మనం వివిధ రకాలైన చతుర్భుజాల గురించి నేర్చుకుందాం. ఒక క్రమపద్ధతిలో వాటిని గూర్చి తెలుసుకుందాము.

1. ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం) : కేవలం ఒక జత ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలుగా గల చతుర్భుజాన్ని "ట్రెపీజియం" అంటారు.

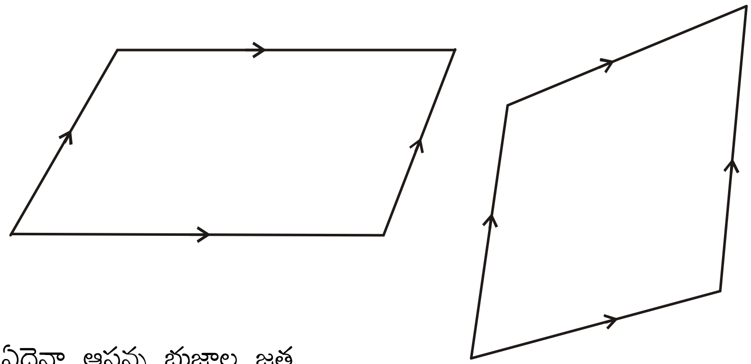


2. గాలిపటం(కైట్): రెండు జతల సమాన భుజాలు గల చతుర్భుజాన్ని గాలిపటం (కైట్) అని అంటారు.

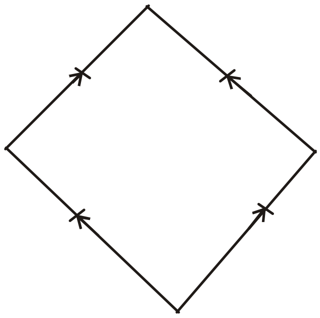


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 243
06-02-2021 14:54

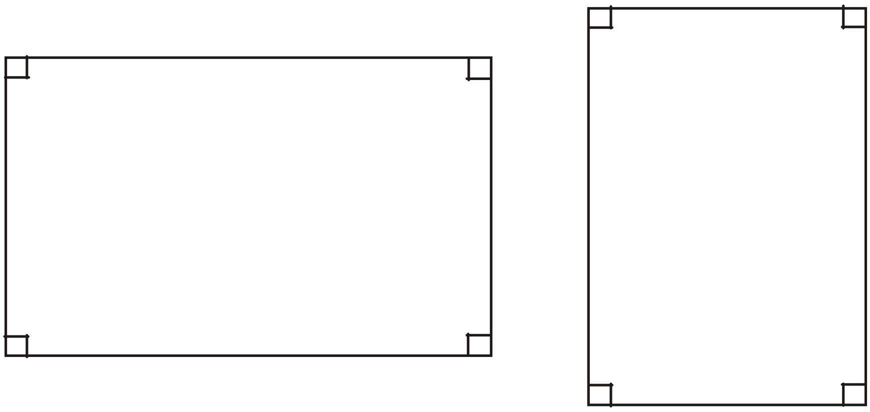
3. సమాంతర చతుర్భుజం : రెండు జతల ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా గల చతుర్భుజాన్ని "సమాంతర చతుర్భుజం" అంటారు.



4. రాంబస్ (సమచతుర్భుజం) : ఏదైనా ఆసన్న భుజాల జత సమానంగా గల చతుర్భుజాన్ని ''రాంబస్ లేదా సమచతుర్భుజం" అంటారు.



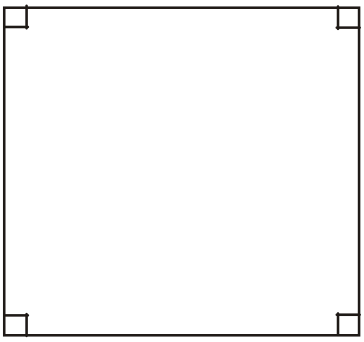
5. దీర్ఘచతురస్రం : అన్ని కోణాలు లంబకోణాలుగా గల చతుర్భుజంను "దీర్ఘచతురస్రం" అని అంటారు.



6. చతురస్రం : ఒక జత ఆసన్న భుజాలు సమానంగా గల దీర్ఘచతురస్రంను "చతురస్రం" అని అంటారు.

(లేదా)

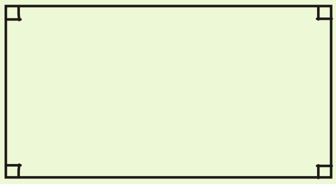
అన్ని భుజాలు సమానమై, అన్ని కోణాలు లంబకోణాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని "చతురస్రం" అని అంటారు.



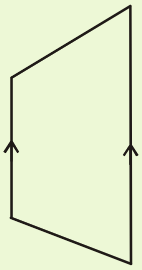
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 244
06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

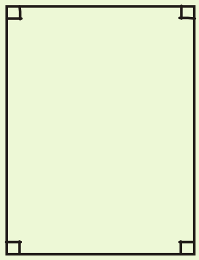
1. దిగువనీయబడిన చతుర్భుజాల పేర్లు తెల్పండి.



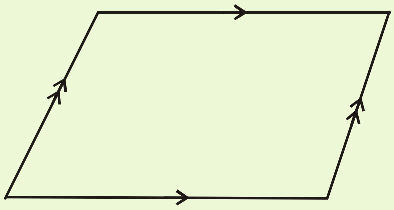
(i)



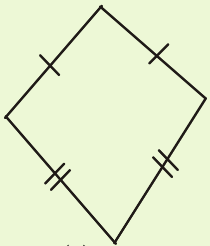
(ii)



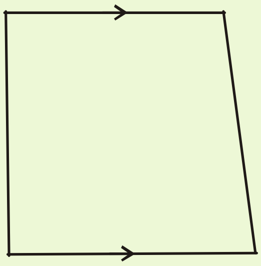
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

2. దిగువనీయబడిన ప్రవచనాలు సత్యమో, కాదో సరిచూడండి.
   (i) అన్ని దీర్ఘచతురస్రాలు, చతురస్రాలు అవుతాయి.
   (ii) దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.
   (iii) చతురస్రం ఒక సమ చతుర్భుజం అవుతుంది.
   (iv) సమచతుర్భుజం (రాంబస్) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.
   (v) చతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది
   (vi) సమాంతర చతుర్భుజం ఒక సమ చతుర్భుజం(రాంబస్) అవుతుంది.
   (vii) సమలంబ చతుర్భుజం ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.
   (viii) సమలంబ చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రం అవుతుంది.
   (ix) సమాంతర చతుర్భుజం ఒక సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుంది.

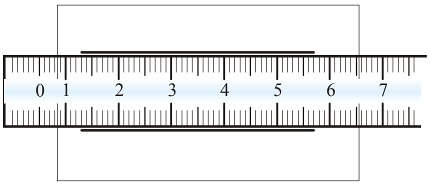
4.5.5 వివిధ రకాల చతుర్భుజాల ధర్మాలు

వివిధ రకాల చతుర్భుజాల గురించి మనం నేర్చుకున్నాం. సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘ చతురస్రం, సమచతుర్భుజం మరియు చతురస్రం వంటి వివిధ చతుర్భుజాల భుజములు, కోణములు మరియు కర్ణముల మధ్యగల సంబంధం గురించి తెలుసుకుందాం.

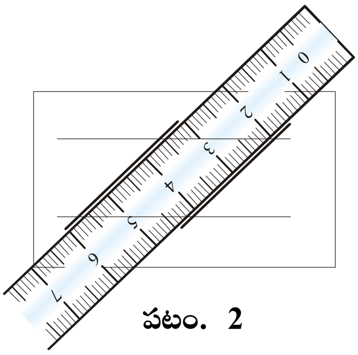
4.5.5(a) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ధర్మాలు

కృత్యం : పటం (1)లో చూపిన విధంగా ఒక తెల్ల కాగితంపై కొలమానిని (స్కేలు) తీసుకొని దాని రెండు అంచుల వెంబడి రెండు గీతలు గీయండి. పటం (2)లో చూపిన విధంగా ఆ రేఖలపైకి కొలమానిని (స్కేలు)ను త్రిప్పి మరలా అంచుల వెంబడి మరో రెండు రేఖలు గీయండి.

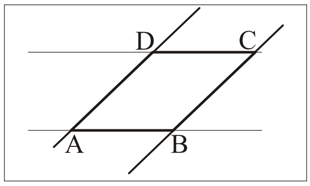
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 245
06-02-2021 14:54



పటం. 1



పటం. 2



పటం. 3

పటం (3)లో మీరేమి గమనించారు.

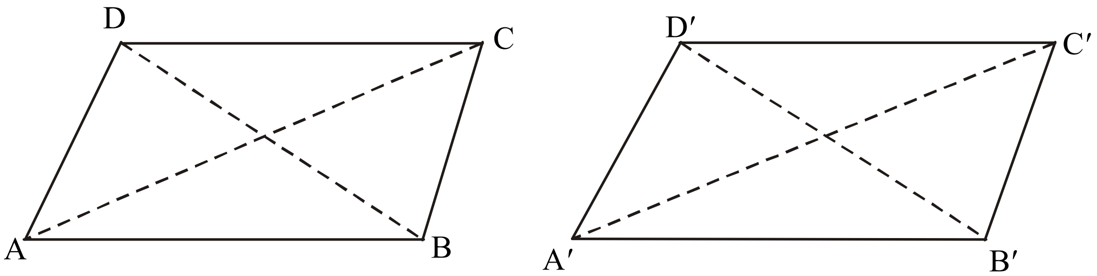
ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని, దాని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరమని గమనించగలము. అనగా AB || CD మరియు AD || BC. దీనిని బట్టి నీవేమి నిర్ధారించగలము?

"సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరం" అని నిర్ధారించగలము.

మరో కృత్యము చేద్దాము.

కృత్యము :

ఒక దానికొకటి సరూపంగా ఉన్న రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ABCD మరియు $A'B'C'D'$లను కత్తిరించండి.



పై పటాల నుండి మీరు ఏమి గమనించారు?

ఇక్కడ $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ లు పేర్లు వేరే అయినా ఒకదానికొకటి సమానం. అదేవిధంగా వాని అనురూప భుజాలు సమానం. ఇప్పుడు $\overline{A'B'}$ ను $\overline{DC}$ భుజం పై అమర్చి చూడండి. అవి ఒకదానికొకటి ఆక్రమించబడినాయా? $\overline{A'B'}$, $\overline{DC}$ ల పొడవులు సమానమేనా ? అవి ఒకదానికొకటి సమానం కాదు అని గమనించగలము. అదేవిధంగా $\overline{AD}$ భుజం పొడవు $\overline{B'C'}$ భుజం పొడవుకు సమానం కాదు. మరి మీరేమి గమనించారు? రెండు పటాలలో కూడా ఎదురెదురు భుజాలు సమానం అని గమనించాము. దీనిని బట్టి సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమానం నిర్ధారించ వచ్చును.

దీనిని బట్టి మనం ఏం నిర్ధారించగలము?

ΔCDA, ΔABC తో ఏకీభవిస్తుందని అనగా $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ అని గమనించగలము.

$\therefore \quad AB = CD$

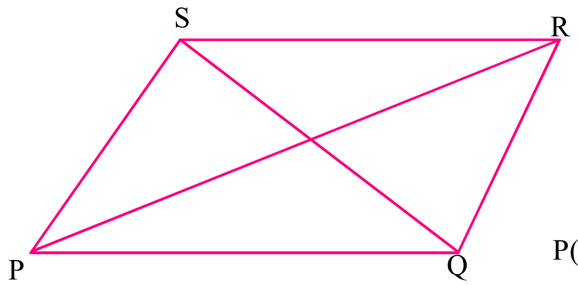
$BC = DA$ మరియు $\angle B = \angle D$

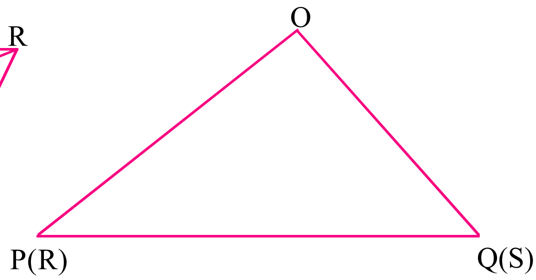
అదే విధంగా, ఈ క్రింది ప్రవచనాలు కూడా సత్యమని నిరూపించగలము.

* సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమానం.
* సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు కోణాలు సమానం.

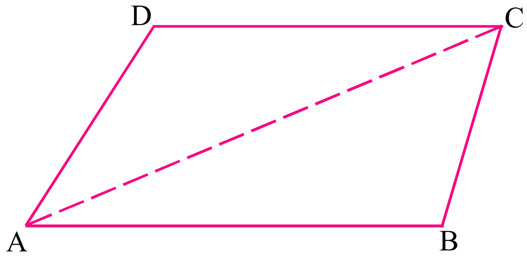
సమాంతర చతుర్భుజంలోని కర్ణాల ధర్మాల గురించి తెలుసుకోవడం కోసం మరోకృత్యం చేద్దాం.

కృత్యం : మరో అట్టముక్కను తీసుకోండి. PQRS సమాంతర చతుర్భుజాన్ని గీయండి. వాని కర్ణాలు PR, QSలను 'O' వద్ద ఖండించుకునే విధంగా దిగువ పటంలో చూపినట్లుగా గీయండి.



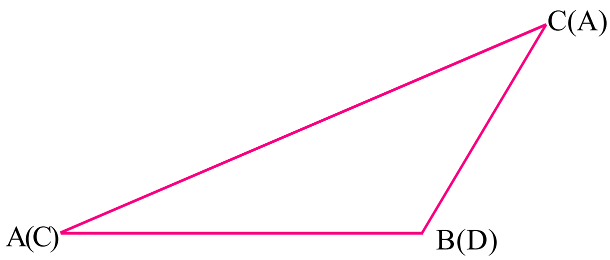


మరో అట్టముక్క తీసుకోండి. ఏదేని ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ABCD గీయండి. పటంలో చూపిన విధంగా కర్ణం ACని గీయండి.



కర్ణము AC వెంబడి సమాంతర చతుర్భుజాన్ని కత్తిరించండి. మీరేమి గమనించారు? సమాంతర చతుర్భుజం రెండు భాగాలుగా విభజించబడింది.

∴ ΔABC, ΔADC అను రెండు త్రిభుజాలను మనం గమనించవచ్చు. ΔADC ని ΔABC పై ఉంచగా శీర్షం D, శీర్షం Bపై మరియు భుజం CD, భుజం AB పై సరిగ్గా అమర్చబడింది.



ΔPOQ మరియు ΔROS లను కత్తిరించండి.

ΔROS ను ΔPOQ పై అమర్చగా, శీర్షం R, శీర్షం P పై అదేవిధంగా RO భుజం, POరి భుజంపై సరిగ్గా అమర్చబడింది.

అదేవిధంగా $\Delta ROS \cong \Delta POQ$ అని నిర్ధారించగలము.

∴ RO = PO మరియు OS = OQ.

దీనిని బట్టి కర్ణాలు ఒక దానినొకటి సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. దీనిని మనం ఈ విధంగా ప్రమాణీకరించవచ్చును కదా!.

"సమాంతర చతుర్భుజం కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. అదేవిధంగా దిగువ చూపిన ధర్మాలను మరియు వాటి విపర్యయ ధర్మాలను కూడా ప్రామాణీకరించవచ్చు.

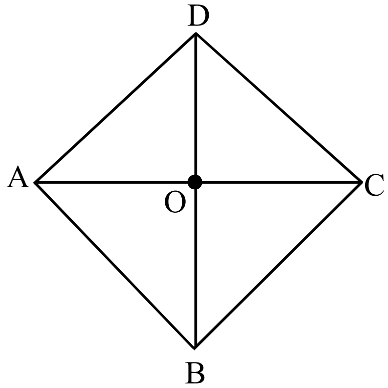
- ఒక చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమానం. అయినచో అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 247 06-02-2021 14:54

- ఒక చతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు కోణాలు సమానం అయినచో అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.
- ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటే అది సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

4.5.5 (b) రాంబస్ ధర్మాలు

రాంబస్ (సమచతుర్భుజం) కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని మనకు తెలుసు. దీనిలో అన్ని భుజాలు సమానం. దిగువనీయబడిన పటం ABCD ఒక రాంబస్ (సమ చతుర్భుజం)



ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AB = BC. ప్రతి రాంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కావున సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు రాంబస్‌కు కూడా వర్తిస్తాయి. కావున రాంబస్ యొక్క ధర్మాలను ఈ దిగువ చూపిన విధంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు.

(i) ఎదురెదురు భుజాలు సమానం అనగా AB = DC మరియు AD = BC.

(ii) ఎదురెదురు కోణాలు సమానం అనగా $\angle A = \angle C$ మరియు $\angle B = \angle D$.

(iii) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసికొంటాయి.

అనగా AO = OC మరియు DO = OB

$\therefore$ AB = BC = CD = DA.

$\therefore$ రాంబస్ యొక్క అన్ని భుజాలు సమానం $\angle AOD$ మరియు $\angle BOC$ ని కొలవగా మీరేమి గమనించారు.

ఆ కోణాలన్నీ సమానం అని గ్రహిస్తాం.

అనగా $\angle AOD = \angle BOC = 90^0$

అనగా $\angle AOD = \angle BOC = 90^0$.

మరియు $\angle AOB = \angle COD$ (శీర్షాభిముఖ కోణాల జత సమానం)

మరియు $\angle BOC = \angle DOA$.

$\therefore \quad \angle AOB = \angle COD = \angle BOC = \angle DOA = 90^0$.

దీనిని బట్టి మనం ఏమి నిర్ధారించవచ్చు ?

రాంబస్ నందు కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటామని నిర్ధారించగలము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 248 06-02-2021 14:54

రాంబస్ ధర్మాలను ఈ క్రింది విధంగా పేర్కొనవచ్చును.

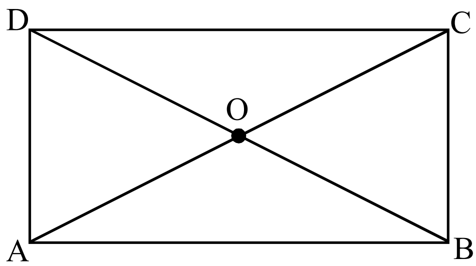
- రాంబస్ నందలి అన్ని భుజాలు సమానం.
- ఎదురెదురు కోణాలు సమానం.
- రాంబస్ నందలి కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

4.5.5(c) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క ధర్మాలు

దీర్ఘచతురస్రం కూడా అన్ని కోణాలు లంబకోణాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం అని తెలుసుకదా! సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు దీర్ఘచతురస్రానికి కూడ వర్తిస్తాయి. దీర్గచతురస్రానికి సంబంధించిన మరికొన్ని ధర్మాల గురించి నేర్చుకుందాం.

కృత్యం :

సమాంతర చతుర్భుజం ABCDని $\angle B = 90^0$ ఉండునట్లుగా గీయండి. కర్ణాలు AC మరియు BC లను క్రింది పటంలో చూపిన విధంగా కలపండి.



$\angle BAD$, $\angle BCD$ మరియు $\angle ADC$ లను కొలవండి. మీరేమి గమనించారు? $\angle BAD$, $\angle BCD$ మరియు $\angle ADC$ ల కొలతల గురించి మీరేమి చెప్పగలరు ?

$\angle BAD = \angle A$
$\angle BCD = \angle C$
$\angle ADC = \angle D$
$\angle ABC = \angle B$

అన్ని కోణాల కొలతలు 90^0 అని గమనించగలము.

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

AC మరియు BD కర్ణాలు కొలిచి చూడండి. AC మరియు BD ల గురించి మీరేమి చెప్పగలరు ?

కర్ణాలు AC మరియు BD ల పొడవులు సమానమని గమనించగలము. i.e., AC = BD. అదేవిధంగా AO, OC, BO మరియు OD లను దత్త దీర్ఘచతురస్రం నుండి కొలవండి. AO = OC మరియు BO = OD అని గమనించగలము. అనగా దీర్ఘచతురుస్రంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. దిగువ చూపిన దీర్ఘచతురస్ర ధర్మాలను ప్రామాణీకరించవచ్చు.

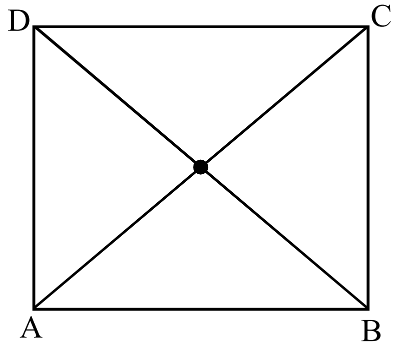
* దీర్ఘచతురస్రం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమానం.
* దీర్ఘచతురుస్రం యొక్క ప్రతికోణం లంబకోణం అవుతుంది.
* దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమానం.
* దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసికొంటాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 249

06-02-2021 14:54

4.5.5(d) చతురస్రం యొక్క ధర్మాలు

ప్రతి చతురస్రం ఆసన్న భుజాల జత సమానంగా గల ఒక దీర్ఘచతురస్రం అని తెలుసు కదా! చతురస్రం అనే భావన నుండి చతురస్రం కూడా దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క అన్ని ధర్మాలను పాటిస్తుంది అని మనం నిర్ధారించగలం. చతురస్రం యొక్క మరిన్ని ధర్మాల గురించి ఇప్పుడు చర్చిద్దాం. పటంలో చూపిన విధంగా చతురస్రం ABCDని గీయండి.



ABCD కూడా దీర్ఘచతురస్రమే కావున

(i) AB = CD మరియు AD = BC

(ii) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

(iii) AC = BD, AO = OC మరియు OD = OB.

కాని చతురస్రంలో AB = AD (ధర్మం (i)నుండి) అని తెలుసు

దీనిని బట్టి AB =AD = BC = CD అని ప్రామాణీకరించవచ్చు.

చతురస్రం ఒక సమచతుర్భుజం కూడా కావున

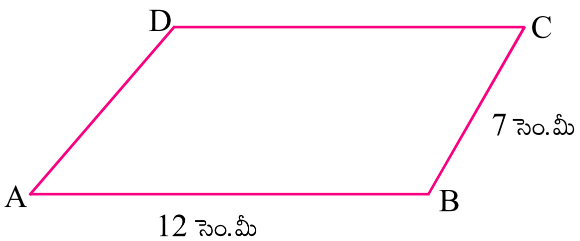
$\therefore$ చతురస్రంలోని కర్ణాలు AC మరియు BD లు పరస్పరం లంబ సమద్వి ఖండన చేసుకుంటాయి.

దిగువ చూపిన చతురస్ర ధర్మాలను ప్రామాణీకరించవచ్చు.

- చతురస్రం యొక్క అన్న భుజాలు సమానము.
- చతురస్రం యొక్క ప్రతికోణం లంబకోణం అవుతుంది.
- చతురస్రం కర్ణాలు సమానం.
- చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమచతుర్భుజం మరియు చతురస్ర ధర్మాల ఆధారంగా కొన్ని ఉదాహరణలు చేద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : ABCD సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



సాధన : సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో

AB = 12 సెం.మీ

BC = 7 సెం.మీ

DC = AB = 12 సెం.మీ [$\because$ సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు సమానం]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 250   06-02-2021 14:54

AD = BC = 7 సెం.మీ

$\therefore$ చుట్టుకొలత = AB + BC + CD + DA

= 12 + 7 + 12 + 7

= 38 సెం.మీ

ఉదాహరణ 5 : సమాంతర చతుర్భుజం PQRS లో $\angle Q = 70^0$ అయిన మిగిలిన అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజం PQRS నందు $\angle Q = 70^0$.

మనకు $\angle S = \angle Q$ [$\because$ సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు కోణాలు సమానం]

$= 70^0$

$\angle Q$, $\angle R$ లు సంపూరక కోణాలు కావున

$\angle Q + \angle R = 180^0$ | $\because \angle Q = 70^0$

$\Rightarrow 70^0 + \angle R = 180^0$

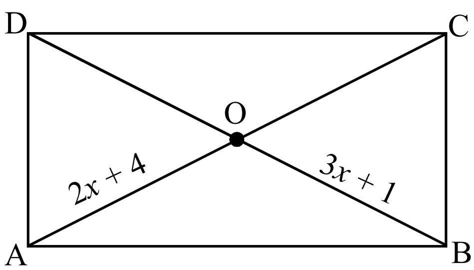
$\angle R = 180^0 - 70^0 = 110^0$

అదేవిధంగా , $\angle P = \angle R$ [$\because$ సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు కోణాలు సమానం]

$= 110^0$

$\therefore \angle P = \angle R = 110^0$ మరియు $\angle Q = \angle S = 70^0$.

ఉదాహరణ 6 : ABCD దీర్ఘచతురస్రం నందు, కర్ణాలు "O" వద్ద ఖండించుకొనుచున్నాయి. OA=$2x$+4 మరియు OB = $3x$ + 1 అయినచో 'x' విలువను కనుగొనుము.



సాధన : దీర్ఘచతురస్రం ABCD నందు

OA = $2x$ + 4

OB = $3x$ + 1

దీర్ఘచతురస్రం నందు కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసికొంటాయి. కావున

AC = 2OA = 2($2x$ + 4) మరియు

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 251
06-02-2021 14:54

$$BD = 2OB = 2(3x + 1)$$

AC = BD కావున

ఇచ్చట $2(2x+4) = 2(3x+1)$

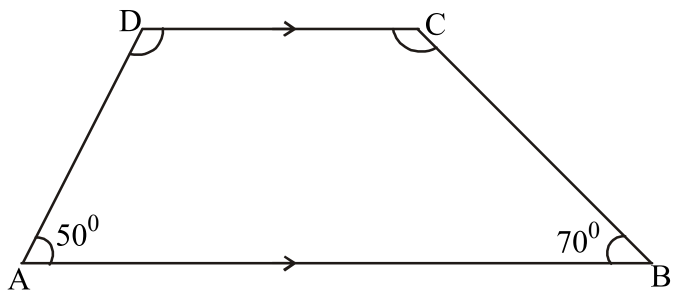
$\Rightarrow \quad 2x + 4 = 3x + 1$

$\Rightarrow \quad 3x + 1 = 2x + 4$ [$\because$ పదాలను పరస్పరం పక్షాంతరం చెందించగా]

$3x - 2x = 4 - 1$

$\therefore \quad \boxed{x = 3}$

ఉదాహరణ 7 : ట్రెపీజియం ABCD లో AB||CD. $\angle A = 50^0$, $\angle B = 70^0$. అయినచో $\angle C$ మరియు $\angle D$ లను కనుగొనుము.



సాధన : ట్రెపీజియం ABCD లో

$\angle A = 50^0$ మరియు $\angle B = 70^0$

AB || CD కావున

$\angle A + \angle D = 180^0$ [$\because$ తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు సంపూరకాలు]

$\Rightarrow \quad 50^0 + \angle D = 180^0$

$\Rightarrow \quad \angle D = 180^0 - 50^0 = 130^0$

అదేవిధంగా, $\angle B + \angle C = 180^0$

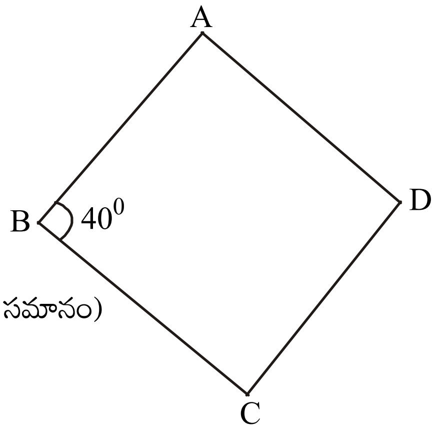
$\Rightarrow \quad 70^0 + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad \angle C = 180^0 - 70^0 = 110^0$

$\therefore \ \angle C = 110^0$ మరియు $\angle D = 130^0$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 252 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 8 : రాంబస్ ABCD లో $\angle B = 40^0$ అయిన మిగిలిన అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.



సాధన : రాంబస్ ABCD నందు $\angle B = 40^0$.

(రాంబస్ (సమచతుర్భుజం) నందు ఎదురెదురు కోణాలు సమానం)

$\Rightarrow \quad \angle D = \angle B = 40^0$

$\angle B + \angle C = 180^0$ [$\because$ తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాల మొత్తం సంపూరకాలు]

$\Rightarrow \quad 40^0 + \angle C = 180^0$

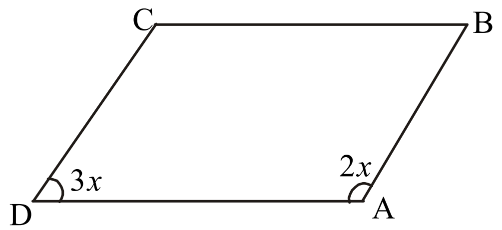
$\Rightarrow \quad \angle C = 180^0 - 40^0 = 140^0$

మరియు $\angle A = \angle C$ [$\because$ రాంబస్ యొక్క ఎదురెదురు కోణాలు]

$= 140^0$

$\therefore \ \angle A = 40^0, \ \angle C = 140^0$ మరియు $\angle D = 40^0$.

ఉదాహరణ 9 : సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న కోణాల కొలతల నిష్పత్తి 3 : 2 అయితే సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.



సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలో రెండు ఆసన్న కోణాల కొలతల నిష్పత్తి 3:2.

ఆసన్న కోణాలను $\angle A = 3x$ మరియు $\angle D = 2x$ అనుకొనుము.

$\angle A + \angle D = 180^0$ [$\because$ ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180^0]

$\Rightarrow \quad 3x + 2x = 180^0$

$\Rightarrow \quad 5x = 180^0$

$$x = \frac{\overset{36}{\cancel{180}}{}^0}{\cancel{5}_1} = 36^0$$

కావున $\angle A = 3x = 3 \times 36^0 = 108^0$

$\angle D = 2x = 2 \times 36^0 = 72^0$

మరియు $\angle C = \angle A = 108^0$ [$\because$ ఎదురెదురు కోణాలు సమానం]

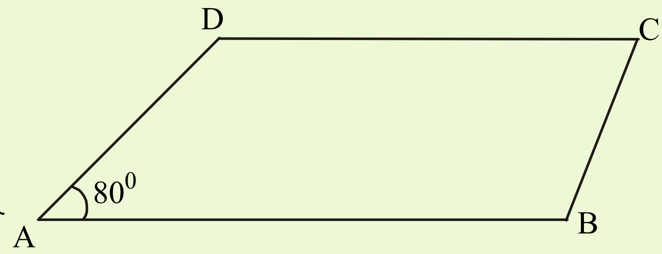
$\angle B = \angle D = 72^0$

$\therefore \ \angle A = 108^0, \ \angle B = 72^0, \ \angle C = 108^0$ మరియు $\angle D = 72^0$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 253 06-02-2021 14:54

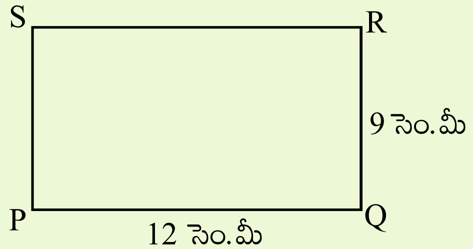
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. దిగువనీయబడిన పటంలో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం, $\angle A = 80^0$ అయిన మిగిలిన అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.



2. ABCD ఒక సమచతుర్భుజం మరియు $\angle B = 58^0$ అయిన $\angle C$ విలువ ఎంత?
3. ABCD చతురస్రంలో AC ఒక కర్ణము అయిన $\angle CAB$ విలువ ఎంత?

   [సూచన : కర్ణాలు లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి]
4. సమాంతర చతుర్భుజంలో ఆసన్న కోణాలు వరుసగా x^0 మరియు $(2x + 30)^0$. అయిన సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాలను కనుగొనుము.
5. ప్రక్క పటంలో PQRS ఒక దీర్ఘచతురస్రం. అయిన దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

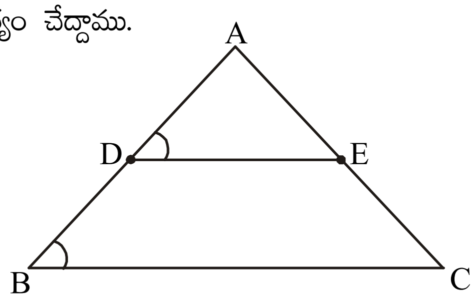


4.5.6 మధ్యబిందువు సిద్ధాంతము

మనం సమాంతర చతుర్భుజం ధర్మాలను గురించి నేర్చుకున్నాము. త్రిభుజాలకు సంబంధించి కొన్ని ధర్మాల గురించి నేర్చుకుందాం. ఈ క్రింది కృత్యం చేద్దాము.

కృత్యం :

ఏదేని ఒక త్రిభుజం ABC ని నిర్మించండి. దిగువ పటంలో చూపిన విధంగా AB, AC ల పై D, E మధ్యబిందువు లను గుర్తించండి.



BC మరియు DE ల మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని ఏర్పచగలమా ? BC మరియు DE లను కొలవండి. $DE = \frac{1}{2} BC$ అని గమనిస్తాము. అదేవిధంగా $\angle ADE$ మరియు $\angle ABC$ లను కొలవండి. $\angle ADE$ మరియు $\angle ABC$ లు సమానమని నిర్ధారించగలమా ? అవును, $\angle ADE = \angle ABC$ అని నిర్ధారించగలము.

ఈ రెండు కోణాలు ఒక జత సదృశ్యకోణాలను ఏర్పరుస్తాయి. ఒక జత సదృశ్యకోణాలు (సంగత కోణాల) సమానమైతే, ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరాలు

$\therefore \quad DE \parallel BC.$

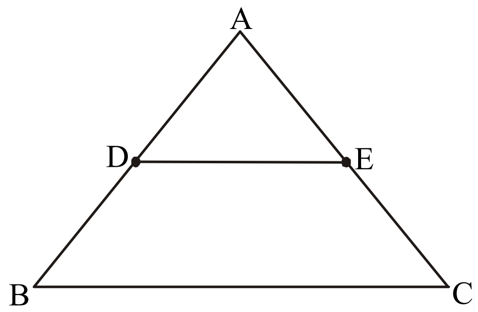
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 254 06-02-2021 14:54

ఇదే కృత్యాన్ని కొనసాగిస్తూ వేరువేరు త్రిభుజాలను ΔABC పేరుతో నిర్మించి, అదే విధంగా AB మరియు AC లపై మధ్య బిందువులను D, E లను గుర్తించి DEలను కొలవండి. ప్రతీ సందర్భంలో కూడా $DE \parallel BC$ మరియు $DE = \frac{1}{2}BC$ అని మనం గమనించవచ్చు. దీనినే సిద్ధాంత రూపంలో దిగువ చూపిన విధంగా ప్రవచించవచ్చు. "ఏదేని ఒక త్రిభుజంలో ఏవేని రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా మరియు మూడవ భుజంలో సగం ఉంటుంది". ఈ సిద్ధాంత విపర్యయం కూడా మనం సరిచూడవచ్చు. ఈ మధ్య బిందువు సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయంను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

"ఏదేని త్రిభుజంలో మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉండి, మూడవ భుజంలో సగం ఉన్న భుజం మిగిలిన రెండు భుజాల మధ్య బిందువుల గుండాపోతుంది."

అ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం మరియు విపర్యయము ఆధారంగా గల కొన్ని ఉదాహరణలు సాధన చేద్దాం.

ఉదాహరణ 10 : ప్రక్క పటంలో ΔABC నందు AB పై గల మధ్యబిందువు D మరియు $DE \parallel BC$ మరియు $AC = 12$ సెం.మీ అయిన AE ని కనుగొనుము.



సాధన : ΔABC నందు $AC = 12$ సెం.మీ, $DE \parallel BC$ మరియు AB పై మధ్యబిందువు D.

$\therefore$ E కూడా AC పై మధ్యబిందువు. [$\because$ మధ్య బిందువు సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము]

కావున $AE = \frac{1}{2}AC$

$= \frac{1}{2} \times 12$

$= 6$ సెం.మీ

కావున, $AE = 6$ సెం.మీ.

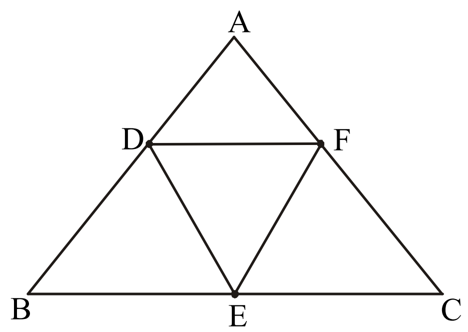
ఉదాహరణ 11 : ΔABC లో AB, BC మరియు CA లపై వరుసగా D, E, F లు మధ్యబిందువులు $AB = 8$ సెం.మీ, $BC = 7$ సెం.మీ, $CA = 6$ సెం.మీ అయిన ΔDEF ల భుజాల కొలతలను కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC నందు AB, BC మరియు CA లపై వరుసగా D, E, F లు మధ్య బిందువులు మరియు

$AB = 8$ సెం.మీ

$BC = 7$ సెం.మీ

$CA = 6$ సెం.మీ



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 255
06-02-2021 14:54

AB పై మధ్యబిందువు D, AC పై మధ్యబిందువు F

మరియు, $DF = \frac{1}{2}BC$ [∵ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారం]

$= \frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ సెం.మీ

AB పై మధ్యబిందువు D, BC పై మధ్యబిందువు E

$\Rightarrow \quad DE = \frac{1}{2}AC$ [∵ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారం]

$= \frac{1}{2} \times 6$

$= 30$ సెం.మీ

అదేవిధంగా,

$\Rightarrow \quad EF = \frac{1}{2}AB$ [∵ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతం ప్రకారం]

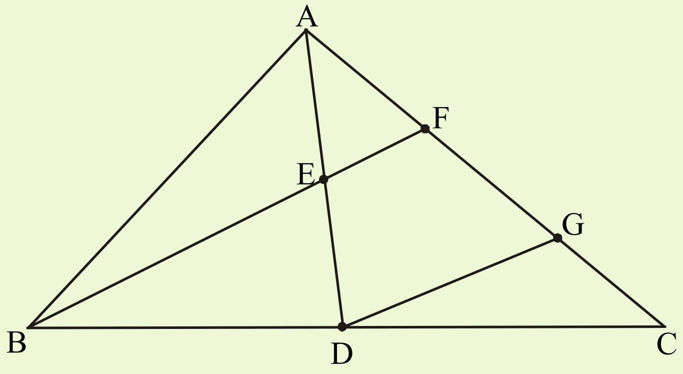
$= \frac{1}{2} \times 8$

$= 4$ సెం.మీ.

∴ ΔDEF యొక్క భుజాలు వరుసగా $DE = 3$ సెం.మీ, $EF = 4$ సెం.మీ, $DF = 3.5$ సెం.మీ.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

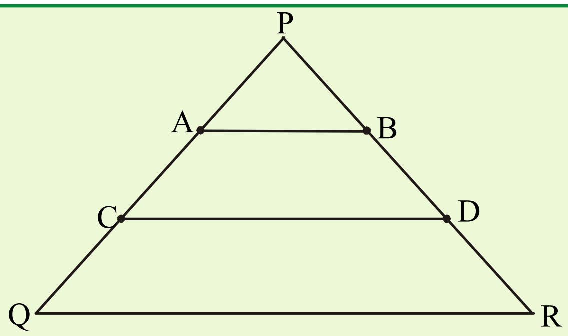
1. ΔABC లో AB మరియు AC లపై D, E లు వరుసగా మధ్యబిందువులు మరియు $BC = 10$ సెం.మీ అయిన DE ని కనుగొనుము.
2. పటం ΔABC నందు AD మధ్యగతము, AD పై E మధ్యబిందువు. అదేవిధంగా AD ని BE పై గల బిందువు F వరకు పొడిగించుము. AC పై గల బిందువు F వరకు పొడిగించుము. మరియు $DG \parallel EF$. $AC = 9$సెం.మీ అయితే AF ని కనుగొనుము.



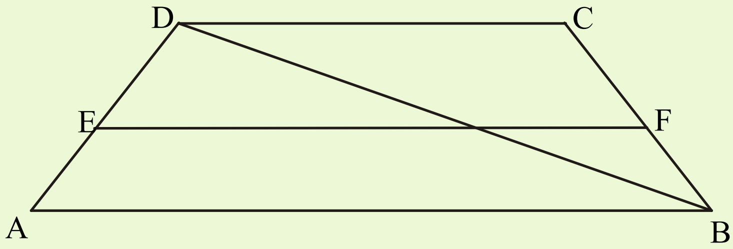
[**సూచన:** ΔADG మరియు ΔCBF ని త్రిభుజాలను పరిగణించండి.]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 256 06-02-2021 14:54

3. ప్రక్క పటం ΔPQR నందు, A, C బిందువులు PQ భుజాన్ని $AB \parallel CD \parallel QR$ అయ్యే విధంగా మూడు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తున్నాయి. B, D బిందువులు PR భుజాన్ని కూడా మూడు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుందని తెలపండి.

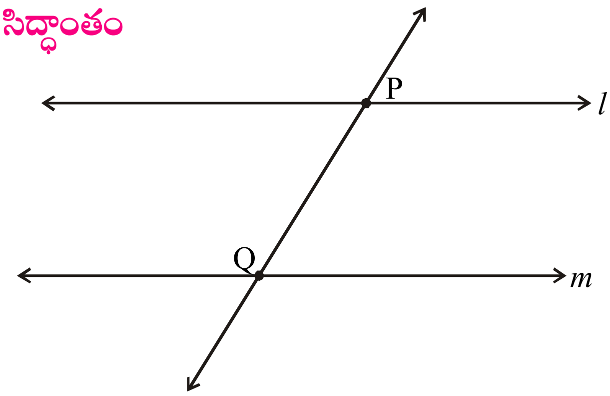


4. ప్రక్క పటం ABCD ట్రెపీజియం నందు AD మరియు BC లు సమాంతరాలు కాని భుజాలు మరియు AD పై మధ్యబిందువు E మరియు $EF \parallel AB$. అయినచో F అనునది BC యొక్క మధ్య బిందువు అని చూపండి.



4.5.7 సమాన అంతర ఖండాల సిద్ధాంతం

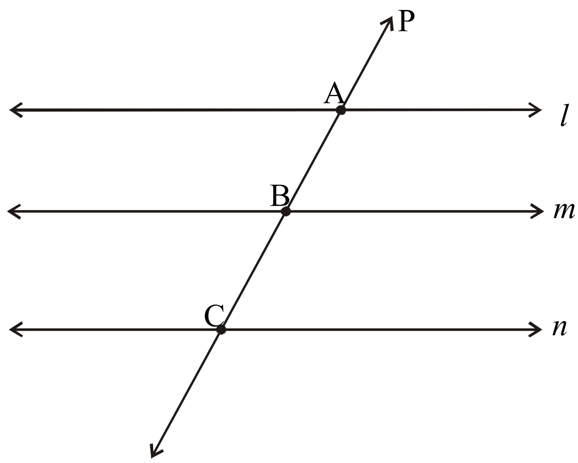
రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలను వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించు రేఖను తిర్యగ్రేఖ అని అంటారు అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.



గమనిక: పై పటం నందు, PQ ను l, m రేఖలపై n తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పరచబడిన అంతర ఖండం అంటారు.

సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖచే ఏర్పడే అంతరఖండాల ప్రత్యేక దర్మాలు గురించి నేర్చుకుందాం.

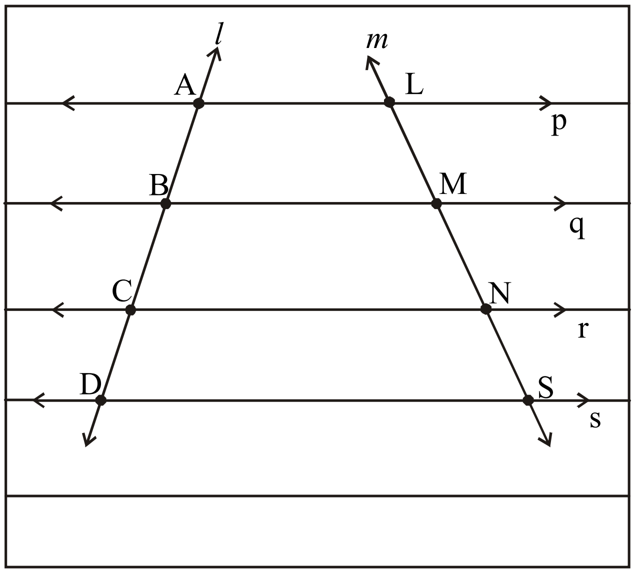
ఏవేని మూడు సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ ఎన్ని అంతర ఖండాలను చేయగలదు? పటాన్ని గమనించండి.



పై పటం నుండి l, m మరియు n రేఖలపై "p" తిర్యగ్రేఖ రెండు అంతర ఖండాలు AB మరియు BC లను చేస్తుందని గమనించగలము. దీని నుండి సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేఖ చేయు అంతర ఖండాల గురించి ప్రధానమైన ధర్మం గురించి ఇప్పుడు మనం తెలుసుకుందాం.

కృత్యం :

రూళ్ళకాగితం తీసుకోండి. సమాన దూరంలో గల సమాంతర రేఖలు p, q, r మరియు s లపై తిర్యగ్రేఖలు l మరియు mలు అంతరఖండాలు చేయునట్లు పటంలో చూపిన విధంగా గీయండి.



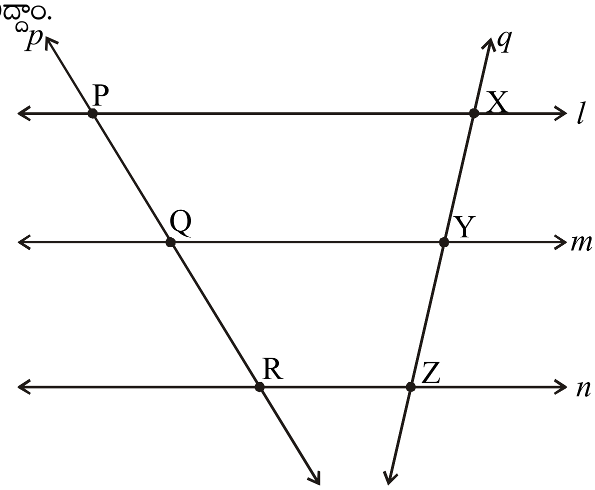
ఈ తిర్యగ్రేఖలు వేరువేరు అంతర ఖండాలను చేస్తాయని గమనించగలము. అంతర ఖండాలు AB, BC మరియు CD లను కొలవండి. అవన్ని సమానం అవునో కాదో పరిశీలించండి. అవి అన్ని సమానమని గమనించగలం అదేవిధంగా LM, MN మరియు NS లను కొలవండి. LM, MN మరియు NS ల పొడవుల గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? అవి అన్నియూ సమానమని గమనించగలము.

ఇదే కృత్యాన్ని కొనసాగిస్తూ వేర్వేరు సమానదూరాలలో కల సమాంతర రేఖలపై వేరువేరు తిర్యగ్రేఖలచే ఏర్పడే అంతర ఖండాల పొడవులు కొలిచి సమానమో కాదో పరిశీలించండి. ప్రతీ సందర్భంలో కూడా ఈ అంతర ఖండాల పొడవులు సమానం అని తెలుసుకుంటాం.

ఈ పరిశీలనలను బట్టి సమాన అంతరఖండాల సిద్ధాంతంను క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు. "మూడు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ సమాంతర రేఖలపై ఒక తిర్యగ్రేఖ ఏర్పరచు అంతర ఖండాలు సమానమైతే అవే సమాంతరరేఖలపై వేరే తిర్యగ్రేఖపై చేయు అంతర ఖండాలు కూడా సమానం".

దీనినే కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 12 : దిగువ నీయబడిన పటంలో $l \parallel m \parallel n$ మరియు PQ = QR అయిన XZ = 20 సెం.మీ. అయితే YZ ను కనుగొనుము.



సాధన : దత్తాంశం ప్రకారం PQ = QR, XZ = 20 సెం.మీ.

∴ అంతర ఖండాల సిద్ధాంతం ప్రకారం

XY = YZ |∵ PQ = QR

XZ = XY + YZ అని తెలుసు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 258 06-02-2021 14:54

$= YZ + YZ$

$= 2YZ$

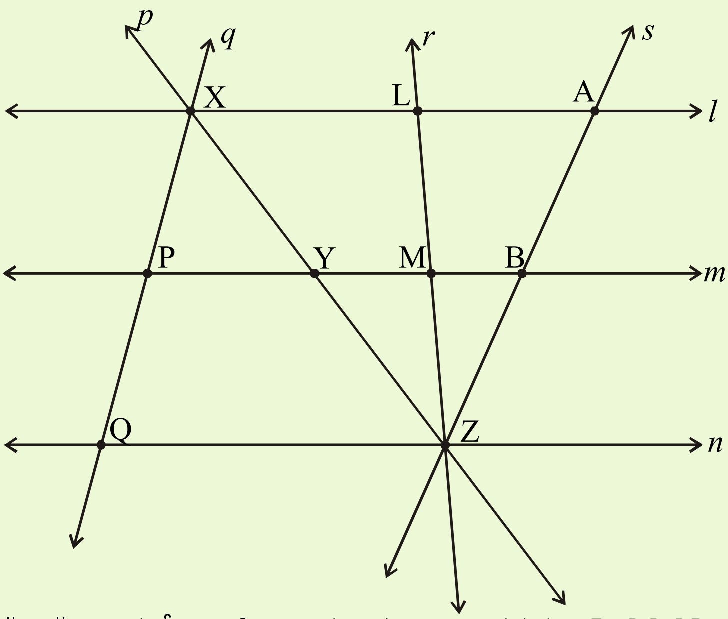
$\Rightarrow \quad 20 = 2YZ$

$\therefore \quad YZ = \frac{20}{2} = 10$ సెం.మీ

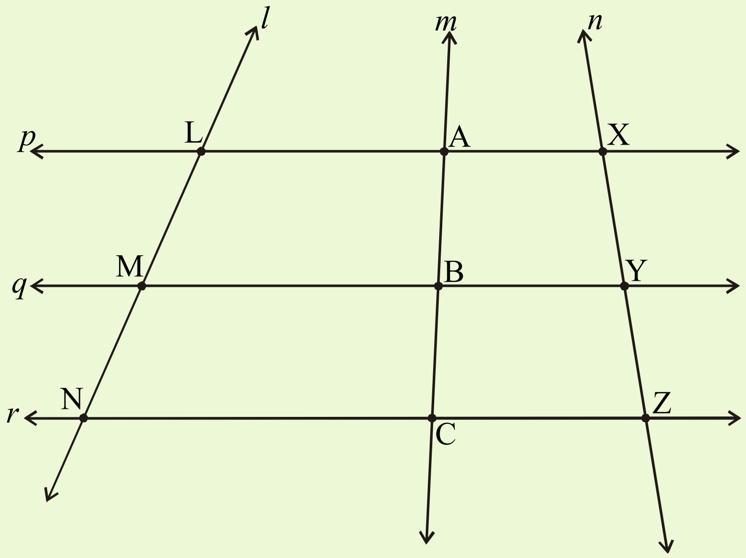
$\therefore \quad YZ = 10$ సెం.మీ.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ప్రక్క పటం నుండి, $l \parallel m \parallel n$, PQ = 3.2 సెం.మీ. AB = 3.5 సెం.మీ., YZ = 3.4 సెం.మీ., LM = MZ = 3సెం.మీ., అయితే XY, XP మరియు BZ లను కనుగొనుము.



2. దిగువనీయబడిన పటంలో, $p \parallel q \parallel r$. తిర్యగ్రేఖలు l, m మరియు n లు వరుసగా L, M, N అదేవిధంగా A, B, C మరియు X, Y, Z ల వద్ద ఖండిస్తున్నవి మరియు XY = YZ. అయిన AB = BC మరియు LM = MN అని చూపండి.



4.5.8 సమాంతర చతుర్భుజములు మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల త్రిభుజాలు

కొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాల మధ్య సంబంధము మరియు ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల త్రిభుజాలకు సంబంధించి గల వివిధ ధర్మాల గురించి ఇప్పుడు మనం తెలుసుకుందాం. ఈ భావన త్రిభుజాల సరూపకత ధర్మాలు గురించి అవగాహన చేసికొనుటకు చాలా కీలకమైన పాత్ర పోషిస్తుంది.

సమతల ప్రదేశం యొక్క విస్తీర్ణంను దాని యొక్క వైశాల్యం అని అంటారు.

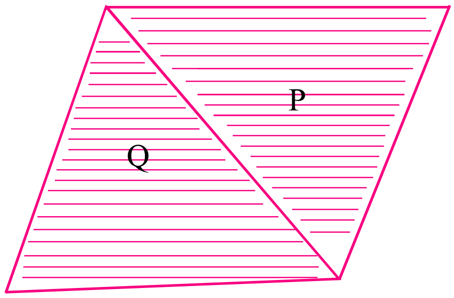
సమతల ప్రదేశం యొక్క విస్తీర్ణం లేదా వైశాల్యంను ఎల్లప్పుడు ధన వాస్తవ సంఖ్యచే వివిధ ప్రమాణాలలో వివిధ రకాలుగా వ్యక్తపరుస్తారు. ఉదా: 10 సెం.మీ^{2}, 215సెం.మీ^{2}, 2కి.మీ^{2}, 3 హెక్టార్లు ...

గమనిక : ఒక పటం వైశాల్యంను ఒక తలం నందలి నియమిత ధర్మాలు కలిగిన పటంచే ఆవరించబడి ఉన్న కొంత భాగంగా పరిగణించవచ్చు. అనగా ఒక పటం (A) యొక్క వైశాల్యంను సంక్షిప్తంగా (A) వై గా రాస్తాము.

(i) రెండు సర్వసమాన పటాల వైశాల్యాలు సమానం.
A మరియు B లు ఏవేని రెండు సర్వసమాన పటాలైతే వాని (A)వై. = (B)వై. అని రాస్తాము.

(ii) ఒక పటం యొక్క వైశాల్యం, ఆ పటంలోని పరిమిత భాగాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం.

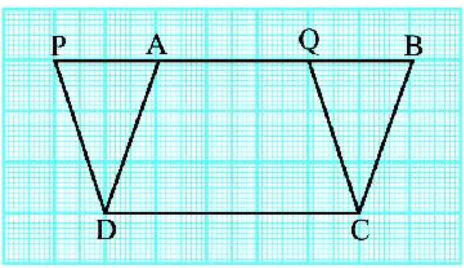
ఒక సమతల ప్రదేశం పటం(A) అనునది ఒక దానిపై ఒకటి ఆవృతం కాని పటాలు (P), (Q) లచే ఏర్పరచబడినట్లయితే పటం (A) యొక్క వైశాల్యంను పటం (A)వై = (P)వై + (Q)వై గా నిర్వచిస్తాము.



ఒకే భూమిపై ఉండి, ఒకే సమాంతరాల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యంల మధ్యగల సంబంధాన్ని తెలుసుకోవడానికి దిగువ చూపిన కృత్యం చేద్దాం.

కృత్యం

ఒక గ్రాఫ్ కాగితముపై రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ABCD మరియు PQCD లను పటంలో చూపిన విధంగా గీయాలి.



ఈ రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి DC పైన మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు PB మరియు DC ల మధ్య ఉన్నాయి. దీనిలో DCQA పట భాగము రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలలో ఉమ్మడి భాగమని స్పష్టమౌతున్నది. కావున మనము ΔDAP మరియు ΔCBQ లు ఒకే వైశాల్యం కలిగి ఉంటాయని చెప్పగలిగితే అప్పుడు

(PQCD) వైII = (ABCD) వైII అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 260　　　　06-02-2021 14:54

దీనినే మనం తార్కికంగా సిద్ధాంతముగా తెల్పవచ్చు. ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం".

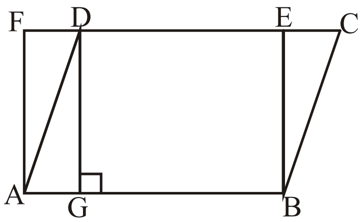
ఈ సిద్ధాంతమును మరింత విపులంగా తెలుసుకొనుటకు దిగువ చూపిన ఉదాహరణలు చేద్దాము.

ఉదాహరణ 13 : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము మరియు ABEF ఒక దీర్ఘచతురస్రము అదేవిధంగా DG, AB పైకి గల లంబము. అయిన

(i) ABCD వై = ABEF వై (ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం)

(ii) ar(ABCD) = AB × DG

సాధన :



(i) ప్రతి దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజము కావున
(ABCD) వై = (ABEF) వై

[∵ ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం]

(ii) ABCD వై = ABEF వై

= AB × BE [∵ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం = $l \times b$]

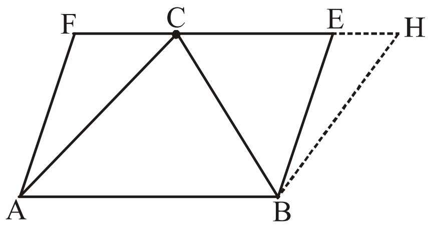
= AB × DG (∵ DG ⊥ AB మరియు DG = BE)

∴ ar(ABCD) = AB × DG (DG ం).

పై ఉదాహరణ నుండి ఏమి గమనించితివి ? దీనిని బట్టి "సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం దాని ఏదేని ఒక భుజము మరియు దానిపై గల ఉన్నతుల లబ్ధానికి సమానం" అని నిర్ధారించితిమి.

ఉదాహరణ 14 : ΔABC మరియు ▱ ABEF లు రెండూ ఒకే భూమి ABపై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు, AB, EF లపై గలవు. అయిన ΔABC వై $= \frac{1}{2}$ ▱ABEF వై అనిచూపుము.

సాధన : శీర్షం Bనుండి, BH ∥ AE అగునట్లు FE ని Hవద్ద కలిసే విధంగా BH ను నిర్మించుము.



∴ ABHC ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

కర్ణము BC, ABHC సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని తెలుసు. కావున ΔABC వై = ΔBCH వై

$= \frac{1}{2}$ ▱ABHCవై ...(1)

కాని ▱ ABHC మరియు ▱ ABEF లు రెండూ ఒకే భూమి AB పై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు AB మరియు EF ల మధ్యగలవు.

∴ ▱ ABHCవై = ▱ ABEFవై ...(2)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 261 06-02-2021 14:54

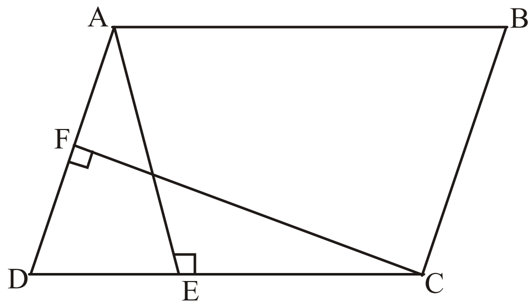
మరియు ΔABC వై $= \frac{1}{2}$ ▱ABHCవై (∵ సమీకరణం (1)నుండి)

$= \frac{1}{2}$ ▱ABEF వై (∵ సమీకరణం (2)నుండి)

అని రూపించబడినది.

పై ఉదాహరణ నుండి మీరేమి నిర్ధారించగలము. "ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల త్రిభుజ వైశాల్యం, సమాంతర చతుర్భుజవైశాల్యంలో సగముంటుంది" అని గమనించగలము.

ఉదాహరణ 15 : ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము, DC పైకి గీయబడిన లంబం AE, మరియు AD పైకి గీయబడిన లంబము CF AB = 10 సెం,మీ, AE = 8 సెం.మీ మరియు CF = 12 సెం.మీ. అయినచో ADని కనుగొనుము.



దత్తాంశము

సాధన: ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

$AE \perp DC$ మరియు $CF \perp AD$

AB=10 సెం.మీ, AE = 8 సెం.మీ

CF = 12 సెం.మీ.

మరియు ∥▱ ABCD వై

$= DC \times AE$ (∵ DC = AB, సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదురెదురు భుజాలు)

$= AB \times AE$

$= 10 \times 8 = 80$ సెం.మీ^{2} ...(1)

అదేవిధంగా ∥▱ ABCDవై

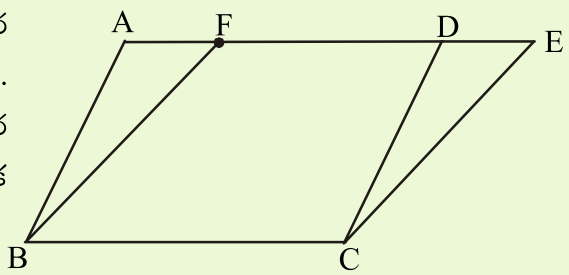
$= AD \times CF$

$\Rightarrow \quad 80 = AD \times 12$

$\therefore AD = \frac{\cancel{80}^{20}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{20}{3}$ సెం.మీ.

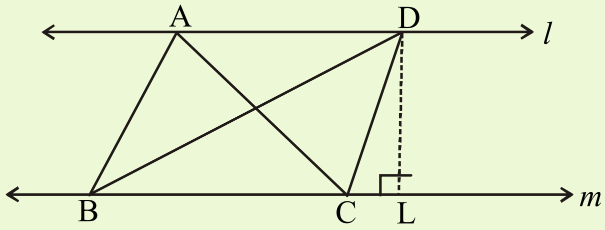
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి, సమాంతర చతుర్భుజము ABCD వైశాల్యం 40సెం.మీ^{2}. BC = 8 సెం.మీ, అయినచో సమాంతర చతుర్భుజం BCEF యొక్క ఏదేని ఒక సాధ్యపడు ఉన్నతిని కనుగొనుము.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 262 06-02-2021 14:54

2. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి, ΔABC వైశాల్యం 18 సెం.మీ^{2}, మరియు $DL = 4.5$ సెం.మీ. అయిన ΔBCD యొక్క అనురూప భూమి పొడవును కనుగొనుము.



3. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణము AC యొక్క శీర్షములను కలుపగా ఏర్పడిన త్రిభుజం ΔABC వైశాల్యం 16 సెం.మీ^{2}, అయిన సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము

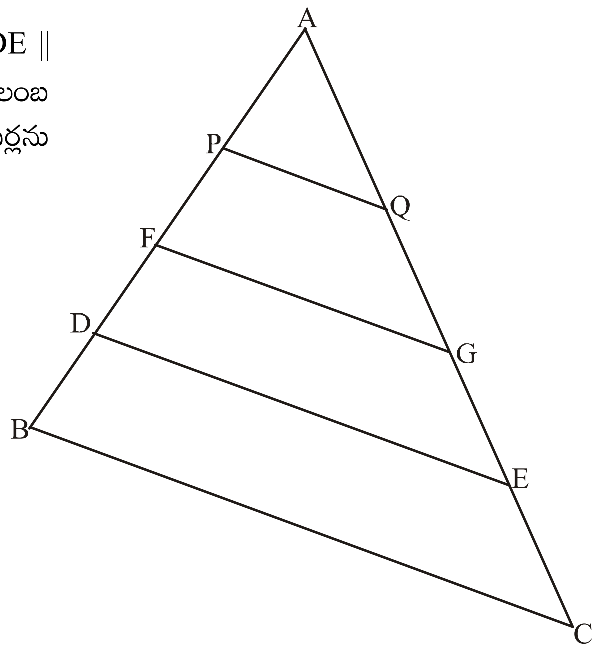
1. చతుర్భుజంలోని కోణాలు వరుసగా $(x - 20)^0$, $(x + 20)^0$, $(x - 15)^0$ మరియు $(x + 15)^0$ అయినచో ఆ చతుర్భుజం నందలి కోణాలను కనుగొనుము.

2. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క రెండు ఆసన్న భుజాల మధ్య నిష్పత్తి 5 : 3 మరియు దాని యొక్క చుట్టుకొలత 48 సెం.మీ. అయిన ప్రతి భుజం యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

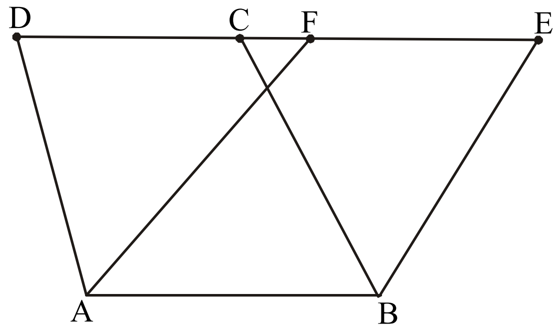
3. "చతుర్భుజపు రెండు కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు అయితే ఆ పటం ఎల్లప్పుడూ సమచతుర్భుజము (రాంబస్) అవుతుంది." అని లక్ష్మీ అన్నది. నీవు ఆమెతో ఏకీభవిస్తావా? నీ జవాబును సమర్థించండి.

4. $AB \parallel DC$ అగునట్లు ABCD ఒక సమలంబ చతుర్భుజము (ట్రెపీజియం) మరియు $\angle A = \angle B = 30^0$. అయినచో మిగిలిన రెండు కోణాలను కనుగొనుము.

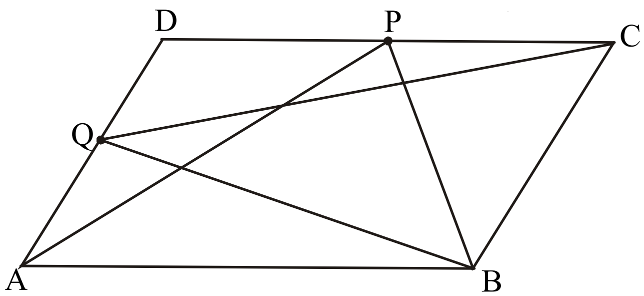
5. ప్రక్క పటంలో, $PQ \parallel FE \parallel DE \parallel BC$ అయిన వీలయిన అని సమలంబ చతుర్భుజాల (ట్రెపీజియం) పేర్లను తెలుపుము.



6. ప్రక్క పటం నుండి సమాంతర చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం 36 సెం.మీ^{2} ABEF సమాంతర చతుర్భుజములో AB = 4.2 సెం.మీ అయిన అనురూప ఉన్నతిని కనుగొనుము



7. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD నందు DC, AD లపై P,Q లు ఏవేని రెండు బిందువులు అయిన ΔAPBపై = ΔBQC పై అని చూపుము.



8. సమాంతర చతుర్భుజము ABCD నందు E, F, G మరియు H లు వరుసగా భుజములు AB, BC, CD మరియు AD ల పై గల మధ్యబిందువులు అయితే EFGH వైశాల్యం = $\frac{1}{2}$ ABCD వైశాల్యం అని చూపుము.

ముఖ్యాంశాలు

- నాలుగు రేఖాఖండాలచే ఏర్పడే సరళ సంవృత పటాన్ని 'చతుర్భుజం' అని అంటారు.
- చతుర్భుజంలోని అంతర కోణాల మొత్తం 360^0 లకు సమానం.
- ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాలు వైశాల్యాలు సమానం.
- ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 264 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.6 త్రిభుజముల సరూపత

4.6.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

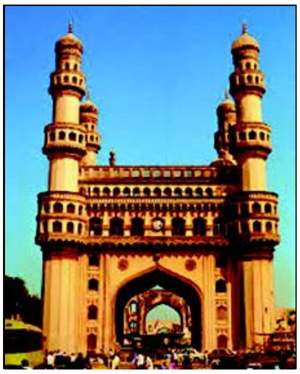
- సరూప పటాలను గుర్తించగలరు మరియు అవగాహన చేసుకోగలుగుతారు.
- సరూప త్రిభుజాల ధర్మాల గురించి అవగాహన చేసుకొని మరియు వాటిని వినియోగించుకుంటూ సమస్యలు సాధించగలుగుతారు.
- ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం మరియు దాని విపర్యయంను నిరూపించగలరు.
- భేద్ధాయన (పైథాగరస్) సిద్ధాంతం నిరూపించి మరియు వాటి అనువర్తనాల గురించి అధ్యయనం చేయగలుగుతారు.
- సరూప త్రిభుజాలపై ఆధారపడిన సమస్యల సాధన వాని వినియోగం గురించి నేర్చుకుంటారు.

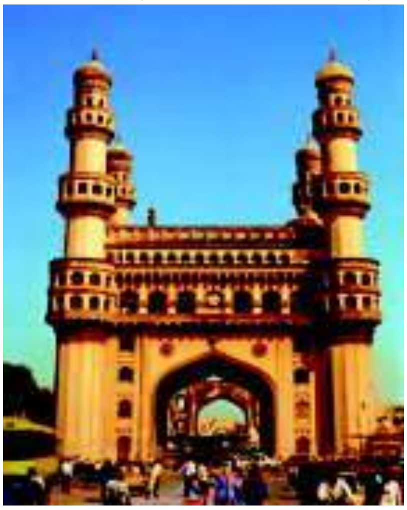
4.6.1 పరిచయం

మనచుట్టూ ఉన్న వివిధ రకాల ఆకారాల మరియు నిర్మాణాల ధర్మాలు అధ్యయనమునకు సంబంధించిన శాస్త్రమే జ్యామితి. గొప్పగొప్ప గణితశాస్త్రవేత్తలు త్రిభుజముల సరూపకత భావనను ఆధారం చేసుకుని భూపరిధి, భూమి నుండి సూర్యునికి అదేవిధంగా చంద్రునికి గల దూరాన్ని అంచనా వేయుటలో ఉపయోగించారు. సరూపతను ఆధారం చేసుకుని నదీవెడల్పులు, వృక్షాల ఉన్నతి, టవర్లు, ర్భతాల ఎత్తు మొదలైనవి కనుగొనవచ్చు.

మీరు ఈ పాఠ్యాంశంలో సరూపత భావన గురించి, ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం మరియు వాటి అనువర్తనాల గురించి నేర్చుకుంటారు.

సరూపకత



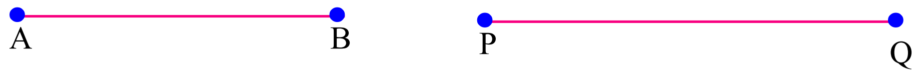


పైన పటాలను గమనించండి. మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 265 06-02-2021 14:54

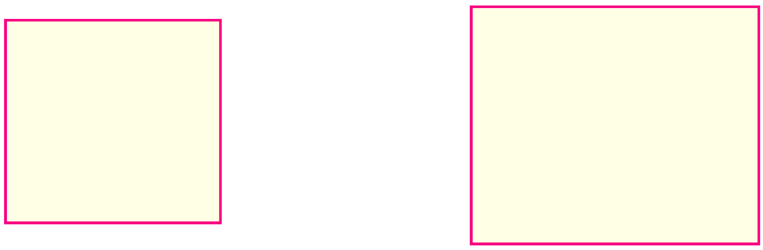
రెండు భవనాలు చూడటానికి ఒకేలా ఉన్నా వేరువేరు పరిమాణాలలో ఉన్నాయని మీరు గమనించి ఉంటారు. ఇలాంటివి అనగా ఒకేలా ఉన్నా, వేరువేరు పరిమాణాలలో గల వస్తువులను నిజజీవితంలో మీరు ఎన్నో గమనించి ఉంటారు. గణితపరంగా ఇలాంటి వస్తువులు అనగా ఒకేలా ఉన్నా, వేరువేరు పరిమాణాలలో గల వాటిని ఏమంటారు? గణితపరంగా ఈ రెండు వస్తువులు సరూపంగా ఉన్నాయి అంటాము. దీనినే దిగువ చూపిన విధంగా వ్రాయవచ్చు.

ఒకే ఆకారం కలిగి వేర్వేరు పరిమాణం కలిగిన వస్తువులను సరూప వస్తువులు అంటారు. క్రింది పటాల సరూపకతను పశీలిద్దాము.

(i)


(ii)

(iii)

(iv)


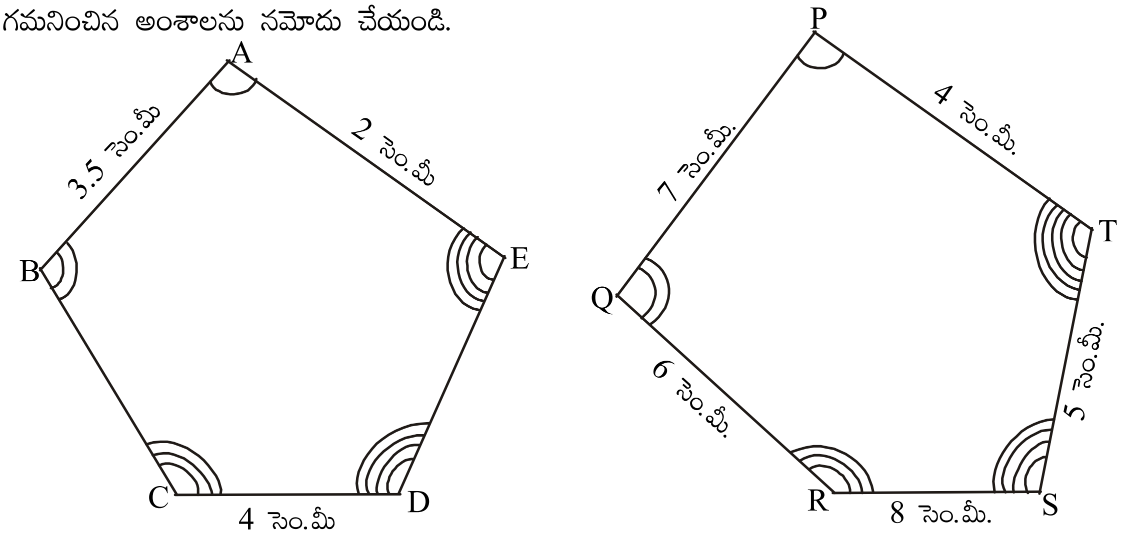
పై పటాలను గమనించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు?

రేఖాఖండములు, వృత్తాలు, సమబాహు త్రిభుజములు మరియు చతురస్రాలు ఎల్లప్పుడు సరూపంగా ఉంటాయి. సర్వసమాన పటాలు ఎల్లప్పుడు సరూపం అవుతాయి. కాని సరూప పటాలు, సర్వసమానము కానవసరము లేదు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 266		06-02-2021 14:54

సరూప సమతల పటాలు

ఈ దిగువ నీయబడిన క్రమ బహుభుజుల యందు భుజాల కోణాల కొలతలను గమనించండి. మీరు గమనించిన అంశాలను నమోదు చేయండి.



దత్తాంశం ప్రకారం, $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, $\angle D = \angle S$

$$\angle F = \angle T \text{ మరియు } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{TP}{EA} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ రెండు పంచభుజిలు సరూపాలు.

దీనిని బట్టి మనం

ఏవేని రెండు బహుభుజులు, అనురూపకోణాలు మరియు అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటే వాటిని సరూపాలు అని చెప్పవచ్చు.

రెండు బహుభుజిలు సరూపాలు కావలెనన్న, అవి ఈ దిగువన చూపిన రెండు షరతులను తృప్తిపరచాలి.

(i) అనురూప కోణాలు సమానం అయి ఉండవలెను.

(ii) అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండవలెను.

అదేవిధంగా, రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావలెనన్న వాటి

(i) అనురూప కోణాలు సమానం అయి ఉండవలెను.

(ii) అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండవలెను.

ఉదాహరణకు ΔABC, ΔPQR లు సరూపాలు అయితే వాటిని సంజ్ఞారూపంలో ఇలా రాస్తాము.

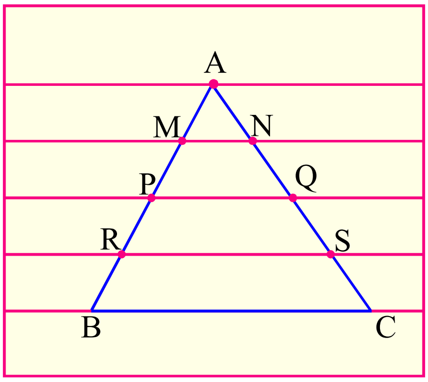
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ("~" గుర్తును సరూపము అని చూపుటకు వాడతాము.).

రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అయినట్లయితే వాని అనురూప కోణాలు సమానం. అనగా అవి సమఅనురూప కోణాల త్రిభుజాలు. సమానురూప కోణాల త్రిభుజాల అనురూప భుజాల నిష్పత్తి ఎల్లవేళలా సమానం. దీనినే మనం ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం (థేల్స్ సిద్ధాంతం) ద్వారా నిరూపిస్తాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 267
06-02-2021 14:54

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము అవగాహన చేసికొనుటకు దిగువ చూపబడిన కృత్యం చేద్దాము.

కృత్యం 1 :



అడ్డుగీతల కాగితం తీసుకుని దానిపై ΔABC పటంలో చూపిన విధంగా గీయుము. (భూమి ఏదేని ఒక అడ్డుగీతపై వచ్చునట్లుగా) కొన్ని సమాంతర రేఖలు త్రిభుజాన్ని వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తాయి.

ఏదేని ఒక రేఖను తీసుకొని అది AB, AC ల ను ఖండించు బిందువులను P మరియు Q లచే గుర్తించుము.

$\frac{AP}{PB}$ మరియు $\frac{AQ}{QC}$ ల నిష్పత్తిని కనుగొనుము. నీవేమి గమనించితివి?

ఆ నిష్పత్తి సమానం అవుతుందా, లేదా నిర్ధారించుము. ఇదే కృత్యాన్ని వివిధ సమాంతర రేఖలు MN మరియు RS లకు కూడా కొనసాగించుము.

$\frac{AM}{MB}, \frac{AN}{NC}$ మరియు $\frac{AR}{RB}, \frac{AS}{SC}$ ల నిష్పత్తులను కనుగొనుము.

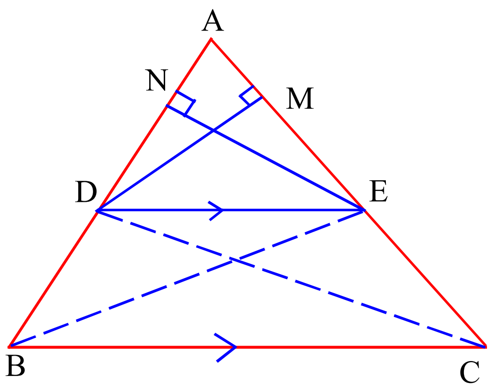
అవన్నీసమానమేనా పరిశీలించండి? దీనిని బట్టి నీవేమి గ్రహించితివి ? జ్యామితిలోని అతి ప్రధానమైన ఒక సిద్ధాంతమునకు ఇది దారి తీస్తుందని గమనిస్తాము. అదే అంశాన్ని ఈ క్రింది విధంగా చర్చిద్దాం.

4.6.2 ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం (థేల్స్‌సిద్ధాంతం)

సిద్ధాంతము 4.6: ఒక త్రిభుజం నందు ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీయబడిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఖండించగా ఆ రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించును.

దత్తాంశం : ΔABC నందు $DE \parallel BC$ మరియు DE, AB, AC లపై D, E బిందువుల వద్ద ఖండిస్తున్నది.

నిరూపించవలసినది : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



నిర్మాణము : B, E ని కలుపుము, C, D లను కలుపుము. $DM \perp AC$ మరియు $EN \perp AB$ అగునట్లు.

ఉపపత్తి :

ΔADE వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$$

ΔBDE వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

$$\frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యము}}{\Delta BDE \text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN}$$

$$= \frac{AD}{BD} \quad ...(1)$$

అదేవిధంగా

ΔADE వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times AE \times DM$

ΔCDE వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times EC \times DM$

$$\frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యము}}{\Delta CDE \text{ వైశాల్యము}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM}$$

$$= \frac{AE}{EC} \quad ...(2)$$

కాని $\Delta BDE, \Delta CDE$ రెండు త్రిభుజాలు ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి.

కావున ΔBDE వైశాల్యం $= \Delta CDE$ వైశాల్యం ...(3)

(1), (2), (3) ల నుండి

$$\Rightarrow \frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యం}}{\Delta BDE \text{ వైశాల్యం}} = \frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యం}}{\Delta CDE \text{ వైశాల్యం}}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

నిరూపించబడినది.

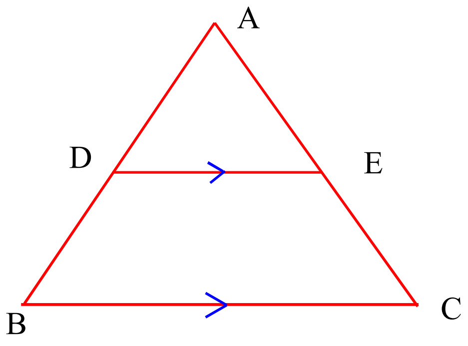
ఉపసిద్ధాంతములు

ΔABC నందు, సరళరేఖ DE సమాంతరము BC, ABని Dవద్ద, AC ని E వద్ద ఖండించినట్లయితే

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 269 06-02-2021 14:54

ఉపపత్తి : ΔABC నందు, $DE \| BC$



కావున, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

(ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం నుండి)

(i) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ నుండి

విపర్యయములు చేయగా

> $\frac{p}{q}$ యొక్క విపర్యయము $\frac{q}{p}$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

ఇరువైపులా 1 ని కూడగా

$$\frac{DB}{AD}+1 = \frac{EC}{AE}+1$$

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{AE}$$

AD + DB = AB
AE + EC = AC

అనగా, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

(ii) అదేవిధంగా $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ఇరువైపులా 1 ని కూడగా

$$\frac{AD}{DB}+1 = \frac{AE}{EC}+1$$

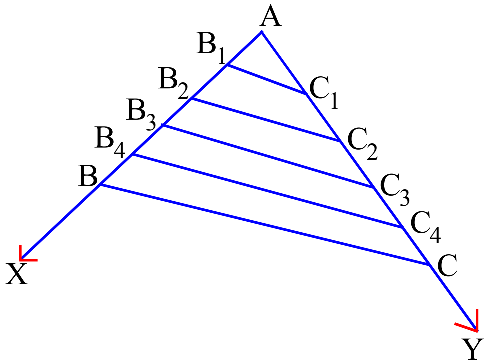
$$\frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC}$$

కావున $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయం కూడా సాధ్యమేనా? దీనిని పరీక్షించుటకు ఈ క్రింది కృత్యమును చేద్దాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 270 06-02-2021 14:54

కృత్యం - 2



మీ నోటు పుస్తకంలో పటంలో చూపిన విధంగా XAY ని నిర్మించుము. కిరణము AXపై B_1, B_2, B_3, B_4 మరియు B బిందువులను గుర్తించుము.

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$సెం.మీ ఉండునట్లుగా గుర్తించుము.

కిరణము AYపై కూడా $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$సెం.మీ. అగునట్లు C_1, C_2, C_3, C_4 మరియు C బిందువులను గుర్తించుము. B_1, C_1 లను కలుపుము. మరియు B, C లను కలుపుము.

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ అనియు

$B_1C_1 \| BC$ అని గమనించవచ్చు. కోణమానిని సహాయముతో క్రింది వాటిని గణించండి.

$\angle AB_1C_1 = ...,\quad \angle AC_1B_1 = ...,$

$\angle ABC = ...,\ \angle ACB = ...,$

మనం $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ అని గమనించవచ్చును.

కావున $B_1C_1 \| BC$ $|\because$ సదృశకోణాలు సమానం

అదేవిధంగా B_2C_2, B_3C_3 లను మరియు B_4C_4 లను కలుపగా

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ మరియు $B_2C_2 \| BC$ అనియూ,

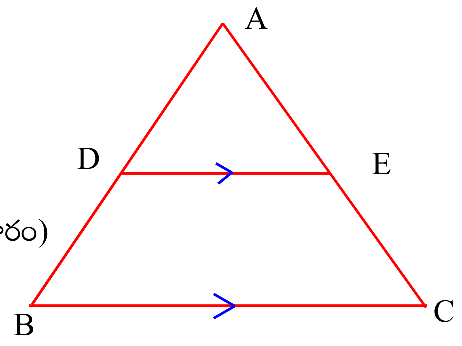
$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ మరియు $B_3C_3 \| BC$ అనియూ,

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ మరియు $B_4C_4 \| BC$ అని గమనించవచ్చు.

దీనిని బట్టి త్రిభుజంలో ఏవేని రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది. దీనినే ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము అంటారు.

ఇప్పుడు ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం మరియు దాని విపర్యయం నుపయోగించి కొన్ని సమస్యలను సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : ΔABC నందు, $DE \parallel BC$ మరియు $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ అయిన $AC = 8$సెం.మీ, అయినచో AEని కనుగొనుము.



సాధన : ΔABC నందు

$DE \parallel BC$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం ప్రకారం)

కాని, $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$

కావున $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$ | $\because AE + EC = AC$ $\Rightarrow EC = AC - AE$

$\Rightarrow \frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$ | $\because AC = 8$ సెం.మీ. దత్తాంశం ప్రకారం

$\Rightarrow \frac{AE}{8 - AE} = \frac{3}{5}$ (అడ్డగుణకారం చేయగా)

$5AE = 24 - 3AE$

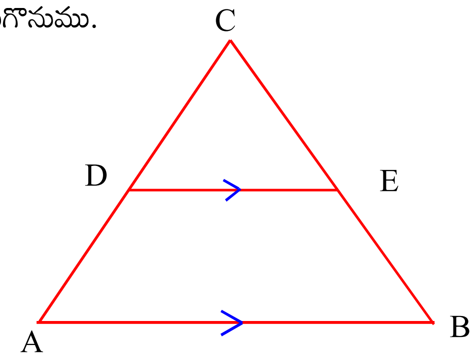
$5AE + 3AE = 24$

$8AE = 24$

$AE = \frac{24}{8} = 3$సెం.మీ.

ఉదాహరణ 2 : ΔABC నందు $DE \parallel AB$, $AD = 8x + 9$, $CD = x + 3$

$BE = 3x + 4$, $CE = x$. అయిన x విలువను కనుగొనుము.



సాధన : ΔABC ను $DE \parallel AB$

$AD = 8x + 9$

$CD = x + 3$

$BE = 3x + 4$

$CE = x$

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం అనుసరించి

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 272 06-02-2021 14:54

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{8x+9}{x+3} = \frac{3x+4}{x}$$

$\Rightarrow x(8x + 9) = (x + 3)(3x + 4)$

$\Rightarrow 8x^2 + 9x = 3x^2 + 4x + 9x + 12$

$\Rightarrow 8x^2 - 3x^2 = 4x + 12$

$\Rightarrow 5x^2 = 4x + 12$

$\Rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow 5x(x - 2) + 6(x - 2) = 0$

$(x - 2)(5x + 6) = 0$

$-12 \times 5 = -60$	
$-60 = \boxed{-10} \times \boxed{6}$	
$-4 = \boxed{-10} + \boxed{6}$	

$x - 2 = 0$	$5x + 6 = 0$
$x = 2$	$5x = -6$
	$x = -\frac{6}{5}$

x ధనాత్మకం కావున

$\therefore \boxed{x = 2}$

ఉదాహరణ 3 : ΔABC లోని AB, AC లపై D, E లు ఏవేని బిందువులైతే మరియు AB = 5.6 సెం.మీ, AD = 1.4 సెం.మీ, AC = 7.2 సెం.మీ, AE = 1.8 సెం.మీ. DE || BC అగునా?

సాధన : దత్తాంశం ప్రకారం

AB = 5.6 సెం.మీ, AD = 1.4 సెం.మీ

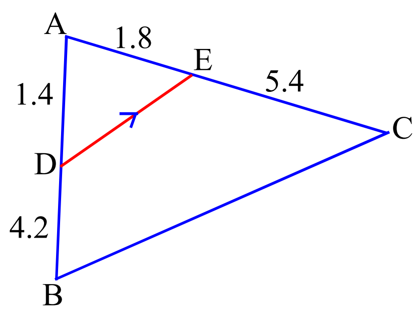
AC = 7.2 సెం.మీ, AE = 1.8 సెం.మీ

DB = AB – AD

= 5.6 – 1.4 = 4.2 సెం.మీ

మరియు EC = AC – AE

= 7.2 – 1.8 = 5.4 సెం.మీ



ఇప్పుడు, $\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ ...(1)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 273
06-02-2021 14:54

$$\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \qquad ...(2)$$

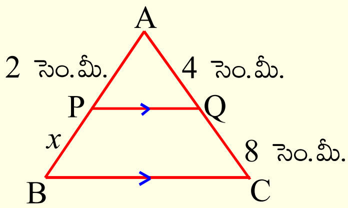
(1), (2) ల నుండి

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ కావున}$$

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం విపర్యయం ప్రకారం DE, BCకి సమాంతరం అగునని నిరూపించవచ్చు. ie DE || BC.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ΔABC నందు DE || BC, AD = x. DB = $x - 2$, AE = $x + 2$ మరియు EC = $x - 1$ అయినచో AB, AC ల పొడవులను కనుగొనుము. (జవాబు : AB = 6 యూనిట్లు, AC = 9 యూనిట్లు)
2. పటం నుండి PQ || BC అయిన 'x' విలువను కనుగొనుము.



3. ABCD చతుర్భుజం నందలి కర్ణములు ఒకదానికొకటి "O" వద్ద ఖండించుకొను చున్నవి. మరియు $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అయిన ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించుము.

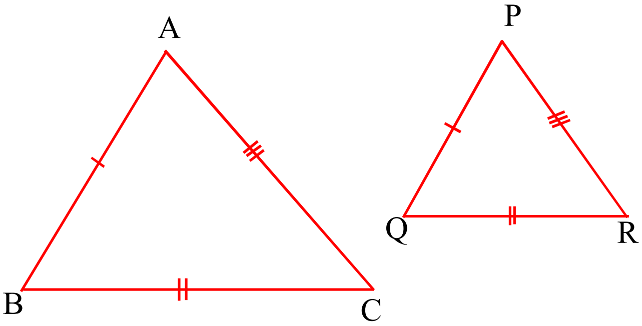
4.6.3 త్రిభుజాల సరూపతకకు ప్రాతిపదిక

రెండు త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానమైతే, మరియు వాని అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటే (అనుపాతంలో ఉంటే) అవి సరూపాలు అవుతాయని మనకు తెలుసు.

అయితే రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయా, కావో మనం ఎలా నిర్ణయిస్తాము?

రెండు త్రిభుజాల సరూపతను నిర్ణయించుటకు మనం కొన్ని ధర్మాల గురించి నేర్చుకుందాము. రెండు త్రిభుజాల సరూపత నియమాలు లేదా ప్రాతిపదిక లను గురించి నేర్చుకుందాం.

(i) కో.కో.కో (కో.కో) సరూపకత నియమం. ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు వేరొక త్రిభుజంలోని అనురూప కోణాలకు సమానం అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయి.



దత్త పటం నుండి
$\angle A = \angle P \quad \angle B = \angle Q$
కావున $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 274 06-02-2021 14:54

(ii) భు.కో.భు (SAS) సరూపకత

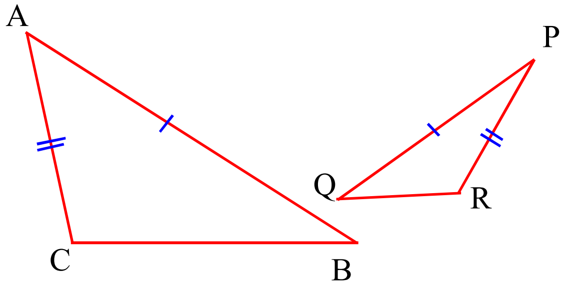
ఏదేని ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు వాని అంతర కోణం, వేరొక త్రిభుజంలోని రెండు అనురూప భుజాలు వాని అనురూప అంతర కోణానికి సమానం. అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయి.

దత్త పటం నుండి

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$$

మరియు $\angle A = \angle P$

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR.$



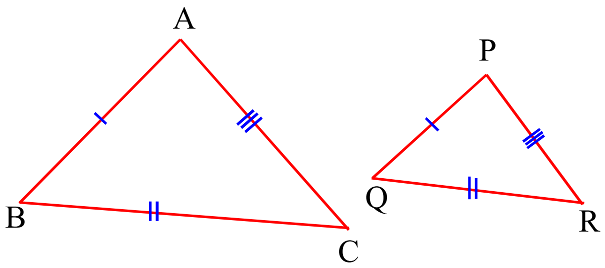
(iii) భు.భు.భు. (SSS) సరూపకత

ఏవేని రెండు త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ త్రిభుజాలు సరూపాలు.

దత్త పటం నుండి

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$$

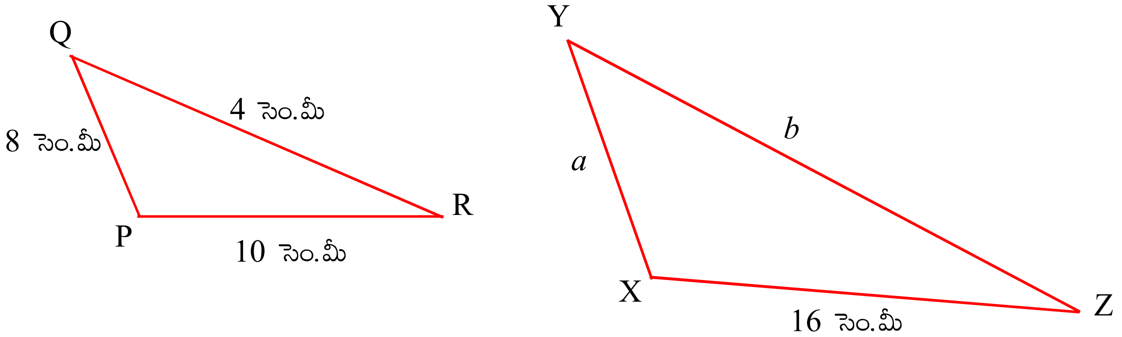
$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta PQR.$



గమనిక :- $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అయితే, AB, BC మరియు AC ల అనురూప భుజాలు PQ, QR మరియు PR లు అయితే, అదేవిధంగా A, B మరియు C ల అనురూప కోణాలు P, Q మరియు Rలు అవుతాయి. అయినచో $\Delta BAC \sim \Delta PQR$ అనవచ్చా? అనురూప శీర్షములు ఒక క్రమంలో లేవు. కావున అవి సరూపాలు కావు అని గమనించగలము.

త్రిభుజాల సరూపకతపై కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 4: దిగువనీయబడిన పటం నుండి $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ అయిన a, b లను కనుగొనుము.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 275
06-02-2021 14:54

సాధన : దత్తాంశం నుండి

$\Delta PQR \sim \Delta XYZ$

కావున $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$ [∵ అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటాయి]

$\Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{4}{6} = \frac{10}{16}$

PQ = 8 సెం.మీ
QR = 14 సెం.మీ
PR = 10 సెం.మీ
XZ = 16 సెం.మీ

$\frac{8}{a} = \frac{10}{16}$ నుండి

అడ్డగుణకారం చేయగా

$10a = 16 \times 8$

$\therefore a = \frac{16 \times 8}{10} = \frac{128}{10} = 12.8$ సెం.మీ.

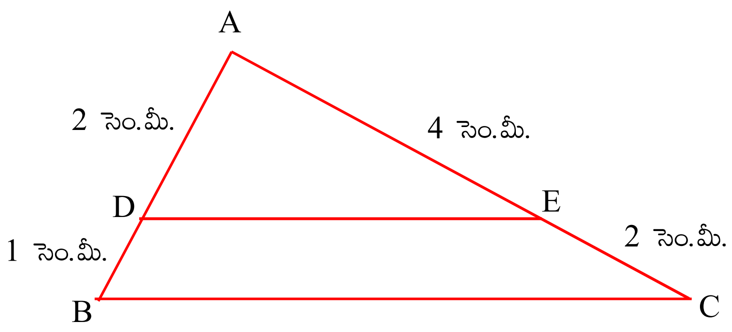
అదేవిధంగా, $\frac{4}{6} = \frac{10}{16}$

అడ్డగుణకారం చేయగా

$10b = 16 \times 4$

$\therefore b = \frac{16 \times \cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{32}{5} = \frac{64}{10} = 6.4$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 5: దిగువనీయబడిన పటం నుండి, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ అని చూపుము.



సాధన : $\Delta ADE, \Delta ABC$ నందు

$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+AB} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ అని తెలుసు ...(1)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 276 06-02-2021 14:54

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE+EC} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad ...(2)$$

(1), (2) ల నుండి

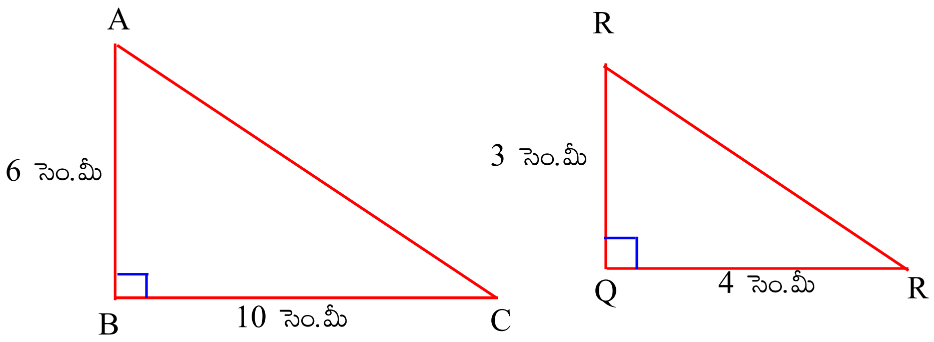
$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{మరియు}$$

$\angle A = \angle A$ (సాధారణ కోణం) అని గమనించగలం

భు.కో.భు. సరూపత ఆధారంగా

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

ఉదాహరణ 6: దిగువనీయబడిన పటం నుండి $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అగునో లేదో పరిశీలించండి.



సాధన : ΔABC, ΔPQR ల నుండి

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{6}{3} = 2 \qquad ...(1)$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \qquad ...(2)$$

(1), (2) ల నుండి

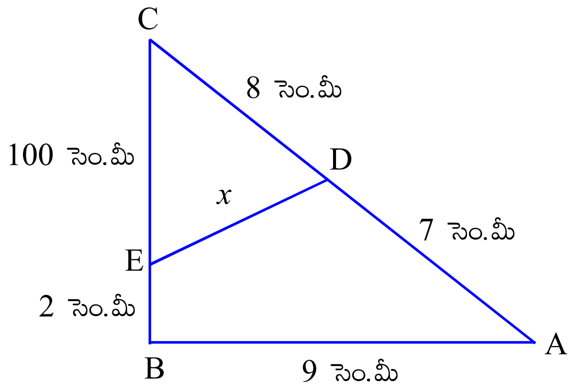
$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} \neq \frac{BC}{QR} \qquad \left[\because 2 \neq \frac{5}{2} \text{ కావున}\right]$$

అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో లేవని (అనుపాతంలో లేవని) గమనించగలము.

$\therefore$ ΔABC, ΔPQR లు సరూపాలు కావు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 277 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 7: దిగువ చూపిన పటంలో, $\angle A = \angle CED$ అని ఇవ్వబడినది. $\Delta CAB \sim \Delta CED$ అని నిరూపించుము. మరియు 'x' విలువ కనుగొనుము.



సాధన : ΔCAB, ΔCED ల నుండి

$\angle C$ సామాన్యకోణము, $\angle A = \angle CED$

$\therefore \quad \Delta CAB \sim \Delta CED$ (కో.కో.సరూపత ఆధారంగా)

x ను కనుగొనుటకు :

$$\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$$ $\because$ పటం నుండి

$$\Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{10+2}{8}$$ $\because CB = CE + EB = 10 + 2 = 12$

$$\Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{12}{8}$$

అడ్డగుణకారము చేయగా

$$12x = 9 \times 8$$

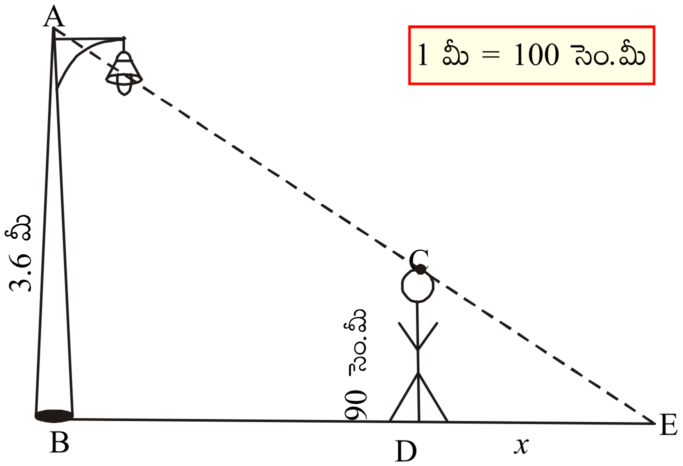
$$x = \frac{9\times 8}{12} = \frac{72}{12} = 6 \text{ సెం.మీ}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 6 \text{ సెం.మీ}}$$

ఉదాహరణ 8: 90 సెం.మీ. ఎత్తు గల బాలుడు, ఒక దీపపు స్థంభము నుండి దూరంగా 1.2 మీ/సెకను వేగంతో నడిచి వెళుచున్నాడు. భూమిపై నుండి దీపపు స్థంభపు ఎత్తు 3.6 మీ. అయిన 4 సెకన్ల తరువాత ఆ బాలుని నీడ పొడవు ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 278 06-02-2021 14:54

సాధన :



దీపపు స్థంభపు ఎత్తు

= AB = 3.6 మీ.

= 3.6 × 100

= 360 సెం.మీ

బాలుని ఎత్తు

= CD = 90 సెం.మీ

వేగం = 1.2 మీ/సెకను

= 120 మీ/సెకను

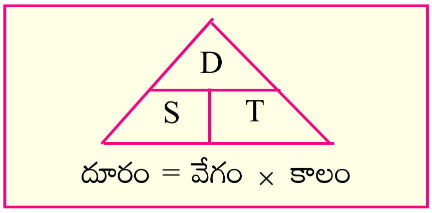
$\because$ 1.2 మీ = 1.2 × 100
= 120 సెం.మీ

కాలం = 4 సెకన్లు

బాలుడు 4 సెకన్లలో పూరయిక్తి చేయగల దూరం

= BD = 120 × 4

= 480 సెం.మీ.



బాలుని నీడ 4 సెకన్లు తరువాత 'x' అయితే

i.e., DE = x

x కనుగొనుటకు

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$

అయినచో $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$ [$\because$ అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి]

$\Rightarrow \frac{360}{90} = \frac{480 + x}{x}$

$\because$ BE = BD + DE
= 480 + x

$\Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{480 + x}{x}$

అడ్డగుణకారం చేయగా

$\Rightarrow 4x = 480 + x$

$\Rightarrow 4x - x = 480$

$\Rightarrow 3x = 480$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 279
06-02-2021 14:54

$$x = \frac{480}{3} = 160 \text{ సెం.మీ}$$

$$1 \text{ సెం.మీ} = \frac{1}{100} \text{ మీ}$$

$$= 160 \times \frac{1}{100} = \frac{16}{10}$$

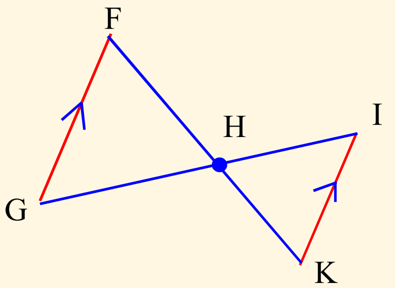
$$= 1.6 \text{ మీ.}$$

బాలుని నీడ పొడవు DE = 1.6 మీ.

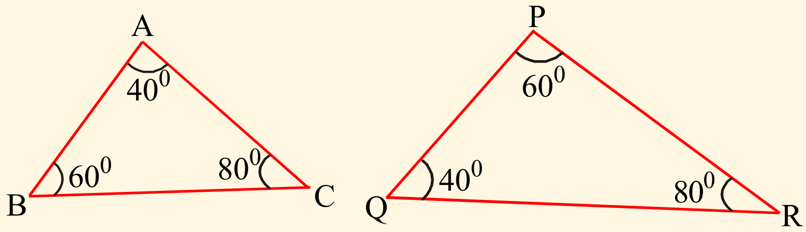
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింద ఏర్పరచబడిన త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయా? ఒకవేళ అయితే, ఏ సరూపతా ధర్మం ప్రకారం సరూపాలు అవుతాయో తెలపండి. సరూపతలను సంజ్ఞారూపంలో వ్రాయండి.

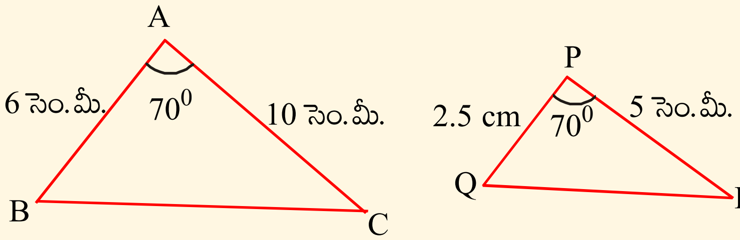
(i)



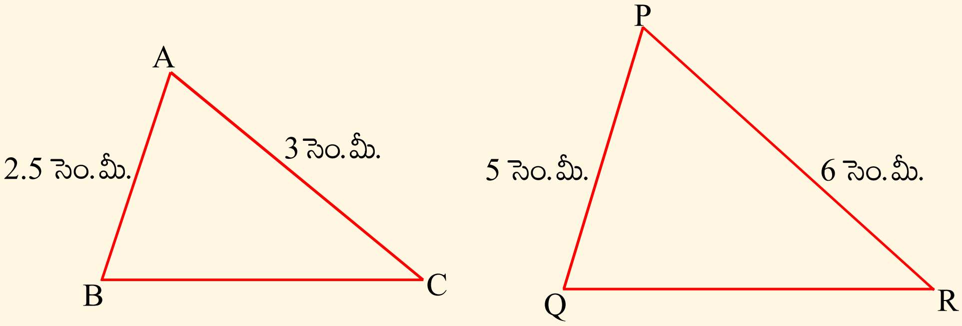
(ii)



(iii)

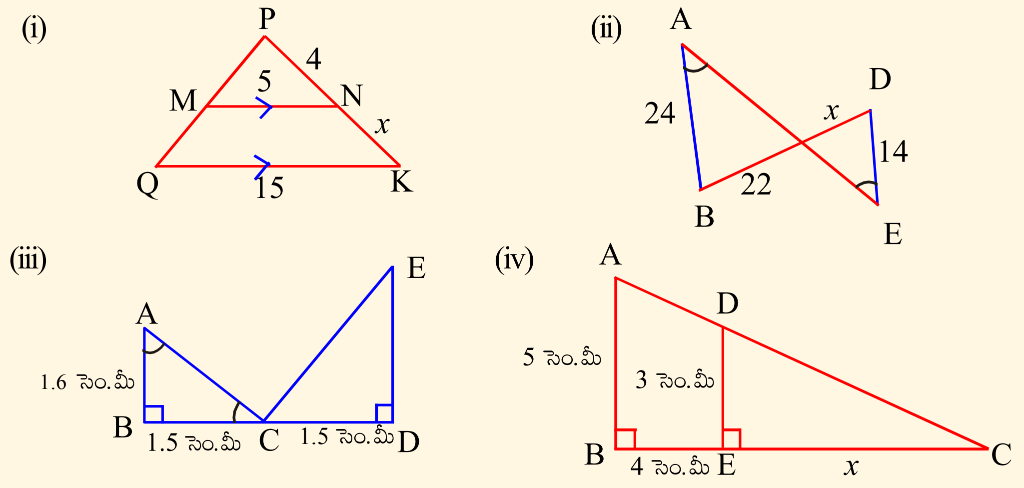


(iv)



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 280		06-02-2021 14:54

2. క్రింది జతల త్రిభుజాలు సరూపాలు అయితే, 'x' విలువ కనుగొనుము.

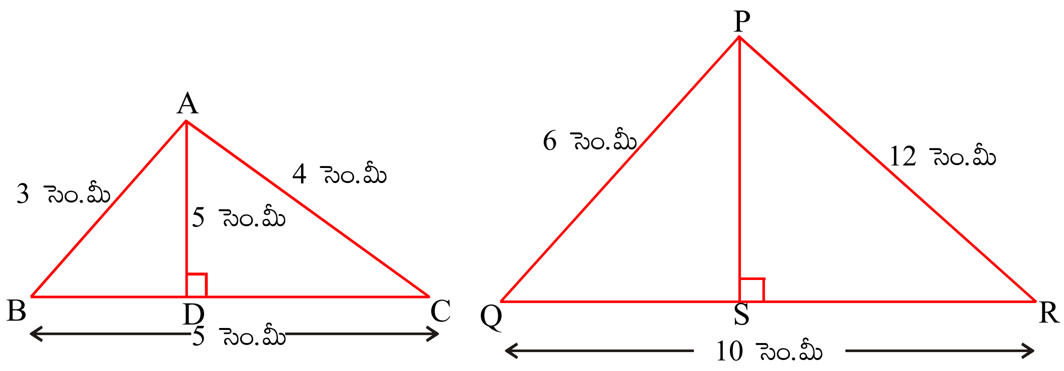


4.6.3 సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యములు

ఏవేని రెండు సరూప త్రిభుజాల అనురూప బుజాల నిష్పత్తి సమానం. సరూప త్రిభుజాల అనురూప భుజాల నిష్పత్తికి, అనురూప వైశాల్యాల నిష్పత్తికి ఏదైనా సంబంధం కనుగొన గలమా? ఈ క్రింది కృత్యం ద్వారా అవగాహన చేసుకుందాం.

కృత్యం 3

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అగునట్లు రెండు త్రిభుజాలను గీయండి.



AD, PS ల పొడవులను కొలవండి.

AD $\times$ BC మరియు PS $\times$ QR ల విలువలు కనుగొనండి.

$AD \times BC = BC^2$

$PS \times QR = QR^2$

అని గమనించవచ్చు.

$AD \times BC = 2 \times \Delta ABC$ వైశాల్యం

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 281 06-02-2021 14:54

$PS \times QR = 2 \times \Delta PQR$ వైశాల్యం.

$$\frac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యం}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times BC}{\frac{1}{2} \times PS \times QR}$$

$$= \frac{AD \times BC}{PS \times QR}$$

$$= \frac{BC^2}{QR^2} \qquad ...(1)$$

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ కావున

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

(1) నుండి

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}}{\Delta PQR \text{ వైశాల్యం}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

దీనినే మనం సిద్ధాంతముగా ప్రవచించవచ్చు. "రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం".

ఉప సిద్ధాంతం

1. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప ఉన్నతుల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం.
2. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి అనురూప మధ్యగతాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం.
3. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి అనురూప కోణ సమద్విఖండన రేఖా ఖండాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం.
4. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి చుట్టుకొలతల వర్గాల నిష్పత్తిని సమానం.

ఉదాహరణల ద్వారా ఈ విషయాన్ని నిరూపిద్దాం.

ఉదాహరణ 9 : ΔABC, ΔDEF లు రెండు సరూప త్రిభుజాలు. అదేవిధంగా $BC = 4$ సెం.మీ, $EF = 5$సెం.మీ మరియు ΔABC వైశాల్యం $= 64$ సెం.మీ^{2} అయిన ΔDEF వైశాల్యమును కనుగొనుము.

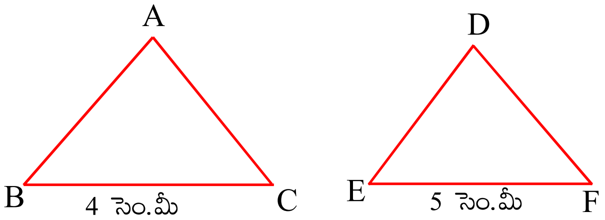
సాధన :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (దత్తాంశం)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 282 06-02-2021 14:54

BC = 4 సెం.మీ, EF = 5 సెం.మీ.

ΔABC వైశాల్యం = 64 సెం.మీ^{2}



$$\frac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}}{\Delta DEF \text{ వైశాల్యం}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

[∵ రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం]

$$\Rightarrow \frac{64}{\Delta DEF \text{ వైశాల్యం}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64}{\Delta DEF \text{ వైశాల్యం}} = \frac{16}{25}$$

$\left| \because \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} \right.$

(అడ్డ గుణకారం చేయగా)

$$\Rightarrow \Delta DEF \text{ వైశాల్యం} = \frac{\cancel{64}^4 \times 25}{\cancel{16}_1}$$

$= 4 \times 25$

$= 100$ సెం.మీ^{2}.

$\therefore$ ΔDEF వైశాల్యం = 100 సెం.మీ^{2}.

ఉదాహరణ 10 : రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు వరుసగా 121సెం.మీ^{2} మరియు 64 సెం.మీ^{2} మొదటి త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతము 12.1 సెం.మీ అయిన రెండవ త్రిభుజం యొక్క అనురూప మధ్యగతాన్ని కనుగొనుము.

సాధన : దత్తాంశం ప్రకారం

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ΔABC వైశాల్యం = 121 సెం.మీ^{2}

ΔDEF వైశాల్యం = 64 సెం.మీ^{2}

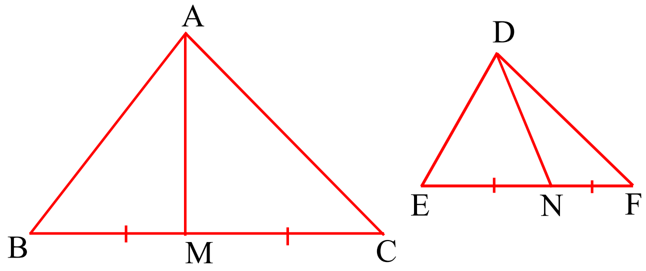
మధ్యగతము = AM = 12.1 సెం.మీ

మధ్యగతము = DN = ?

$$\frac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}}{\Delta DEF \text{ వైశాల్యం}} = \left(\frac{AM}{DN}\right)^2$$

[రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాని అనురూప మధ్యగతాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం]

$$\Rightarrow \frac{121}{64} = \left(\frac{12.1}{DN}\right)^2$$



$$\Rightarrow \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \left(\frac{12.1}{DN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{11}{8} = \frac{12.1}{DN}$$

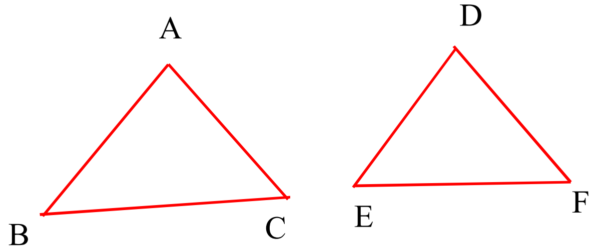
[అడ్డగుణకారం చేయగా]

$$\Rightarrow DN = \frac{\overset{1.1}{\cancel{12.1}} \times 8}{\cancel{11}_1}$$

$= 8.8$ సెం.మీ.

$\therefore$ మరో త్రిభుజం యొక్క మధ్యగతము $= 8.8$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 11: రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానం అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయని నిరూపించండి.



సాధన : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అని దత్తాంశం

మరియు

ΔABC వైశాల్యం

$= \Delta DEF$ వైశాల్యం

ఏవేని రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాని అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం కావున

$$\frac{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}}{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$= \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

ΔABC వైశాల్యం

$= \Delta DEF$ వైశాల్యం కావున

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = 1 \qquad \boxed{\Delta ABC \sim \Delta DEF}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 284 06-02-2021 14:54

$$\Rightarrow \quad AB^2 = DE^2,\ BC^2 = EF^2,\ AC^2 = DF^2$$

$$\Rightarrow \quad AB = DE,\ BC = EF,\ AC = DF$$

$x^2 = y^2$

$\Rightarrow \quad x = y;\ x, y > 0$

$\therefore \quad \Delta ABC \simeq \Delta DEF$ [భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ నియమాల ప్రకారం] నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 12 : Δ ABC నందు, DE || BC మరియు AB, AC లను D, E ల వద్ద ఖండిస్తున్నది. AD : DB = 2 : 3, అయ్యే విధంగా ఉంటే ΔADE, ΔABC ల వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుగొనుము..

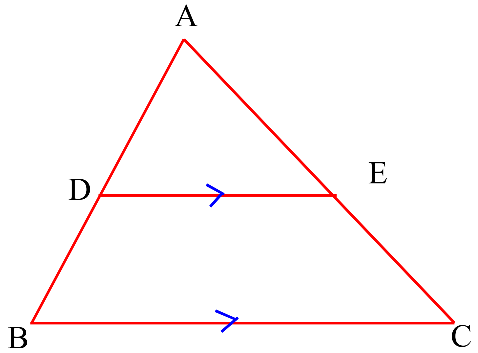
సాధన : ΔABC నందు DE || BC

దత్తాంశం

AD : DB = 2 : 3

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \qquad ...(1)$$

ప్రాధమిక అనుపాత సిద్ధాంతము ప్రకారం



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(1) నుండి

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

విపర్యయములు వ్రాయగా

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} = \frac{3}{2}$$

[$\because$ ఇరువైపులా 1 కలుపగా]

$$\frac{DB}{AD}+1 = \frac{EC}{AE}+1 = \frac{3}{2}+1$$

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE} = \frac{3+2}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{3+2}{2}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 285 06-02-2021 14:54

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$$ [∵ మళ్ళీ విపర్యయములు చేయగా]

$$\therefore \quad \Delta ADE \sim \Delta ABC$$ [∵ భు.కో.భు. నియమం ప్రకారం]

$$\frac{\Delta ADE \text{ వైశాల్యం}}{\Delta ABC \text{ వైశాల్యం}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$\therefore$ ΔADE వైశాల్యం : ΔABC వైశాల్యం

$= 4 : 25.$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ΔABC, ΔPQR రెండు సరూప త్రిభుజాలైతే వాటి చుట్టుకొలతలు వరసగా 36 సెం.మీ మరియు 24 సెం.మీ అయిన ఆ సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
2. ΔABC నందు $XY \parallel AC$ మరియు XY త్రిభుజాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తే $\frac{AX}{XB}$ ను కనుగొనుము.
3. ట్రెపీజియం ABCD, నందు $AB \parallel DC$ మరియు కర్ణములు "O" బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుచున్నాయి. $AB = 2CD$ అయినట్లయితే, ΔAOB, ΔCOD త్రిభుజ వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
4. ΔABC నందు D, E, F లు వరుసగా BC, CA మరియు AB లపై మధ్య బిందువులైతే ΔDEF, ΔABC ల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
5. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ మరియు BC = 3సెం.మీ, EF = 4 సెం.మీ మరియు $\Delta ABC = 54\ cm^2$ అయిన ΔDEF వైశాల్యం కనుగొనుము.

4.6.4 పైథాగరస్ సిద్ధాంతము

ఈ సిద్ధాంతమునకు ప్రాచీన గ్రీకు గణితవేత్త పైథాగరస్ (BC 570-495) తదనంతరం పేరుపెట్టబడినది.

a, b, c లు ఏదేని ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క భుజాలైతే వాటిని పైథాగరిమన్ త్రికములు అంటారు. $c^2 = a^2 + b^2$ అను సమానత్వం పాటించే విధంగా ఉంటే వాటిని పైథాగరస్ త్రికములు అంటారు. పైథాగరస్ త్రికముల గురించి మరింత సమాచారం తెలుసుకొనుటకు దిగువ చూపబడిన కృత్యము చేద్దాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 286 06-02-2021 14:54

కృత్యం : 4

(i) రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలను తీసుకొనుము.

(ii) వీటి విపర్యములను రాబట్టి, వాటిని కూడుము. $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉండే మరొక సంఖ్య లభించును.

(iii) హారంలో ఉన్న 'q' సంఖ్యకు 2 ను కలుపగా $q + 2$ వచ్చును.

(iv) ఇప్పుడు $p, q, q + 2$ ల మధ్య గల సంబంధాన్ని గూర్చి నీవేమి తెలుపగలవు ?

మూడు జతల వరుస బేసి సంఖ్యలు తీసుకొని పైన చూపిన విధంగా ప్రయత్నించి మీ జవాబును విశ్లేషించుము.

సూచన - 1, 3 ; 3, 5; 5, 7 ; 7, 9 ఏవేని రెండు వరుస బేసి సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

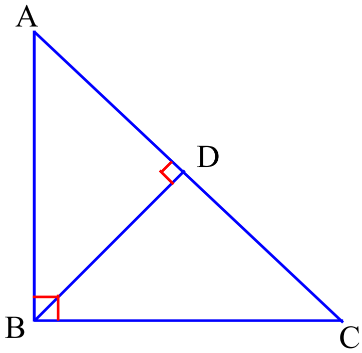
మరింత విపులంగా పైథాగరస్ సిద్ధాంతం గురించి తెలుసుకుందాం.

సిద్ధాంతం 4.6.3 : ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో, కర్ణము పొడవు యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల వర్గాల మొత్తానికి సమానం అవుతుంది.

దత్తాంశం : లంబకోణ త్రిభుజం ABC నందు, $\underline{|B} = 90^0$.

R.T.P : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

నిర్మాణము : $BD \perp AC$ ని పటంలో చూపిన విధంగా నిర్మించుము.



ఉపపత్తి : $\Delta ABC, \Delta ADB$ నందు

$\angle A$ సామాన్య కోణము

$\angle ABC = \angle BDA = 90^0$ | $\because BD \perp AC$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB$ | $\because$ కో.కో.సరూపత ఆధారంగా

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ | $\because$ కో.కో.సరూపత ఆధారంగా

$\Rightarrow AB^2 = AC \times AD$ ...(1)

$\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\angle C$ సామాన్య కోణము | $\because BD \perp AC$

$\angle BDC = \angle ABC = 90^0$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta BDC$ | $\because$ By AA similarity

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 287 06-02-2021 14:54

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$$ |∵ అడ్డగుణకారము చేయగా

$\Rightarrow\ BC^2 = AC \times CD$ ...(2)

(1), (2) లను కూడగా

we get, $AB^2 + BC^2$

$= AC \times CD + AC \times AD$

$= AC\ (CD + AC)$ |∵ $AC + CD = AC$

$= AC \times AC$

$= AC^2$

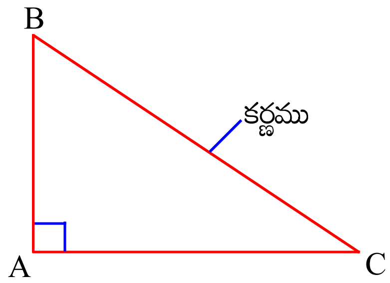
$\therefore\ AB^2 + BC^2 = AC^2$

నిరూపించబడినది.

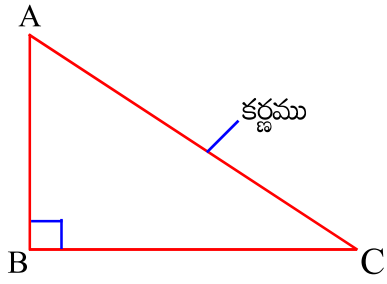
భారతదేశ ప్రాచీనగణిత శాస్త్రవేత్త "బౌద్ధాయనుడు" గూర్చి ప్రస్తావించడము జరిగినది.

పై సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము కూడా సాధ్యమేనా? "ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజం పొడవు యొక్క వర్గం. మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల యొక్క వర్గాల మొత్తానికి సమానతమైతే మొదటి భుజంకు ఎదురుగా ఉండే కోణం లంబకోణము అవుతుంది. ఆ త్రిభుజం లంకోణ త్రిభుజం అవుతుంది.

గమనిక : (1) ΔABC నందు, $AB^2 + CA^2 = BC^2$ అయితే $\angle A = 90^0$.

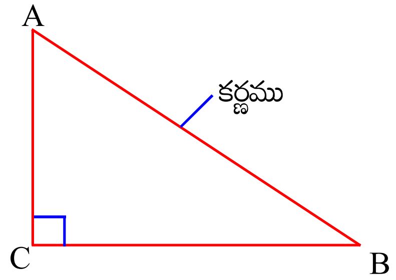


(2) ΔABC నందు $AB^2 + BC^2 = AC^2$ అయితే $\angle B = 90^0$.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 288 06-02-2021 14:54

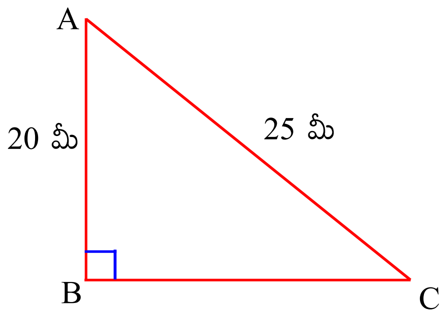
(3) ΔABC నందు $AC^2 + BC^2 = AB^2$ అయితే $\angle C = 90^0$.



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం మరియు దాని విపర్యయంపై మరికొన్ని ఉదాహరణ సాధిందాం.

ఉదాహరణ 13: 25 మీ పొడవు గల ఒక నిచ్చెన 20 మీ ఎత్తున ఉన్న భవనపు కింటికీని తాకునట్లుగా భూమిపై నుండి తాకబడినది. అయిన నిచ్చెన అడుగు భాగం నుండి భవనం యొక్క అడుగు భాగం వరకు గల దూరం కనుగొనుము.

సాధన : దత్తాంశం ప్రకారం



నిచ్చెనపొడవు

$= AC = 25$ మీ

కిటికీ ఎత్తు

$= AB = 20$ మీ

నిచ్చెన అడుగు భాగం నుండి భవనపు అడుగు భాగం వరకు గల దూరం $BC = ?$

ΔABC నందు $\underline{|B} = 90^0$

కావున పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (25)^2 = (20)^2 + BC^2$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a}$ $= a \; ; \; a > 0$

$\Rightarrow 625 = 400 + BC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 625 - 400$

$= 225$

$BC = \sqrt{225} = \sqrt{15 \times 15}$

$= 15$ మీ.

$\therefore$ నిచ్చెన అడుగు భాగం నుండి భవనపు అడుగు భాగం వరకు గల దూరం $= 15$ మీ.

ఉదాహరణ 14: ఒక లంబకోణ త్రిభుజపు కర్ణము ఆ త్రిభుజము నందలి కనిష్ట భుజానికి రెట్టింపు కన్నా '6' మీ ఎక్కువ. మూడవ భుజము కర్ణము కన్నా 2 మీ తక్కువ అయిన ఆ త్రిభుజం యొక్క భుజాల పొడవులను కనుగొనుము.

సాధన : త్రిభుజం యొక్క అతిచిన్న భుజము BC = x మీ అనుకొనుము.

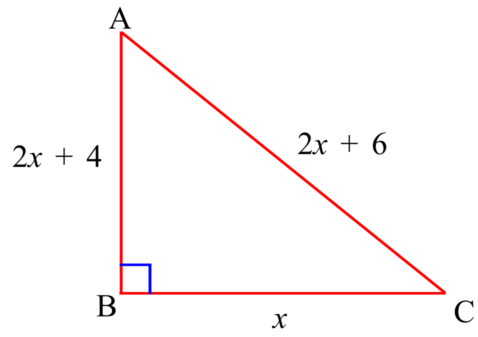
కర్ణము

= AC = $2x + 6$ అవుతుంది.

మూడవ భుజం = AB

$= 2x + 6 - 2$

$= 2x + 4$ అవుతుంది.



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$\Rightarrow (2x + 6)^2 = (2x + 4)^2 + (x)^2$ $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$\Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(6) + (6)^2$

$\Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(4) + (4)^2 + x^2$

$\Rightarrow 4x^2 + 24x + 36 = 4x^2 + 16x + 16 + x^2$

$\Rightarrow x^2 + 16x + 16 = 24x + 36$

$\Rightarrow x^2 + 16x - 24x + 16 - 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 2x + 20 = 0$ $\quad - 20 = \boxed{-10} \times \boxed{2}$

$\Rightarrow x(x - 10) + 2(x - 10) = 0 - 8 = \boxed{-10} \times \boxed{2}$

$\Rightarrow (x - 10) + (x + 2) = 0$

$x - 10 = 0 \quad x + 2 = 0$

$\boxed{x = 10} \quad \boxed{x = -2}$

'x' ఋణాత్మంకాదు కావున

$\therefore \boxed{x = 10}$

$\therefore$ త్రిభుజభుజాల వరుసగా x, $2x + 4$, $2x + 6$

$\Rightarrow$ 10, 20 + 4, 20 + 6

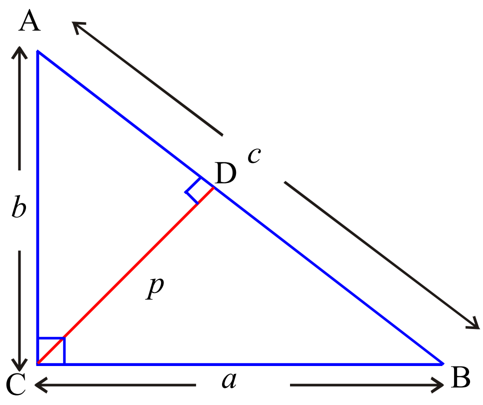
$\Rightarrow$ 10, 24, 26.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 290 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 15 : ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం మరియు $\angle C = 90^0$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ అయి C నుండి AB పైకి గీయబడిన లంబం p అయితే,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$ అని చూపుము.

సాధన :



$CD \perp AC$ మరియు

$CD = p$ నీ గీయుము.

ΔABC వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$= \frac{1}{2} \times c \times p$$

$$= \frac{1}{2} c\, p \qquad ....(1)$$

ΔABC వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2} ab \qquad ...(2)$$

(1), (2) ల నుండి

$$\Rightarrow \frac{1}{2} cp = \frac{1}{2} ab$$

$cp = ab \quad ...(1)$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad \because$ (1) నుండి

$c^2 = b^2 + a^2 \qquad c = \frac{ab}{p}$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 291 06-02-2021 14:54

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

నిరూపించబడినది.

ఉదాహరణ 16 : P మరియు Q లు వరుసగా ΔABC నందు CA, CB ల పై మధ్య బిందువులు. $\angle C = 90^0$, అయిన $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన : ΔAQC నుండి $\angle C = 90^0$ కావున

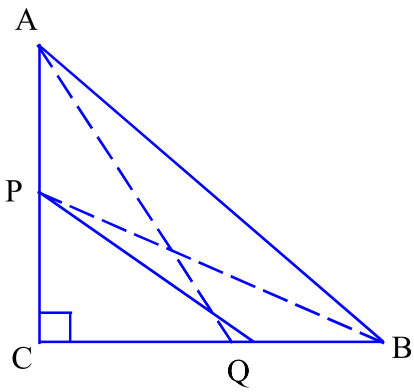
$\Rightarrow AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ...(1)

ΔBPC నందు $\angle C = 90^0$ కావున

$\Rightarrow BP^2 = BC^2 + CP^2$ ...(2)

ΔABC నందు $\angle C = 90^0$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ ...(3)



(1), (2) లను కలుపగా

$AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

4చే ఇరువైపులా గుణించగా

$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$

$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$ | $\because$ P, Q లు మధ్య బిందువులు

$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2$ కావున | $\because 2QC = BC$

$= 5AC^2 + 5BC^2$ | $\because 2CP = AC$

$= 5(AC^2 + BC^2)$ | $\because$ (3) నుండి

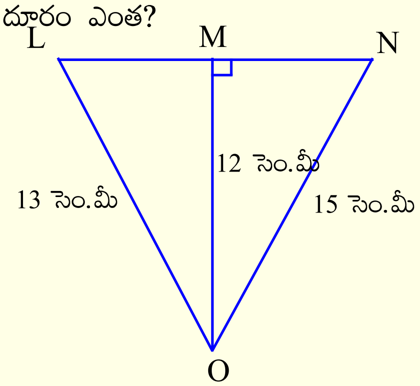
$= 5AB^2$;

నిరూపించబడినది

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 292 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

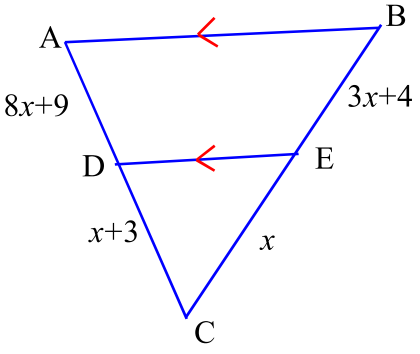
1. ఒక లంబకోణ త్రిభుజ భుజాలు 5 సెం.మీ, 12 సెం.మీ మరియు 13 సెం.మీ అయి ఉండవచ్చా ?
2. 20 ఫీట్ల పొడవు గల నిచ్చెన భూమిపై నుండి 16 ఫీట్ల పొడవు గల గోడకు నిలబెట్టబడినది. నిచ్చెన అడుగు భాగం నుండి, గోడ అడుగుభాగం వరకు గల దూరం ఎంత?
3. దిగువనీయబడిన పటం నుండి LM, MN, LN ల పొడవులు కనుగొనుము.



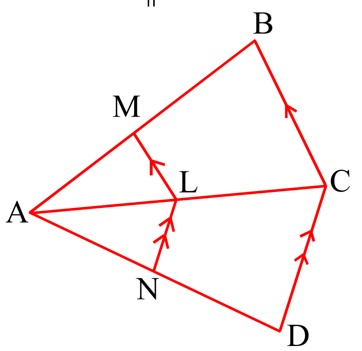
4. "a" యూనిట్లు పొడవు గల చతురస్రం యొక్క కర్ణము పొడవును కనుగొనుము.
5. $\angle Q = 90^0$ అగునట్లు ΔPQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అయిన $PR^2 = 2PQ^2$ అని చూపుము.

అభ్యాసము

1. "వేర్వేరు వ్యాసార్థాలు కలిగిన అన్ని వృత్తాలు సరూపాలు" అని సాయి అన్నాడు. నీవు అతనితో ఏకీభవిస్తావా? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము.
2. దిగువనీయబడిన పటంలో DE || AB అయినచో 'x' విలువ కనుగొనుము.



3. దిగువ నీయబడిన పటంలో LM || CB మరియు LN || CD, అయినచో $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ అని చూపండి.

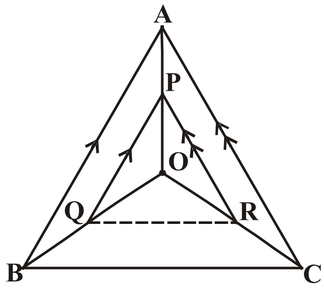


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 293
06-02-2021 14:54

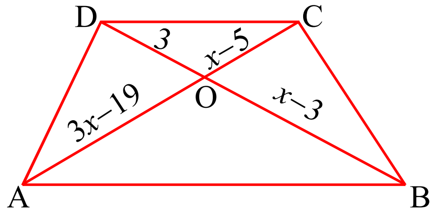
4. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం నందు AB || DC మరియు దాని కర్ణములు 'O' బిందువు వద్ద పరస్పరం ఖండించు కొనుచున్నవి. అయిన $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అని చూపుము.

5. ΔPQR నందు E, F బిందువులు. PQ, PR భుజాలపై గలవు. PE = 3.9 సెం.మీ, EQ = 3 సెం.మీ, PF = 3.6 సెం.మీ మరియు FR = 2.4 సెం.మీ అయిన EF || QR అవుతుందో, కాదో తెలపండి.

6. దిగువ పటం నుండి AB || PQ మరియు AC || PR అగునట్లుగా A, B మరియు C బిందువులు OP, OQ మరియు OR లపై గలవు. అయిన BC || QR అని చూపండి.

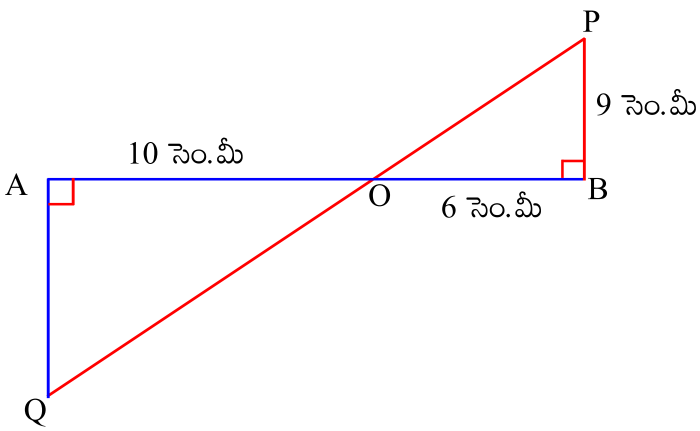


7. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి AB || DC అని ఈయబడింది. అయిన x విలువను కనుగొనుము.



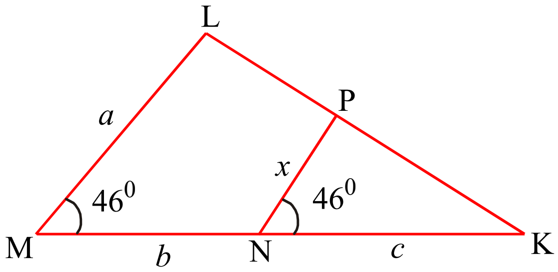
8. "a" మీటర్లు, "b" మీటర్ల ఎత్తు గల రెండు స్థంభములు దూరం దూరంగా ఉన్నాయి. ఒక స్థంభము పై నుండి మరొక స్థంభపు అడుగు భాగంను కలిపే రేఖాఖండాల ఖండన బిందువు యొక్క ఎత్తు $\frac{ab}{a+b}$ మీటర్లు అని నిరూపించండి.

9. దిగువనీయబడిన పటం నుండి QA మరియు PB లు AB కి లంబంగా నున్నవి. మరియు AO = 10 సెం.మీ, BO = 6 సెం.మీ మరియు PB = 9 సెం.మీ అయిన AQ ఎంత?



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 294 06-02-2021 14:54

10. దిగువ నీయబడిన పటం నుండి "x" ను a, b, c పదాలలో తెల్పండి.



11. "చతురుస్రం యొక్క ఒక భుజంపై ఏర్పడిన సమబాహు చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం అదే చతురస్రం యొక్క కర్ణముపై ఏర్పడిన సమబాహు చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంలో సగం ఉంటుంది" అని నిరూపించండి.

12. 13 మీ పొడవైన నిచ్చెన వీధిలో ఒకవైపునున్న భవనం యొక్క 12 మీ ఎత్తులోని కిటికీని తాకుచున్నది. నిచ్చెన అడుగుభాగ స్థానం మార్చకుండా నిచ్చెనను అదేవీధిల మరోవైపుకు గల వేరే భవనం పై 5 మీ ఎత్తులో గల కిటికీని తాకినట్లు మార్చబడినది. అయిన ఆ వీధి వెడల్పు ఎంత?

13. ΔABC ఒక సమాబాహు త్రిభుజం నందు $AC = BC$ అని ఇవ్వబడినది. $AB^2 = 2AC^2$ అయినట్లయితే, ΔABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అని చూపండి.

14. ΔABC నందు, AD మధ్యగతము అయితే $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ అని చూపుము.

15. సమబాహు త్రిభుజం ABC నందు BC పై $BD = \frac{1}{3}$ BC అగునట్లు బిందువు D కలదు. అయిన $9AD^2 = 7AB^2$ అని నిరూపించుము.

ముఖ్యాంశాలు

- ఒకే ఆకారం కలిగి ఒకే పరిమాణం లేదా వేరువేరు పరిమాణాలలో గల వస్తువులన్నింటినీ సరూప ఆకారాలుగా పరిగణిస్తాం.
- ఏవేని రెండు బహుభుజిలు, వాటి అనురూప కోణాలు సమానమై, అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటే ఆ బహుభుజిలు సరూపాలు.
- రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు కావలెనన్న

  (i) వాని అనురూప కోణాలు సమానం.

  (ii) వాని అనురూప భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో లేదా అనుపాతంలో ఉండవలెను.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 295
06-02-2021 14:54

- ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీయబడిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించును.
- ఒక త్రిభుజంలో ఒక రేఖ ఏవేని రెండు భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించినట్లయితే ఆ రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగా ఉంటుంది.
- రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి అనురూప భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానం.
- ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో, కర్ణము పొడవు యొక్క వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల వర్గాల మొత్తానికి సమానం అవుతుంది.
- ఒక త్రిబుజంలో, ఒక భుజం పొడవు యొక్క వర్గం, మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల వర్గాల మొత్తానికి సమానం అయితే ఆ త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుంది. మొదటి భుజానికి ఎదురుగా ఉండే కోణం లంబకోణం అవుతుంది. (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం).

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 296	06-02-2021 14:54

అధ్యాయం 4.7 వృత్తాలు

4.7.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

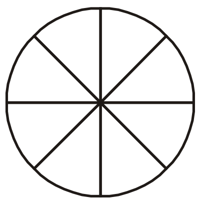
ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- వృత్తము నిర్వచించగలరు.
- వృత్తమునకు సంబంధించిన పదములను నిర్వచించగలరు.
- సర్వసమాన వృత్తాలను, ఏక కేంద్ర వృత్తాలను నిర్వచించి వివరించగలరు.
- వృత్తానికి సంబంధించిన పదాలైన, వృత్తజ్యా, చాపము, సెక్టారు, వృత్త ఖండము, మొదలగు పదాలను వివరించి నిర్వచించగలరు.
- వృత్తఖండము, చాపము మొదలగు పదాలను ప్రయోగాత్మకంగా సరిచూడగలరు.
- సమస్యాసాధనలో సిద్ధాంతములను ఉపయోగించగలరు.

4.7.1 పరిచయం

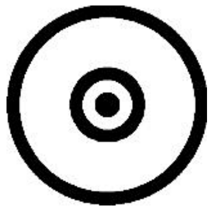
మన దైనందిన జీవిత పరిస్థితులలో గుండ్రని ఆకారంలో ఉన్న అనేక వస్తువులను మనం గమనించవచ్చు. ఉదాహరణకు రూపాయి నాణెము, వాహనము యొక్క చక్రము, బ్యాంగిల్, CD, ఆంగ్ల అక్షరం 'O', మరియు గడియారము లోని ముల్లు యొక్క పథము. గడియారపు ముల్లు తిరిగిన మార్గం వెంట గీతను గీస్తే అది ఒక 'వృత్తము' అవుతుంది.

నాణెము



చక్రము

బ్యాంగిల్



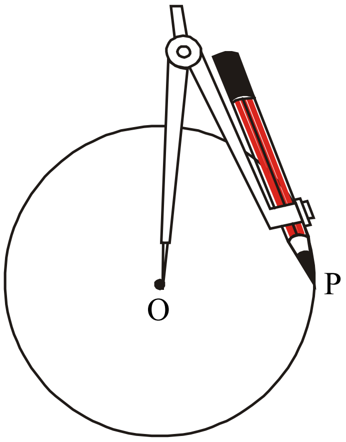
CD

4.7.2 వృత్తము మరియు సంబంధిత పదములు

ఒక పెన్సిల్‌ను వృత్తలేఖినికి బిగించండి. వృత్తలేఖిని యొక్క ఒక చివరను కాగితంపై ఒక బిందువు వద్ద స్థిరంగా వుంచండి. వృత్తలేఖిని యొక్క రెండవ చివర (పెన్సిల్ బిగించిన చివర)తో గుండ్రంగా కాగితంపై గీయండి. గీయబడిన సంవృత పటము ఏమిటో గమనించారా? ఇది ఒక వృత్తము. పటము (1)లో చూపిన విధంగా 'O'వద్ద ఒక స్థిర బిందువును ఉంచాము. మరియు స్థిరబిందువుకు సమాన దూరాలలో వుండునట్లు అన్ని బిందువులను గుర్తించాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 297 06-02-2021 14:54

ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువు నుండి స్థిర దూరంలో గల బిందువుల సముదాయాన్ని "వృత్తం" అంటాము.



పటం. 1

స్థిర బిందువు 'O'ను "వృత్తకేంద్రం" అని, స్థిర దూరము OP ను "వ్యాసార్థము" అని పిలుస్తాము. వ్యాసార్థమును "r" తో సూచిస్తాము.

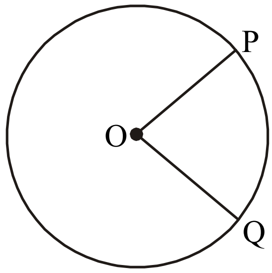
పటము (1) లో వృత్తకేంద్రం 'O' మరియు OP వ్యాసార్థము

$\therefore$ వ్యాసార్థము r = OP

గమనిక : వృత్తకేంద్రమును మరియు వృత్తముపై ఏదైనా బిందువును కలుపు రేఖాఖండాన్ని "వ్యాసార్థము" అంటాము.

కృత్యం - 1

కొంత వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తమును గీసి (పటం. 2) OP మరియు OQ లను గమనించిన అవి సమానము అని గమనించవచ్చు.

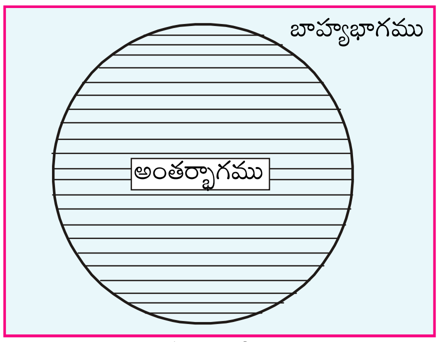


పటం. 2

OP = OQ = r

- ఒక వృత్తములోని అన్ని వ్యాసార్థాలు సమానము.

ఒక సంవృత జ్యామితీయ పటము తలమును 3 భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అవి పటము అంతర్భాగము. పటము, పటము బాహ్యభాగము. పటము. 3లో షేడ్ చేయబడిన భాగము పటము అంతర్భాగము, పటము సరిహద్దు వృత్తము మరియు షేడ్ చేయని భాగము పటము యొక్క బాహ్యభాగము.



పటం. 3

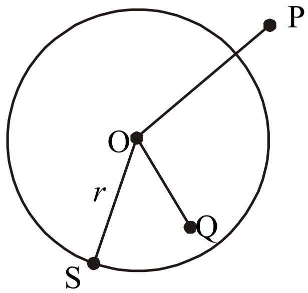
కృత్యం - 2

1. పటము 4లో చూపినట్లు వృత్తము లోపల Q అను బిందువును గుర్తించి OQ దూరాన్ని కొలవండి. OQ < r అని గమనించగలరు. వృత్తము లోపలి బాగాన్ని "వృత్త అంతర్భాగము" అంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 298 06-02-2021 14:54

2. ఇప్పుడు వృత్తము బయట P అను బిందువును గుర్తించుము (పటము 4) OP ని కొలవగా OP > r అని గమనించవచ్చు. P అనే బిందువు వృత్త బాహ్యభాగములో కలదు.

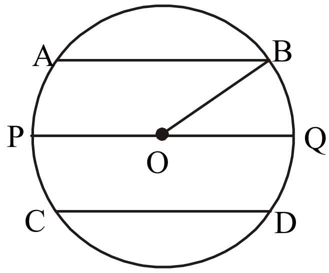
3. బిందువు 'S' అనునవి వృత్తముపై కలదు (OS = r)



పటం. 4

వృత్త జ్యా

వృత్తంపై ఏవేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని "వృత్తజ్యా" అంటాము. 'O' కేంద్రము 'r' వ్యాసార్థముగా గల వృత్తములో AB, PQ, CD అనునవి వృత్తజ్యాలు ఇందులో PQ అను జ్యా వృత్తకేంద్రం గుండా పోతుంది. ఇలాంటి 'జ్యా'ను "వ్యాసము" అంటాము. వ్యాసమును 'd' తో సూచిస్తాము.



పటం. 5

కృత్యం - 3

పటము. 5లో AB, PQ, CD, OB ల పొడవులు కొలువగా PQ అనునది 2OBకి సమానమని తెలుస్తుంది.

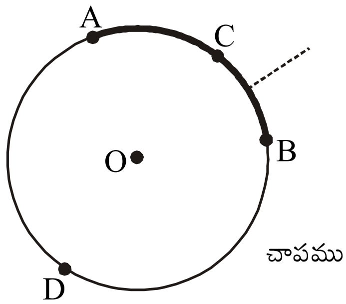
$$d = 2r$$

మరియు PQ > CD మరియు PQ > AB

అనగా వృత్తములో వ్యాసము అతిపెద్ద జ్యా అవుతుంది.

చాపము

వృత్త పరిధిలోని ఏదేని ఒక భాగాన్ని ఆ వృత్త చాపము అంటాము. పటము. 6లో ACB అనునది ఒక చాపము దీనిని $\overset{\frown}{ACB}$ గా సూచిస్తాము.

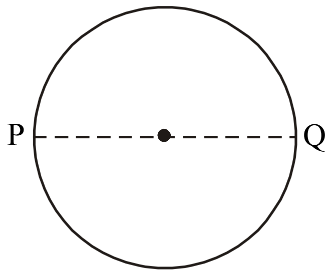


పటం. 6

పటము. 6 లో $\overset{\frown}{ACB}$ ని అల్పచాపము అని మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ ని అధిక చాపము అని అంటాము.

అర్ధవృత్తము

పటము. 7లో సూచించినట్లు బిందువులు P, Q లు వ్యాసము యొక్క చివరి బిందువులు మరియు వ్యాసము PQ వృత్తాన్ని రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. ఒక్కొక్క భాగాన్ని "అర్ధవృత్తము" అంటాము.

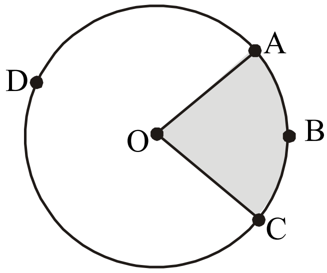


పటం. 7

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 299 06-02-2021 14:54

సెక్టారు

ఒక చాపము మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్తకేంద్రంతో కలిపే వ్యాసార్థాల చేత ఆవరించబడిన ప్రాంతాన్ని "సెక్టారు" అంటాము. పటము 8లో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతము ABC చాపముచే ఏర్పడిన సెక్టారును సూచిస్తుంది. అలాగే ADC చాపముచే షేడ్ చేయని సెక్టారు ఏర్పడింది.

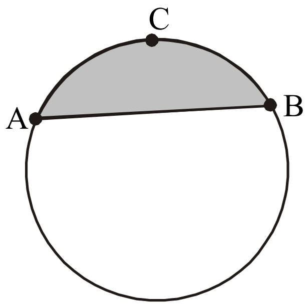


పటం. 8

పటము 8లో $\angle AOC$ ని "సెక్టారుకోణము" అంటాము.

వృత్తఖండము

వృత్తజ్యా ఒక వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అందులో ఒక్కొక్క భాగాన్ని "వృత్తఖండము" అంటాము. పటము 9లో చూపినట్లుగా ACB ని "అల్పవృత్త ఖండము" అని మరియు ADB ని "అధిక వృత్త ఖండము" అని అంటాము.

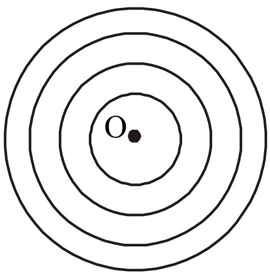


పటం. 9

వృత్తం యొక్క మొత్తం పొడవును "వృత్త పరిధి" అంటాము.

ఏక కేంద్ర వృత్తాలు

ఒకే కేంద్రము మరియు వేరువేరు వ్యాసార్థాలు కలిగిన వృత్తాలను "ఏకకేంద్ర వృత్తాలు" అంటాము. (పటము. 10)



పటం. 10

సర్వసమాన వృత్తాలు

సమాన వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలు ఒకదానికొకటి సర్వసమాన వృత్తాలు అవుతాయి.

సర్వసమాన వృత్తాలన్ని ఒకే కొలత కలిగి వుండి ఒకదానిపై ఒకటి అధ్యారోహణము గావించబడుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 300 06-02-2021 14:54

4.7.3 ఒక వృత్తంలో రెండు చాపములు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరుచు కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు చాపాలు కూడా సర్వసమానాలు.

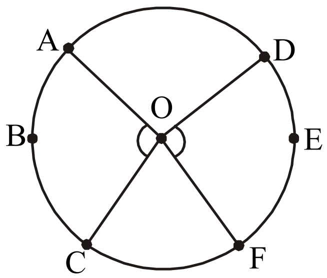
కృత్యం - 4

1. "O" కేంద్రముగా గల వృత్తము గీయుము.
2. పటము. 11లో

చాపము ABC = చాపము DEF

$\angle AOC = \angle DOF$

కాబట్టి



పటం. 11

* ఒక వృత్తములో రెండు చాపములు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరుచు కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు చాపాలు కూడా సర్వసమానము.

4.7.4 ఒక వృత్తంలో రెండు జ్యాలు సమానమైతే ఆ రెండు జ్యాలచే ఏర్పడు చాపాలు కూడా సర్వసమానము

కృత్యం - 5

1. "O" కేంద్రముగా గల వృత్తము గీయుము.
2. పటము 12లో చూపినట్లు సమాన జ్యాలు AB, CD లు గీయుము.

AB = CD

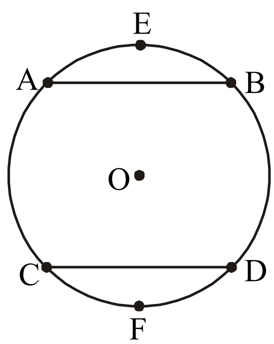
అప్పుడు

చాపము AEB = చాపము CFD

అదేవిధంగా

చాపము AEB = చాపము CFD

అయినచో AB = CD అవుతుంది.



పటం. 12

* ఒక వృత్తంలో రెండు జ్యాలు సమానమైతే ఆ రెండు జ్యాలచే ఏర్పడు చాపాలు కూడా సర్వసమానము.

4.7.5 ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు కూడా సమానము

కృత్యం - 6

1. "O" కేంద్రంగా ఒక వృత్తం గీయుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 301
06-02-2021 14:54

2. పటం. 13లో చూపించినట్లుగా సమాన పొడవులతో AB, CD జ్యాలు గీయుము.

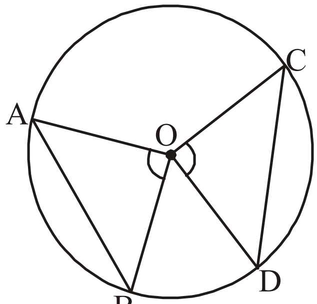
3. OA, OB, OC మరియు OD లను కలుపుము.

4. $\angle AOB$ మరియు $\angle COD$ కోణాలను కొలువుము.

$\angle AOB = \angle COD$ అని తెలుస్తుంది.

అదేవిధంగా $\angle AOB = \angle COD$ అయితే

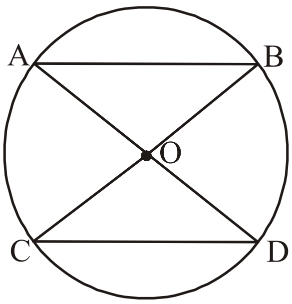
AB = CD అవుతాయి.



పటం. 13

* ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరిచే కోణాలు కూడా సమానము.

ఉదాహరణ 1 : పటము. 14లో AB = CD అయిన AC = BD అని చూపుము.



పటం. 14

సాధన : పటము 14లో జ్యాలు సమానము కాబట్టి చాపములు కూడా సమానము.

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

$\therefore \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$

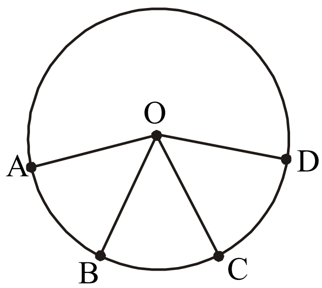
$\therefore \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DBC}$

$\therefore$ జ్యా AC = జ్యా BD

($\because$ రెండు చాపాలు సర్వసమానం అయితే, వాటిచే ఏర్పడే జ్యాలు సమానము.)

నిరూపించనైనది.

ఉదాహరణ 2 : పటము 15లో చాపము AB = చాపము BC $\angle AOB = 50^0$ $\angle COD = 40^0$. అయిన $\angle AOD$ ని కనుగొనుము.



పటం. 15

సాధన : చాపము AB = చాపము BC

$\therefore \angle AOB = \angle BOC$ ($\because$ 4.7.6)

$\therefore \angle BOC = 50^0$

$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$

$= 50^0 + 50^0 + 40^0$

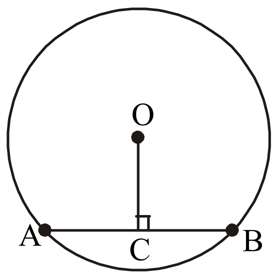
$= 140^0$

$\therefore \angle AOD = 140^0$.

4.7.6 "వృత్త జ్యాకు కేంద్రం నుండి గీసిన లంబరేఖ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది".

కృత్యం - 7

1. 'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తం గీయుము (పటం. 16)
2. AB అను జ్యాను గీయుము.
3. O నుండి OC అను లంబ రేఖను గీయుము.
4. AC, CB లను కలుపుము.



AC = CB అని తెలుస్తుంది.

పటం - 16

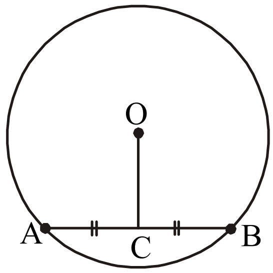
కావున

* "వృత్త జ్యాకు కేంద్రం నుండి గీసిన లంబరేఖ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది".

4.7.7 వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యాను సమద్విఖండన చేయు రేఖ ఆ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది

కృత్యం - 8

1. 'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తం గీయుము. (పటం. 17)
2. AB అను జ్యాను గీయుము.
3. AB రేఖకు మధ్యబిందువును 'C' ను గుర్తించుము.
4. O మరియు C లను కలుపుము.



5. $\angle OCA$ మరియు $\angle OCB$ లను కలుపుము.

పటం. 17

$\angle OCA = \angle OCB = 90^0$ అని తెలుస్తుంది.

కాబట్టి

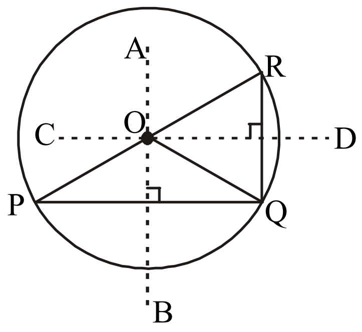
వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యాను సమద్విఖండన చేయు రేఖ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 303	06-02-2021 14:54

4.7.8 "మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువుల ద్వారా ఏకైక వృత్తం గీయవచ్చు".

కృత్యం - 9

1. P, Q మరియు R అను మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువులను గుర్తించి, PQ, QR లను కలుపుము..
2. PQ, QR పై వరుసగా AB, CD అను లంబసమద్విఖండన రేఖలు గీయుము.



పటం. 18

P, Q, R లు సరేఖీయాలు కావు కాబట్టి AB కి CD సమాంతర రేఖ కాదు మరియు ఇవి రెండు 'O' అను ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. OP, OQ, OR లను కలుపుము మరియు వాటి కొలతలు గుర్తించుము.

OP = OQ = OR అని గమనించవచ్చు.

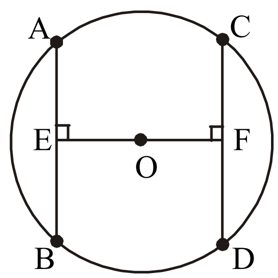
O కేంద్రంగా OP వ్యాసార్థంతో వృత్తం గీయగా అది P, Q మరియు R ల గుండా పోతుంది.

ఇదేవిధంగా మరికొన్ని సరేఖీయాలు కాని బిందువులను గుర్తించి పై కృత్యం నిర్వహించడం ద్వారా "మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువుల ద్వారా ఏకైక వృత్తం గీయవచ్చు" అని తెలుస్తుంది.

4.7.9 "సర్వసమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో వుంటాయి"

కృత్యం - 10

1. 'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తం గీయుము (పటం. 19)
2. AB, CD అను రెండు సమాన జ్యాలు గీయుము.
3. OE ⊥ AB మరియు OF ⊥ CD వుండునట్లుగా OE, OF రేఖలు గీయుము.
4. OE, OF లను కొలవగా OE = OF అని గమనించవచ్చు.



పటం. 19

కాబట్టి

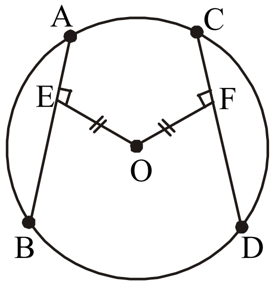
"సర్వసమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో వుంటాయి".

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 304 06-02-2021 14:54

4.7.10 "వృత్తం కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో గల జ్యాలు సర్వసమానాలు"

కృత్యం - 11

1. 'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తం గీయుము (పటం 20)
2. OE = OF అగునట్లు కేంద్రం నుండి OE, OF రేఖలు గీయుము.
3. OE కి E వద్ద AB అను లంబరేఖ మరియు OF కి F వద్ద CD అను లంబరేఖ గీయుము.
4. AB, CD లను కొలవగా AB = CD అని తెలుస్తుంది.



పటం. 20

కాబట్టి

"వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరాలలో గల జ్యాలు సర్వసమానాలు".

ఉదాహరణ 3 : ఒక వృత్తంలో క్రమ పంచబహుభుజి అంతర్లిఖించబడినది. అయిన క్రమ పంచభుజి ప్రతి భుజం కేంద్రం వద్ద చేయుకోణం ఎంత?

సాధన : క్రమబహుభుజి 5 సమాన భుజాలు కలిగి వుంటుంది.

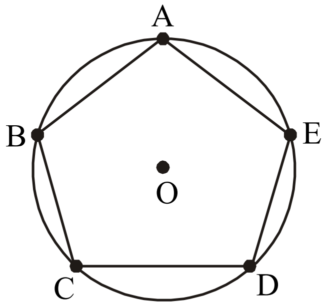
∴ ప్రతి భుజం కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలు చేస్తుంది.

కోణం x అనుకొనుము.

$5x = 360^0$

$x = \frac{360}{5}$

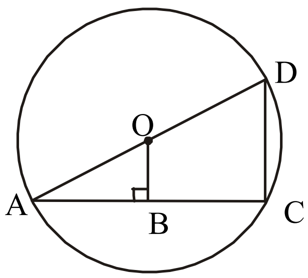
$x = 72^0$



పటం. 21

క్రమ బహుభుజి యొక్క ప్రతి భుజం కేంద్రం వద్ద చేయు కోణము 72^0.

ఉదాహరణ 4 : పటం. 22లో 'O' కేంద్రం మరియు AD వ్యాసంగా గల వృత్తంలో జ్యా AC కి గీయబడిన లంబరేఖ OB అయిన DC = 2 OB అని చూపుము.



పటం. 22

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 305
06-02-2021 14:54

సాధన : OB $\perp$ AC (సమస్యలో ఇవ్వబడింది)

'B' అనునది AC కి మధ్యబిందువు ($\because$ 4.7.7)

'O' అనునది AD కి మధ్యబిందువు ($\because$ AD వ్యాసము)

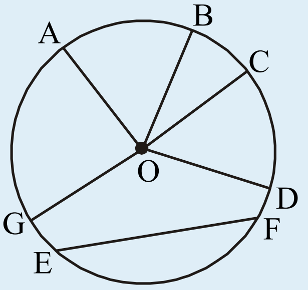
ΔADC లో O మరియు B లు AD, AC ల మధ్యబిందువులు. త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపగా ఏర్పడిన రేఖ త్రిభుజ మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను మరియు మూడవ భుజంలో సగం వుంటుంది.

$\therefore$ OB $= \frac{1}{2}$DC

DC = 2OB.

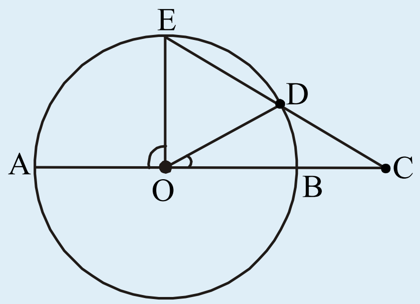
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. పటం. 23 నుండి వివిధ వృత్త భాగాలను గుర్తించుము.



పటం. 23

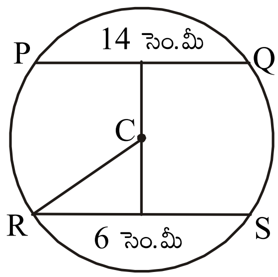
2. ఒక వృత్తంలో క్రమ సప్తభుజి అంతర్లిఖించబడింది. అయిన క్రమ సప్తభుజి ప్రతిభుజం కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం ఎంత?
3. ఏక కేంద్ర వృత్తం, సర్వసమాన వృత్తాల మధ్యగల భేదాలు తెల్పుము.
4. రెండు సెక్టారులను కలుపడం ద్వారా ఒక వృత్తం ఏర్పరచవచ్చా ? మీ సమాధానమును సమర్థించుము.
5. పటము. 24లో 'O' కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసం AB, $\angle BOD = 20^0$, $\angle EOA = 75^0$ అయిన $\angle ECA$ ఎంత?



పటం. 24

అభ్యాసము

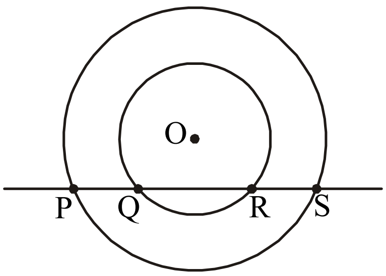
1. వివిధ రకాల వృత్తాలు జతలను గీయుము. ప్రతి జతలో ఎన్ని ఉమ్మడి బిందువు ఉన్నాయి? గరిష్ఠ ఉమ్మడి బిందువుల సంఖ్య ఎంత?
2. ఒక వృత్తము ఇచ్చినట్లయితే దాని కేంద్రమును కనుగొను విధానము తెల్పుము.
3. ఒక వృత్తంలో క్రమ షడ్భుజి అంతర్లిఖించబడినది. అయిన క్రమషడ్భుజి ప్రతిభుజం కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం ఎంత?
4. పటం. 25లో 'O' కేంద్రంగా, వ్యాసార్థం 9 సెం.మీ. గల వృత్తంలో PQ = 14 సెం.మీ RS = 6సెం.మీ మరియు PQ, RS లు రెండు సమాంతర జ్యాలు, అయిన PQ, RS జ్యాల మధ్య దూరము కనుగొనుము.



పటం. 25

5. ఒక వృత్త జ్యా పొడవు 8 సెం.మీ మరియు కేంద్రం నుండి జ్యాకు గల దూరము 3 సెం.మీ అయిన వృత్త వ్యాసార్థము కనుగొనుము.

6. పటం. 26లో 'O' కేంద్రంగా గల రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలను ఒక రేఖాఖండము P, Q, R, S ల వద్ద ఖండించినట్లైతే PQ = RS అవుతుందా? సకారణంగా వివరించుము.



పటం. 26

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 307 06-02-2021 14:54

ముఖ్యాంశాలు

- వృత్తంలో అతిపెద్ద జ్యాను "వ్యాసము" అంటాము.
- వృత్తము ఒక తలమును 3 భాగాలుగా విభజిస్తుంది.
- ఒక వృత్తంలో రెండు చాపములు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరుచు కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు చాపములు కూడా సర్వసమానాలు.
- ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలు కూడా సమానము.
- వృ్తంలోని సమాన జ్యాలు కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలను ఏర్పరుస్తాయి.
- వృత్త జ్యాకు కేంద్రం నుండి గీసిన లంబరేఖ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.
- వృత్తకేంద్రం నుండి, జ్యాను సమద్విఖండన చేయు రేఖ ఆ జ్యాకు లంబంగా వుంటుంది.
- మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువుల ద్వారా ఒకే ఒక వృత్తం గీయవచ్చు.
- సర్వసమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో వుంటాయి మరియు విపర్యయము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 308 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.8 ఛేదన రేఖలు, స్పర్శరేఖలు మరియు వాటి ధర్మాలు

4.8.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

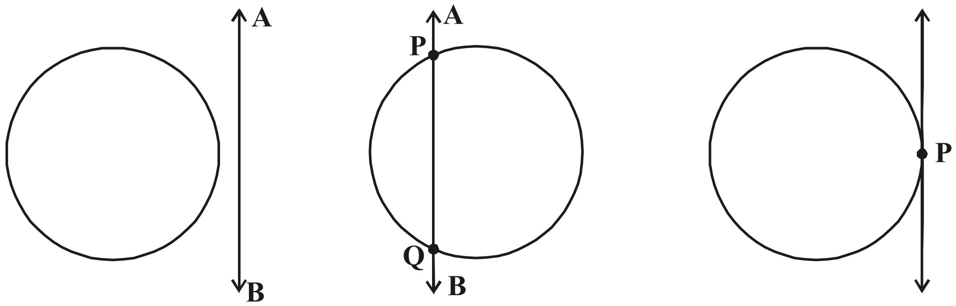
- స్పర్శరేఖ, ఛేదన రేఖ, స్పర్శబిందువు మొదలగు వాటిని వివరిస్తారు మరియు వాటి గురించి రాస్తారు.
- "ఒక వృత్తంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ ఆ స్పర్శబిందువు వద్ద గీసిన వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుంది" అని సరిచూస్తారు.
- "ఒక వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము" అని సరిచూస్తారు.
- పై సిద్ధాంతములను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధిస్తారు.

4.8.1 పరిచయం

మీరు రైలును చూసే ఉంటారు కదా ! మరి రైలు పట్టాలు మరియు చక్రాల స్థానాలను మీరు ఎప్పుడైనా పరిశీలించారా? ఒకవేళ పరిశీలిస్తే, ఋజుమార్గంలో ఉన్న పట్టాలపై, చక్రాలు కదలడాన్ని మీరు గమనించవచ్చును. అయితే ఈ చక్రాలు ఎప్పుడూ పట్టాలను తాకుతూ ఉంటాయి.

ఇక్కడ మనం ఆ రైలు చక్రాలకు, రైలు పట్టాలు స్పర్శరేఖలు అని చెప్పవచ్చును.

అయితే మీకు ఈ స్పర్శరేఖను గురించి తెలుసుకోవాలని ఉందా ? దాని కొరకు ముందు ఒక వృత్తము మరియు సరళరేఖల మధ్య సంబంధాన్ని పరిశోదిద్దాము. రండి.



(i) (ii) (iii)

(i) వ పటంలో, వృత్తము మరియు సరళరేఖలకు ఎన్ని ఉమ్మడి బిందువులు ఉన్నాయి? ఉమ్మడి బిందువులు లేవు కదా! కావున ఆ సరళరేఖను, ఆ వృత్తము దృష్ట్యా అఖండిత రేఖ అంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 309 06-02-2021 14:54

(ii) వ పటంలో, వృత్తమునకు మరియు సరళరేఖకు ఎన్ని ఉమ్మడి బిందువులు ఉన్నాయి ? సరళరేఖ AB మరియు వృత్తములకు P మరియు Q అనే రెండు ఉమ్మడి బిందువులు ఉన్నాయి. కావున సరళరేఖ ABని ఈ వృత్తమునకు ఛేదన రేఖ అంటాము.

(iii)వ పటంలో, వృత్తమునకు మరియు సరళరేఖకు ఎన్ని ఉమ్మడి బిందువులు ఉన్నాయి ? సరళరేఖకు మరియు వృత్తమునకు 'P' అనే ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు కలదు. ఇక్కడ ఈ రేఖను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అంటాము. ఏ బిందువు వద్ద సరళరేఖ వృత్తాన్ని తాకుతుందో ఆ బిందువును "స్పర్శబిందువు" అంటారు.

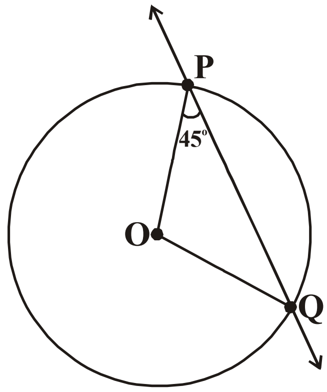
కావున ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అనేది, ఆ వృత్తాన్ని ఖచ్చితంగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించే రేఖ.

ఈ అధ్యాయంలో మనము ఈ ఛేదన రేఖలు, స్పర్శరేఖలు మరియు వాటి ధర్మాలను నేర్చుకొందాము.

4.8.2 ఒక వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ

పరిచయంలో మనము ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అంటే ఆ వృత్తాన్ని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించే రేఖ అని నేర్చుకొన్నాము.

ఒక వృత్తంపై ఏదైనా బిందువువద్ద గల స్పర్శరేఖ ఉనికిని అవగాహన చేసుకోవడానికి ఈ క్రింది కృత్యాన్ని నిర్వహిద్దాము. రండి.



కృత్యం - 1

'O' కేంద్రముగా కొంత వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి.

ఆ వృత్తంపై ఏదైనా బిందువు 'P'.

ఈ బిందువు 'P' వద్ద కోణమానిని సహాయంతో 40^0 కోణాన్ని కొలిచి, ఒక రేఖను గీయండి.

ఈ రేఖ 'P' బిందువు గుండా పోతూ, వృత్తాన్ని వేరొక బిందువు 'Q' వద్ద ఖండిస్తుంది. 'O' మరియు 'Q' లను కలపండి.

ఇదే విధంగా 'P' వద్ద కోణాలను 50^0, 60^0 ఈ విధంగా పెంచుకొంటూ మరికొన్ని పటాలను గీయండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

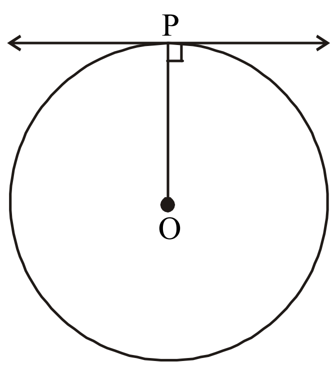
'P' బిందువు వద్ద కోణం పెరుగుతూ ఉంటే, Q బిందువు 'P' బిందువుకు దగ్గరగా వస్తుంది మరియు ΔPOQ సన్నగా అవుతుంది.

మరి బిందువు 'P' వద్ద కోణం 90^0 అయితే ఏమి జరుగుతుంది?

అప్పుడు ఆ రేఖ, ఆ వృత్తాన్ని వేరొక బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందా?

కావున ఆ వృత్తము మరియు ఆ సరళరేఖలకు వేరొక ఉమ్మడి బిందువు ఉండదు. అంటే ఈ రేఖ, ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

దీని నుండి మనము ఈ సాధారణ నియమాన్ని పొందవచ్చును.

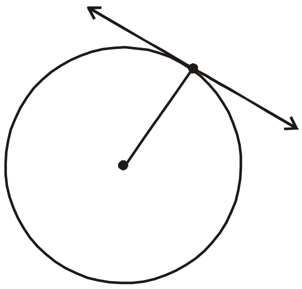
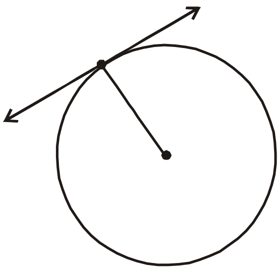
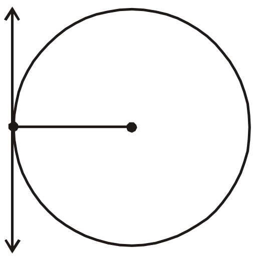
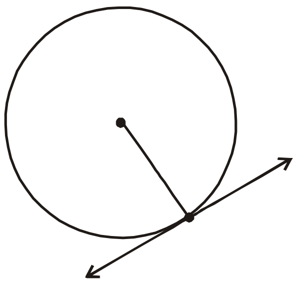
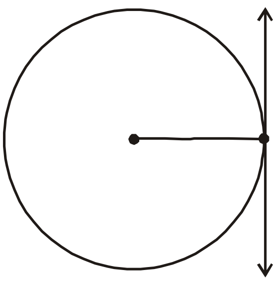


ఒక వృత్తంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద గీసిన సరళరేఖ, అదే బిందువు నుండి గీసిన వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటే, ఆ రేఖ ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 310 06-02-2021 14:54

కృత్యం - 2

ఈ క్రింద ఇచ్చిన పటాలలో, ప్రతీ పటంలో వ్యాసార్థానికి మరియు స్పర్శరేఖకు మధ్య ఏర్పడిన కోణాన్ని కోణమానినితో కొలవండి.

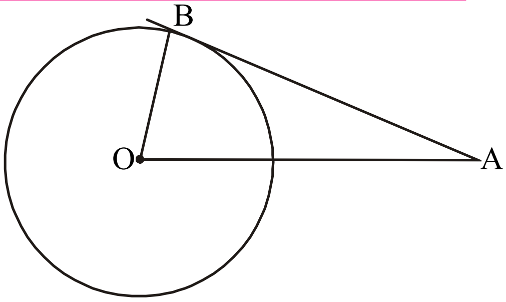
పటము	వ్యాసార్థము మరియు స్పర్శరేఖల మధ్యకోణము
	
	
	
	
	

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 311 06-02-2021 14:54

పై పరిశీలనలను బట్టి మనము ఈ క్రింది విషయాన్ని చెప్పగలము.

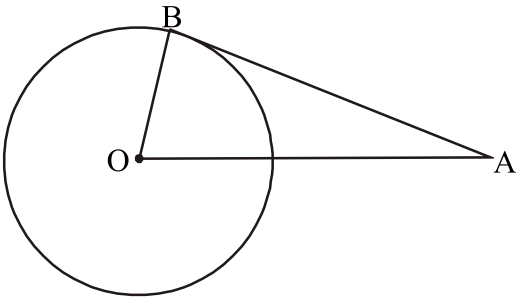
"స్పర్శబిందువు వద్ద గీసిన వృత్తవ్యాసార్థము ఎల్లప్పుడూ ఆ స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటుంది."

ఉదాహరణ 1 : పటంలో చూపినట్లు ΔOAB ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము అయిన $\angle OAB$ కొలత ఎంత?



సాధన : స్పర్శబిందువు వద్ద గీసిన వృత్తవ్యాసార్థము ఎల్లప్పుడూ ఆ స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.

కావున $\angle OBA = 90^0$ ($\because$ OB వ్యాసార్థము మరియు AB స్పర్శరేఖ)



$OB = AB$ ($\because$ ΔOAB సమద్విబాహు త్రిభుజము మరియు OA కర్ణము)

$\angle OAB = \angle OBA$ (ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములో సమాన భుజాల కెదురుగా నున్న కోణాలు సమానం)

ΔOAB లో $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^0$

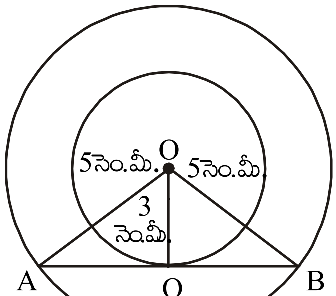
($\because$ త్రిభుజంలోని అంతరకోణాల మొత్తం)

$$90^0 + 2\angle OAB = 180^0$$

$$2\angle OAB = 90^0$$

$$\angle OAB = \frac{90^0}{2} = 45^0$$

ఉదాహరణ 2 : రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాల వ్యాసార్థాలు 5 సెం.మీ మరియు 3 సెం.మీ. చిన్న వృత్తాన్ని తాకెటట్లు గీయబడిన, పెద్ద వృత్తములోని జ్యాపొడవును కను గొనండి.



సాధన : $OP \perp AB$ ($\because$ స్పర్శబిందువు వద్ద గీసిన వృత్తవ్యాసార్థము ఎల్లప్పుడూ స్పర్శరేఖకు లంబము)

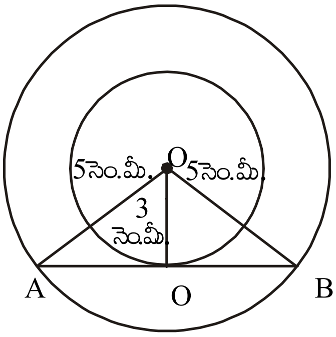
ΔOPA లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ఉపయోగించగా

$$(OP)^2 + (AP)^2 = (OA)^2$$

$$(3)^2 + (AP)^2 = (5)^2$$

$$(AP)^2 = 25 - 9 = 16$$

$$AP = \sqrt{16} = 4 \text{ సెం.మీ.}$$

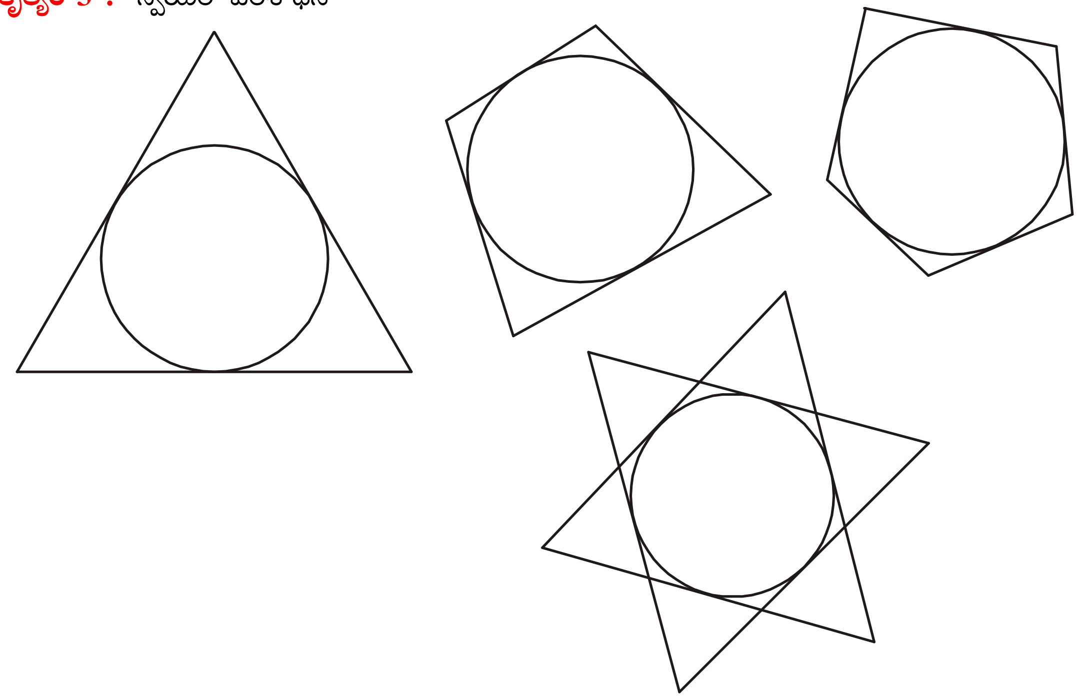


కాని AP = PB ($\because$ ఒక వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యాకు గీసిన లంబము దాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది)

$\therefore$ AB = AP + PB = 2AP

= 2 $\times$ 4 = 8 సెంమీ.

కృత్యం 3 : స్వయం పరిశోధన



పై పటాలలో వృత్తాలకు గీసిన ఆ రేఖల గురించి నీవు ఏమి చెప్పగలవు ?

ఒక వృత్తానికి మనము ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయగలము ?

వృత్తంపై ప్రతీ బిందువు వద్ద మనం ఒక స్పర్శరేఖను గీయగలం అని మనకు తెలుసును. వృత్తంపై అనంతమైన బిందువులుంటాయి. కనుక ఒక వృత్తానికి గీయగల స్పర్శరేఖల సంఖ్య అనంతము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక వృత్తానికి ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయగలము ?
2. ఒక తలంలో ఒక వృత్తము మరియు సరళరేఖలను గీస్తే వాటికి ఉమ్మడిగా ఉండే కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ బిందువుల సంఖ్య ఎంత ?
3. ఒక తలంలో గీసిన వృత్తము మరియు సరళరేఖలకు మూడు ఉమ్మడి బిందువులు ఉండవు. ఎందుకు?
4. ఒక వృత్తానికి మరియు ఛేదన రేఖకు ఎన్ని ఉమ్మడి బిందువులు ఉంటాయి ?
5. ఒక వృత్తానికి మరియు స్పర్శరేఖకు ఎన్ని ఉమ్మడి బిందువులు ఉంటాయి ?

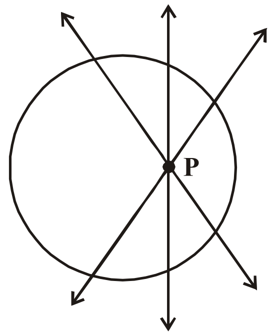
సరియైన పటముల సహాయంతో ఈ క్రింది పదాలను వివరించండి.

పదాల వివరణ	పటము
స్పర్శరేఖ	
ఛేదన రేఖ	
స్పర్శ బిందువు	

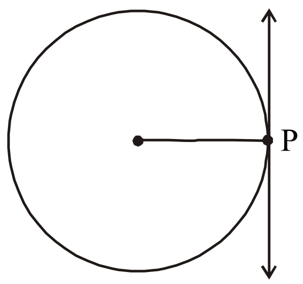
4.8.3 ఒక బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయగల స్పర్శరేఖల సంఖ్య

ఒక బిందువు నుండి వృత్తానికి గీయగల స్పర్శరేఖల సంఖ్యను తెలుసుకోవడానికి, ఈ క్రింది కృత్యాన్ని చేద్దాము రండి.

(i) ఒక వృత్తాన్ని గీసి, దాని అంతరంలో బిందువు 'P' గుండా నీవు వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయగలవా? ఈ బిందువు గుండా పోయేటట్లు గీసిన రేఖలన్నీ వృత్తాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించడాన్ని మీరు గమనించవచ్చును. కాబట్టి వృత్త అంతరములోని బిందువు నుండి ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయడం సాధ్యం కాదు.

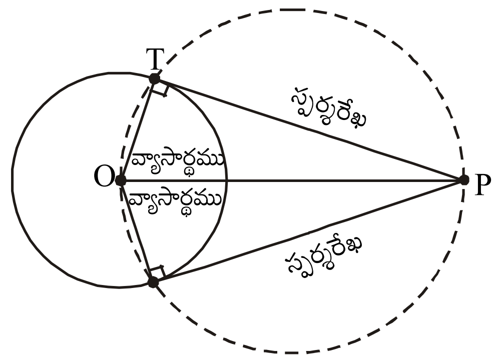


(ii) ఇప్పుడు 'P' బిందువును వృత్తంపై గుర్తించి, దాని వద్ద ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయండి. ఇలా వృత్తంపై నున్న బిందువు వద్ద ఒకే ఒక స్పర్శరేఖను గీయగలమని మనము ఇదివరకే నేర్చుకొన్నాము.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 314 06-02-2021 14:54

(iii) ఇప్పుడు బిందువు 'P' ని వృత్తబాహ్యములో తీసుకోండి. O, P లను కలపండి. OT వ్యాసార్ధము. స్పర్శబిందువు వద్ద గీసిన వ్యాసార్ధము స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటుందని మనకు తెలుసును. కావున T వద్ద మనకు లంబకోణం కావాలి. కానీ, ఒక అర్ధ వృత్తములోని కోణము లంబకోణము అని కూడా మనకు తెలుసును. అందువలన OP వ్యాసముగా ఉండేటట్లు ఒక అర్ధవృత్తాన్ని గీస్తే అది మొదటి వృత్తాన్ని 'T' వద్ద ఖండిస్తుంది. T మరియు P లను కలుపుతూ రేఖను గీయండి. ఇదే మనకు కావలసిన స్పర్శరేఖ.



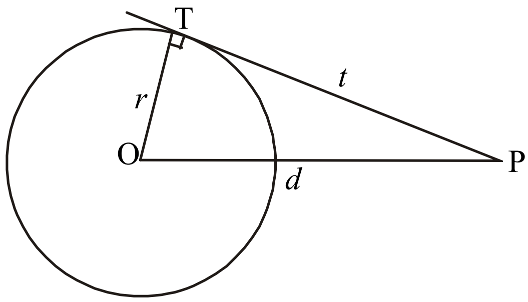
మనము OP వ్యాసముగా రెండవ వైపు కూడా అర్ధవృత్తాన్ని గీయగలము.

కాబట్టి P బిందువు నుండి, ఆ వృత్తానికి రెండు స్పర్శరేఖలను గీయగలము.

ఒక వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి, స్పర్శరేఖను గీసినపుడు, బాహ్యబిందువు నుండి స్పర్శబిందువు వరకు గల రేఖాఖండము పొడవును స్పర్శరేఖ పొడవు అంటారు.

మనము ఈ స్పర్శరేఖ పొడవును ఎలా కనుగొనగలము?

'O' కేంద్రముగా, 'r' వ్యాసార్ధముగా గల వృత్తమునకు బాహ్యబిందువు 'P' నుండి స్పర్శరేఖ గీయబడినది. వృత్త కేంద్రము 'O' మరియు బాహ్యబిందువు 'P' ల మధ్య దూరము 'd' యూనిట్లు.



$\angle OTP = 90^0$ కావున ΔOTP ఒక లంబకోణ త్రిభుజము.

కాబట్టి పైథాగరస్ సిద్ధాంత ప్రకారము

$$OT^2 + PT^2 = OP^2$$

$$t^2 + r^2 = d^2$$

$$t = \sqrt{d^2 - r^2}$$

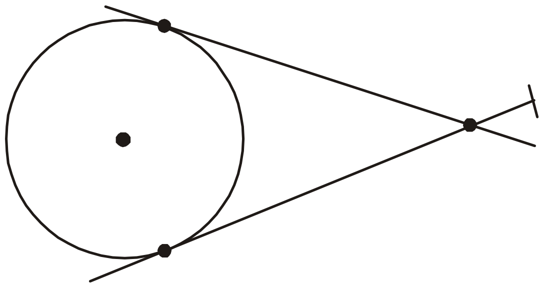
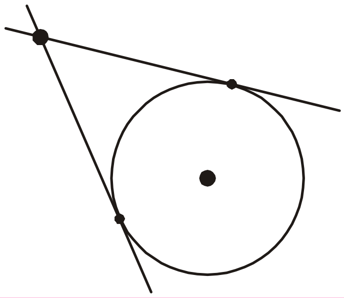
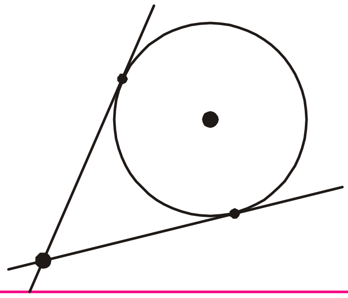
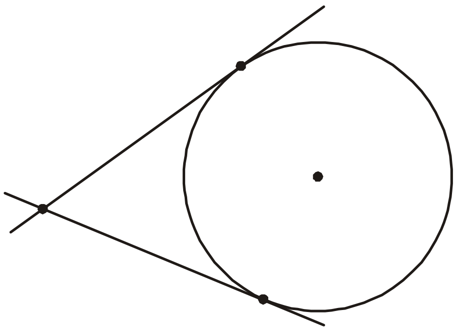
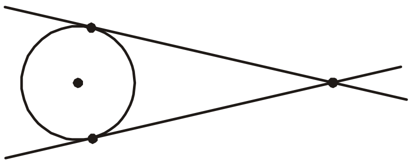
$\therefore$ స్పర్శరేఖ పొడవు $= \sqrt{d^2 - r^2}$

వృత్త బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తానికి రెండు స్పర్శరేఖలను గీయగలమని మనము ఇదివరకే నేర్చుకొన్నాము. మరియు రెండు స్పర్శరేఖల పొడవులను గురించి మనము ఏమి చెప్పగలము ?

కృత్యం :

క్రింది ఇచ్చిన పటాలలోని, ప్రతీ పటంలో బాహ్యబిందువు నుండి వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులను స్కేలు సహాయంతో కొలవండి.

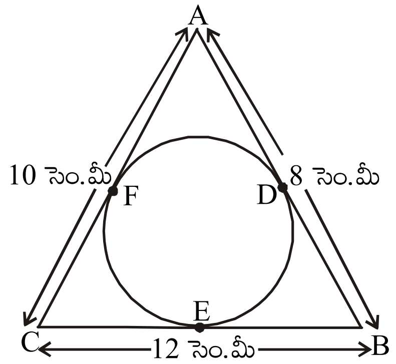
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 315 06-02-2021 14:54

పటము	స్పర్శరేఖల పొడవుల కొలతలు
	మొదటి స్పర్శరేఖ పొడవు = రెండవ స్పర్శరేఖ పొడవు =
	మొదటి స్పర్శరేఖ పొడవు = రెండవ స్పర్శరేఖ పొడవు =
	మొదటి స్పర్శరేఖ పొడవు = రెండవ స్పర్శరేఖ పొడవు =
	మొదటి స్పర్శరేఖ పొడవు = రెండవ స్పర్శరేఖ పొడవు =
	మొదటి స్పర్శరేఖ పొడవు = రెండవ స్పర్శరేఖ పొడవు =

పై పరిశీలనల నుండి, మనము ఈ క్రింది విషయాన్ని చెప్పగలము.

ఒక వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.

ఉదాహరణ 3 : ఒక వృత్తము ΔABCలో అంతర్లిఖించ బడినది. త్రిభుజ భుజాల పొడవులు 8 సెం.మీ, 10 సెం.మీ మరియు 12 సెం.మీ. అయిన AD, BE మరియు CF ల పొడవులు కనుగొనండి.



సాధన : ఒక వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.

$AD = AF = x$

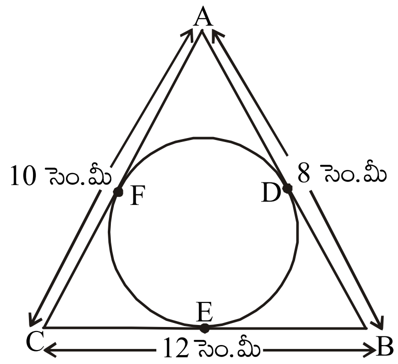
$BD = BE = y$

$CE = CF = z$ అనుకొనుము.

$x + y = 12$ ... (1)

$y + x = 8$ ... (2)

$x + z = 10$ ... (3)



కలుపగా $2(x + y + z) = 30$

$$x + y + z = \frac{30}{2} = 15 \quad ...(4)$$

(4) - (1) చేయగా $y = 5$ సెం.మీ.

(4) - (2) చేయగా $z = 3$ సెం.మీ.

(4) - (3) చేయగా $x = 7$ సెం.మీ.

$\therefore$ AD = 7 సెం.మీ.

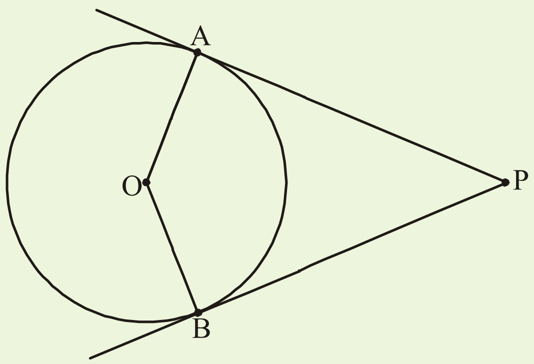
BE = 5 సెం.మీ.

CF = 3 సెం.మీ.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

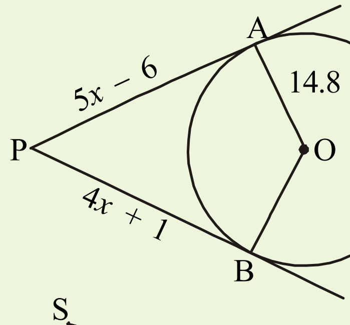
1. ఇచ్చిన పటంలో 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తానికి PA మరియు PB లు స్పర్శరేఖలు.

   PA = 10 సెం.మీ. మరియు OA = 5 సెం.మీ, అయిన చతుర్భుజము PAOB చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

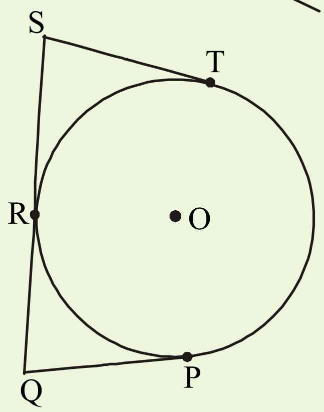


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 317 06-02-2021 14:54

2. ఇచ్చిన పటంలో, PA = $5x - 6$ మరియు PB = $4x + 1$. అయిన 'x' విలువను కనుగొనండి.

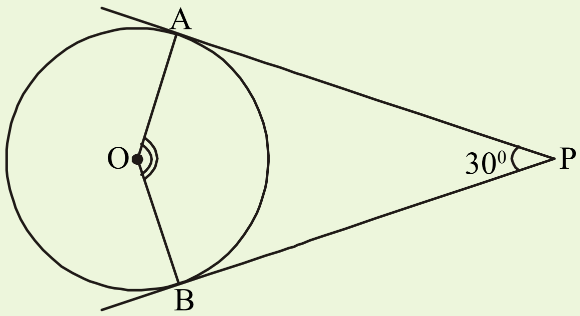


3. ఇచ్చిన పటంలో, ST, QP మరియు SQ లు, 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు. ST = 5 సెం.మీ. మరియు QP = 2 సెం.మీ అయిన SQ ను కనుగొనండి.



4. 'O' కేంద్రముగా, 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమునకు వృత్తకేంద్రము నుండి 5 సెం.మీ దూరములో గల బాహ్య బిందువు నుండి స్పర్శరేఖ గీయబడినది. ఆ స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనండి.

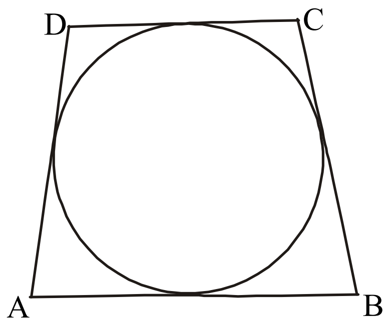
5. ఇచ్చిన పటంలో, PA మరియు PB లు వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖలు. $\angle APB = 30^0$ అయిన $\angle AOB$ ని కనుగొనండి.



అభ్యాసము

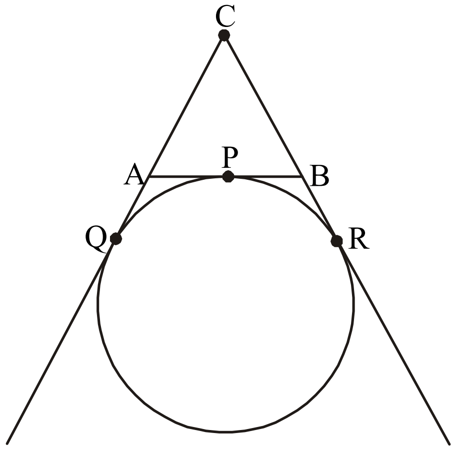
1. ఒక వృత్తకేంద్రము నుండి 35 సెం.మీ. దూరములో నున్న బిందువు 'A' నుండి ఆ వృత్తమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు 28 సెం.మీ. అయిన ఆ వృత్త చుట్టుకొలతను మరియు వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

2. ఇచ్చిన పటంలో, ఒక వృత్తము చతుర్భుజము ABCD నాలుగు భుజాలను తాకుతున్నది. ఆ చతుర్భుజ మూడు భుజాల పొడవులు AB = 6 సెం.మీ, BC = 7 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ అయిన నాల్గవ భుజం AD పొడవును కనుగొనండి.



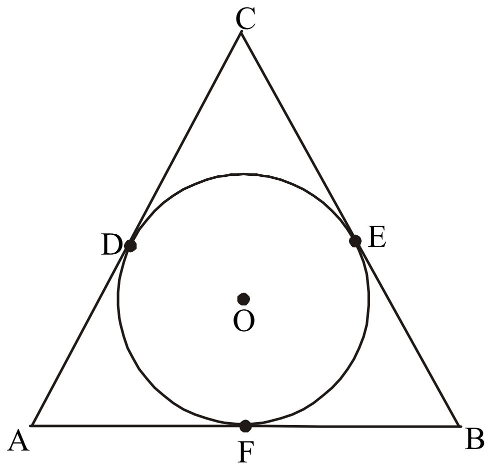
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 318 06-02-2021 14:54

3. ఇచ్చిన పటంలో, ఒక వృత్తము ΔABC యొక్క BC భుజాన్ని 'P' బిందువు వద్ద మరియు పొడిగించిన భుజాలు AB, AC లను వరుసగా Q మరియు R వద్ద తాకుచున్నది. AQ = 5 సెం.మీ, అయిన ΔABC చుట్టుకకొలత కనుగొనండి.



4. "ఒక వృత్త వ్యాసము చివరి బిందువుల వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖలు సమాంతరాలు" అని చూపండి.

5. ఇచ్చిన పటంలో 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తము త్రిభుజము ABCలో AB, BC మరియు AC భుజాలను వరుసగా F, E మరియు D బిందువుల వద్ద తాకునట్లు అంతర్లిఖించబడినది. AF = FB = 5 సెం.మీ మరియు DC = 7 సెం.మీ అయిన ΔABC చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



6. ఒక వృత్తము యొక్క బాహ్యబిందువు నుండి ఆ వృత్తానికి ఎన్ని స్పర్శరేఖలు గీయగలము

7. ఒక వృత్తములో రెండు వ్యాసార్థముల మధ్యకోణము 45° అయిన ఆ వ్యాసార్థముల చివరి బిందువుల వద్ద, ఆ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్యకోణాన్ని కనుగొనండి.

8. ఒక వృత్త కేంద్రము నుండి 25 సెం.మీ. దూరములో గల బిందువు 'Q' నుండి, ఆ వృత్తమునకు గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు 24 సెం.మీ. అయిన ఆ వృత్త వ్యాసార్థము కనుగొనండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 319
06-02-2021 14:54

ముఖ్యాంశాలు

- ఒక వృత్తాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించే రేఖను ఛేదనరేఖ అంటారు.
- ఒక వృత్తాన్ని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించే రేఖను స్పర్శరేఖ అంటారు. ఏ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వృత్తాన్ని తాకుతుందో, ఆ బిందువును స్పర్శబిందువు అంటారు.
- ఒక వృత్తంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద గీసిన సరళరేఖ, అదే బిందువు నుండి గీసిన వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటే, ఆ రేఖ ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.
- స్పర్శబిందువు వద్ద గీసిన వృత్తవ్యాసార్థము ఎల్లప్పుడూ ఆ స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.
- ఒక వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి స్పర్శరేఖను గీసినప్పుడు, బాహ్యబిందువు నుండి, స్పర్శబిందువు వరకు గల రేఖాఖండము పొడవును స్పర్శరేఖ పొడవు అంటారు.

  స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{d^2 - r^2}$
- ఒక వృత్తానికి బాహ్యబిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 320 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.9 నిర్మాణాలు

4.9.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

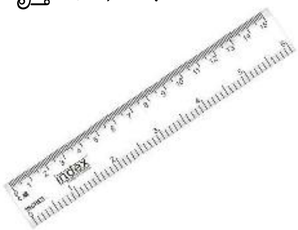
- పటనైపుణ్యాలను పెంపొందించుకుంటారు.
- వివిధ జ్యామితీయ పటాల భుజాలు మరియు కోణాలను కొలవ గల్గుతారు.
- వివిధ నిర్మాణాలను జ్యామితీయ పరికరాల సహాయంతో దృశ్యీకరించగల్గుతారు మరియు ప్రాతినిధ్య పరచగలుగుతారు.
- నిర్మాణాల సందర్భాలను విశ్లేషించడం మరియు జ్యామితీయ పటాల ధర్మాల ఆధారంగా, వాటిలో కావలసిన కొలతలను కనుగొనగలరు.

4.9.1 పరిచయం

రేఖాగణితం (జ్యామితి) లో నిర్మాణాలు అంటే వివిధ ఆకారాలు, కోణాలు మరియు సరళరేఖలను ఖచ్చితంగా గీయడమే. కానీ ఈ నిర్మాణాలు ఎందుకు అభివృద్ధి చేయబడ్డాయి ? ఈ నిర్మాణాలు జ్యామితీయ భావనలను మరింత విశదంగా అర్థం చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. మనము కొన్ని వస్తువుల పటాలు గీయడానికి తగిన కొలతలు లేనప్పుడు కొన్ని పరికరాల సహాయంతో గీస్తాము. ప్రాచీన గ్రీకు గణిత వేత్తలు కేవలం పూర్ణాంకాలను మాత్రమే ఉపయోగించేవారు. ఉదాహరణకు 5 నుం 2 తో భాగించి 2.5ను పొందలేకపోయేవారు ఎందుకంటే 2.5 పూర్ణాంకము కాదు కదా! కాబట్టి యూక్లిడ్ మరియు ఇతర గ్రీకు గణిత వేత్తలు సమస్యల సాధనకు అంకగణితం బదులు పటాలను గీసి రేఖా గణిత పద్ధతులను ఉపయోగించే వారు. ఆ రోజులలో వారు కేవలం వృత్తలేఖిని మరియు నిలువు బద్దలను మాత్రమే ఉపయోగించి నిర్మాణాలు చేసేవారు. ఇవి సంఖ్యాత్మక కొలతలు లేని స్వచ్ఛమైన జ్యామితీయ నిర్మాణాలు. ఇవి వృత్తలేఖిని నిలువుబద్ద నిర్మాణాలుగా ప్రసిద్ధికెక్కాయి.

కాని నేడు మనము జ్యామితీయ నిర్మాణాలలో వివిధ పరికరాలను ఉపయోగిస్తున్నాము. రండి ఈ రోజు మనము ఉపయోగించే జ్యామితీయ పెట్టెలోని వివిధ పరికరాలను, వాటి ఉపయోగాలను తెలుసుకుందాము. ఒక జ్యామితీయ పెట్టెలోని పరికరాలు – స్కేలు, కోణమానిని, వృత్తలేఖిని, విభాగిని మరియు మూలమట్టాలు.

స్కేలు : ఒక రేఖాఖండం పొడవును కొలవడానికి స్కేలు ఉపయోగపడుతుంది. దీనిని సరళరేఖలు గీయడానికి కూడా ఉపయోగిస్తాము.



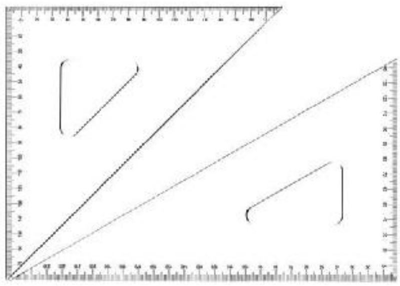
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 321 06-02-2021 14:54

వృత్తలేఖిని : వృత్తాలను గీయడానికి మరియు చాపరేఖలను గీయడానికి వృత్తలేఖినిని ఉపయోగిస్తాము. (చాపరేఖ అనేది వృత్తములోని భాగమే" అని గుర్తుంచుకోండి.)

కోణమానిని : కోణాలను కొలవడానికి మరియు గీయడానికి కోణమానిని ఉపయోగిస్తాము.

విభాగిని : ఒక వక్రరేఖ పొడవును కొలవడానికి విభాగిని ఉపయోగపడుతుంది. అంతేకాకుండా దీని సహాయంతో ఒక రేఖాఖండమును కొలవకుండానే దాని కొలతను తీసుకొని, అదే కొలతతో సర్వసమాన రేఖాఖండాలను గీయవచ్చును.

మూలమట్టాలు : జ్యామితీయ పెట్టెలోని రెండు మూలమట్టాలు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు. ఒక దాని కోణాలు 30^0 - 60^0 - 90^0 మరియు రెండవ దాని కోణాలు 45^0 - 45^0- 90^0. ఈ మూల మట్టాలను ఉపయోగించి సమాంతర రేఖలను మరియు లంబరేఖలను గీయవచ్చును.



4.9.2 ప్రాథమిక నిర్మాణాల సమీక్ష

ఇప్పుడు మనము ఇతర నిర్మాణాలు నేర్చుకోవడానికి ఉపయోగపడే మూడు ప్రాథమిక నిర్మాణాలను నేర్చుకొందాము.

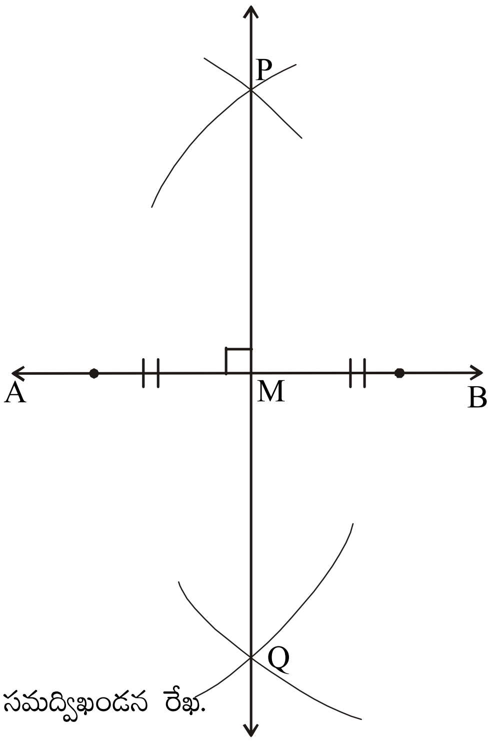
1. లంబసమద్విఖండన రేఖను నిర్మించుట

నిర్మాణాలు సోపానాలు :

(a) రేఖాఖండం AB ని గీయండి.

(b) 'A' కేంద్రముగా, AB పొడవులో సగం కన్నా ఎక్కువ వ్యాసార్ధంతో (సగం కన్నా ఎక్కువ ఉజ్జాయింపుగా తీసుకోవచ్చును, కొలవనవసరం లేదు) AB కి ఇరువైపులా చాపరేఖలు గీయండి.

(c) 'B' కేంద్రముగా, అదేవ్యాసార్ధముతో ఇందాకటి చాపరేఖలను ఖండించునట్లు చాపరేఖలు గీయండి. ఖండన బిందువులు P, Q



(d) రేఖ PQ ని గీయండి. ఇదే మనకు కావలసిన లంబ సమద్విఖండన రేఖ.

సరిచూచుట : కోణమానితో కొలవండి.

$\angle AMP$ = ... $\angle BMP$ = ...

స్కేలుతో కొలవండి.

AM = ... సెం.మీ.

BM = ... సెం.మీ.

పరిశీలనలు : $\angle AMP = \angle BMP = 90^0$

AM = BM.

2. ఇచ్చిన కోణానికి కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీయడం

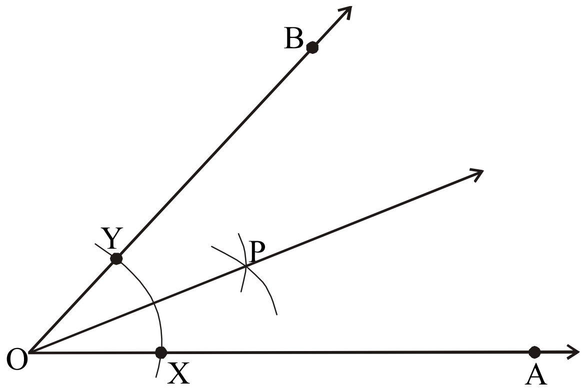
నిర్మాణ సోపానాలు :

(a) కోణము AOBని గీయండి.

(b) 'O' కేంద్రముగా, కొంత వ్యాసార్థముతో చాపరేఖను గీయండి. ఇది కోణ భుజాలను X మరియు Y వద్ద ఖండిస్తుంది.

(c) X కేంద్రముగా, XY పొడవులో సగము కన్నా ఎక్కువ వ్యాసార్థముతో చాపరేఖను గీయండి. Y కేంద్రముగా అదే వ్యాసార్థముతో, ఇందాకటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు వేరొక చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'P'.

(d) కిరణము OP ని గీయండి. ఇదే మనకు కావలసిన కోణ సమద్విఖండన రేఖ.



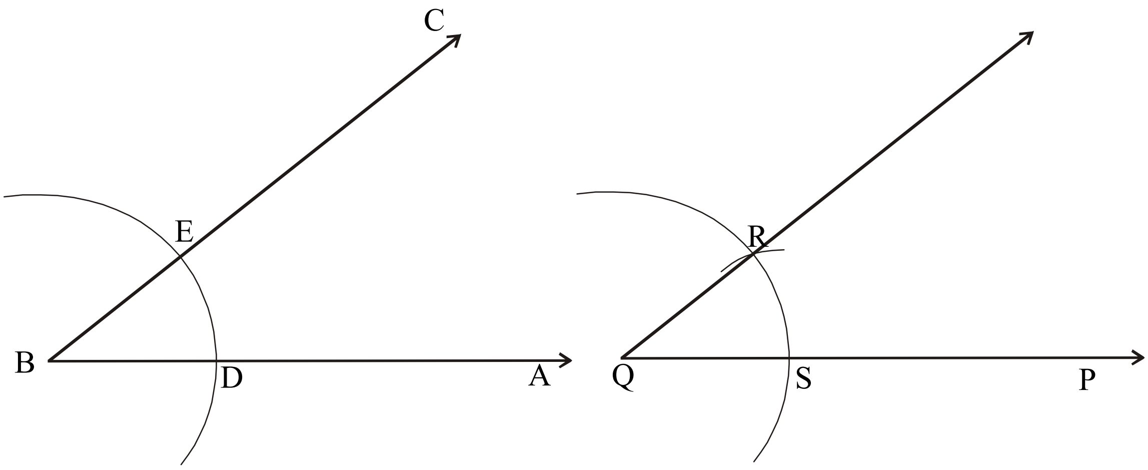
సరిచూడుము : కోణమానినితో కొలవండి.

$\angle BOP$ = ... $\angle AOP$ =

$\angle AOB$ = ...

పరిశీలనలు : $\angle BOP = \angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOB$.

3. ఇచ్చిన కోణానికి సమాన కోణాన్ని వేరొక బిందువు వద్ద నిర్మించుట



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 323 06-02-2021 14:54

నిర్మాణ సోపానాలు :

(a) కోణము ABCని గీయండి. కిరణము QP ని గీయండి.

(b) 'B' కేంద్రముగా, కొంత వ్యాసార్థముతో చాపరేఖను గీసిన అది కోణ భుజాలను D మరియు E వద్ద ఖండించును.

(c) Q కేంద్రముగా, అదే వ్యాసార్థముతో చాపరేఖను గీసిన అది కిరణము QP ని S వద్ద ఖండించును.

(d) 'S' కేంద్రముగా, DE పొడవు వ్యాసార్థముగా చాపరేఖను గీసిన అది ఇందాకటి చాపరేఖను R వద్ద ఖండించును.

(e) కిరణము QRను గీయండి. బిందువు Q వద్ద $\angle PQR$ మనకు కావలసిన కోణము

సరిచూడుము : $\angle ABC$ = ... $\angle PQR$ = ...

పరిశీలనలు : $\angle ABC = \angle PQR$.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింద ఇచ్చిన కొలతలు గల రేఖాఖండములను గీసి, వాటికి లంబ సమద్విఖండన రేఖలను గీయండి.
   (a) 5 సెం.మీ (b) 6.4 సెం.మీ.

2. క్రింద ఇచ్చిన కొలతలతో కోణాలను గీసి, వాటికి కోణ సమద్విఖండన రేఖలను గీయండి.
   (a) 60^0 (b) 90^0 (c) 80^0

3. కోణమానిని సహాయంతో క్రింద ఇచ్చిన కోణాలను గీసి, అదే కోణాలను వేరొక బిందువువద్ద నిర్మించండి.
   (a) 30^0 (b) 45^0 (c) 70^0

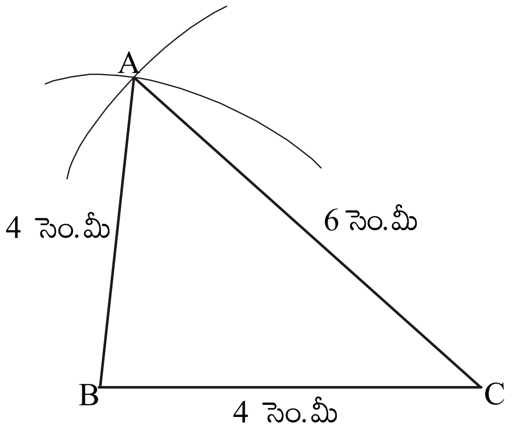
4.9.3 త్రిభుజాల నిర్మాణాలు

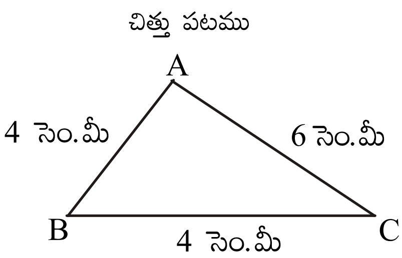
క్రింద ఇచ్చిన సందర్భాలలోని కొలతలు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజాలను నిర్మించడాన్ని మనము నేర్చుకొందాము.

1. మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (SSS)
2. రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యకోణం ఇచ్చినపుడు (SAS)
3. ఒక భుజం మరియు రెండు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (SAA).

1. మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజాన్ని నిర్మించుట (SSS)

ఉదాహరణ : AB = 4 సెం.మీ, BC = 5 సెం.మీ మరియు AC = 6 సెం.మీ కొలతలతో ΔABCని నిర్మించండి.





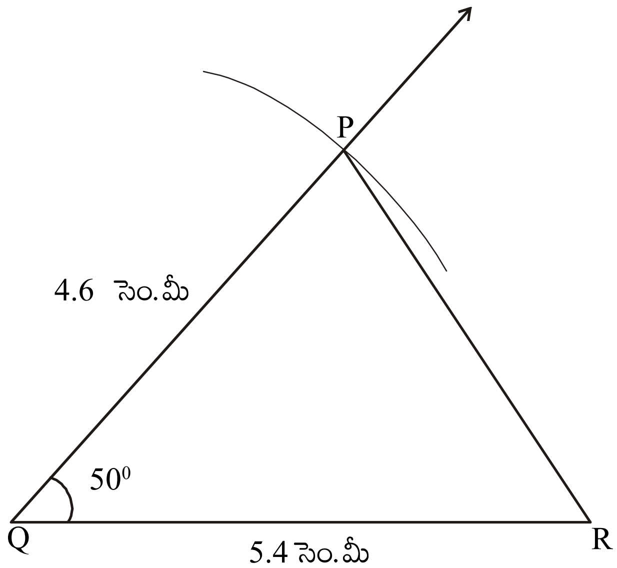
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 324 06-02-2021 14:54

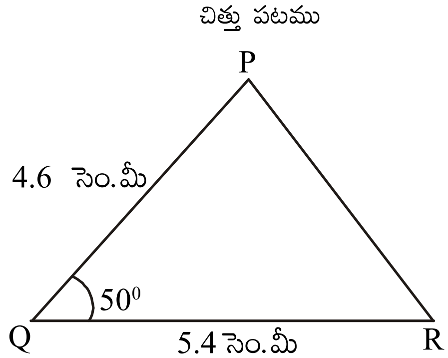
నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 5 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖాఖండము BCని గీయండి.
2. 'B' కేంద్రముగా, 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో చాపరేఖను గీయండి.
3. 'C' కేంద్రముగా, 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఇందాకటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు వేరొక చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు A.
4. AB మరియు AC లను కలపండి.
5. ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.

2. రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యకోణం కొలతలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజము నిర్మించుట (SAS)

ఉదహరణ : PQ = 4.6 సెం.మీ, QR = 5.4 సెం.మీ మరియు $\angle Q = 50^0$ కొలతలతో ΔPQRను నిర్మించండి.





నిర్మాణ సోపానాలు :

(a) 5.4 సెం.మీ పొడవుగల రేఖాఖండము QR ను గీయండి.

(b) Q వద్ద QR తో 50^0 కోణాన్ని చేసేటట్లు కోణమానిని సహాయంతో కొలిచి కిరణము QX ని గీయండి.

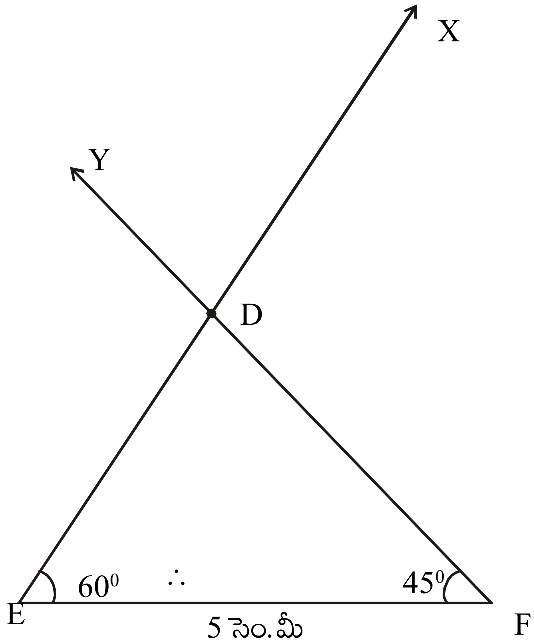
(c) Q కేంద్రముగా, 4.6 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో కిరణము QX ని ఖండించునట్లు చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'P'.

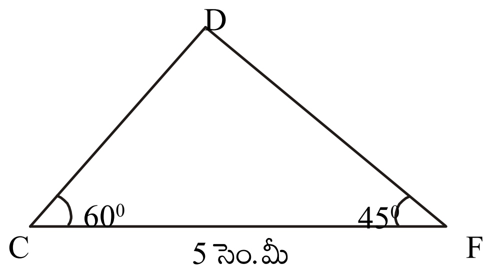
(d) P, R లను కలపండి. ΔPQR మనకు కావలసిన త్రిభుజము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 325
06-02-2021 14:54

3. ఒక భుజం మరియు రెండు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ : EF = 5 సెం.మీ., $\angle E = 60^0$ మరియు $\angle F = 45^0$ కొలతలతో ΔDEF ను నిర్మించండి.





నిర్మాణ సోపానాలు :

(a) 5 సెం.మీ పొడవు గల రేఖాఖండము EFను గీయండి.

(b) E వద్ద EF తో 60^0 కోణాన్ని చేసేటట్లు కోణమానిని సహాయంతో కొలిచి, కిరణము EX ని గీయండి.

(c) F వద్ద FE తో 45^0 కోణాన్ని చేసేటట్లు కోణమానితో కొలిచి, కిరణము FY ని గీయండి.

(d) అవసరమైతే EX, FY లను ఖండించుకొనేటట్లు పొడిగించండి. వాటి ఖండన బిందువు D.

(e) ΔDEF మనకు కావలసిన త్రిభుజము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. క్రింది త్రిభుజాలను ఇచ్చిన కొలతలతో నిర్మించండి.

1. 5 సెం.మీ. భుజం కొలతలతో సమబాహు త్రిభుజము XYZను మరియు నిర్మించండి. (సూచన : XY = YZ = ZX = 5సెం.మీ.).
2. BC = 4.8 సెం.మీ $\angle B = \angle C = 45^0$ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించండి.
3. PQ = 5.1 సెం.మీ, QR = 4.7 సెం.మీ. $\angle Q = 50^0$ కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించండి.
4. LM = 6 సెం.మీ, MN = NL = 5 సెం.మీ. కొలతలతో ΔLMN ను నిర్మించండి.
5. JK = 4.9 సెం.మీ $\angle J = 90^0$ మరియు $\angle K = 30^0$ కొలతలతో ΔIJK ను నిర్మించండి.
6. BC = 3.7 సెం.మీ, AB = 4.1 సెం.మీ మరియు $\angle C = 60^0$ కొలతలతో ΔABCని నిర్మించండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 326 06-02-2021 14:54

4.9.4 చతుర్భుజాల నిర్మాణాలు

క్రింద ఇచ్చిన సందర్భాలలోని కొలతలు ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజాలను నిర్మించడం ఎలాగో మనం నేర్చుకొందాము.

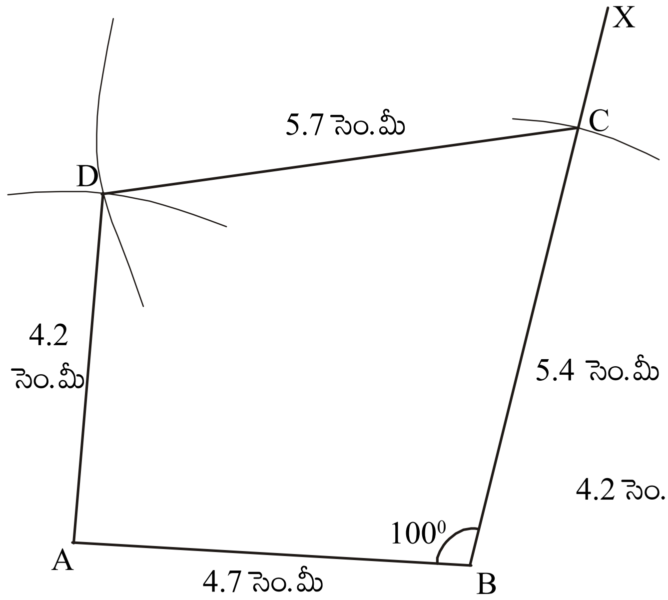
1. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం ఇచ్చినపుడు (SSSSA)
2. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినపుడు (SSSSD)
3. నాలుగు భుఆలు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (SSSDD)

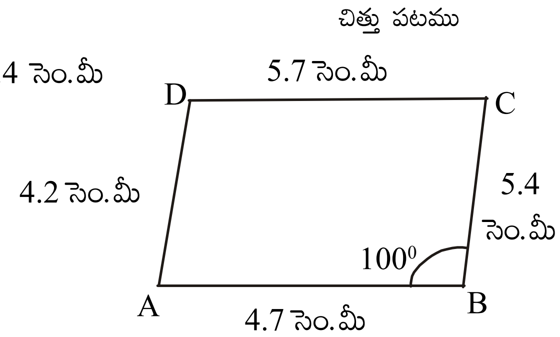
1. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదహరణ : AB = 4.7 సెం.మీ, BC = 5.4 సెం.మీ,

CD = 5.7 సెం.మీ, AD = 4.2 సెం.మీ మరియు $\angle ABC = 100^0$

కొలతలతో చతుర్భుజము ABCD ని నిర్మించండి.





నిర్మాణ సోపానాలు :

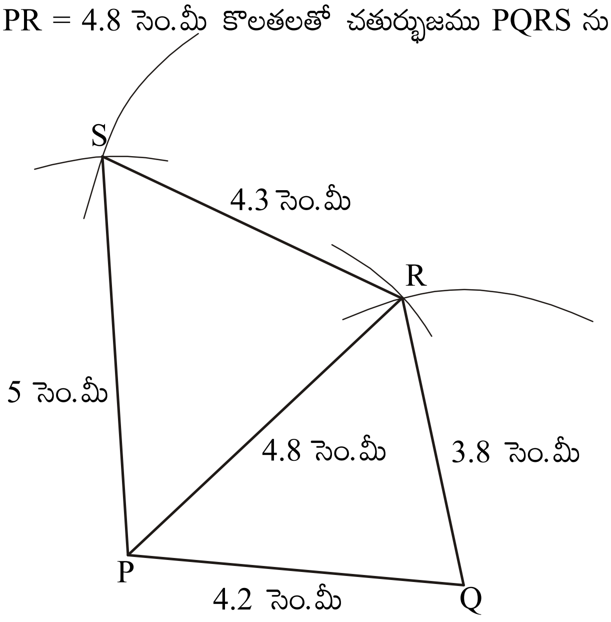
మొదట మనము త్రిభుజ నిర్మాణాలలోని SAS ధర్మాన్ని ఉపయోగించుకొని ΔABC ని నిర్మిస్తాము.

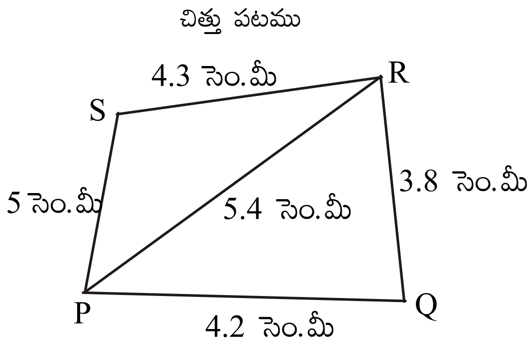
1. 4.7 సెం.మీ పొడవు గల రేఖాఖండము ABని గీయండి.
2. B వద్ద BA తో 100^0 కోణం చేసేటట్లు కోణమానినితో కొలిచి, కిరణము BX గీయండి.
3. 'B' కేంద్రముగా, 5.4 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో కిరణము BX ను ఖండించునట్లు చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'C'.
4. 'C' కేంద్రముగా, 5.7 సెం.మీ. వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖను గీయండి.
5. 'A' కేంద్రముగా, 4.2 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఇందాకటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు వేరొక చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'D'.
6. CD మరియు AD లను గీయండి. ABCD మనకు కావలసిన చతుర్భుజము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 327
06-02-2021 14:54

2. నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణము కొలత ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదహరణ : PQ = 4.2 సెం.మీ, QR = 3.8 సెం.మీ, RS = 4.3 సెం.మీ, SP = 5 సెం.మీ మరియు PR = 4.8 సెం.మీ కొలతలతో చతుర్భుజము PQRS ను నిర్మించండి.





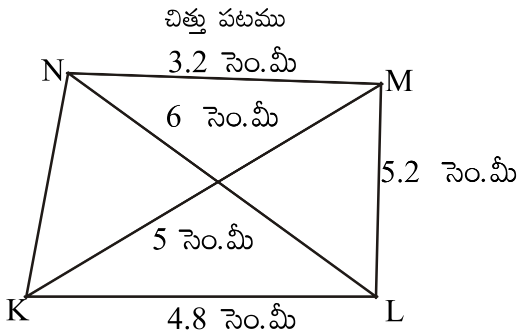
నిర్మాణ సోపానాలు :

మొదట మనము త్రిభుజ నిర్మాణాలలోని SSS ధర్మాన్ని ఉపయోగించుకొని ΔPQR లేదా ΔPSR ని నిర్మిస్తాము.

1. 4.2 సెం.మీ పొడవుగల రేఖాఖండము PQ ని గీయండి.
2. 'Q' కేంద్రముగా, 3.8 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక చాపరేఖను గీయండి.
3. 'P' కేంద్రముగా, 4.8 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఇందాటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు వేరొక చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'R'. PR మరియు QR లను గీయండి.
4. మరల 'R' కేంద్రముగా 4.3 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక చాపరేఖను గీయండి.
5. 'P' కేంద్రముగా, 5 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఇందాకటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు వేరొక చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'S'.
6. PS మరియు RS రేఖాఖండాలను గీయండి. PQRS మనకు కావలసిన చతుర్భుజము.

3. మూడు భుజాలు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదహరణ : KL = 4.8 సెం.మీ LM = 5.2 సెం.మీ, KM = 5 సెం.మీ, MN = 3.2 సెం.మీ మరియు LN = 6 సెం.మీ కొలతలతో చతుర్భుజము KLMN ను నిర్మించండి.

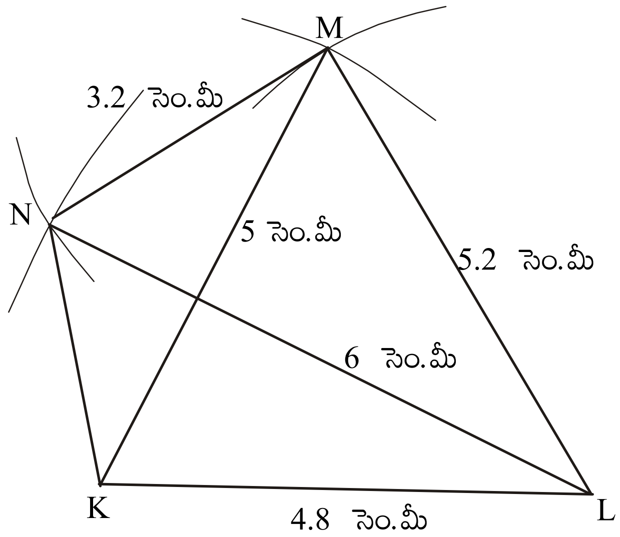


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 328 06-02-2021 14:54

నిర్మాణ సోపానాలు :

మొదటి మనము త్రిభుజ నిర్మాణాలలోని SSS ధర్మాన్ని ఉపయోగించుకొని ΔKLM నిర్మిస్తాము.

1. 4.8 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖాఖండము KL ని గీయండి.
2. 'L' కేంద్రముగా, 5.2 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక చాపరేఖను గీయండి.
3. 'K' కేంద్రముగా, 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఇందాకటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు వేరొక చాపరేఖను గీయండి. ఖండన బిందువు 'M'. KM మరియు LM రేఖా ఖండాలను గీయండి.
4. మరల 'M' కేంద్రముగా, 3.2 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక చాపరేఖను గీయండి.



5. 'L' కేంద్రముగా, 6 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో వేరొక చాపరేఖను, ఇందాకటి చాపరేఖను 'N' వద్ద ఖండించునట్లు గీయండి.
6. LN, MN మరియు KN రేఖాఖండాలను గీయండి. KLMN మనకు కావలసిన చతుర్భుజము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

I. క్రింద ఇచ్చిన కొలతలతో చతుర్భుజాలను నిర్మించండి.

1. AB = 5.5 సెం.మీ, BC = 3.5 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ, AD = 5 సెం.మీ మరియు $\angle A = 50^0$ కొలతలతో ABCDని నిర్మించండి.
2. PQ = 4.5 సెం.మీ, QR = 3 సెం.మీ మరియు $\angle PQR = 60^0$ కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజము PQRS ని నిర్మించండి. (సూచన : PQ = SR మరియుQR= PS)
3. PQ = 3.5 సెం.మీ, QR = 4 సెం.మీ, RS = 5 సెం.మీ, PS = 4.5 సెం.మీ మరియు QS = 6.5 సెం.మీ కొలతలతో చతుర్భుజము PQRSని నిర్మించండి.
4. KL = 4 సెం.మీ మరియు LN = 5.6 సెం.మీ. కొలతలతో సమభుజ చతుర్భుజము (రాంబస్) KLMN ని నిర్మించండి. (సూచన : KL = LM = MN = KN)
5. AB = 4. 2 సెం.మీ, BC = 3 సెం.మీ, AD = 2.8 సెం.మీ, AC = 4.5 సెం.మీ మరియు BD = 5 సెం.మీ. కొలతలతో చతుర్భుజము ABCD ని నిర్మించండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 329
06-02-2021 14:54

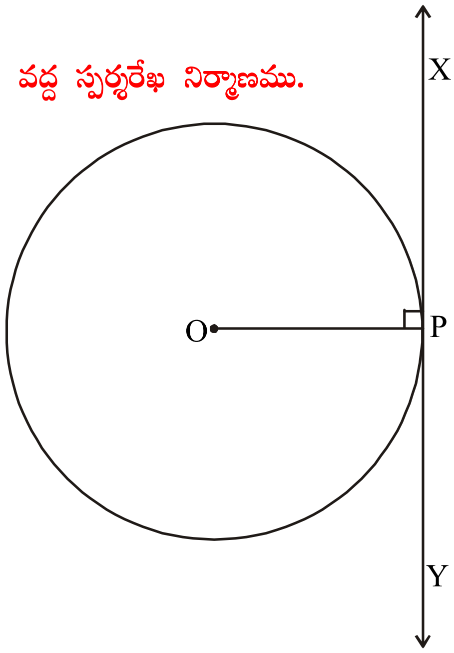
4.9.5 ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖల నిర్మాణము

బిందువు వృత్తముపై ఉన్నప్పుడు మరియు బిందువు వృత్తబాహ్యములో ఉన్నప్పుడు, వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు ఎలా గీయాలో తెలుసుకుందాము.

1. వృత్తకేంద్రము తెలిసినపుడు, వృత్తముపై నున్న బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిర్మాణము.

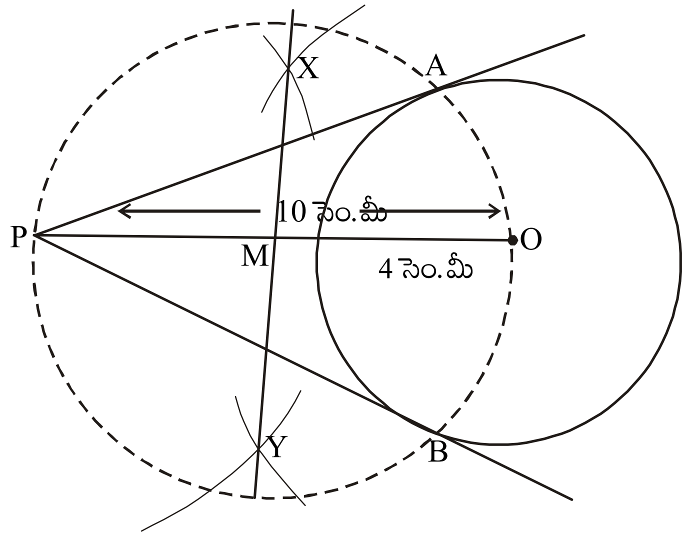
నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 'O' కేంద్రముగా, ఇచ్చిన వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తమును గీయండి.
2. వృత్తముపై ఏదైనా బిందువు 'P'. O, P లను కలపండి.
3. 'P' బిందువు వద్ద OP కి లంబంగా XY రేఖను గీయండి.
4. XPY రేఖ 'P' బిందువు వద్ద ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ.

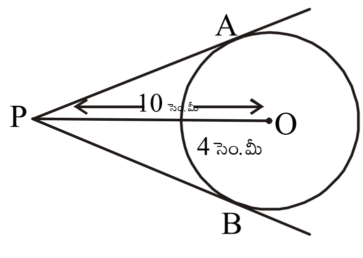


2. వృత్త బాహ్యములో నున్న బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు గీయడం (వృత్తకేంద్రం తెలిసినపుడు)

ఉదాహరణ : 4 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. వృత్త కేంద్రము నుండి 10 సెం.మీ. దూరములో నున్న బాహ్యబిందువు 'P' నుండి ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలు గీయండి.



చిత్తు పటము



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 330 06-02-2021 14:54

నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 'O' కేంద్రముగా 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. 'O' నుండి 10 సెం.మీ. దూరములో బిందువు 'P' ని గుర్తించి O, P లను కలపండి.
2. OP కి లంబ సమద్విఖండన రేఖ XY ని గీయండి. ఇది OP ని M వద్ద ఖండిస్తుంది.
3. 'M' కేంద్రముగా, MP లేదా MO వ్యాసార్థముతో వృత్తాన్ని గీసిన అదిమునుపటి వృత్తాన్ని A మరియు B బిందువుల వద్ద ఖండిస్తుంది.
4. PA మరియు PB లను గీయండి. ఇవే మనకు కావలసిన స్పర్శరేఖలు.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

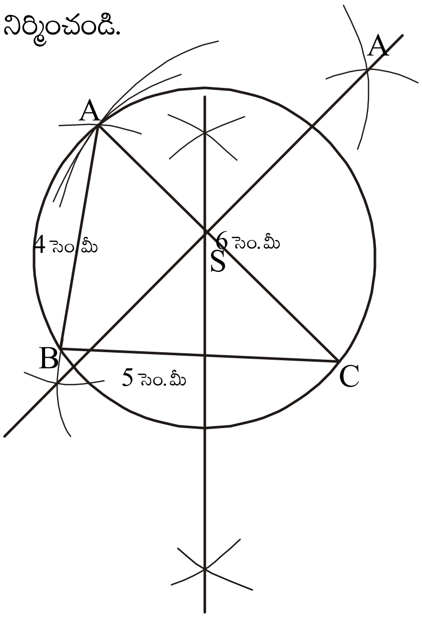
1. 3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీసి, దానిపై ఏదైనా బిందువు 'P' ని గుర్తించండి. ఆ వృత్తానికి, ఆ బిందువు 'P' వద్ద స్పర్శరేఖను గీయండి.
2. 2.8 సెం.మీ వ్యాసార్థముగల వృత్తంపై, ఏదైనా బిందువు 'P' వద్ద ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయండి.
3. 2.8 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. దాని కేంద్రము నుండి 5 సెం.మీ. దూరంలో బిందువు 'P' ని గుర్తించండి. బిందువు 'P' నుండి ఆ వృత్తానికి రెండు స్పర్శరేఖలను గీయండి.
4. 2.5 సెం.మీ వ్యాసార్థరముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. ఆ వృత్త కేంద్రము నుండి 6.8 సెం.మీ దూరముగల బిందువు నుండి, ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖల జతను గీయండి.

4.9.6 ఒక త్రిభుజానికి పరివృత్తము మరియు అంతరవృత్తముల నిర్మాణము

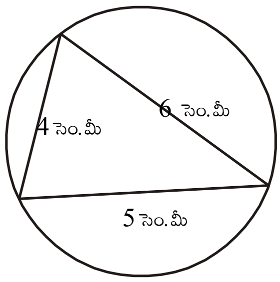
ఇప్పుడు మనము ఒక త్రిభుజానికి పరివృత్తము మరియు అంతర్ వృత్తముల నిర్మాణము ఎలా చేయాలో నేర్చుకొందాము.

1. ఒక త్రిభుజానికి పరివృత్త నిర్మాణము

ఉదహరణ : 5 సెం.మీ, 6 సెం.మీ మరియు 4 సెం.మీ. భుజాల కొలతలు గల ఒక త్రిభుజాన్ని గీసి, దానికి పరివృత్తాన్ని నిర్మించండి.



చిత్తు పటము



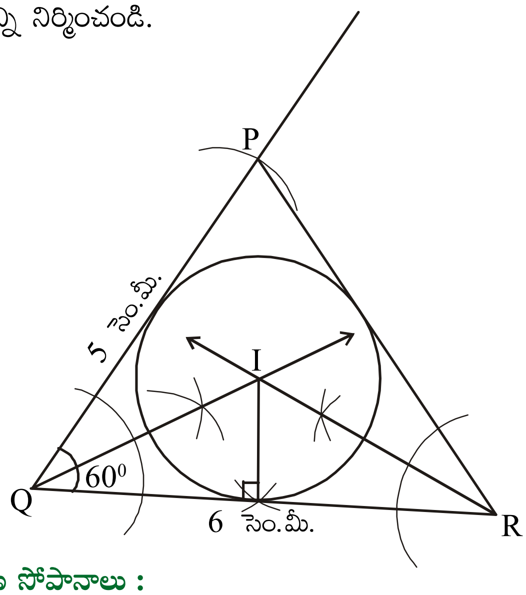
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 331
06-02-2021 14:54

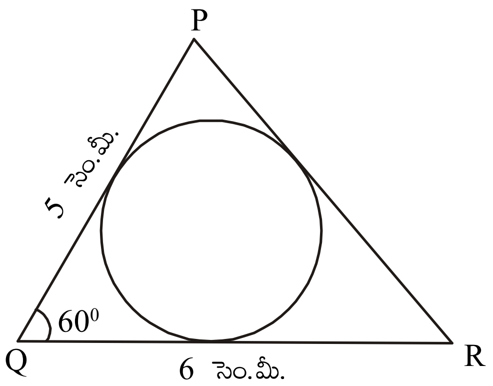
నిర్మాణ సోపానాలు :

1. ఇచ్చిన కొలతలతో ΔABCని నిర్మించుము. (మనము ఇది వరకు నేర్చుకొన్న త్రిభుజ నిర్మాణ ధర్మాలు SSS లేదా SAS లేదా SAA లను ఉపయోగించుకొనవలెను)
2. BC మరియు AC భుజాలకు లంబసమద్విఖండన రేఖలు గీసిన అవి 'S' వద్ద ఖండించుకొంటాయి.
3. 'S' కేంద్రముగా, SA లేదా SB లేదా SC వ్యాసార్థముతో వృత్తాన్ని గీసిన అది త్రిభుజ శీర్షాలు A, B, C ల గుండా పోవును. ఇదే మనకు కావలసిన పరివృత్తము.

2. త్రిభుజ అంతర వృత్త నిర్మాణము

ఉదహరణ: PQ = 5 సెం.మీ., QR = 6 సెం.మీ. మరియు $\angle Q = 60^0$ లతో త్రిభుజాన్ని గీసి దానికి అంతర్ వృత్తాన్ని నిర్మించండి.





నిర్మాణ సోపానాలు :

1. ఇచ్చిన కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించండి. (మనకు ఇది వరకు నేర్చుకొన్న త్రిభుజ నిర్మాణ ధర్మాలు SSS లేదా SAS లేదా SAA లను ఉపయోగించుకొనవలెను.)
2. $\angle Q$ మరియు $\angle R$ లకు కోణ సమద్విఖండన రేఖలు గీసిన, అవి I వద్ద ఖండించుకొంటాయి. I నుండి QR కి గీసిన లంబము IX.
3. 'I' కేంద్రముగా, IX వ్యాసార్థముగా ఒక వృత్తమును గీసిన అది త్రిభుజ మూడు భుజాలను అంతరంగా తాకును.
4. ఇదే మనకు కావలసిన ΔPQR యొక్క అంతర వృత్తము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 332 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. BC = 6 సెం.మీ, $\angle B = 60^0$ మరియు AB = 4.8 సెం.మీ కొలతలతో ΔABCని నిర్మించండి. ఈ త్రిభుజానికి పరివృత్తాన్ని నిర్మించండి.
2. BC = 6.3 సెం.మీ, $\angle B = 60^0$ మరియు $\angle C = 50^0$ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించండి. ఈ త్రిబుజానికి అంతర్ వృత్తాన్ని నిర్మించండి.

అభ్యాసము

1. AB = 4 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ మరియు $\angle B = 90^0$ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము.
2. PQ = 8 సెం.మీ QR = 6 సెం.మీ మరియు RS = 5 సెం.మీ కొలతలతో ΔPQR ని నిర్మించుము.
3. YZ = 6.2 సెం.మీ, $\angle Y = 65^0$ మరియు $\angle Z = 55^0$ కొలతలతో ΔXYZ నిర్మించుము.
4. AB = 2.9 సెం.మీ, BC = 3.2 సెం.మీ, CD = 2.7 సెం.మీ, AD = 3.4 సెం.మీ మరియు $\angle A = 75^0$. కొలతలతో చతుర్భుజము ABCDని నిర్మించుము.
5. PQ = 4 సెం.మీ, $\angle PQR = 120^0$ కొలతలతో సమభుజ చతుర్భుజము (రాంబస్) PQRSని నిర్మించుము.
6. AB = 4.5 సెం.మీ, BC = 5.5 సెం.మీ, CD = 4 సెం.మీ, AD = 6 సెం.మీ మరియు AC = 7 సెం.మీ. కొలతలతో చతుర్భుజము ABCD ని నిర్మించుము.
7. AB = 6 సెం.మీ., CD = 4.5 సెం.మీ. మరియు BD = 7.5 సెం.మీ. కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజము ABCD ని నిర్మించుము.
8. LM = 7.5 సెం.మీ KM = 6 సెం.మీ, MN = 5 సెం.మీ, KN = 5.5 సెం.మీ మరియు LN = 10 సెం.మీ. కొలతలతో చతుర్భుజము KLMN ను నిర్మించుము.
9. 3.2 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీసి, దానిపై ఏదైనా బిందువు 'P' ని గుర్తించుము. 'P' బిందువు వద్ద ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయండి..
10. 4.4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. ఆ వృత్తకేంద్రము నుండి 9 సెం.మీ. దూరములో వృత్త బాహ్యములో నున్న బిందువు నుండి, ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖల జతను గీయండి.
11. 4.5 సెం.మీ. కొలతలతో ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని గీసి, దానికి పరివృత్తాన్ని నిర్మించండి.
12. BC = 5 సెం.మీ, AB = AC = 4.4 సెం.మీ కొలతలతో ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని గీసి, దానికి అంతర్ వృత్తాన్ని నిర్మించండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 333 06-02-2021 14:54

ముఖ్యాంశాలు

- ప్రాథమిక నిర్మాణాల సమీక్ష లంబసమద్విఖండన రేఖ, కోణ సమద్విఖండన రేఖ మరియు ఇచ్చిన కోణానికి సమాన కోణాన్ని వేరొక బిందువు వద్ద నిర్మించడం.
- క్రింది సందర్భాలలోని కొలతలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజాల నిర్మాణం
  - (a) మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (SSS)
  - (b) రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యకోణం కొలత ఇచ్చినపుడు (SAS)
  - (c) ఒక భుజం మరియు రెండు కోణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (SAA)
- క్రింది సందర్భాలలోని కొలతలు ఇచ్చినపుడు చతుర్భుజాల నిర్మాణం
  - (a) నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు (SSSA)
  - (b) నాలుగు భుజాలు మరియు ఒక కర్ణం కొలత ఇచ్చినపుడు (SSSSD)
  - (c) మూడు భుజాలు మరియు రెండు కర్ణాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు (SSSDD)
- ఒక వృత్తానికి స్పర్శరేఖల నిర్మాణము
  - (a) వృత్తంపై బిందువు ఇచ్చినపుడు
  - (b) వృత్త బాహ్యంలోని బిందువు ఇచ్చినపుడు
- ఒక త్రిభుజానికి పరివృత్తము మరియు అంతర వృత్తముల నిర్మాణము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 334 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

4.10 నిరూపక రేఖాగణితము

4.10.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- నిరూపక తలంలో X, Y- అక్షాలను, బిందువులను గుర్తిస్తారు.
- నిరూపక తలంలో రెండు బిందువుల మధ్యదూరము కనుగొనగలుగుతారు.
- ఒక రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు యొక్క నిరూపకాలను విభజన సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొంటారు.
- మధ్యబిందువు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఒక రేఖా ఖండాన్ని సమాన నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుగొంటారు.
- గురుత్వ కేంద్రము నిరూపకాలను, గురుత్వకేంద్రము సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కనుగొంటారు.

4.10.1 పరిచయం

ఒక వస్తువు యొక్క స్థానాన్ని ఎలా గుర్తిస్తాము ?

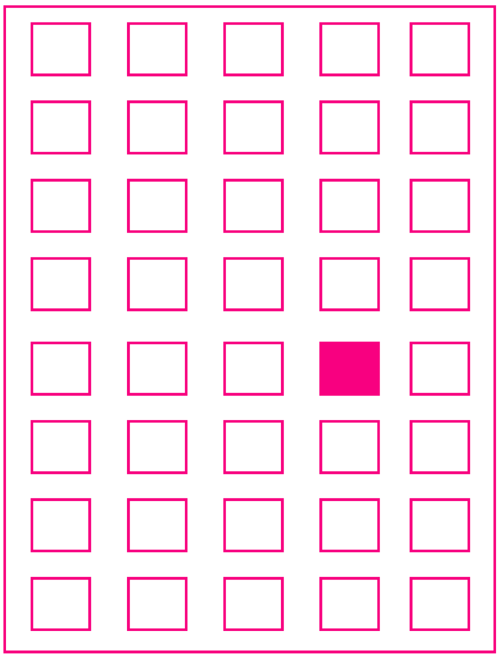
ఉదాహరణకు, ఒక హాల్లో కొన్ని కుర్చీలు ఉన్నాయనుకోండి. 'ఎరుపు రంగుతో నిండిన కుర్చీలో నువ్వు నీ స్నేహితుడైన ఆదిత్యను కూర్చోమని చెప్పావు. అతను స్థానాన్ని ఎలా వివరిస్తారు?

ఆదిత్య 5వ అడ్డువరుస మరియు 2వ నిలువు వరుసలో గల కుర్చీలో కూర్చున్నాడని రవి చెప్పగా

ఆదిత్య 2వ అడ్డ వరుసలో మరియు 5వ నిలువు వరుసలోగల కుర్చీలో కూర్చున్నాడని రమ చెప్పింది.

ఇంకా, ఆదిత్య 4వ అడ్డ వరుస మరియు 5వ నిలువ వరుసలో గల కుర్చీలో కూర్చున్నాడని రాజు చెప్పాడు.

పై వారిలో ఎవరు సరిగ్గా చెప్పారు? ఏ స్థానం నుంచి నిలువు వరుసలు, అడ్డ వరుసలు లెక్కించాలి అన్న సందేహం వస్తుంది?



పటం - 1

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 335 06-02-2021 14:54

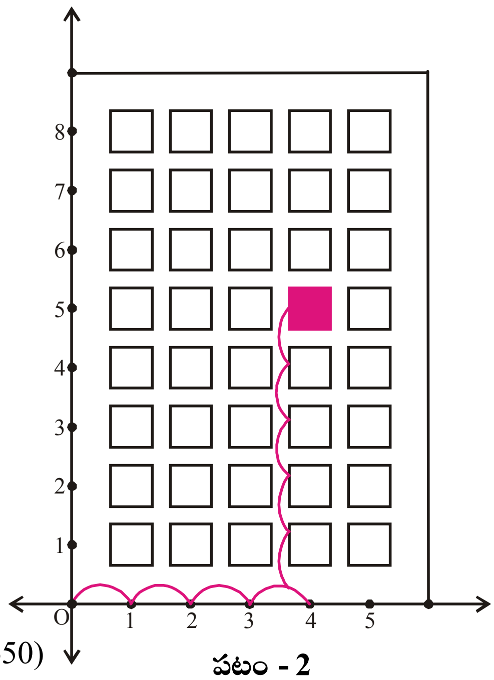
హాల్ అంచులను అడ్డ రేఖగా, నిలువురేఖగా క్రింద చూపిన పటం వలె గీసుకుంటే, రెండు రేఖలు కలిసిన బిందువు "O" గా తీసుకొని, "O" నుంచి లెక్కించే సంఖ్యలను పటంలో చూపినట్లు వరుసగా

ఎరుపు కుర్చీ ఉన్న స్థానాన్ని "O" నుంచి లెక్కిస్తే 4వ నిలువు వరుస, 5వ అడ్డువరుసలో ఉంది. ఆకుర్చీ ఉన్న స్థానాన్ని, P బిందువు అనుకుంటే,

$p(x, y) = (4, 5)$ అని వస్తుంది.

అనగా ప్రథమ నిరూపకం లేదా x- నిరూపకం 4, ద్వితీయ నిరూపకం లేదా y-నిరూపకం 5 అవుతుంది.

"ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువును రెండు నిర్దేశాల ఆధారంగా స్థాపించటం అనే భావన గణితములో నిరూపక రేఖాగణితంను సృష్టించింది".



పటం - 2

ఫ్రాన్స్‌కు చెందిన గణితశాస్త్రజ్ఞుడు "రెనెడెకార్టె" (1596-1650) నిరూపక రేఖాగణితాన్ని అభివృద్ధి చేశారు.

"రెనెడెకార్టె" పేరు నుంచి

"కార్టీజియన్ వ్యవస్థ" (నిరూపక వ్యవస్థ) అని అంటాము.

దీని గురించి, మరిన్ని అంశాల గురించి వివరంగా ఈ అధ్యాయంలో తెలుసుకుందాము.

రెనెడెకార్టె (1596-1650)

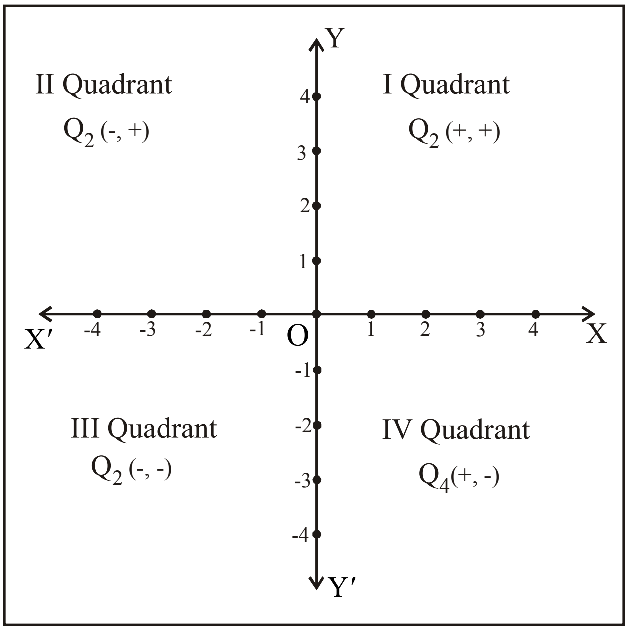
4.10.2 నిరూపక వ్యవస్థ

నిరూపక తలంలో పరస్పరం లంబంగా ఉన్న రెండు సంఖ్యారేఖలను మనం తీసుకుంటాము. భూమికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖ XX' ను X-అక్షం అనీ, భూమికి లంబరేఖ YY' ను Y-అక్షం అని అంటాము.

$X'X$ మరియు $Y'Y$ లు ఖండించుకునే బిందువును "మూలబిందువు" అని అంటారు. దీనిని "O". చే సూచిస్తారు. "O" యొక్క నిరూపకాలు (0, 0).

$\overrightarrow{OX}$ ను ధన X-అక్షం, $\overrightarrow{OX'}$ ను ఋణ X-అక్షం అని అంటారు.

$\overrightarrow{OY'}$ ను ధన Y-అక్షం, $\overrightarrow{OY'}$ ను ఋణ Y-అక్షం అని పిలుస్తాము.

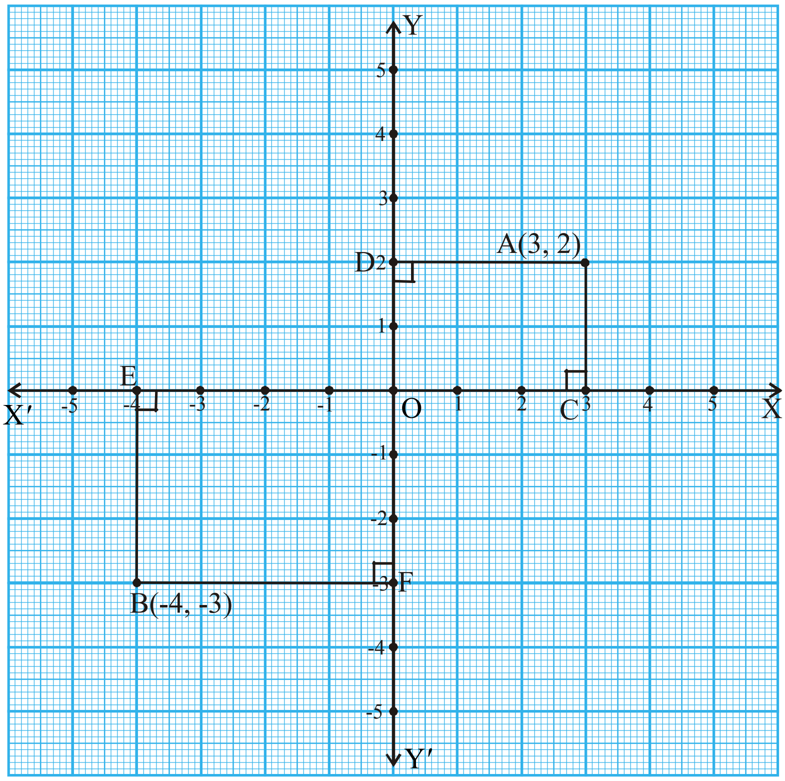


నిరూపక తలం భాగాలును అపసవ్య దిశలో Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 లతో సూచిస్తాము.

వీటిని వరుసగా మొదటి పాదం, రెండవ పాదం, మూడవ పాదం మరియు నాలుగవ పాదం అని పిలుస్తాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 336 06-02-2021 14:54

బిందువు స్థాపన



ప్రక్క పటం నుంచి,

A బిందువు మొదటి పాదం (Q_1) లో, B బిందువు మూడవ పాదం (Q_3) లో ఉన్నాయి.

A, B లు అక్షాల నుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నాయంటే,

X- అక్షంపైకి AC లంబము మరియు Y-అక్షం పైకి AD లంబాలు గీద్దాము.

అదే విధంగా BE, BF లంబాలను వరుసగా X మరియు Y అక్షాలపైకి గీద్దాము.

ఇప్పుడు

(i) ధన X-అక్షం దిశలో A బిందువు నుంచి Y-అక్షానికి గల లంబదూరము AD = OC = 3 యూనిట్లు. దీనిని x-నిరూపకము అంటాము.

(ii) ధన Y- అక్షం దిశలో A బిందువు నుంచి X-అక్షానికి గల లంబదూరము AC = OD = 2 యూనిట్లు దీనిని. Y-నిరూపకము అంటాము. కావున (3, 2)ను A బిందువు యొక్క నిరూపకాలు అంటాము.

(iii) ఋణం X- అక్షం దిశలో B బిందువు నుంచి Y-అక్షానికి గల లంబదూరం OE = BF = 4 యూనిట్లు. −4 ను B యొక్క x - నిరూపకము అంటాము.

(సూచన : మూలబిందువును సూచిక బిందువుగా తీసుకొని, దాని నుంచి బిందువు గల దూరము కాబట్టి దూరాన్ని ధన విలువగానే తీసుకుంటాము. నిరూపకానికి మాత్రం ఋణ గుర్తు ఉంటుంది).

(iv) ఋణ Y- అక్షం దిశలో B బిందువు నుంచి X-అక్షానికి గల లంబదూరం OF = EB = 3 యూనిట్లు, −3 ను B యొక్క Y-అక్షనిరూపకము అంటాము. (−4, −3) ను B యొక్క నిరూపకాలు అంటాము.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. నిరూపక తలంలో క్రింది బిందువులుండే పాదాలు రాయండి.
   (i) (5, −3) (ii) (−7, −6) (iii) (−4, 3) (iv) (5, 8)
2. క్రింది బిందువుల x- నిరూపకం మరియు y-నిరూపకం వ్రాయండి.
   (i) (−4, 8) (ii) (0, 0) (iii) (5, 6) (iv) (−3, −5)
3. (0, 13) ఏ అక్షంపై ఉంటుంది? ఎంత దూరంలో ఉంటుంది?
4. (−7, 0) ఏ అక్షంపై ఉంటుంది? ఎంత దూరంలో ఉంటుంది?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 337 06-02-2021 14:54

4.10.3 రెండు బిందువుల మధ్యదూరం (Distance between two points)

"ఏవైనా రెండు బిందువులు X-అక్షంపై ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువులలోని X-నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసం ఆ బిందువుల మధ్యదూరము అవుతుంది" అదేవిధంగా $(x_1, 0), (x_2, 0)$ బిందువుల మధ్య దూరం $|x_2 - x_1|$.

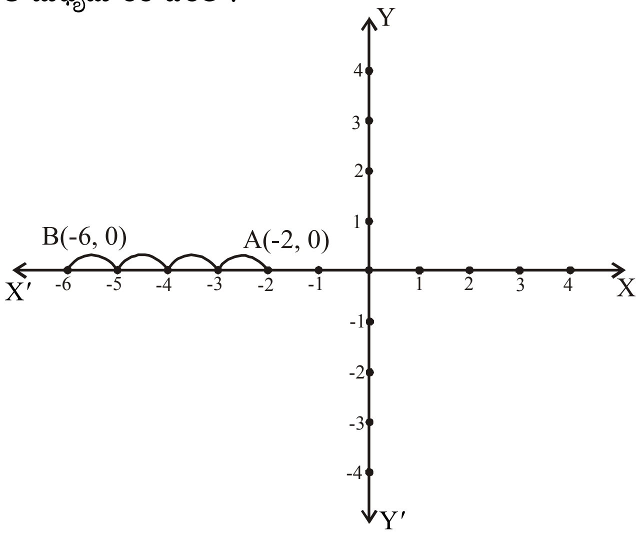
"రెండు బిందువులు Y-అక్షంపై ఉన్నట్లయితే, ఆ బిందువులలోని Y-నిరూపకాల మధ్య వ్యత్యాసాన్ని ఆ రెండు బిందువుల మధ్య దూరంగా చెప్పవచ్చు.

దూరాన్ని మనమెప్పుడూ ఋణవిలువలలో సూచించము కాబట్టి పరమ మూల్య విలువను లెక్కిస్తాము.

అలాగే $(0, y_1), (0, y_2)$ బిందువుల మధ్య దూరం $|y_2 - y_1|$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 1 : A(–2, 0) మరియు B(–6, 0) ల మధ్యదూరం ఎంత ?

సాధన : A(–2, 0) మరియు B(–6, 0) కాబట్టి, AB మధ్య దూరము x-నిరూపకాల భేదము అవుతుంది.



AB = (–6) – (–2) =

–4 (ఋణవిలువ)

కాబట్టి, A మరియు B బిందువుల మధ్యదూరము = |–6 – (–2)| = |–4|

AB = 4 యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 2 : (0, 4) మరియు (0, 6) ల మధ్యదూరం ఎంత ?

సాధన : A(0, 4) మరియు B(0, 6) అనుకొనుము.

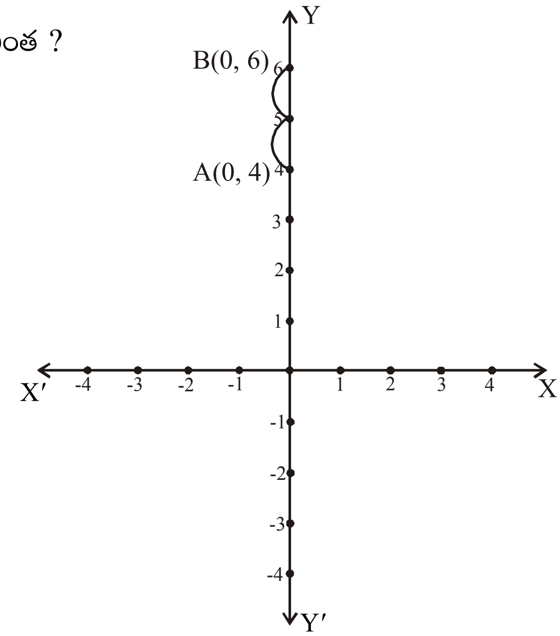
A, B బిందువుల మధ్యదూరము

y – నిరూపకాల భేదము అవుతుంది.

AB = |6 – 4|

AB = |2|

AB = 2 యూనిట్లు.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 338
06-02-2021 14:54

నిరూపక అక్షాలకు సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై గల బిందువుల మధ్యదూరము

X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_1)$ అనుకుందాము.

(వీటిలో y-నిరూపకాలు సమానము)

పటం నుంచి AB = PQ.

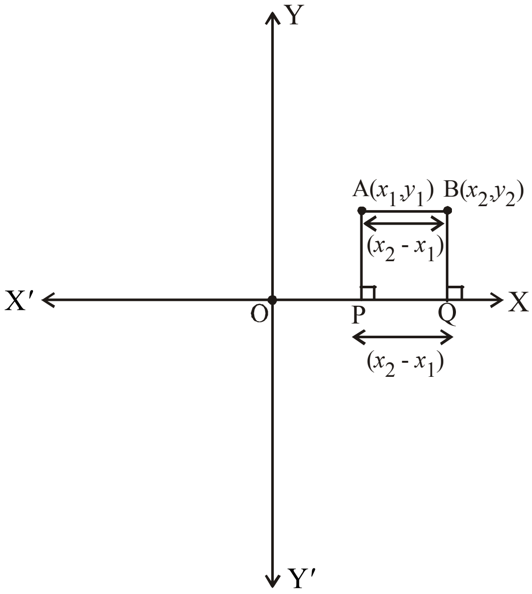
A, B ల మధ్యదూరము

APQB ఒక దీర్ఘచతురస్రము

$\therefore$ AB = PQ

PQ = $|x_2 - x_1|$

$\therefore$ AB = $|x_2 - x_1|$.



అదేవిధంగా Y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖపై బిందువులు $M(x_1, y_1)$, $N(x_1, y_2)$ అనుకుంటే

(వీటిలో x- నిరూపకాలు సమానము)

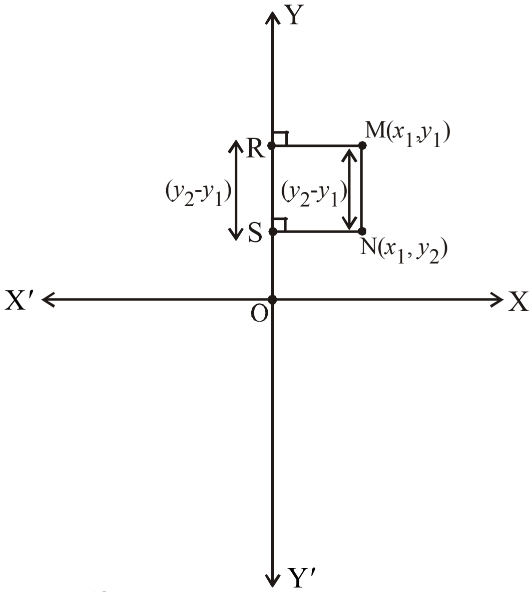
MN ల మధ్య దూరము

పటం నుంచి RSNM ఒక దీర్ఘచతురస్రము

MN = RS

RS = $|y_2 - y_1|$

$\therefore$ MN = $|y_2 - y_1|$ అవుతుంది.



ఉదాహరణ 3 : (–4, –3), (–8, –3) బిందువుల మధ్యదూరం ఎంత?

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులలో y-నిరూపకాలు సమానం కాబట్టి, అవి X-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

కావున (–4, –3), (–8, –3) బిందువుల మధ్యదూరం

$$|x_2 - x_1| = |-8 - (-4)| = |-8 + 4|$$

$$= |-4| = 4 \text{ యూనిట్లు.}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 339 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 4 : (3, 4), (3, 8) బిందువుల మధ్యదూరం ఎంత ?

సాధన : ఇచ్చిన బిందువులలో x-నిరూపకాలు సమానం కాబట్టి అవి y-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంటాయి.

కావున (3, 4), (3, 8) బిందువుల మధ్యదూరం

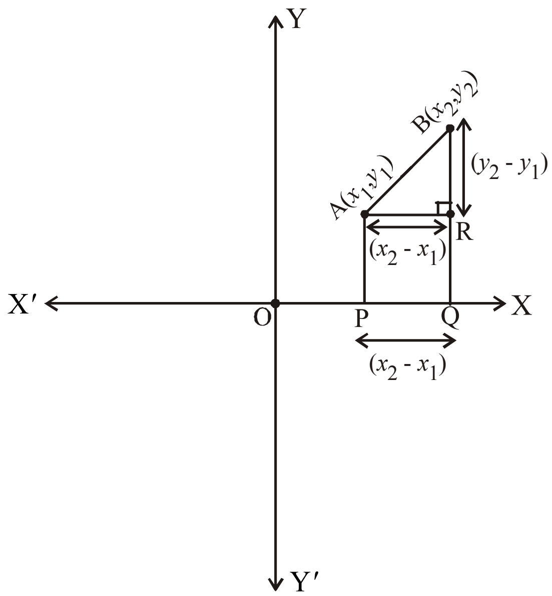
$= |y_2 - y_1|$

$= |8 - 4|$

$= 4$ యూనిట్లు.

నిరూపకతలంలోని ఏవేని రెండు బిందువుల మధ్యదూరం

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లు నిరూపక తలంలో ఉన్న బిందువులు అనుకొంటే (పటంలో చూపినట్లు)



X-అక్షంపైకి AP మరియు BQ లంబరేఖలను గీయాలి.

బిందువు A నుండి BQ రేఖపైకి లంబరేఖ (R వద్దకు) AR ను గీయాలి.

అపుడు $OP = x_1$, $OQ = x_2$

అలాగే, $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

పటంలో APQR ఒక దీర్ఘచతురస్రం.

కాబట్టి $PQ = AR = x_2 - x_1$

అలాగే $QB = y_2$, $QR = y_1$

$BR = QB - QR = y_2 - y_1$.

ΔARB లంబకోణ త్రిభుజం నుండి

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

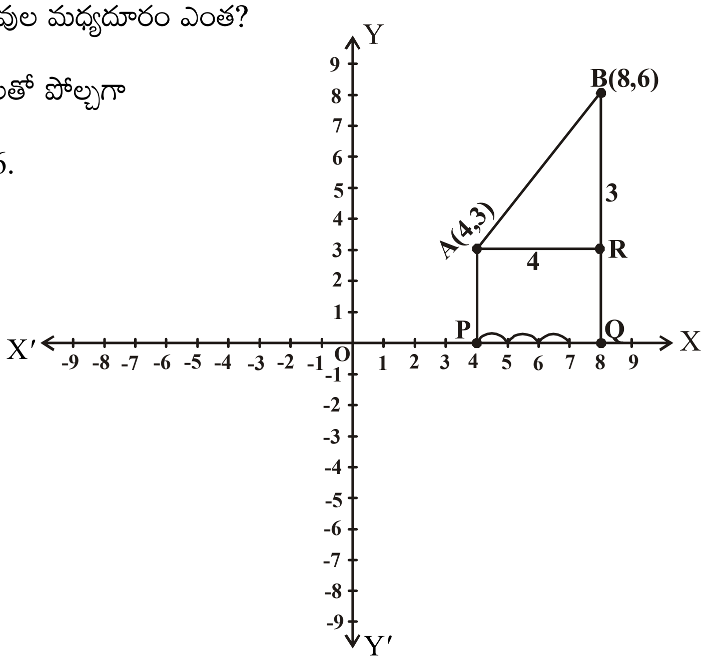
$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

> కాబట్టి A మరియు B బిందువుల మధ్యదూరంనకు సూత్రము
>
> $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 340	06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 5 : A(4, 3), B(8, 6) బిందువుల మధ్యదూరం ఎంత?



సాధన : A, B లను $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ లతో పోల్చగా

$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6.$

రెండు బిందువుల మధ్యదూరం

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

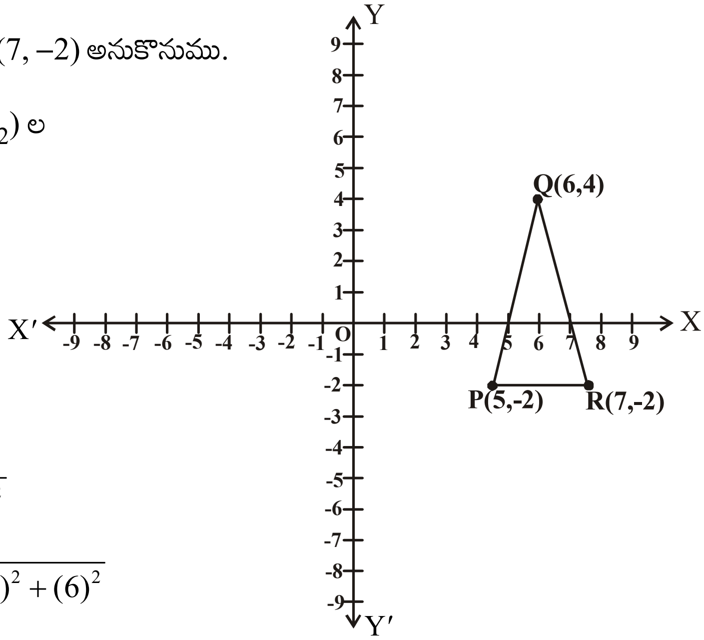
$$AB = \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

AB = 5 యూనిట్లు.

ఉదాహరణ 6 : (5, –2), (6, 4) మరియు (7, –2) బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజము ఏ రకమైన త్రిభుజము అవుతుంది?



సాధన : P(5, –2), Q(6, 4) మరియు R(7, –2) అనుకొనుము.

రెండు బిందువులు (x_1, y_1) (x_2, y_2) ల మధ్యదూరమునకు సూత్రము

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించి PQ, QR మరియు PR లను కనుగొందాము.

$$PQ = \sqrt{(6-5)^2 + (4-(-2))^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$QR = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$PR = \sqrt{(7-5)^2 + (-2(-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

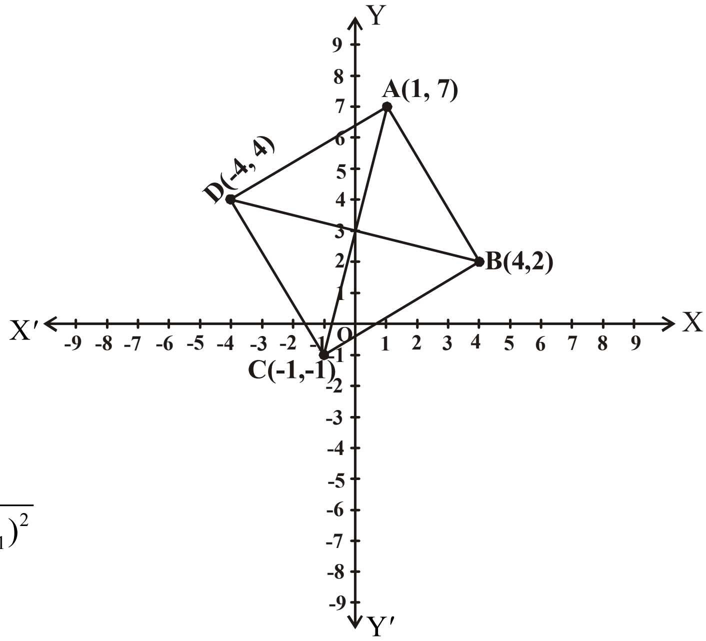
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 341 06-02-2021 14:54

PQ = QR = $\sqrt{37}$, కాబట్టి PR = 2 యూనిట్లు

(5, −2), (6, 4) మరియు (7, −2) బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజము సమద్విబాహు త్రిభుజము అవుతుంది.

ఉదాహరణ 7 : (1, 7), (4, 2), (−1, −1) మరియు (−4, 4) బిందవులు చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన : A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) మరియు D(−4, 4) అనుకొనుము.



ABCD చతురస్రం కావాలంటే AB, BC, CD, DA భుజాలు సమానం కావలెను. మరియు కర్ణాలు AC, BD లు సమానం కావలెను.

రెండు బిందువుల మధ్యదూరం

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

కావున భుజాల పొడవులు

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1-(-4))^2 + (7-4)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (3)^2} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$\therefore$ AB = BC = CD = DA = $\sqrt{34}$ యూనిట్లు.

కర్ణాల పొడవులు

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2}$$

$$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 342
06-02-2021 14:54

$$BD = \sqrt{(-4-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2}$$

$= \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ యూనిట్లు. $\qquad \therefore\ AC = BD = \sqrt{68}$ యూనిట్లు.

$\therefore$ ABCD ఒక చతురస్రము అవుతుంది.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువుల మధ్యదూరంను కనుగొనండి.
   (i) (2, 3) మరియు (4, 1)
   (ii) (–2, –3) మరియు (3, 2)
2. బిందువులు (3, 2), (–2, –3) మరియు (2, 3) లు ఏ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి ?
3. బిందువులు (–4, –7), (–1, 2), (8, 5) మరియు (5, –4) లు వరుసగా ఒక సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.
4. బిందువు (–5, 6) గుండా పోవు వృత్తం యొక్క కేంద్రం (3, 2) అయిన దాని వ్యాసార్ధంను కనుగొనండి.
   (సూచన : ఇచ్చిన రెండు బిందువులకు మధ్యదూరము సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.).
5. (1, 5), (2, 3) మరియు (–2, –1) బిందువులు ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయా ? లేవా? సరిచూడండి.

సరేఖీయ బిందువులు (Collinear points)

"ఒకే సరళరేఖపై ఉన్న బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటారు".

A, B మరియు C బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు అవుతాయి

కాబట్టి AB + BC = AC అవుతుంది.

అదేవిధంగా, AC + CB = AB అవుతుంది కాబట్టి,

ఇక్కడ కూడా A, B మరియు C బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు అవుతాయి.

ఉదాహరణ 8 : బిందువులు A(4, 2), B(7, 5) మరియు C(9, 7) ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయని చూపండి.

సాధన : AB, BC, AC ల మధ్యదూరం కనుగొందాము.

_+<Šeú eTKǩŐsÁ dŸçâ, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ను ఉపయోగించి

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$= \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 343
06-02-2021 14:54

$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$= \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{(5)^2+(5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$ యూనిట్లు.

ఇప్పుడు $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$.

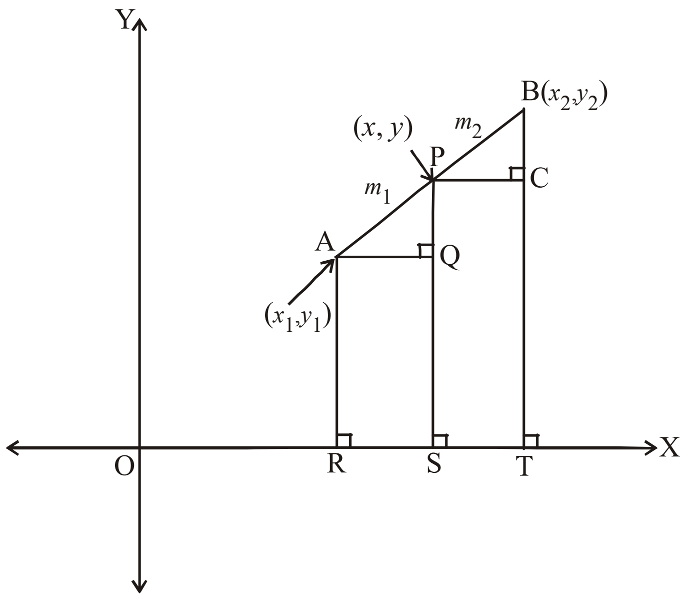
దీని నుండి $AB + BC = AC$ ని సంతృప్తిపరుస్తుంది.

కాబట్టి బిందువులు (4, 2) (7, 5) మరియు (9, 7) లు ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయి.

4.10.4 విభజన సూత్రము

ఏవేని రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము. ఏదేని బిందువు $P(x, y)$ అనేది AB ని అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకొని

$\frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (పటంలో చూడండి) ...(1)



AR, PS మరియు BT లను X-అక్షంపైకి లంబంగా గీయండి.

AQ మరియు PC లను X-అక్షంనకు సమాంతరంగా ఉండేలా గీయండి. ఇప్పుడు కోణం, కోణం సరూపకత నియమం నుండి,

$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

అందువల్ల $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC}$ ...(2)

ఇప్పుడు $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$.

పై విలువలను (1) లో, ప్రతిక్షేపించగా, మనకు

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$ తీసుకొనిన, $x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

అదేవిధంగా $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$, తీసుకొనిన

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

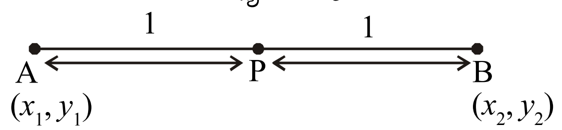
కాబట్టి $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడు రేఖను అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు $p(x, y)$ యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right), m_1 + m_2 \neq 0.$$

4.10.5 మధ్యబిందువు (Mid - Point)

"నిరూపకతలంలో ఏవైనా రెండు బిందువులతో ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని సమాన నిష్పత్తిలో రెండు భాగాలుగా విభజించే బిందువును మధ్యబిందువు అంటారు".

విభజన సూత్రము నుపయోగించి మధ్యబిందువు నిరూపకాలను కూడా మనము తెలుసుకోవచ్చు.



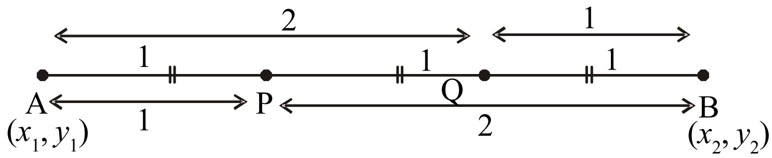
పటం నుంచి నిరూపక తలంలోని ఏవైనా రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ అనుకొనుము. P అనే బిందువు AB రేఖాఖండాన్ని $1 : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అందువల్ల $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడే రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు P నిరూపకాలు

విభజన సూత్రము నుపయోగించి $\Rightarrow \left(\dfrac{1.x_1 + 1.x_2}{1+1}, \dfrac{1.y_1 + 1.y_2}{1+1}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

త్రిథాకరణ బిందువులు (Points of Trisection)

"ఒక రేఖాఖండమును మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించు బిందువులను త్రిథాకరణ బిందువులు అంటాము".



పటం నుంచి నిరూపక తలంలోని ఏవైనా రెండు బిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ చే ఏర్పడిన $\overline{AB}$ రేఖాఖండమును P, Q బిందువులు మూడు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తున్నాయి. AB రేఖాఖండాన్ని P అనే బిందువు $1 : 2$ నిష్పత్తిలోను, Q అనే బిందువు $2 : 1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తున్నాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 345 06-02-2021 14:54

కాబట్టి ఒక రేఖాఖండాన్ని $1:2, 2:1$ నిష్పత్తులలో విభజించే రెండు బిందువులను "త్రిథాకరణ బిందువులు" అని అంటారు.

విభజన సూత్రము నుపయోగించి,

$$P \text{ బిందువు నిరూపకాలు } = \left(\frac{1.x_2 + 2.x_1}{1+2}, \frac{1.y_2 + 2.y_1}{1+2}\right)$$

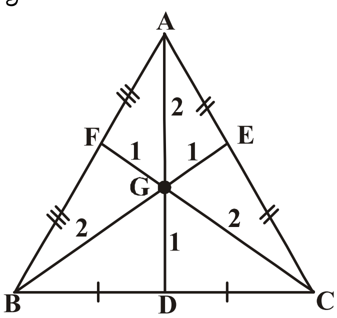
$$\therefore \quad P = \left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$$

$$Q \text{ బిందువు నిరూపకాలు } = \left(\frac{2x_2 + 1.x_1}{2+1}, \frac{2y_2 + 1.y_1}{2+1}\right)$$

$$\therefore \quad Q = \left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$$

త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం (Centroid of Triangle)

ΔABC లో A నుంచి BC యొక్క మధ్యబిందువుకు గీచిన రేఖను మధ్యగత రేఖ అంటాము.



$\therefore$ AD ఒక మధ్యగత రేఖ. ఇదేవిధంగా BE, CF లు మధ్యగతరేఖలు.

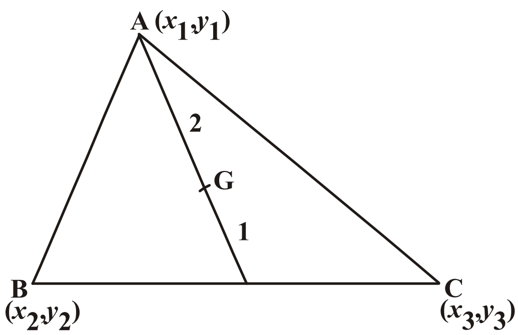
"త్రిభుజంలో మధ్యగత రేఖల ఖండన బిందువును గురుత్వకేంద్రము అంటారు".

ΔABC లో AD, BE మరియు CF మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువు G అవుతుంది. కావున G గురుత్వకేంద్రము.

"గురుత్వకేంద్రము త్రిభుజంలోని ప్రతి మధ్యగతరేఖను $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది".

$\therefore \ AG : GD = 2 : 1$

ఇదేవిధంగా, $BG : GE = 2 : 1$, $CG : GF = 2 : 1$ అవుతాయి.



బిందువులు $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లు ΔABC యొక్క శీర్షాలు

ఈ త్రిభుజం యొక్క గురుత్వ కేంద్ర నిరూపకాలు ఎలా కనుగొంటారురు

AD అనే మధ్యగతరేఖ త్రిభుజభూమి BCని సమద్విఖండన చేయును

కావున

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 346 06-02-2021 14:54

AD మధ్యగతరేఖపై $2:1$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువు (గురుత్వకేంద్రం) G (x, y) అనుకొనిన

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.(y_1)}{2+1}\right]$$

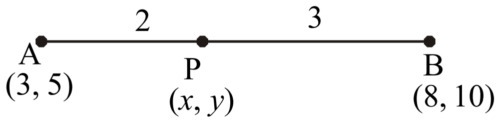
$$G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

గురుత్వకేంద్రం G యొక్క నిరూపకాలు

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

ఉదాహరణ 9 : బిందువులు (3, 5) మరియు (8, 10) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును $2:3$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువును కనుగొనండి.

సాధన : కావలసిన బిందువు నిరూపకాలు $P(x, y)$ అనుకొనిన



విభజన సూత్రము ద్వారా, A(3, 5), B(8, 10).

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$x = \frac{2(8)+3(3)}{2+3} = \frac{16+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$y = \frac{2(10)+3(5)}{2+3} = \frac{20+15}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

కావలసిన బిందువు $P(x, y) = (5, 7)$.

ఉదాహరణ 10 : బిందువులు (2, 7) మరియు (12, –7) లను కలుపగా ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.

సాధన : (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లను కలుపగా ఏర్పడు రేఖాఖండం మధ్యబిందువు నిరూపకాలు

మధ్యబిందువు $M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

బిందువులు (2, 7) మరియు (12, –7) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు $M(x, y)$ అనుకొనిన,

$$M(x, y) = \left(\frac{2+12}{2}, \frac{7+(-7)}{2}\right) = \left(\frac{14}{2}, \frac{0}{2}\right)$$

మధ్యబిందువు $M(x, y) = (7, 0)$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 347
06-02-2021 14:54

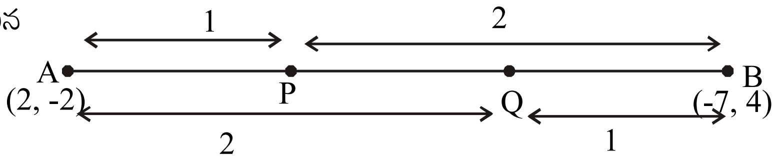
ఉదాహరణ 11 : బిందువులు A (2, −2) మరియు B (−7, 4) లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు కనుగొనండి.

సాధన : AB రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు

P మరియు Q లు అనుకొనిన

AP = PQ = QB

(పటంలో చూపినట్లు)



అందువల్ల AB రేఖాఖండాన్ని బిందువు P అంతరంగా 1 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

కావున విభజన సూత్రం నుండి,

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{1(-7) + 2(2)}{1+2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1+2}\right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

ఇప్పుడు బిందువు Q కూడా AB రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా 2 : 1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

అందువల్ల బిందువు Q యొక్క నిరూపకాలు

$$Q(x, y) = \left(\frac{2(-7) + 1(2)}{2+1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2+1}\right)$$

$$Q(x, y) = \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$$

కాబట్టి AB రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు P(−1, 0) మరియు Q(−4, 2).

ఉదాహరణ 12 : బిందువులు (−4, 6), (2, −2) మరియు (2, 5) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రంను కనుగొనండి.

సాధన : గురుత్వకేంద్రం G నిరూపకాలు

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

బిందువులు (−4, 6), (2, −2) మరియు (2, 5) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రం.

$$\left(\frac{-4+2+2}{3}, \frac{6+(-2)+5}{3}\right) = \left(\frac{0}{3}, \frac{9}{3}\right) = (0, 3)$$

∴ గురుత్వకేంద్రం (0, 3).

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 348　　06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. బిందువులు $(-1, 7)$ మరియు $(4, -3)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును $2 : 3$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు నిరూపకాలను కనుగొనండి.
2. బిందువులు $(4, -1)$ మరియు $(-2, -3)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క త్రిథాకరణ బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనండి.
3. బిందువులు $(3, 0)$ మరియు $(-1, 4)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.
4. $(-1, 3)$, $(6, -3)$ మరియు $(-3, 6)$ బిందువులతో ఏర్పడు త్రిభుజం యొక్క గురుత్వకేంద్రమును కనుగొనండి.

అభ్యాసము

1. $(3, 1)$, $(6, 4)$ మరియు $(8, 6)$ బిందువులు ఒకే సరళరేఖపై ఉన్నాయా ? లేవా ? సరిచూడండి.
   [సూచన : A, B మరియు C లు సరేఖీయాలు అయిన $AB + BC = AC$ అని చూపవలెను.]
2. బిందువులు $(-7, -3)$, $(5, 10)$, $(15, 8)$ మరియు $(3, -5)$ లు వరుసగా ఒక సమాంతర చతుర్భుజానికి శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి.
   [సూచన : ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో భుజాలు $AB = CD$, $BC = AD$ మరియు కర్ణాలు $AC = BD$ అవుతాయి.]
3. బిందువులు $(-6, 10)$ మరియు $(3, -8)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండమును $2 : 7$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించు బిందువును కనుగొనండి.
   [సూచన : విభజన సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.]
4. బిందువులు $(2, 6)$ మరియు $(-4, 8)$ లను కలుపు రేఖాఖండం యొక్క త్రిథాకరణ బిందువులు కనుగొనండి..
   [సూచన : AB రేఖాఖండాన్ని $1:2$, $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించే P, Q బిందువులను కనుగొనవలెను.]
5. బిందువులు $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ $C(0, a\sqrt{3})$ అనునవి ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచగలవని చూపండి.
   [సూచన : బిందువుల మధ్యదూరం సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ΔABC లో $AB = BC = AC$ అని చూపుము]
6. బిందువులు $(3, 2)$ మరియు $(-5, 6)$ లచే ఏర్పడు రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువును కనుగొనండి.
   [సూచన : మధ్యబిందువు సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి].
7. బిందువులు $(-1, 3)$, $(6, -3)$ మరియు $(-3, 6)$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రంను కనుగొనండి. [సూచన : గురుత్వకేంద్రము సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి].
8. నిరూపకతలంలో మూలబిందువు $O(0, 0)$ నుంచి ఒక బిందువు $P(x, y)$ కు గల మధ్యదూరము $\sqrt{x^2 + y^2}$ అని రాధ అన్నది. రాధతో నువ్వు ఏకీభవిస్తావా? లేదా? ఎందుకు ?
9. బిందువులు $(-4, 0)$, $(4, 0)$ మరియు $(0, 3)$ లు ఏ త్రిభుజానికి శీర్షాలు అవుతాయి?
   [సూచన : ΔABC లో AB, BC మరియు CA లను కనుగొనుము]
10. $(\sin\theta, \cos\theta)$, $(-\cos\theta, \sin\theta)$ బిందువుల మధ్యదూరమును కనుగొనండి.
    [సూచన : మధ్యదూరము సూత్రాన్నుపయోగించుము మరియు $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ అని మీకు తెలుసుకదా!]

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 349 06-02-2021 14:54

11. ఒక వృత్తములో వ్యాసము చివరి బిందువులు $(2, 5)$ మరియు $(-4, 1)$ అయిన వృత్తకేంద్రమును కనుగొనండి. [సూచన : మధ్య బిందువు సూత్రాన్ని ఉపయోగించుము]

12. $P(-1, 1)$ అనే బిందువు $Q(-3, b)$ మరియు $R(1, b+4)$ లను కలుపు రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు అయిన "b" విలువ ఎంత ? [సూచన : QR ల మధ్యబిందువును P బిందువుకు సమానం చేయండి].

13. బిందువులు $(4, 0)$ మరియు $(0, x)$ ల మధ్యదూరము 5 యూనిట్లు అయిన x విలువ ఎంత? [ ]
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

14. మూలబిందువు నుంచి $A(4, -3)$ బిందువుకు గల మధ్యదూరం [ ]
(A) 1యూనిట్ (B) 7 యూనిట్లు (C) 5 యూనిట్లు (D) 3 యూనిట్లు

15. ఒక త్రిభుజ శీర్షాలు $(7, 5), (5, 7)$ మరియు $(-3, 3)$ అయిన దాని గురుత్వకేంద్రము నిరూపకాలు [ ]
(A) $(3, -5)$ (B) $(-3, 5)$ (C) $(-3, -5)$ (D) $(3, 5)$

16. $(6, 0)$ మరియు $(0, 8)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు నిరూపకాలు [ ]
(A) $(3, 4)$ (B) $(6, 8)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(4, 3)$

ముఖ్యాంశాలు

- ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువును రెండు నిర్దేశాల ఆధారంగా స్థాపించడం అనే భావన గణితములో నిరూపక రేఖాగణితమును సృష్టించింది.
- XX' మరియు YY' లు ఖండించుకునే బిందువును "మూలబిందువు" అని అంటారు. దీనిని "O" చే సూచిస్తారు. "O" యొక్క నిరూపకాలు $(0, 0)$.
- నిరూపక తలం భాగాలను Q_1, Q_2, Q_3 మరియు Q_4 లతో సూచిస్తాము.
- $(x_1, 0), (x_2, 0)$ బిందువుల మధ్య దూరం $|x_2 - x_1|$, అలాగే $(0, y_1), (0, y_2)$ ల మధ్య దూరం $|y_2 - y_1|$ అవుతుంది.
- $A(x_1, x_2)$ మరియు $B(y_1, y_2)$ బిందువుల మధ్య దూరము $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- ఒకే సరళరేఖపై ఉన్న బిందువులను సరేఖీయ బిందువుల అంటారు.
- $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లచే ఏర్పడు రేఖను అంతరంగా $m_1 : m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు $p(x, y)$ యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ here $m_1 + m_2 \neq 0$.
- నిరూపక తలంలో ఏవైనా రెండు బిందువులతోఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని సమాన నిష్పత్తిలో $1 : 1$ విభజించే బిందువును "మధ్య బిందువు" అంటారు.
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ మరియు $C(x_3, y_3)$ లు భుజము ΔABC యొక్క శీర్షాలు అయిన గురుత్వ కేంద్రము యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ అవుతాయి.

యూనిట్ 5 క్షేత్రమితి

అధ్యాయం 5.1 సమతల పటాల వైశాల్యం, చుట్టుకొలత

5.1.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

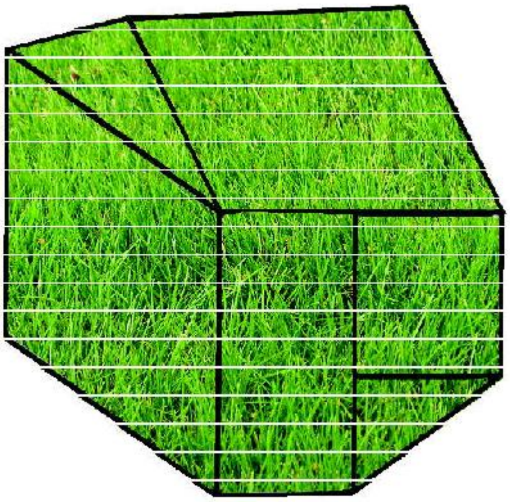
- సమతల పటములకు సంబంధించిన సమస్యల యొక్క సాధనను చేయగల్గుతాడు.
- పొలము యొక్క వైశాల్యములు, దీర్ఘచతురస్రాకార బాటులు మరియు వృత్తాకార బాటుల యొక్క వైశాల్యములు కనుగొనగల్గుతారు.
- సమతల పటముల యొక్క వివిధ సూత్రాలను అందులోని పదాలను వివరించగల్గుతారు.
- సమతల పటముల ఆవశ్యకత దాని ప్రాముఖ్యతను గుర్తించగల్గుతారు.

5.1.1 పరిచయం

దేవర్ష తన పొలం (పటం. 1) వైశాల్యము కనుగొనాలని అనుకొన్నాడు. కాని ఇది క్రమాకారములో లేదని గుర్తించాడు. కావున దేవర్ష తన పొలమును (పటము 2)లో చూపిన విధముగా త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం. రాంబస్ మొదలైన క్రమాకార రూపాలుగా విభజించాడు. ఈ క్రమాకార ఆకారాలన్నింటి వైశాల్యమును కనుగొన గలిగితే తన పొలము మొత్తము వైశాల్యము కనుక్కోవచ్చునని భావించాడు.

పటము (i), ను పరిశీలిస్తే అక్రమాకృతిలో యున్నది. కాని పటము (2)లో పంటభూమి 2 త్రిభుజములు, 2 సమాంతర చతుర్భజములు, 1 దీర్ఘచతురస్రం మరియు 1 చతురస్రము గా విభజించబడినది. ఈ ఆరు జ్యామితీయ ఆకృతుల వైశాల్యములను కనుగొని వాటిని కూడిన ఇచ్చిన పొలము యొక్క వైశాల్యము వస్తుంది.

(i)

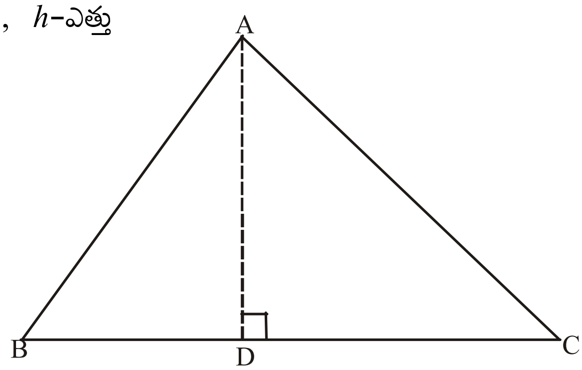

(ii)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 351 06-02-2021 14:54

క్రమాకార ఆకారము యొక్క చుట్టూ యున్న కొంత యొక్క మొత్తము పొడవును చుట్టుకొలత అంటారు. క్రమాకార వస్తువుల యొక్క వైశ్యాలం, చుట్టుకొలతల యొక్క పరిజ్ఞానము నిత్యజీవిత ఘటనలలో విరివిగా ఉపయోగిస్తాం.

త్రిభుజ వైశాల్యము, దాని భూమి మరియు ఎత్తుల లబ్ధములో సగము ఉంటుంది.

అనగా $A = \frac{1}{2}bh$ ఇందులో b - భూమి, h-ఎత్తు



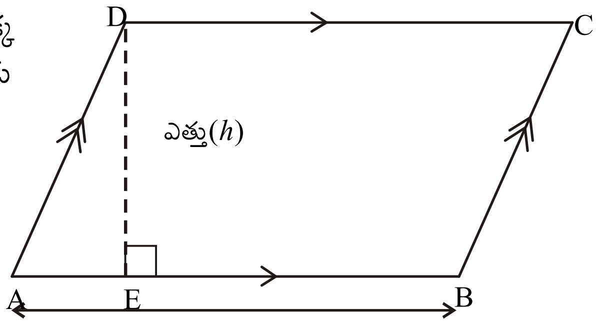
ఒక త్రిభుజములో ఒక శీర్షము నుండి ఎదుటి భుజమునకు గీచిన లంబము యొక్క పొడవును 'త్రిభుజ ఉన్నతి' లేదా ఎత్తు అని అంటారు.

ఇక్కడ త్రిబుజము ABC లో $AD \perp BC$, మరియు AD అనేది త్రిభుజము ABC యొక్క ఎత్తు.

సమాంతర చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము దాని భూమి, ఎత్తు ఆ లబ్ధమునకు సమానము.

అనగా వైశాల్యము $A = bh$

ఇందులో b- భూమి, h - ఎత్తు.

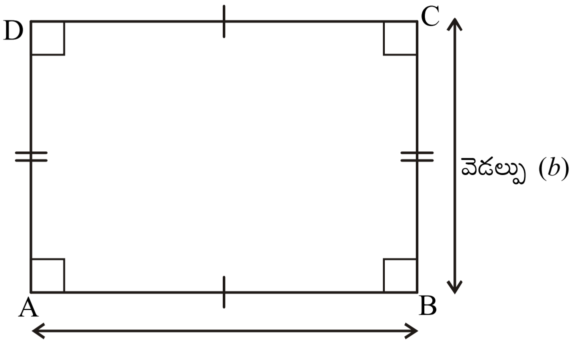


దీర్ఘచతురస్రము ABCD యొక్క వైశాల్యము దాని పొడవు, వెడల్పుల లబ్ధమునకు సమానము.

$A = lb$

ఇందులో l - పొడవు

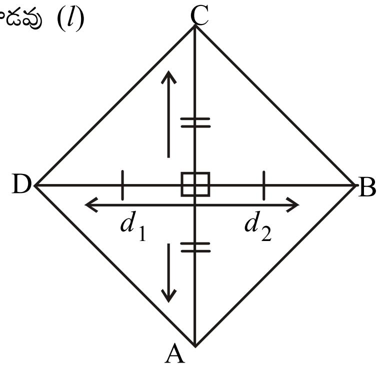
b - వెడల్పు



రాంబస్ లేదా సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము దాని కర్ణముల లబ్ధములో సగము ఉంటుంది.

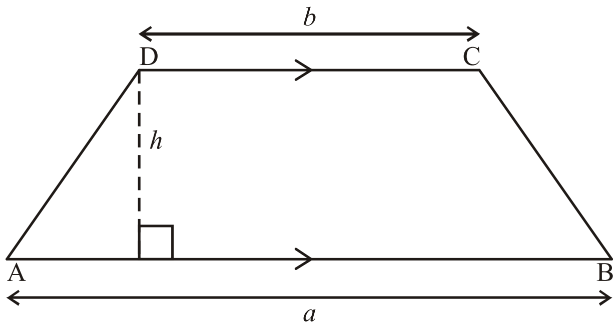
అనగా, $A = \frac{1}{2}d_1d_2$

ఇందులో d_1, d_2 లు కర్ణముల పొడవులు



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 352 06-02-2021 14:54

ట్రెపీజియం లేదా సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము దాని సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తము, సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరముల లబ్ధములో సగము ఉంటుంది.

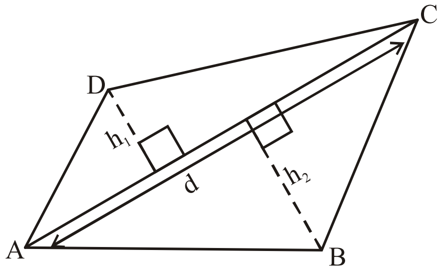


అనగా $A = \frac{1}{2} \times$ [సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తము] $\times$ [సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం]

$$A = \frac{1}{2} \times h[a + b]$$

ఇందులో h సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరము

a, b లు సమాంతర భుజాలు పొడవులు.



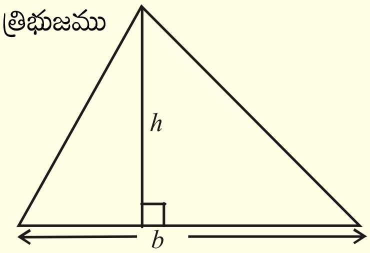
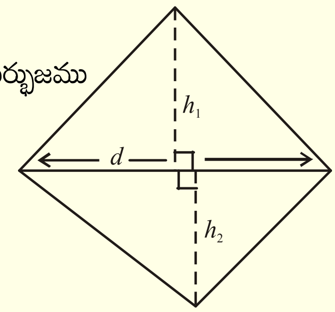
చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము కర్ణముపై గీచిన లంబముల పొడవుల మొత్తము, కర్ణముల లబ్ధములో సగముంటుంది.

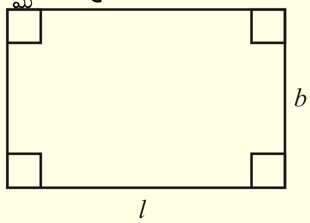
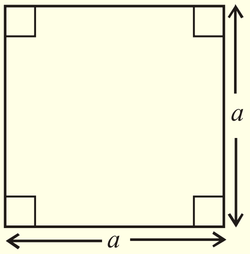
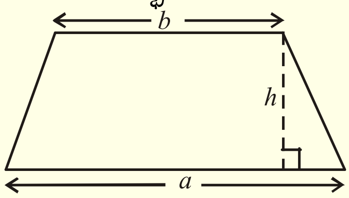
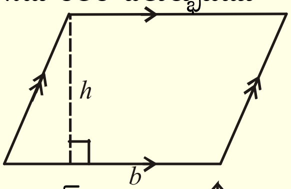
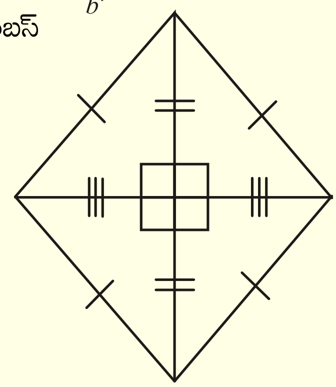
చతుర్భుజము ABCD వైశాల్యము

$$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$$

ఇందులో d–కర్ణము, h_1 మరియు h_2 కర్ణముల పై గీచిన లంబములు.

మనము ఏమి నేర్చుకొన్నాము

పటము	వైశాల్యమునకు సూత్రము	వివరణ
1. త్రిభుజము 	$A = \frac{1}{2}bh$	b - భూమి h - ఎత్తు
2. చతుర్భుజము 	$A = \frac{1}{2}b[h_1 + h_2]$	d- కర్ణము పొడవు h_1, h_2 - కర్ణము పై గీచిన లంబముల పొడవుల మొత్తము

3. దీర్ఘచతురస్రం 	A = lb	l - పొడవు b - వెడల్పు
4. చతురస్రం 	A = a^2	a - భుజము
5. సమలంబచతుర్భుజము(ట్రేపీజియం) 	$A = \frac{h}{2}[a+b]$	a, b = సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం h - సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరం
6. సమాంతర చతుర్భుజము 	A = bh	b - భూమి h - ఎత్తు
7. రాంబస్ 	$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$	d_1 కర్ణముల పొడవులు d_2

ఉదాహరణ 1 : 6 మీటర్లు, 4 మీటర్లు కొలతలుగా గల దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము యొక్క వైశాల్యము, చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము పొడవు (l) = 6మీ.

దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము వెడల్పు (b) = 4మీ

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 354

06-02-2021 14:54

$\therefore$ వైశాల్యము (A)= పొడవు $\times$ వెడల్పు

= 6మీ $\times$ 4మీ = 24 చ.మీ.,

చుట్టుకొలత (P) $= 2(l + b)$

$= 2(6 + 4)$

$= 2 \times 10$

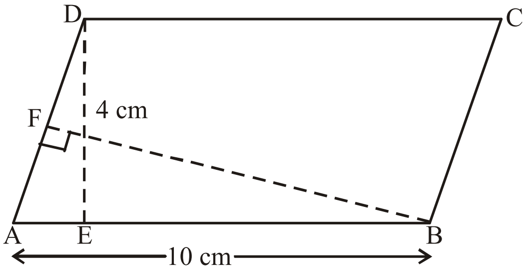
= 20మీ.

ఉదాహరణ 2 : సమాంతర చతుర్భుజము ABCDలో AB = 10 సెం.మీ మరియు DE = 4 సెం.మీ. అయినచో

(i) ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము

(ii) AD = 5 సెం.మీ అయినచో

BF యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



సాధన : (i) భూమి (b) = 10 cm

ఎత్తు (h) = 4 cm

వైశాల్యము (A) = bh

= 10 4 = 40 సెం.మీ^{2}

(ii) ఎత్తు BF(h) = ?

భూమి (b) AD = 4 సెం.మీ

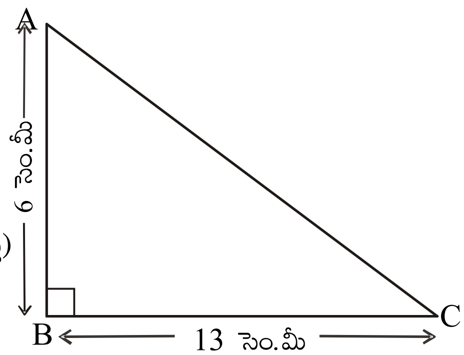
వైశాల్యం (A) = 40 చ.సెం.మీ.

A = bh

$40 = 5 \times BF$

$\Rightarrow$ BF $= \frac{40}{5}$ = 8 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 3 : ప్రక్క పటములోని త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.



సాధన : త్రిభుజము భూమి (b) = 13 సెం.మీ

త్రిభుజము ఎత్తు (h) = 6 సెం.మీ

త్రిభుజ వైశాల్యము (A) $= \frac{1}{2}$ (భూమి$\times$ఎత్తు)

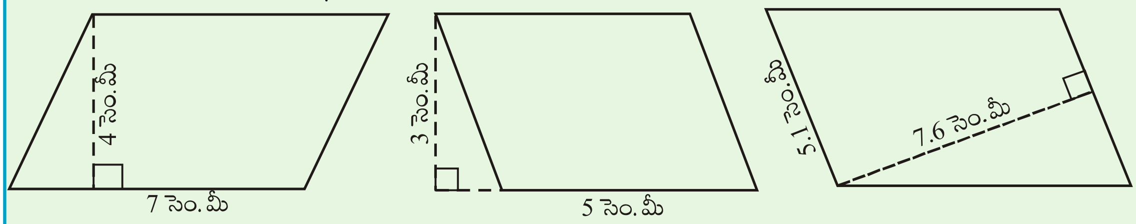
$= \frac{1}{2} bh$ (లేదా)

$= \frac{1}{2} \times 13 \times 6 = 13 \times 3 = 39$ చదరపు సెం.మీ.

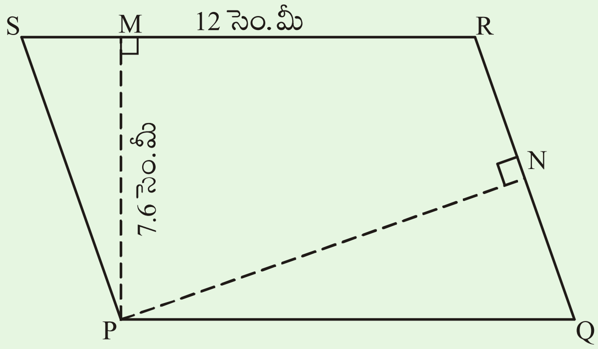
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 355
06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.



2. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎత్తు, దాని భూమితో మూడవ వంతు ఉన్నది. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము 192 చదరపు సెం.మీ॥ అయినచో దాని యొక్క ఎత్తు, భూమిల కొలతలను కనుగొనుము.
3. ఒక చతురస్రం మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజముల యొక్క వైశాల్యములు సమానము. చతురస్రము యొక్క భుజము 40 మీటర్లు, సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎత్తు 20మీటర్లు అయిన సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క భూమిని కనుగొనండి.
4. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. P నుండి $\overline{SR}$ పైకి గీయబడిన లంబము PM మరియు P నుండి $\overline{QR}$ పైకి గీయబడిన లంబము PN. SR = 12 సెం.మీ. PM = 7.6 సెం.మీ అయిన



   (i) PQRS సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యమెంత?

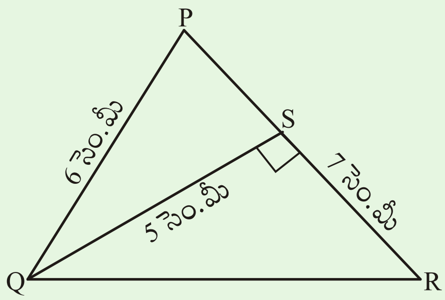
   (ii) QR = 8సెం మీ॥ అయిన PN విలువను కనుగొనుము.
5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎత్తు 6సెం.మీ మరియు దాని భూమి ఎత్తునకు రెట్టింపు అయినట్లయితే దాని వైశాల్యము కనుగొనుము.
6. రాము PQR త్రిభుజ వైశాల్యము

   $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ (సెం.మీ)^2 అని చెప్పాడు.

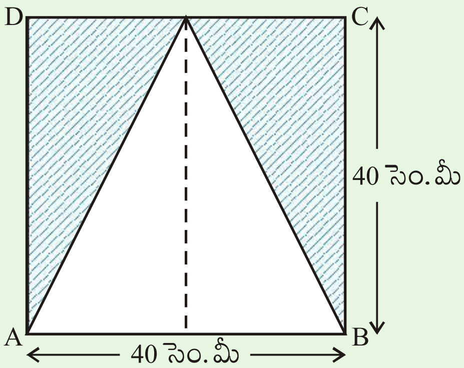
   గోపి అదే త్రిభుజ వైశాల్యం

   $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ (సెం.మీ)^2 అని చెప్పాడు.

   ఎవరు సరిగా చెప్పారు? ఎందుకు?

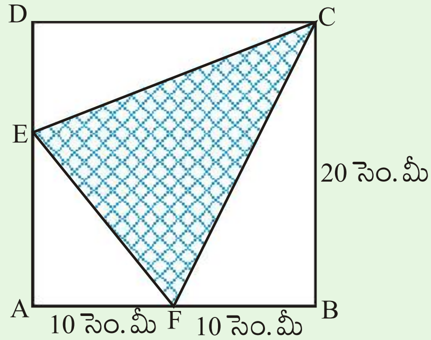


7. ప్రక్క పటములో షేడ్ చేయబడిన భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.

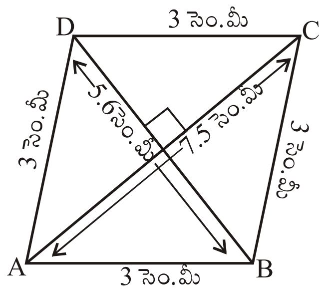


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 356 06-02-2021 14:54

8. ప్రక్క పటములో షేడ్ చేసిన భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.



ఉదాహరణ 4 : ప్రక్క పటములోని ABCD సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము కనుగొనండి.



సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 7.5 సెం.మీ॥

రెండవ కర్ణం పొడవు (d_2) = 5.6 సెం.మీ॥

సమచతుర్భుజము వైశాల్యము A = $\frac{1}{2} d_1 d_2$.

సమచతుర్భుజము ABCD వైశాల్యము A $= \frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6$

= 21 చదరపు సెం.మీ.

ఉదాహరణ 5 : సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము 480 చ.సెం.మీ. సమాంతర భుజాలలో ఒక భుజము కొలత 24 సెం.మీ॥ మరియు వాటి మధ్య లంబ దూరం 8 సెం.మీ. అయిన రెండవ సమాంతర భుజము కొలతను కనుగొనుము.

సాధన : సమాంతర భుజాల ఒక దాని పొడవు = 24 సెం.మీ॥

రెండవ సమాంతర భుజం పొడవు = x సెం.మీ॥ అనుకొందాం.

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = 480 చ.సెం.మీ॥

సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరము = 8 సెం.మీ॥

$\therefore$ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$

$$480 = \frac{1}{2} \times (24+x) \times 8$$

$$480 = 96 + 4x$$

$$\Rightarrow 480 - 96 = 4x$$

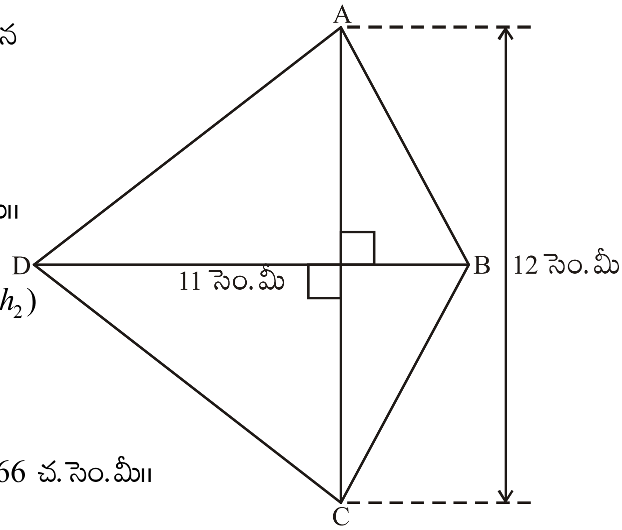
$$\Rightarrow 4x = 384$$

$$x = \frac{384}{4} = 96$$

$\therefore$ రెండవ సమాంతర భుజము పొడవు = 96 సెం.మీ॥.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 357
06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 6 : ప్రక్క పటములో చూపబడిన చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుక్కోండి.



సాధన : AC = $h_1 + h_2$ = 12 సెం.మీ

కర్ణము BD యొక్క పొడవు = 11 సెం.మీ॥

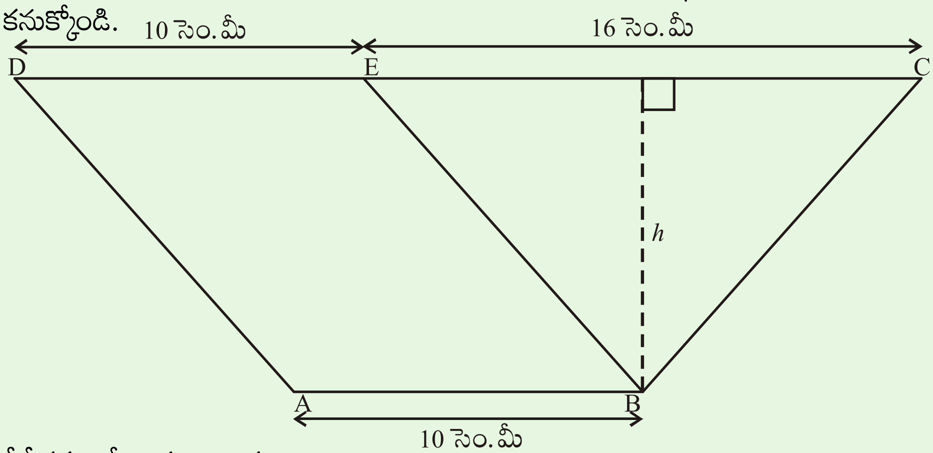
$\therefore$ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} \times 11 \times 12$

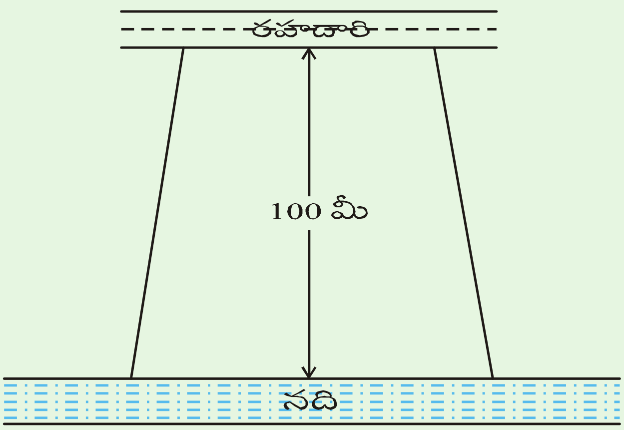
$= 11 \times 6 = 66$ చ.సెం.మీ॥

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. సమలంబ చతుర్భుజములోని సమాంతర భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి 4 : 1, వాటి మధ్యదూరము 10 సెం.మీ॥ సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 500 చ.సెం.మీ॥ అయిన సమాంతర భుజాల కొలతలును కనుగొనుము.
2. ప్రక్క పటములో సమాంతర చతుర్భుజము ABCD లో AB = DE = 10 సెం.మీ మరియు ΔBEC వైశాల్యము 72 చ.సెం.మీ. CE = 16 సెం.మీ అయినచో సమలంబ చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము కనుక్కోండి.

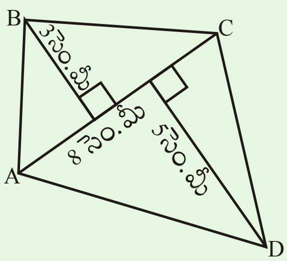


3. మోహన్ నదీతీరములో ఉన్న కొంత పొలమును కొనాలి అనుకొన్నాడు. ఆ పొలము యొక్క ఆకృతి ఈ ప్రక్క పటములో చూపిన విధముగా ఉన్నది. నదీ తీరము వైపు ఉన్న స్థలము పొడవు, రహదారి వైపు యున్న పొడవునకు రెట్టింపు ఉన్నది. మరియు రెండు వైపుల సమాంతరంగా ఉన్నవి. ఆస్థల వైశాల్యము 10,500 చదరపు మీటర్లు మరియు నది, రహదారి మధ్య దూరము 100 మీ॥ నదీ తీరము వెంబడి ఉన్న స్థలము యొక్క పొడవు కనుక్కోండి.

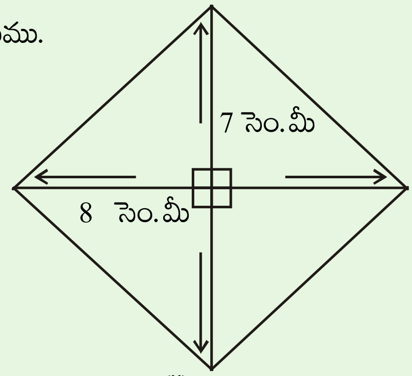


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 358
06-02-2021 14:54

4. కర్ణముల పొడవులు 10 సెం.మీ మరియు 8.2 సెం.మీ॥లుగా గల సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాలయములను కనుక్కోండి.
5. ABCD చతుర్భుజములో కర్ణము AC = 10 సెం.మీ॥ మరియు ACపై శీర్షములు B మరియు D నుండి గీచిన లంబములు 5 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ. పొడవు కల్గి ఉంటే ABCD చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.
6. సమలంబ చతుర్భుజములోని సమాంతర భుజముల పొడవుల నిష్పత్తి 5 : 3 వాటి మధ్య దూరము 16 సెం.మీ॥ సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము 960 చ.సెం.మీ అయిన సమాంతర భుజాల పొడవులను కనుగొనుము.
7. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము 16 చ.సెం.మీ॥ సమాంతర భుజాలలో ఒక దానిని పొడవు 5 సెం.మీ॥ వాటి సమాంతర భుజాల మధ్యదూరము 4 సెం.మీ॥ అయినచో మరో సమాంతర భుజము యొక్క పొడవు కనుగొనుము. గ్రాఫు కాగితముపై గీచి వైశాల్యమును లెక్కించుము?
8. ఒక భవనము యొక్క నేల 3000 టైల్స్‌చే కప్పబడినది. ప్రతి టైప్ సమ చతుర్భుజి ఆకృతిని కల్గి ఉండి కర్ణముల పొడవులు 45 సెం.మీ, 30 సెం.మీ.లను కల్గి ఉన్నది. ప్రతి టైల్ యొక్క వెల చదరపు మీటరుకు 20 రూపాయలు అయిన ఫ్లోరింగ్‌నకు అయ్యే మొత్తము ఖర్చు ఎంత ?
9. ఈ క్రింది చతుర్భుజ వైశాల్యములను కనుగొనుము.

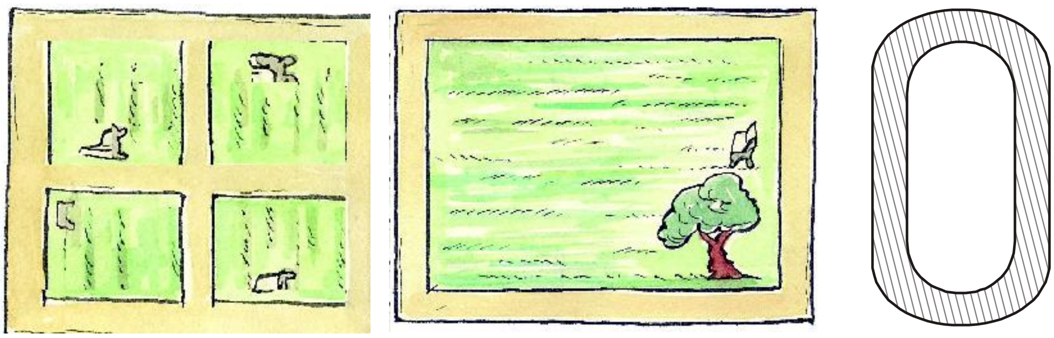


(i)



(ii)

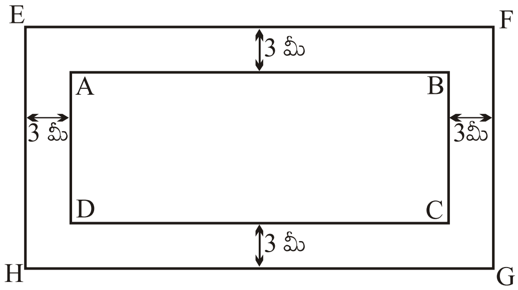
5.1.2 దీర్ఘచతురస్రాకార బాటలు



సాధారణంగా మనం తోటలు, పార్కులు, ఆటస్థలములలో నడక కోసము బాటలను ఏర్పరచడము మనము గమనించి ఉంటాం. అయితే మన ఉపయోగం కోసము నిర్మించే ఈ బాటల కోసము అయ్యే ఖర్చు లెక్కించడానికి వాటి వైశాల్యములు ఎలా లెక్కిస్తారో తెలుసుకొందాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 359
06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 1 : 60 మీ పొడవు, 40 మీ॥ వెడల్పు గల ఒక ప్లాటు చుట్టూ 3మీ. వెడల్పు గల బాట నిర్మించారు. అయిన ఆ బాట వైశాల్యమును కనుగొనుము.



సాధన : ప్రక్క పటములో ABCD దీర్ఘచతురస్రాకార ప్లాటును సూచిస్తుంది. దీని చుట్టూ 3మీటర్ల బాటను నిర్మించడమైనది. ఈ బాట వైశాల్యమును కనుగొన వలెనన్న

EFGH బయట దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యముల నుండి ABCD లోపలి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యములను తీసివేయాలి.

లోపలి దీర్ఘచతురస్రము ABCD యొక్క పొడవు = 60 మీ॥

లోపలి దీర్ఘచతురస్రం ABCD యొక్క వెడల్పు = 40 మీ॥

లోపలి దీర్ఘచతురస్రం ABCD యొక్క వెడల్పు = (40 × 60)మీ^{2}.

= 2400 మీ^{2}.

బాట వెడల్పు = 3మీ

లోపలి దీర్ఘ చతురస్రము EFGH పొడవు = 60మీ + (3 + 3)మీ = 66మీ

వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వెడల్పు = 40మీ + (3 + 3)మీ = 46మీ

వెలుపలి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము = 66 × 46 = 3036 మీ^{2}.

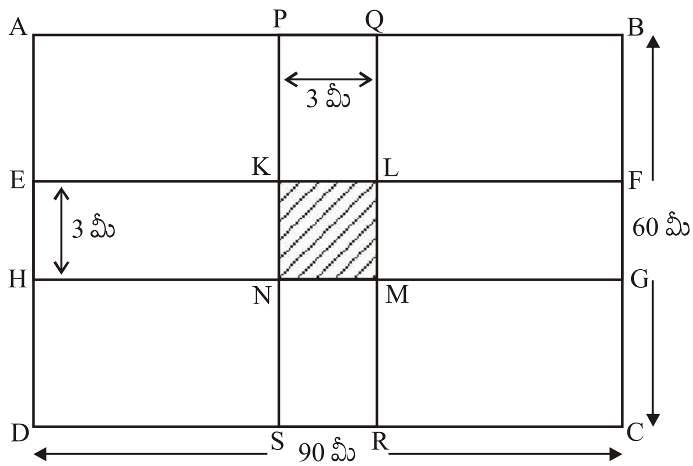
కాబట్టి బాట వైశాల్యము = వెలుపలి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము – లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము

= 3036 – 2400

= 636 మీ^{2}.

ఉదాహరణ 2 : ప్రక్క పటములో చూపిన విధముగా దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలములో రోడ్డు నిర్మించబడింది. అయిన (i) రోడ్డు వైశాల్యము (ii) మీటరుకు 110 రూపాయల చొప్పున రోడ్డు నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చును కనుక్కోండి.

సాధన : సమస్యలో ఇచ్చిన అంశాలు



(i) రోడ్డు వైశాల్యము PQRS మరియు EFGH దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానము. అయితే ఈ పటమును గమనించినట్లయితే KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రెండుసార్లు తీసుకోబడుతున్నట్లుగా తెలుస్తుంది. అందువల్ల చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రెండు వైశాల్యము (PQRS, EFGH)ల నుండి ఒకసారి తీసివేయాలి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 360 06-02-2021 14:54

PQ = 3 మీ॥ PS = 60 మీ॥

EH = 3 మీ॥ EF = 90 మీ॥

KL = 3 మీ॥ KN = 3మీ॥

రోడ్డు వైశాల్యము = దీర్ఘచతురస్ర PQRS వైశాల్యం + దీర్ఘ చతురస్ర EFGH వైశాల్యం – చతురస్రం KLMN వైశాల్యం.

$= (PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN)$

$= (60 \times 3) + (90 \times 3) - 3 \times 3$

$= (180 + 270 - 9)$ మీ^{2}.

$= 441$మీ^{2}.

(ii) 1 మీ^{2} నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 110 మీ^{2}.

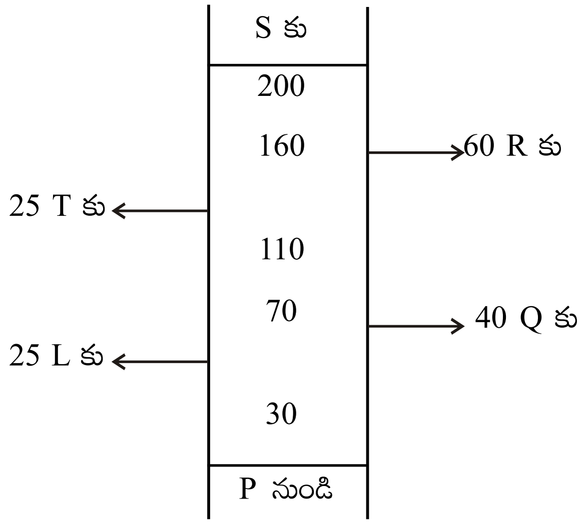
441 మీ^{2} నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చు = 110×441 = ₹ 48,510/-

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. 45 మీ॥ భుజము గల చతురస్రాకార మైదానము చుట్టూ 2.5 మీ॥ వెడల్పు గల బాట కలదు. బాట వైశాల్యములను కనుగొనండి.
2. ఒక పాఠశాల భవనములో 18 మీ॥ పొడవు, 12.5 మీ॥ వెడల్పు గల హాలు కలదు. హాలు నేలపై గోడల నుంచి 50 సెం.మీ॥ వెడల్పున స్థలం వదిలి హాలు మధ్యలో ఒక కార్పెట్ పరచబడింది. కార్పెట్ వైశాల్యమును, కార్పెట్‌కు గోడల అంచుకు మధ్యగల ఖాళీ ప్రదేశము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.

5.1.3 పొలము కొలతలతో వైశాల్యములు కనుగొనుట

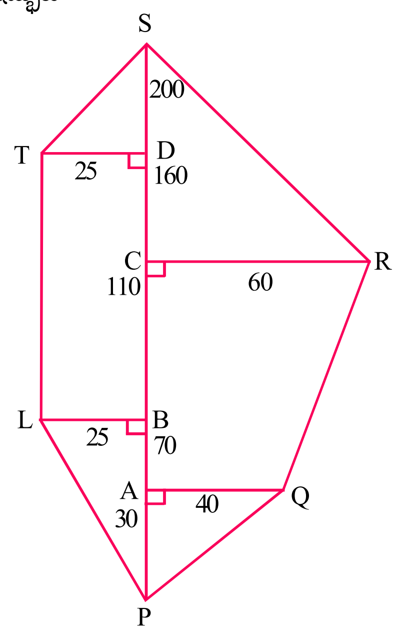
ఒక సర్వేయరు తన పొలము చిట్టా (field book) లో ఒక పొలమును గురించి కొలతలు ఈ క్రింది విధముగా నమోదు చేసుకొన్నాడు. ఆ పొలము వైశాల్యము కనుగొనండి.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 361 06-02-2021 14:54

పై దత్తాంశము ఈ క్రింది సమాచారమును తెలియచేస్తుంది.

1. పొలము P, Q, R, S, T శీర్షాలుగా గల షడ్భుజి
2. PS కర్ణముగా తీసుకోబడింది.
3. PS కు ఒకవైపు శీర్షములు Q, R లు రెండవ వైపున T, L లు శీర్షములగా ఉన్నవి.
4. Q నుండి A కు 40 మీ॥ లంబము గీయబడింది. ఇదేవిధంగా R, T, L ల నుండి మిగిలిన లంబాలు గీయబడ్డాయి.
5. పొలము యొక్క నిజమైన కొలతలు క్రింది నుండి పైవరకు పొలం చిట్టాలో నమోదు చేయబడి ఉంటాయి.
6. పొలం రెండు త్రిభుజాలు, రెండు సమలంబ చతుర్భుజములుగా విభజింప బడినది.



AC = PC – PA

= 110 – 30 = 80మీ॥

CS = PS – PC

= 200 – 110 = 90 మీ॥

DS = PS – PD

= 200 – 160 = 40మీ॥

BD = PD – PB

= 160 – 70 = 90 మీ॥

ΔAPQ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ మీ^{2}.

AQRS యొక్క ట్రేపిజియం $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times \text{AC}(\text{AQ} + \text{CR})$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 362
06-02-2021 14:54

$$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$$

$$= 80 \times 50$$

$= 4000$ చ.మీ.

ΔCRS వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times CR \times CS$

$= \frac{1}{2} \times 60 \times 90$

$= 2700$ చ.మీ.

సమలంబ చతుర్భుజము PLTS వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\ (TL+SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25\ (90+200)$ $\quad\quad (\because TL = BD = 90)$

$= 3625$ మీ^{2}.

పొలము వైశాల్యము $= 600 + 400 + 2700 + 3625$

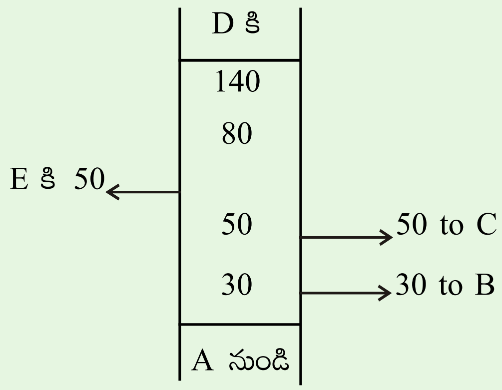
$= 10,925$ చదరపు మీటర్లు.

గమనిక : PLTS ను దీర్ఘచతురస్రము ΔPLT, $\angle BTD$, ΔTDS గా విభజించే వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు.

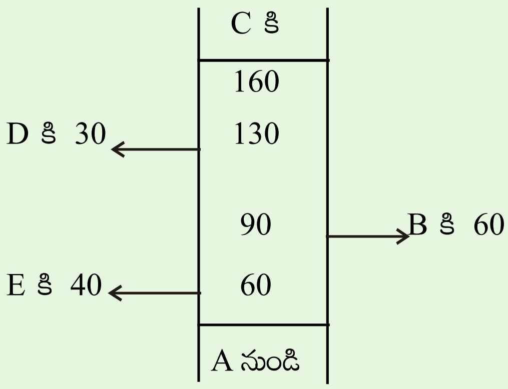
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక సర్వేయరు ఫీల్డు బుక్‌లో నమోదు చేయబడిన ఈ దిగువ వివరాల సహాయముతో పొలము వైశాల్యము కనుగొనండి.

(i)

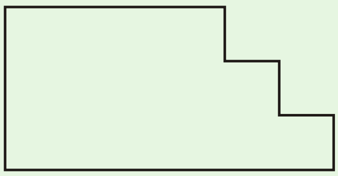


(ii)

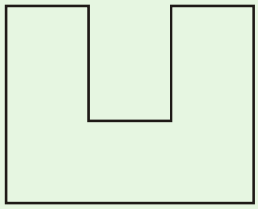


TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 363 06-02-2021 14:54

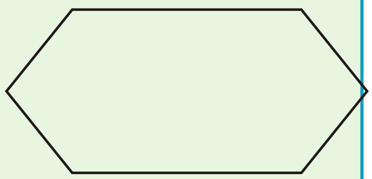
2. సూచించిన విధముగా ఇచ్చిన ఆకృతులను విభజించండి.



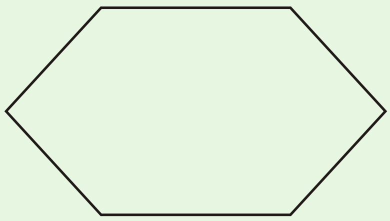
(i) మూడు దీర్ఘచతురస్రాలు



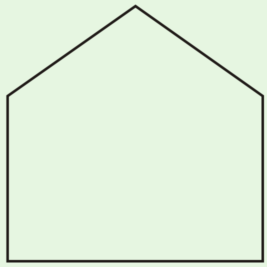
(ii) మూడు దీర్ఘచతురస్రాలు



(iii) రెండు సమలంబ చతుర్భుజాలు

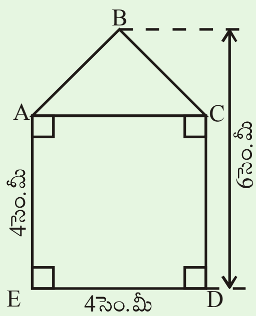


(iv) రెండు త్రిభుజాలు మరియు దీర్ఘచతురస్రం

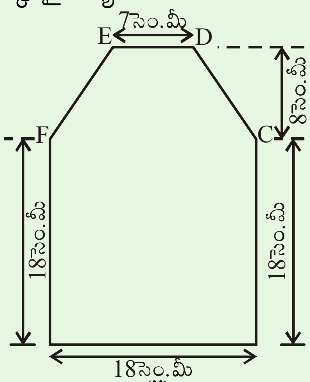


(v) మూడు త్రిభుజాలుగా

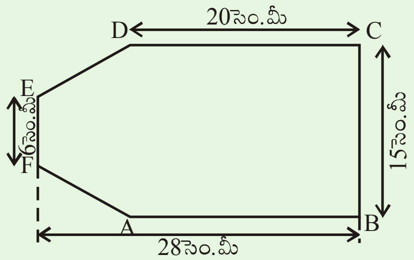
3. ఈ క్రింది పటముల యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనుము.



(i)

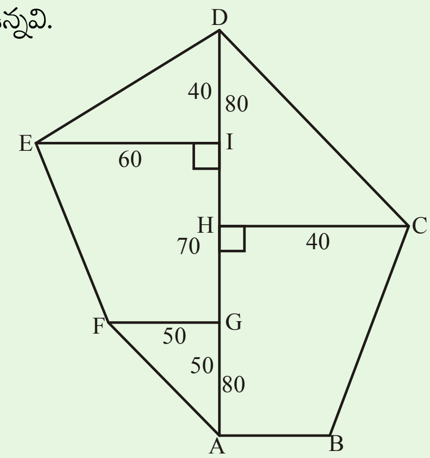


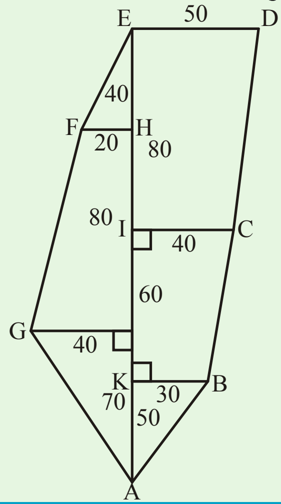
(ii)



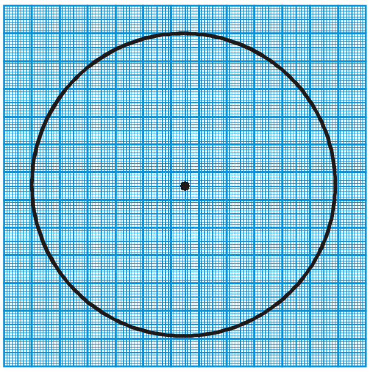
(iii)

4. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన పొలముల యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనుము. కొలతలు అన్నియూ మీటరులలో ఉన్నవి.



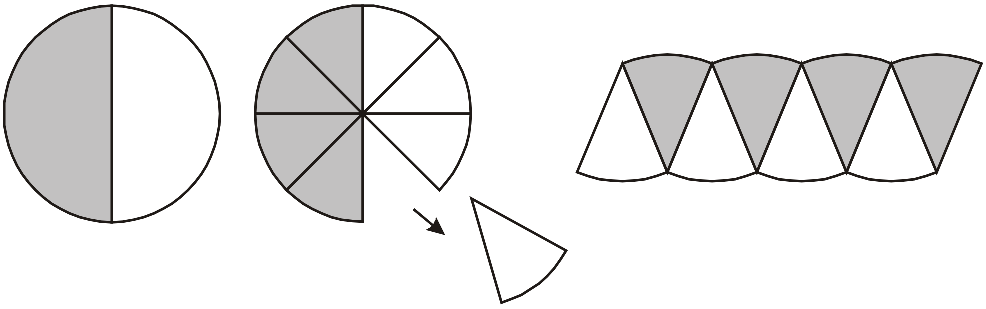


5.1.4 వృత్త వైశాల్యము

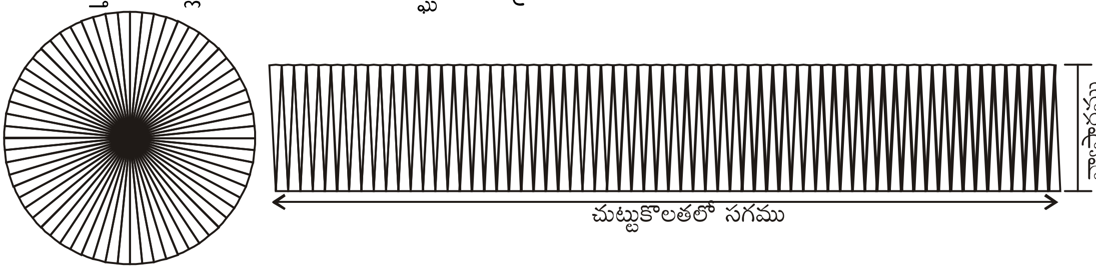


పద్ధతి 1 : కొన్ని సందర్భాలలో వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనవలసి వస్తుంది. ముందుగా మనము వృత్త వైశాల్యమును, గ్రాఫు పేరు ద్వారా గణిద్దాం.

4 సెం.మీ॥ వ్యాసార్థముగా గల వృత్తమును గ్రాఫు కాగితముపై గీద్దాం. వృత్తముచే ఆవరించబడిన చతురస్రములను గణించి వృత్త వైశాల్యమును గణిద్దాం. వృత్త అంచులు సర్వరేఖలు కావు కనుక, ఈ పద్ధతిలో గణించిన వృత్త వైశాల్యము ఖచ్చితమైనదిగా కాకుండా సుమారుగా ఉన్న విలువను ఇస్తుంది. వృత్త వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు మరో పద్ధతి ఉన్నది.

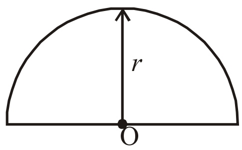


పద్ధతి 2 : పటము(i)లో చూపిన విధముగా ఒక వృత్తమును గీచి, దానిలో సగభాగమును షేడ్ చేయుము. వృత్తమును పటము (ii) లో చూపిన విధముగా 8 సమాన భాగములుగా మడిచి మడిచిన విధముగానే కత్తిరించవలెను. తరువాత పటము (iii) లో చూపిన విధముగా 8 భాగములను అమర్చవలెను. పటము సుమారుగా సమాంతర చతుర్భుజము వలే ఉంటుంది. వృత్తమును 64 సమాన భాగములుగా పటములో చూపిన విధముగా మడిచి కత్తిరించినట్లయితే సుమారుగా దీర్ఘ చతురస్రమువలే ఉంటుంది.



దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు ఎంత? దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు, వృత్త వ్యాసార్థము (r)కు సమానముగా ఉంటుంది.

వృత్తము 64 సెక్టారులుగా విభజించినట్లయితే ప్రతి వైపు 32 సెక్టర్లు ఉంటాయి. అనగా దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు 32 సెక్టర్లు యొక్క పొడవుకు సమానము. ఇది వృత్త పరిధిలో సగమునకు సమానము.



వృత్త వైశాల్యము = ఏర్పడిన దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము = $l \times b$

= (వృత్త పరిధిలో సగము) × వ్యాసార్థము

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2.$

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$.

- వృత్త పరిధి = '$2\pi r$'
- అర్ధ వృత్త వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times \pi r^2$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 365

06-02-2021 14:54

- అర్ధ వృత్త పరిధి $= \pi r + 2r = \frac{22}{7}r + 2r$

$= \frac{36}{7}r$ ($\because$ r is radius).

ఉదాహరణ : వృత్త పరిధి 22 సెం.మీ. అయిన వృత్త వైశాల్యము ఎంత? మరియు దాని అర్ధ వృత్త వైశాల్యము ఎంత?

సాధన : వృత్తవ్యాసార్ధము $= r$ సెం.మీ అనుకొందాం.

వృత్త పరిధి $= 2\pi r$

$2\pi r = 22$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$

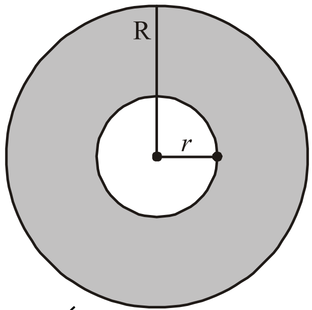
$r = 22 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22} = \frac{7}{2}$ సెం.మీ లేదా 3.5 సెం.మీ.

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్ధము = 3.5 సెం.మీ.

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2 = \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right) \text{cm}^2 = 38.5$ చ.సెం.మీ.

అర్ధవృత్త వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25$ చ.సెం.మీ.

5.1.5 బాట లేదా కంకణాకార స్థల వైశాల్యము



ఒక పార్కులో పటములో చూపిన విధముగా వృత్తాకార బాట వేయబడినది. వృత్తాకార బాటలో బాహ్య, అంతర వృత్తాలు ఏక కేంద్ర వృత్తాలు అయిన ఆ వృత్తాకార బాట వైశాల్యము కనుగొందాం. కంకణాకార స్థల వైశాల్యము, బాహ్య వృత్త, అంతర వృత్త వైశాల్యములకు భేదమునకు సమానము.

బాహ్య వృత్త వ్యాసార్ధము R, మరియు అంతర వృత్త వ్యాసార్ధము 'r' అయిన

కంకణాకార స్థల వైశాల్యము = బాహ్యవృత్త వైశాల్యము − అంతర వృత్త వైశాల్యము

$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

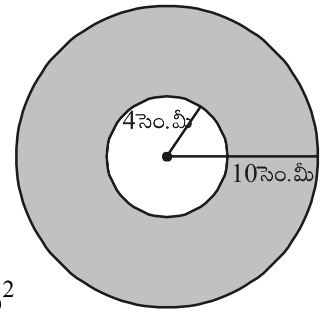
> అందుకే కంకణాకార స్థల వైశాల్యము $= \pi(R^2 - r^2)$ or $\pi(R + r)(R - r)$

ఉదాహరణ : ప్రక్క పటమును పరిశీలించండి. ఇది ఏకకేంద్రము గల రెండు వృత్తములను సూచిస్తుంది. బాహ్యవృత్త వ్యాసార్ధము 10 సెం.మీ, అంతర వృత్త వ్యాసార్ధము 4 సెం.మీ॥.

అయిన (i) పెద్ద వృత్త వైశాల్యము ఎంత?

(ii) చిన్న వృత్త వైశాల్యము ఎంత? ($\pi = 3.14$ తీసుకోండి)

(iii) షేడ్ చేయబడిన భాగము వైశాల్యము ఎంత?



సాధన : (i) బాహ్యవృత్త వ్యాసార్ధము = 10 సెం.మీ॥

అందుకే బాహ్యవృత్త వైశాల్యము $= \pi R^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ సెం.మీ^{2}

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 366
06-02-2021 14:54

(ii) అంతర వృత్త వ్యాసార్ధము $= 4cm$

అందులో అంతర వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 4^2$

$= 3.14 \times 16$

$= 50.24\ cm^2$

(iii) షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యము = బాహ్యవృత్త వైశాల్యం − అంతర వృత్త వైశాల్యం

$= 314 - 50.24$

$= 263.76$ చ.సెం.మీ.

(లేదా)

$= \pi(R + r)(R - r)$

$= \frac{22}{7}(10+4)(10-4)$

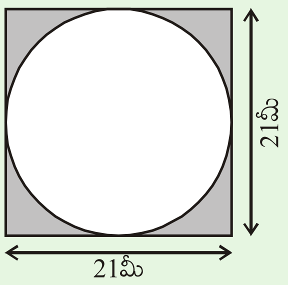
$= 3.14\ (14)\ (6)$

$= 263.76$ చ.సెం.మీ.

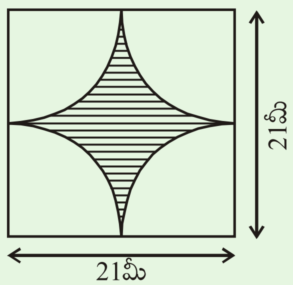
మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

ఈ క్రింద ఇచ్చిన పటములలో షేడ్ చేయబడిన భాగము వైశాల్యము కనుగొనండి.

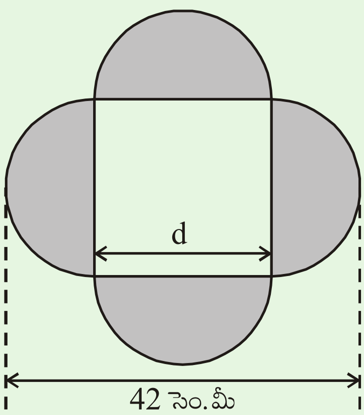
(i)



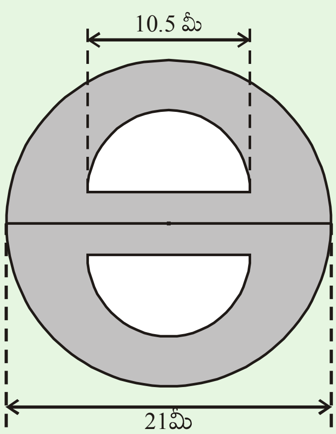
(ii)



(iii)



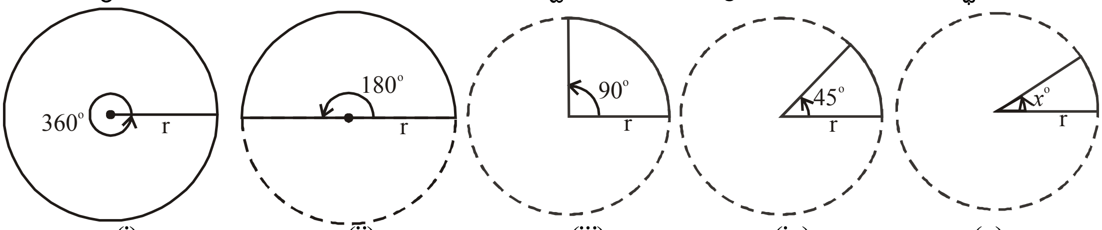
(iv)



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 367 06-02-2021 14:54

చాపము పొడవు

ఈ క్రింది వృత్తములను పరిశీలించి, చాపము పొడవు, సెక్టరు కోణాల మధ్యగల సంబంధమును అర్థం చేసుకోండి.



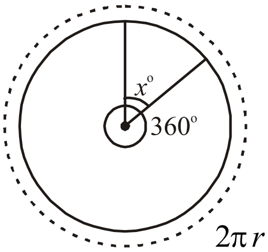
(i) (ii) (iii) (iv) (v)

పటం	కోణం	చాపం పొడవు	చాపము పొడవు మరియు సెక్టరు కోణము మధ్యగల సంబంధం
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{90^0}{360} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	$\frac{45^0}{360^0} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{4}$
(v)	x^0	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$

పట్టిక పరిశీలించిన తరువాత సెక్టరు చాపము పొడవు $l = \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$ ఇందులో r – వృత్త వ్యాసార్థము మరియు x – అనేది సెక్టరు చాపము కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము.

సెక్టరు చాపము పొడవు l అయిన

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0} \quad \text{Thus} \quad \boxed{l = \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r}$$



5.1.6 సెక్టరు వైశాల్యము

చాపము, రెండు వ్యాసార్థములతో ఆవరించబడిన వృత్తములోని భాగమును సెక్టరు అంటారు.

r వ్యాసార్థము కల్గిన వృత్త వైశాల్యము = πr^2.

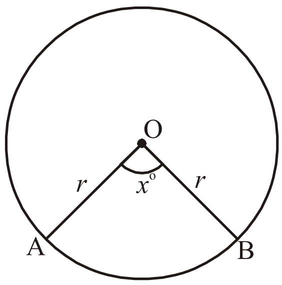
సెక్టరు చాపము వృత్తకేంద్రము వద్ద చేయు కోణము = x^0.

సెక్టరు కోణము, వైశాల్యము అనులోమానుపాతములో ఉంటాయి.

సెక్టరు వైశాల్యము = వృత్త వైశాల్యము = $x^0 : 360^0$.

$\therefore$ సెక్టరు OAB వైశాల్యము = $\frac{x^0}{360^0} \times$ వృత్త వైశాల్యము

$$\boxed{A = \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2}$$



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 368 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ : 7 సెం.మీ వృత్త వ్యాసార్ధము, 180^0 సెక్టరు కోణము గల సెక్టరు యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన : వ్యాసార్ధము $(r) = 7$ సెం.మీ

సెక్టరు కోణము $(x^0) = 18^0$

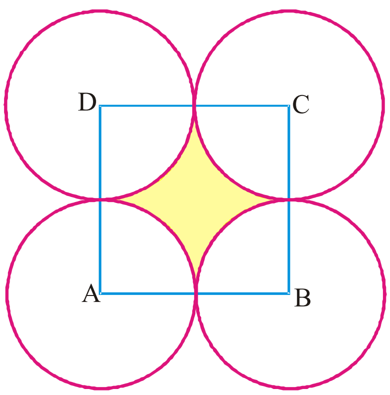
$\therefore$ సెక్టరు వైశాల్యము (A) $= \dfrac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

$$= \frac{18^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7^2$$

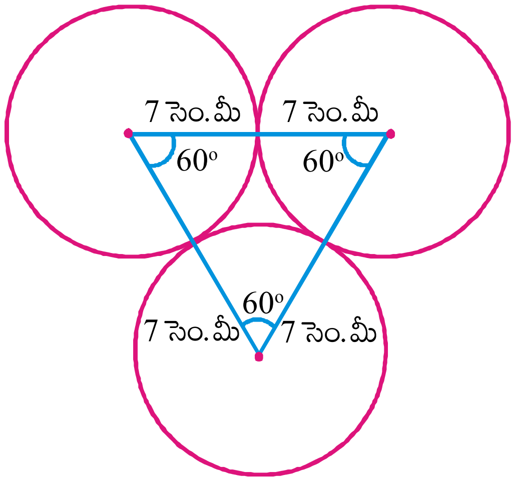
$$= \frac{18 \times 22 \times 7}{360} = 7.7 \text{ మీ}^2.$$

అభ్యాసము

1. ఈ క్రింది వృత్తముల వృత్తపరిధిని కనుగొనుము. వాటి వ్యాసార్ధములు వరుసగా
   (i) 35 సెం.మీ (ii) 4.2 సెం.మీ. (iii) 15.4 సెం.మీ.
2. ఒక వృత్తము యొక్క వృత్తపరిధి 264 సెం.మీ అయినచో దాని వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము. $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right.$ గా కనుగొనుము.$\left.\right)$
3. రెండు వృత్తముల యొక్క వృత్త వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తి 3 : 4 అయినచో వాటి వృత్త పరిధుల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.
4. ఒక రోడ్డు రోలరు 2200 మీటర్లు దూరము ప్రయాణించడానికి రోడ్డు రోలరు చక్రము 200 భ్రమణాలు చేస్తే దాని వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.
5. 25 సెం.మీ వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకారములో ఉన్న తీగను నిటారుగా చేసి ఒక చతురస్రముగా మలిస్తే ఆ చతురస్రము యొక్క భుజము పొడవు ఎంత?
6. ఒక వృత్తము యొక్క పరిధి 264 సెం.మీ అయినచో దాని వ్యాసార్ధము విలువ ఎంత?
7. ఒక చతురస్రాకార పొలము చుట్టూ 2.5 మీ. వెడల్పు కల బాట ఉన్నది. అయినచో ఆ బాట వైశాల్యము ఎంత? చతురస్రాకార పొలము యొక్క భుజము పొడవు 45 మీ॥.
8. పటములో చూపిన విధంగా A, B, C మరియు D కేంద్రము గా గల సమాన వ్యాసార్ధము కల్గిన నోటు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించుకొంటున్నాయి. ABCD చతురస్రము యొక్క భుజము పొడవు 7 సెం.మీ అయిన షేడ్ చేయబడిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



9. ఒక సమ బాహు త్రిభుజ వైశాల్యము $49\sqrt{3}$ చ.సెం.మీ. వృత్త కేంద్రమును శీర్షములుగా మూడు వృత్తాలు బాహ్యముగా పటములో చూపిన విధముగా స్పృశించు కొంటున్నాయి. అయినచో వృత్తము కల్గి ఉండని ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము.



ముఖ్యాంశాలు

- 'r' వ్యాసార్థము కల్గిన వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$.
- 'r' వ్యాసార్థము కల్గిన వృత్త పరిధి $= 2\pi r$.
- 'r' వ్యాసార్థము కల్గిన అర్ధవృత్తము యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\pi r^2$
- 'r' వ్యాసార్థము కల్గిన అర్ధవృత్తము యొక్క పరిధి

  $= \pi r + 2r$

  $= \frac{36}{7} r$
- కంకణాకార స్థల వైశాల్యము $= \pi (R^2 - r^2)$

  లేదా

  $= \pi(R + r)(R - r)$

  ఇందులో R - బాహ్య వృత్త వ్యాసార్థం

  r - అంతర వృత్త వ్యాసార్థం
- సెక్టరు చాపము పొడవు $(l) = \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$
- 'r' వ్యాసార్థము కల్గిన సెక్టరు వైశాల్యము $A = \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$
- 'l' సెక్టరు చాపము పొడవు, 'r' వ్యాసార్థము కల్గిన సెక్టరు వైశాల్యం $A = \frac{lr}{2}$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 370 06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

5.2 ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములు

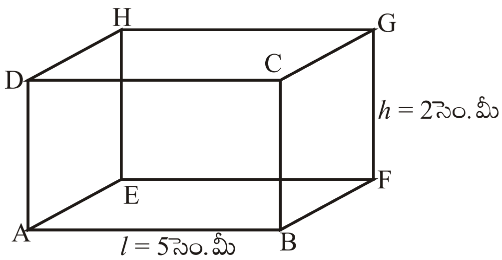
5.2.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశ పఠనము పూర్తి అయిన తరువాత

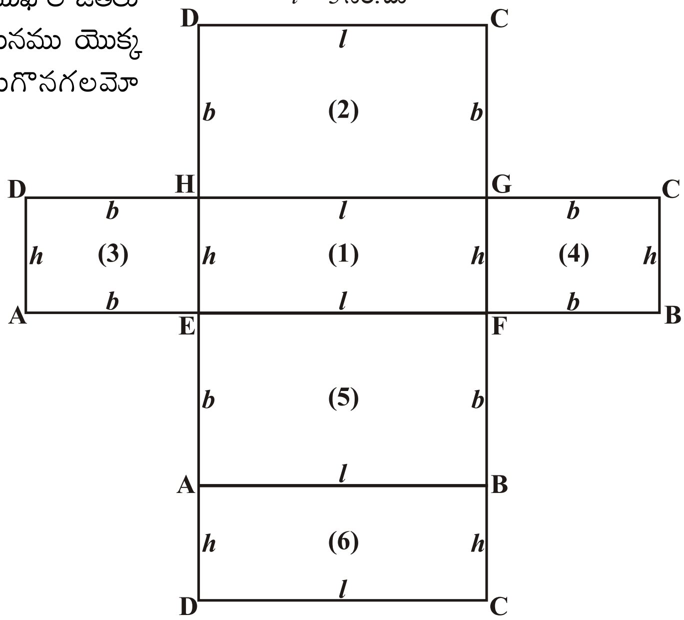
- ఉపరితల వైశాల్యములు, సంపూర్ణతల వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములకు సంబంధించిన సమస్యలును సాధించగలుగుతారు.
- వివిధ ఘనాకృతుల ఆకృతులను గుర్తించి వాటి యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములు, సంపూర్ణతల వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణములను కనుగొన గల్గుతారు.
- సమతల పటమును, ఘనాకృతుల యొక్క వివిధ సూత్రములు అందులోని పదముల యొక్క వివరణను అర్థము చేసుకోగల్గుతారు.
- వివిధ ఘనాకృతుల పటములను గీయగల్గుతారు.

5.2.1 పరిచయం

దీర్ఘ ఘనము ఉపరితల వైశాల్యము



ప్రక్క పటము ఇవ్వబడిన దీర్ఘఘనమును పరిశీలించండి. అది ఎన్ని ముఖాలను కల్గి ఉంది? ఎన్ని మూలాలను కల్గి ఉంది? ఎన్ని అంచులను కలిగి ఉంది? ముఖాలను చూచి ఏవిధముగా కనబడుతున్నాయో చెప్పండి? ఏ ముఖాల జతలు ఒకే పరిమాణమును కలిగి ఉన్నాయి? దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము ఏవిధముగా కనుగొనగలవో చెప్పగలరా?



ఇప్పుడు మనము దీర్ఘఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొందాం. ఈ ప్రక్క పటములో ఉన్న దీర్ఘఘనము యొక్క పొడవు (l) = 5 సెం.మీ, వెడల్పు (b) = 3సెం.మీ, ఎత్తు (h) = 2 సెం.మీ గా ఇవ్వబడినది. మనము ఇచ్చిన దీర్ఘఘనమును పటములో చూపిన విధముగా CD, ADHE మరియు BCGF వెంబడి కత్తిరించి తెరచి చూస్తే కింది పటములో చూపిన విధముగా ఉంటుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 371 06-02-2021 14:54

ఈ పటము దీర్ఘఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఆరు దీర్ఘచతురస్రములు లేదా సర్వసమానమైన మూడు జతల దీర్ఘచతురస్రముల వైశాల్యముతో ఏర్పడుతుందన్న విషయమును మనము గ్రహించవచ్చు. అందుచే దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము కనుగొనేందుకు ఆరు దీర్ఘ చతురస్రాల ముఖాల వైశాల్కయములను కనుగొని దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొందాం.

దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం

= వైశాల్యం (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)

$= lh + lb + bh + bh + lb + bh$

$= 2lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + lh + bh)$

(1), (3) (4) (6) అనేవి దీర్ఘఘనం యొక్క ప్రక్క తలాలు

దీర్ఘ ఘన పక్కతల వైశాల్యము

= (1)వై॥ + (3)వై॥ + (4)వై॥ + (6)వై॥

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2 \ (l + b)$

ఇచ్చిన పటములో $l = 5,\ b = 3,\ h = 3$

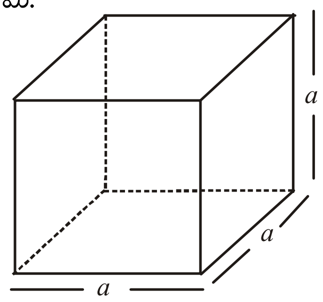
సంపూర్ణ తల వైశాల్యము = $2(5\times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 2)$ చ.సెం.మీ.

$= 2 \times 31$ చ.సెం.మీ.

$= 62$ చ.సెం.మీ.

ఉపరితల వైశాల్యము $= 2 \times 3 \ (5 + 3)$

$= 6 \times 8 = 48$ (సెం.మీ)^2.



సమ ఘనమునకు $l = b = h = a$ (అనుకొందాం)

∴ సమ ఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(a^2 + a^2 + a^2)$

$= 2(3a^2)$

$= 6a^2$ చ.యూనిట్లు.

సమ ఘన ఉపరితల వైశాల్యము $= 2h \ (l + b)$

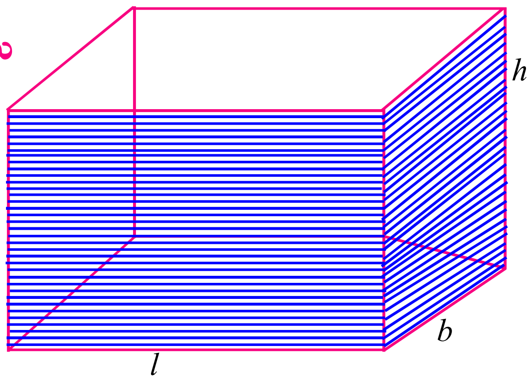
$= 2a(a + a)$

$= 2a \times 2a$

$= 4a^2$ చ.యూనిట్లు.

5.2.2 దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము

ఇది ఒక దీర్ఘఘనాకృతి. ఇప్పుడు దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొందాం. దీని యొక్క పొడవు దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవునకు, వెడల్పు దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క వెడల్పునకు సమానముగా ఉంటుంది.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 372 06-02-2021 14:54

దీర్ఘఘనము ఆవరించిన అంతరాళము = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము × ఎత్తు

దీర్ఘ ఘనము ఘనపరిమాణము = $lb \times h$

$= lbh$

> దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణము = lbh
>
> ఇక్కడ l, b, h లు దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు

సమఘనములో అన్ని అంచులు సమానమైన పొడవును కల్గి ఉంటాయి. కనుక సమఘనము యొక్క ఒక అంచు (భుజము)'a' అయితే

సమ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము = a^3 ఘనపు యూనిట్లు.

దీర్ఘ ఘనమును, సమ ఘనమును క్రమ పట్టకములుగా పిలువవచ్చు.

ఉదాహరణ 1 ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము 1350 చ.సెం.మీ. అయినచో దాని యొక్క ఘనపరిమాణము కనుక్కోండి.

సాధన : ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = $6a^2$.

$$\Rightarrow 6a^2 = 1350$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1350}{6}$$

$$\Rightarrow a^2 = 225$$

$$\Rightarrow a^2 = 15^2$$

$$\Rightarrow a = 15$$

ఘనము యొక్క భుజము = 15 సెం.మీ

15 సెం.మీ॥ భుజము కల్గిన ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము

$= a^3 = (15)^3 = 3375$ (సెం.మీ)^3.

ఉదాహరణ 2 : $l = 8$ సెం.మీ, $b = 6$ సెం.మీ, $h = 5$ సెం.మీ. కొలతలుగా గల దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, సంపూర్ణ తల వైశాల్యములను కనుగొనుము.

సాధన : దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము $= 2h\ (l + b)$

$= 2 \times 5\ (8 + 6)$

$= 10(14)$

$= 140$ చ.సెం.మీ

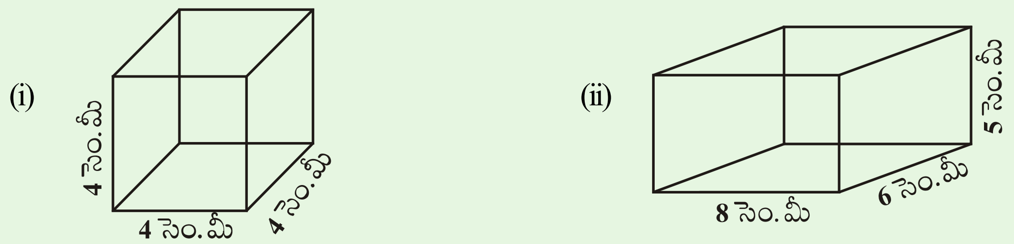
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 373 06-02-2021 14:54

దీర్ఘ ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము = 2(lb + bh + lh)
= 2(8 × 6 + 6 × 5 + 8×5)
= 2(48 + 30 + 40)
= 2(118)
= 236 సెం.మీ^{2}.

దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము = lbh
= 8 × 6 × 5
= 240 ఘనపు సెం.మీ॥

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు విలువలు l = 12 సెం.మీ, b = 10 సెం.మీ మరియు h = 8 సెం.మీ. అయిన దీర్ఘ ఘన పరిమాణమును కనుగొనండి.
2. భుజము 10 సెం.మీ గా గల సమ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.
3. ఒక ఘనము యొక్క ప్రతిభుజము కొలతను 50% పెంచితే దాని ఉపరితల వైశాల్యములో పెరుగుదల శాతము ఎంత?
4. 1000 ఘనపు సెం.మీ ఘనపరిమాణం కలిగి ఘనము యొక్క భుజము కొలతను కనుగొనండి.
5. ఈ క్రింది దీర్ఘ ఘనముల యొక్క ప్రక్క తల వైశాల్యములు మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనండి.

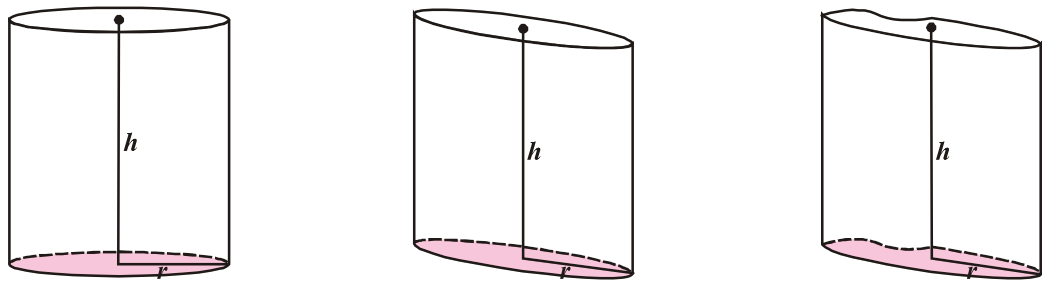


6. ఒక పెట్టె యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము క్రింది సందర్భాలలో ఏవిధముగా మారుతుంది?
   (i) ప్రతీ కొలత రెట్టింపు చేసినప్పుడు
   (ii) ప్రతీ కొలతను మూడు రెట్లు చేసినప్పుడు మాటలలో వ్యక్తపరచండి?
7. పొడవు 12 మీ॥, వెడల్పు 10 మీ॥ మరియు 7.5 మీటర్లు ఎత్తు కలిగిన గది యొక్క నాల్గు గోడల వైశాల్యమును కనుగొనండి? (ద్వారములు లేదా కిటికీలు లేని గదిగా ఊహించండి).
8. ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము 1200 ఘనపు సెంటీమీటర్లు. దాని యొక్క పొడవు 15 సెం.మీ, వెడల్పు 10 సెం.మీ॥ అయిన ఎత్తును కనుగొనుము.
9. 3 సెం.మీ॥, 4 సెం.మీ॥ 5 సెం.మీ॥ కొలతలుగా కల్గిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను కనుగొనండి.
10. ఒక ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము 1728 ఘనపు సెంటీమీటర్లు అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 374 06-02-2021 14:54

5.2.3 క్రమ వృత్తాకార స్థూపము

ఈ క్రింది స్థూపములను గమనించండి.



(i)　　(ii)　　(iii)

(i) మూడు పటములలో మీరు గమనించిన సారూప్యతలు ఏవి ?

(ii) మూడు పటముల మధ్యలో నున్న భేదములు ఏవి ?

(iii) ఏ పటములో ఎత్తు, భూమికి లంబముగా ఉంది?

ప్రతీ స్థూపము ఒక వక్రతలం మరియు రెండు సర్వసమాన వృత్తాలను చివరలుగా కల్గియుంటుంది. వీటిని క్లుప్తంగా స్థూపములందురు. వీటి వృత్తాకార చివరల మధ్యబిందువులను కలిపే రేఖ భూమికి లంబముగా ఉంటే ఆ స్థూపాన్ని వృత్తాకార స్థూపం లేక 'క్రమ స్థూపం' అంటాం.

పై పటములో ఏది క్రమస్థూపం, ఏఏ క్రమ స్థూపములు కావు? గుర్తించి కారణములు తెలుపండి.

ఇచ్చుట స్థూపమును, తయారుచేసే కృత్యమును చేద్దాం.

స్థూపము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము :

ఒక కార్డ్ బోర్డును ఉపయోగించి క్రమ వృత్తాకార స్థూపమును తయారు చేయండి. వక్రతలమును నిలువుగా కత్తిరించి విడవండి. స్థూపము దీర్ఘచతురస్రము గా మారుతుంది. స్థూపము యొక్క ఎత్తు, దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క వెడల్పుగాను, స్థూపము భూ పరిధి, దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు గాను మార్పు చెందుట మనము గమనించవచ్చును. స్థూపము, ఏ ఆకృతిలో మారింది?

మీరు పటము దీర్ఘచతురస్రాకారముగా ఉండుట గమనించి ఉంటారు కదా! దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యము, స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యమునకు సమానం. దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు స్థూపము యొక్క ఎత్తుగాను, పొడవు స్థూపము యొక్క భూ పరిదికి సమానముగా ఉంటుంది.

స్థూపపు ఎత్తు = దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వెడల్పు ($h = b$)

స్థూపపు భూపరిధి 'r' = దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు ($2\pi r = l$)

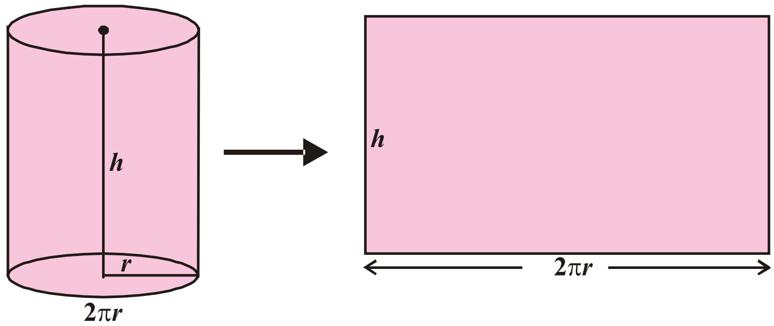
స్థూపము యొక్క పక్కతలవైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం

= పొడవు × వెడల్పు

= $2\ \pi r \times h$

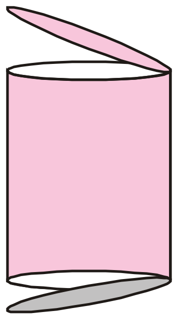
= $2\pi rh$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 375　06-02-2021 14:54



అందుచే స్థూపము పక్కతలవైశాల్యం = $2\pi rh$

స్థూపము యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము



మీరు గమనించారా? ఈ పటము క్రమవృత్తాకార స్థూపం. ఏ తలముల వైశాల్యములను కూడితే మీకు స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతలవైశాల్యము వస్తుంది. స్థూపము పైభాగము, అడుగుభాగములో యున్న వృత్తాకార తలముల వైశాల్యములను, పక్కతలవైశాల్యముతో కూడితే మనకు స్థూపపు సంపూర్ణతల వైశాల్యము వస్తుంది.

స్థూపపు సంపూర్ణతల వైశాల్యం

= పక్కతలవైశాల్యం + పైభాగపు వైశాల్యం + భూవైశాల్యం

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

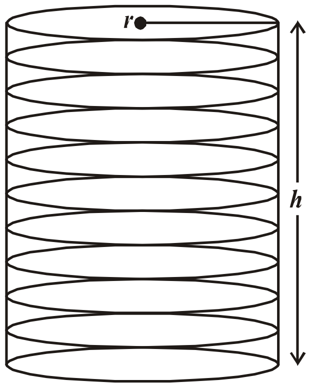
∴ స్థూపపు సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $2\pi r\,(h + r)$

ఇందులో 'r' స్థూపం వ్యాసార్థం మరియు 'h' స్థూపం ఎత్తు.

స్థూపము ఘనపరిమాణము:

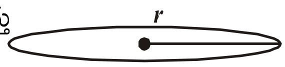
సమాన వ్యాసార్థములు కల్గిన కొన్ని వృత్తములను తీసుకొని వాటిని ఒకదానిపై మరొకటిని పేర్చండి.

ఈ కృత్యము ద్వారా స్థూపము ఏర్పడడము గమనించారా?



పక్క పటములో వృత్త వ్యాసార్థము 'r' వృత్తాలను ఒక దానిపై మరొకటి అమర్చగా ఏర్పడు అమరిక యొక్క ఎత్తు 'h' అయిన

స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణం = πr^2 × ఎత్తు



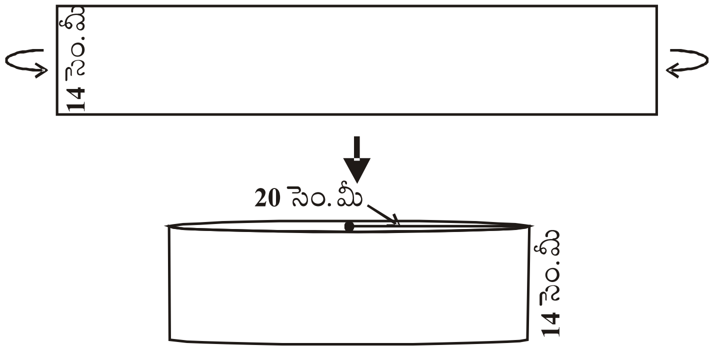
$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

స్థూపపు ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$

'r' స్థూపపు వ్యాసార్థం మరియు 'h' ఎత్తు.

ఉదాహరణ 1 : దీర్ఘ చతురస్రాకార పేపరు 14 సెం.మీ. వెడల్పు కలిగి, వెడల్పు వెంబడి 20సెం.మీ. భూ వ్యాసార్థము కల్గిన ఒక స్థూపముగా మలచ బడింది. అయితే దాని ఘన పరిమాణమును కనుగొనుము. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ గా తీసుకొనుము$\left.\right)$.



సాధన : పేపరు యొక్క వెడల్పు, స్థూపము యొక్క ఎత్తునకు సమానము అవుతుంది. స్థూపము యొక్క భూ వ్యాసార్థము 20 సెం.మీ.

స్థూపము యొక్క ఎత్తు = h = 14 సెం.మీ॥

వ్యాసార్థము = r = 20 సెం.మీ॥

స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

= 17600 ఘనపు సెంటీమీటర్లు.

ఉదాహరణ 2 : ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారపు కాగితము 11 సెం.మీ × 4 సెం.మీ॥ కొలతలను కలిగి ఉంది. దానిని అంచులు అధ్యారోహణ చెందకుండా ఉండే విధముగా, 4 సెం.మీ॥ ఎత్తు కలిగిన స్థూపముగా మలిస్తే స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి.

సాధన : కాగితము యొక్క పొడవు, స్థూపము యొక్క భూ పరిధికి సమానముగా, వెడల్పు ఎత్తునకు సమానముగా ఉంటుంది.

స్థూపపు వ్యాసార్థము = r మరియు

ఎత్తు = h

స్థూపపు భూ పరిధి = $2\pi r$ = 11 సెం.మీ.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$r = \frac{7}{4} \text{ cm}$$

h = 4 సెం.మీ.

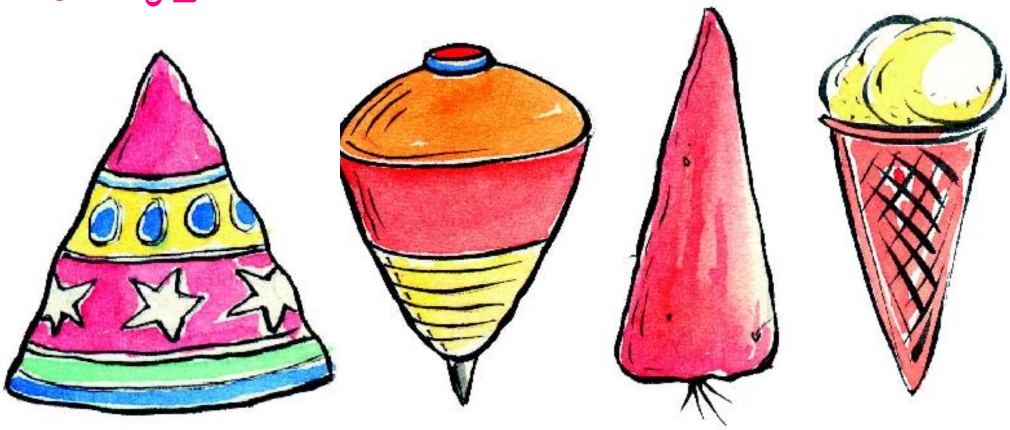
స్థూపపు ఘనపరిమాణము $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$$

= 38.5 ఘనపు సెంటీమీటర్లు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 377
06-02-2021 14:54

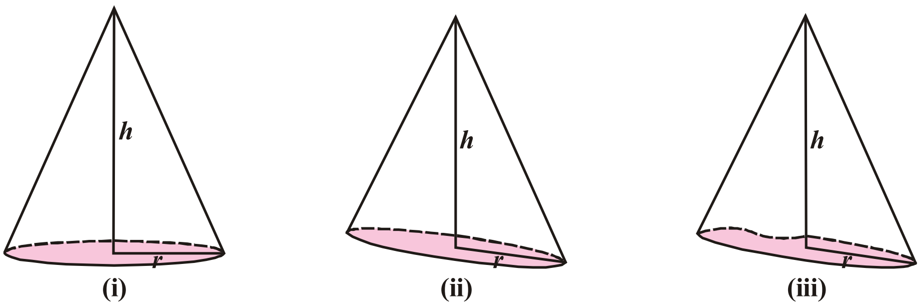
5.2.4 క్రమ వృత్తాకార శంఖువు



పైన చూపబడిన పటాలను పరిశీలించి ఆ పటాలు ఏఏ ఘనాకృతులను సూచిస్తున్నాయో చెప్పండి?

పైవన్నియు శంఖువు ఆకృతిలో యున్నవి.

ఈ కింది శంఖువులను పరిశీలించండి.



(i) మీరు గమనించిన సామాన్య లక్షణములు ఏమిటి?

(ii) ఈ శంఖువు ఆకృతులలో మీరు గమనించిన వ్యత్యాసములు ఏవి?

మొదటి పటములో పక్కతలము వక్రతలంగా మరియు వృత్తాకార భూమి ఉన్నది. శంఖువు యొక్క శీర్షము, వృత్తాకార భూమి యొక్క కేంద్రమును కలిపే రేఖాఖండము, వృత్తాకార భూమి వ్యాసార్ధమునకు లంబముగా ఉంది.

ఈ విధమైన శంఖువును క్రమ వృత్తకార శంఖువు అంటారు. రెండవ పటము వృత్తాకార భూమి కల్గియుంది. కాని ఎత్తు దాని భూవ్యాసార్ధమునకు లంబముగా లేదు.

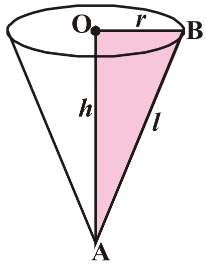
ఇటువంటి శంఖువులను క్రమవృత్తాకారముకాని శంఖువులందురు.

అదేవిధంముగా మూడవ పటములో ఎత్తు, దాని భూవ్యాసార్ధమునకు లంబముగా యుంది కాని భూమి వృత్తాకారముగాలేదు.

అందుచే ఈ శంఖువు క్రమవృత్త శంఖువు కాదు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 378 06-02-2021 14:54

శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు



పక్క పటములో $\overline{AO}$, $\overline{OB}$ నకు లంబముగా యుంది.

ΔAOB లంబకోణ త్రిభుజము.

$\overline{AO}$, శంఖువు యొక్క ఎత్తు (h) మరియు $\overline{OB}$ శంఖువు వ్యాసార్థము (r) నకు సమానము.

ΔAOB నుండి

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (ఏటవాలు ఎత్తు $AB = l$)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

కృత్యం

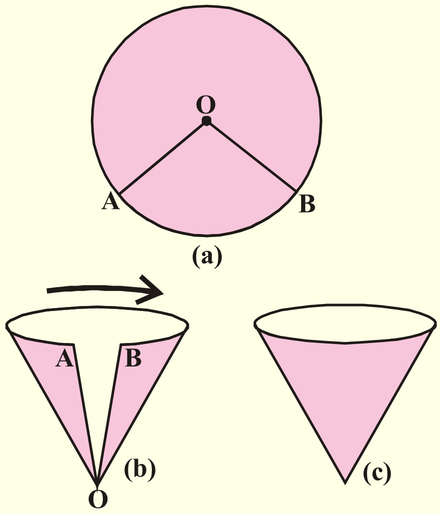
సెక్టరును శంఖువుగా మార్చే విధానం

ఈ కింది సూచనలను పాటిస్తూ పటములో చూపిన విధముగా చేయండి.

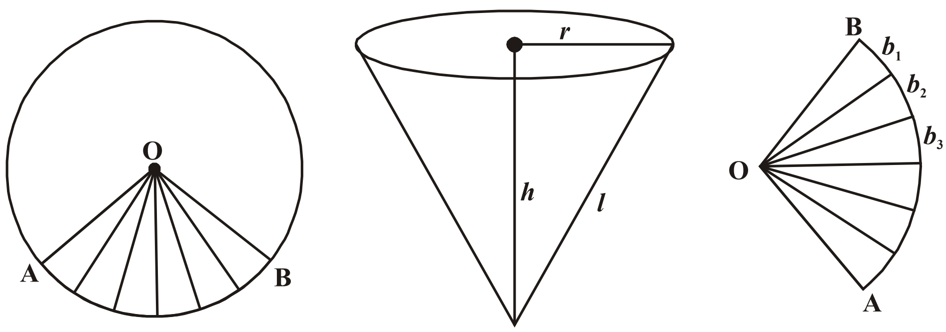
(i) పటం (a) చూపినవిధంగా ఒక దళసరి కాగితముపై వృత్తము ను గీయండి.

(ii) పటం (b) లో చూపినట్లు సెక్టరు AOB ను కత్తిరించండి.

(iii) పటం (c) లో చూపినట్లు A మరియు B చివరలను ఒకదానితో ఒకటి తాకేటట్లు నెమ్మదిగా పటములో చూపిన విధముగా కలుపుము. A, B లు అధ్యారోహణము కాకూడదు. A, B లును అతికింపుము.



శంఖువు యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము :



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 379 06-02-2021 14:54

శంఖువు యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యమును కనుగొందాం. కృత్యములో చూపిన విధముగా సెక్టరును శంఖువుగా మలిచినప్పుడు OA, OB లను ఏకీభవించినట్లు చేయాలి.

శంఖువును b_1, b_2, b_3, ... త్రిభుజాలుగా విభజిస్తే, వాటి యొక్క ఎత్తు 'l' అనగా శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తునకు సమానము.

శంఖువు యొక్క వైశాల్యము = త్రిభుజముల యొక్క వైశాల్యముల మొత్తమునకు సమానం.

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}l\ (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2}l\ \text{(A నుండి B యొక్క పొడవునకు సమానం)}$$

$$= \frac{1}{2}l\,(2\pi r)$$

$$= \pi rl.$$

కావున శంఖువు ప్రక్కతల వైశాల్యము లేదా వక్రతల వైశాల్యము = πrl.

శంఖువు సంపూర్ణ తల వైశాల్యము :

శంఖువు యొక్క పై అడుగు భాగమును కప్పి ఉంచడానికి మనకు శంఖువు భూవ్యాసార్థముతో సమాన వ్యాసార్థము గల వృత్తాకార ఆకృతి కావలెను.

శంఖువు యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యము కనుగొనడమెలా ? ఎన్ని తలము లను కలిపితే శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము వస్తుంది.

వృత్తవైశాల్యము = πr^2

శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = ప్రక్కతల వైశాల్యం + భూ వైశాల్యం

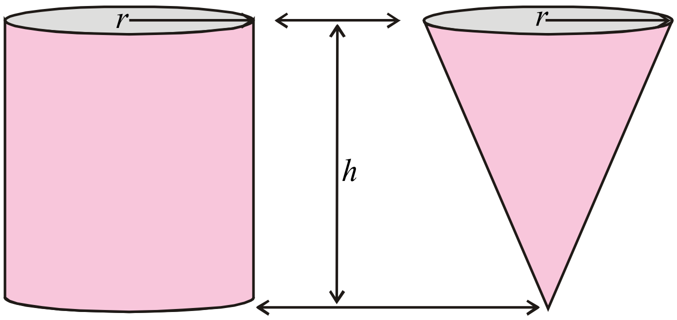
$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r\,(l + r)$$

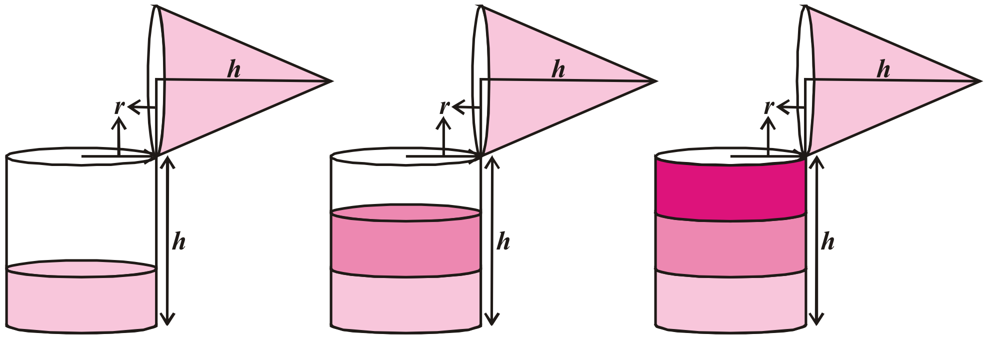
శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = $\pi r\,(l + r)$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 380	06-02-2021 14:54

క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఘనపరిమాణం:



ఒకే వ్యాసార్థము, ఒకే ఎత్తు కల్గిన స్థూపము, శంఖువులను తీసుకొని ఈ కింది ప్రయోగము చేసి శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి.



(i) శంఖువును పూర్తిగా నీటితో నింపి, ఆ నీటిని స్థూపములోనికి పోయండి. స్థూపములో కొంత భాగమును నింపుతుంది.

(ii) మరోసారి శంఖువును పూర్తిగా నీటితో నింపి, ఆ నీటిని స్థూపములో పోయండి. స్థూపము పూర్తిగా నిండదు.

(iii) మూడోసారి శంఖువును పూర్తిగా నీటితో నింపి, ఆ నీటిని స్థూపముతో పోస్తే, స్థూపము పూర్తిగా నిండుతుంది.

ఈ ప్రయోగము నుండి మీరు ఏమి గమనించారు? స్థూపము ఘనపరిమాణమునకు శంఖువు ఘనపరిమాణము మధ్య సంబంధమును ఏమైనా గమనించారా?

మూడుసార్లు శంఖువును పూర్తిగా నింపిన తరువాత స్థూపము నిండింది. అనగా

ఒకే భూమి, ఒకే ఎత్తు కలిగిన స్థూపం ఘనపరిమాణం, శంఖువు ఘనపరిమాణానికి 3 రెట్లు ఉంటుంది.

$\therefore$ శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

ఇక్కడ 'r' శంఖువు భూవ్యాసార్థము మరియు 'h' ఎత్తు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 381 06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 1 : 5.6 సెం.మీ॥ భూవ్యాసార్థము మరియు 158.4 చ.సెం.మీ. ప్రక్కతల వైశాల్యము గల శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు మరియు శంఖువు ఎత్తులను కనుగొనుము.

సాధన : భూ వ్యాసార్థము = 5.6 సెం.మీ॥ ఎత్తు = h, ఏటవాలు ఎత్తు = l

ప్రక్కతల / వక్రతల వైశాల్యము = πrl = 158.4 చ.సెం.మీ॥

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6}$$

$$= \frac{18}{2} = 9 \text{ సెం.మీ.}$$

$l^2 = r^2 + h^2$ అని మనకు తెలుసు.

$$h^2 = l^2 - r^2$$

$$= 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$h^2 = 49.64.$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

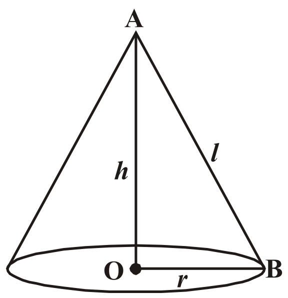
h = 7.05 సెం.మీ. (సుమారుగా).

ఉదాహరణ 2 : సైన్యము తన బేస్ క్యాంప్ కొరకు శంఖువు ఆకారములో ఎత్తు 3మీ. మరియు భూ వ్యాసము 8 మీ॥గా ఉన్న గుడారము ఏర్పాటు చేసిన

(i) గుడారము తయారు చేయడానికి కావలసిన బట్ట యొక్క వెల చ. మనకు రూ. 70 అయిన మొత్తము ఖర్చు ఎంత?

(ii) ప్రతీ వ్యక్తికి 3.5 ఘనపు మీటర్లగాలి కావలసి ఉండే గుడారములో కూర్చో గల వ్యక్తుల సంఖ్య ఎంత?

సాధన : గుడారము యొక్క వ్యాసము = 8 మీ॥



$$r = \frac{8}{2} = 4 \text{ మీ॥}$$

ఎత్తు h = 3m

ఏటవాలు ఎత్తు $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ మీ॥}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 382
06-02-2021 14:54

గుడారము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5$$

$$= \frac{440}{7} \text{ చ.మీ}$$

శంఖువు ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{352}{7} m^3.$$

(i) గుడారము తయారీకి కావలసిన గుడ్డ ఖరీదు

= ప్రక్కతల వైశాల్యము × యూనిట్ వెల

$$= \frac{440}{7} \times 70$$

= 4400 రూపాయలు.

(ii) గుడారములో కూర్చోగల వ్యక్తుల సంఖ్య

$$= \frac{\text{శంఖాకార గుడారం ఘనపరిమాణం}}{\text{ప్రతి వ్యక్తి కావల్సిన గాలి ఘనపరిమాణం}}$$

$$= \frac{352}{7} \div 3.5$$

= 14.36 = 14 వ్యక్తులు (సుమారుగా).

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక స్థూపము యొక్క ఘనపరిమాణము 308 ఘనపు సెం.మీ॥ దాని ఎత్తు 8 సెం.మీ॥ అయినచో స్థూపము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణ తల వైశాల్యము కనుగొనండి.
2. ఒక స్థూపము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములో మార్పు లేకుండా దాని భూ వ్యాసార్ధమును రెట్టింపు చేస్తే దాని యొక్క ఎత్తు ఎంత?
3. ఒక లోహపు దీర్ఘ ఘనము యొక్క కొలతలు 12 సెం.మీ × 15 సెం.మీ × 7.5 సెం.మీ॥ అయితే ఆలోహపు దిమ్మను 14 సెం.మీ. ఎత్తు కల్గిన స్థూపముగా మలిస్తే ఆ స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధము ఎంత?
4. 3.5 మీ. అంతర వ్యాసార్ధము కల్గిన ఒక వృత్తాకార బావి యొక్క లోతు 10 మీటర్లు అయితే
   (i) ఆ బావి యొక్క అంతర వక్రతల వైశాల్యము ఎంత?
   (ii) బావి వక్రతలము నీకు ప్లాస్టింగ్ చేయుటకు చదరపు మీటరుకు 40 రూపాయిలు ఖర్చు అయితే మొత్తము ప్లాస్టింగ్‌కు అయ్యే ఖర్చు ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 383 06-02-2021 14:54

5. శంఖువు భూ వైశాల్యము 38.5 చ.సెం.మీ. ఘన పరిమాణము 77 ఘ.సెం.మీ అయిన దాని యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.

6. శంఖువు ఘన పరిమాణము 462 ఘనపుమీటర్లు. భూవ్యాసార్ధము 7మీటర్లు అయిన దాని ఎత్తును కనుగొనుము.

7. ఒక శంఖువు వక్రతల వైశాల్యము 308 చ.సెం॥ మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 14 సెం.మీ॥ అయిన
   (i) భూ వ్యాసార్ధము
   (ii) శంఖువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుక్కోండి.

8. 15 సెం.మీ॥ వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార దళసరి కాగితము నుండి 216^0 సెక్టరు కోణము గల సెక్టరును కత్తిరించి దాని అంచులతో ఉన్న వ్యాసార్ధములను వంచి శంఖువుగా మలిస్తే దాని యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత?

9. శంఖువు యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యము $1159\frac{5}{7}$ చ.సెం.మీ. దాని యొక్క భూ వైశాల్యము $254\frac{4}{7}$ చ.సెం.మీ॥ అయిన దాని ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

5.2.5 గోళం

(i) (ii) (iii)

పై పటములన్నియూ మీకు తెలిసినవే కదా! వాటిమధ్య వ్యత్యాసములను గుర్తించగలరా?

మొదటిపటం వృత్తం. దీనిని కాగితంపై సులభముగా గీయగలం. దీనికి గల కారణం అది సమతల పటం. ఒక సమతలములోని స్థిరబిందువు నుండి సమాన దూరములో యున్న బిందువుల బిందుపథం వృత్తం.

మిగిలిన పటములన్ని ఘనములు. ఈ ఆకృతులను 'గోళం' అంటారు.

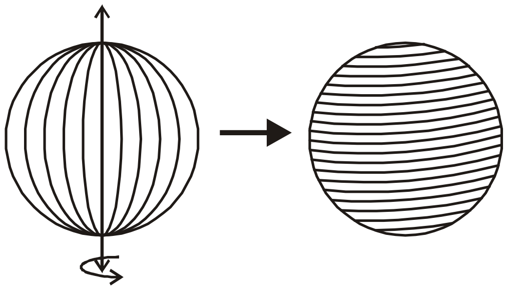
గోళం త్రిమితీయం. త్రి పరిమాణ అంతరాళంలో ఒక దత్తబిందువు నుండి స్థిర దూరములో ఉండు బిందువుల సమితి గోళం. దత్త బిందువు గోళం కేంద్రం. స్థిరదూరం గోళం యొక్క వ్యాసార్ధము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 384
06-02-2021 14:54

గోళం ఉపరితల వైశాల్యం

గోళం ఉపరితల వైశాల్యం ఈ కింద కృత్యము ద్వారా కనుగొందాం.

ఒక రబ్బరు బంతిని తీసుకొని ఒక సూదిని మధ్యలో గుచ్చండి. సూది సహాయముతో ఒక దారమును చుట్టండి. పిన్నులనుపయోగించి సూది సరైన స్థానములో ఉండేటట్లు చూడండి. సూది యొక్క స్థానమును దాని చివరలను గుర్తించండి. నెమ్మదిగా సూదిని తొలగించండి.



గోళము యొక్క వ్యాసార్థమును కనుక్కోండి మరియు బంతి యొక్క వ్యాసార్థమునకు సమాన వ్యాసార్థము కల్గిన నాల్గు వృత్తములను గీయండి. వృత్తములను దారమునుపయోగించి నింపండి.

మీరు ఏమి గమనించారు?

బంతిని పూర్తిగా కప్పిఉంచడానికి వాడే తీగ/ దారం నాల్గు సర్వసమాన వృత్తములను పూర్తిగా కప్పి ఉంచడానికి సరిపోతుంది. అనగా బంతి యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం, నాల్గు సర్వసమాన వృత్తముల యొక్క వైశాల్యమునకు సమానం.

దీనివల్ల (r) వ్యాసార్ధం కల్గిన గోళం ఉపరితలవైశాల్యం, అదే (r) వ్యాసార్ధం కల్గిన వృత్తం వైశాల్యంనకు నాల్గురెట్లు ఉంటుంది అని తెలుస్తుంది.

∴ గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 4 \times$ వృత్తవైశాల్యం

$= 4\pi r^2$.

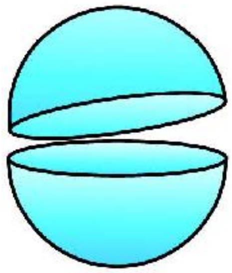
గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\,\pi r^2$. ఇక్కడ 'r' గోళం యొక్క వ్యాసార్ధం.

గోళము ఘనపరిమాణము $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ఘనపు యూనిట్లు

ఇక్కడ r గోళ వ్యాసార్ధము.

అర్ధగోళం

ఒక గోళమును తీసుకొని గోళకేంద్రము గుండా పోయే సమతలము నుంచి రెండు సమాన భాగములుగా విభజింపు. ప్రతీ భాగమును 'అర్ధగోళము' అంటారు.

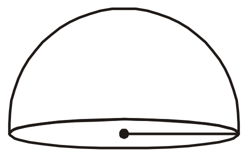


అర్ధగోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము

ప్రతి భాగమును అర్ధగోళం అందురు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 385 06-02-2021 14:54

గోళం కేవలం ఒక వక్రతల ముఖమును కల్గి యుంటుంది. గోళం రెండు సమాన భాగములుగా విభజింపబడితే వక్రతలం కూడా రెండు సమాన భాగములుగా విభజింపబడుతుంది.



అర్ధగోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఎలా కనుగొందురు?

అర్ధగోళం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం, గోళం యొక్క ఉపరితల వైశాల్యంలో సగముంటుంది.

$$= \frac{1}{2} \times \text{గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\pi r^2.$$

$\therefore$ అర్ధ గోళము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము $= 2\pi r^2$.

అర్ధగోళము యొక్క భూమి వృత్తాకారముగా ఉంటుంది.

దాని యొక్క వైశాల్యము $= \pi r^2$.

అందుకే అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము

$$= \text{అర్ధగోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము} + \text{భూ వైశాల్యము}$$

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2.$$

$\therefore$ అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 3\pi r^2$.

అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{2} \times$ గోళ ఘనపరిమాణము

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3.$$

ఉదాహరణ 1 : గోళము ఉపరితల వైశాల్యము 154 చ.సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

సాధన : గోళము ఉపరితల వైశాల్యము $= 4\pi r^2$.

$$4\pi r^2 = 154$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 386 06-02-2021 14:54

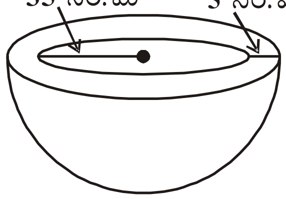
$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$r = \frac{7}{2}$$

r = 3.5 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 2 : అర్ధ గోళాకారం గిన్నె రాతితో తయారు చేయండి. 5 సెం.మీ. మందము కలిగి ఉంది. దాని లోపలి వ్యాసార్థము 35 సెం.మీ॥ అయిన గిన్నె యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనుము.



సాధన : వెలుపలి వ్యాసార్థము R,

లోపలి వ్యాసార్థము r ,

మందము = 5 సెం.మీ అనుకొందాం.

$\therefore$ R = $(r + 5)$ సెం.మీ॥

= (35 + 5) సెం.మీ॥

= 40 సెం.మీ॥

సంపూర్ణతల వైశాల్యము = బయటి ఉపరితల వైశాల్యం + లోపలి ఉపరితల వైశాల్యము

+ కంకణ వైశాల్యము

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi\ (2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$

$= \pi(3R^2 + r^2)$

$= \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2)$ చ.సెం.మీ

$= \frac{6025 \times 22}{7}$ చ.సెం.మీ

= 18935.71 చ.సెం.మీ (సుమారుగా)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 387
06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 3 : ఒక అర్థగోళాకరపు గిన్నె యొక్క వ్యాసార్థము 3.5 సెం.మీ॥ దానిలో నింపగలిగే నీటి ఘనపరిమాణము ఎంత?

సాధన : గిన్నెలోని నీటి ఘనపరిమాణము

= అర్ధగోళము ఘపరిమాణము

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times .35$ ఘ.సెం.మీ

= 89.8 ఘనపు సెం.మీ. (సుమారుగా)

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక గోళపు వ్యాసార్థము 3.5 సెం.మీ॥ అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము ఎంత?
2. ఒక గోళము ఉపరితల వైశాల్యము $108\frac{2}{7}$ చ.సెం.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణము ఎంత?
3. గ్లోబులో భూమధ్య రేఖ పొడవు 44 సెం.మీ. అయిన దాని ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?
4. ఒక గోళాకర బంతి యొక్క వ్యాసము 21 సెం.మీ. ఇటువంటి 5 బంతులను తయారు చేయడానికి కావలసిన పదార్థ పరిమాణం ఎంత?
5. రెండు గోళముల వ్యాసార్థముల నిష్పత్తి 2:3 అయిన వాటి ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

అభ్యాసము

1. 10 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగా గల అర్ధగోళం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనుము)
2. ఒక గోళాకార బెలూన్ యొక్క వ్యాసం 14 సెం.మీ. నుండి 28 సెం.మీ. వరకు పెరిగే విధంగా గాలి నింపబడింది. ఈ రెండు సందర్భములలో గల ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.
3. 0.25 సెం.మీ. మందం కల ఇత్తడితో ఒక అర్ధగోళాకార గిన్నెను తయారుచేశారు. గిన్నెలోపలి వ్యాసార్థం 5 సెం.మీ. గిన్నెయొక్క ఉపరితల వైశాల్యం మరియు లోపలితల వైశాల్యంనకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
4. ఒక సీసపు బంతి యొక్క వ్యాసం 2.1 సెం.మీ. దానిని తయారు చేయడానికి ఉపయోగించే సీసం యొక్క సాంద్రత 11.34 గ్రాములు. అయిన బంతి యొక్క బరువు ఎంత?
5. ఒక స్థూపాకార లోహము యొక్క వ్యాసం 5 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు $3\frac{1}{3}$ సెం.మీ. దానిని కరిగించి ఒక గోళముగా తయారుచేస్తే దాని యొక్క వ్యాసం ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 388 06-02-2021 14:54

ముఖ్యాంశాలు

- సమఘనము, దీర్ఘ ఘనముల యొక్క ఆరుతలములలో 4 ప్రక్కతల ముఖాలు, పై ముఖము మరియు దిగువ ముఖము కల్గిన క్రమ పట్టకములు
- పొడవు 'l', వెడల్పు 'b' ఎత్తు 'h' గా కల్గిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క

  సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2(lb + bh + lh)$

  ప్రక్కతల వైశాల్యము $= 2h\,(l + b)$

  ఘనపరిమాణము $= lbh$
- ప్రతి భుజం కొలత 'l' గా గల సమఘనం యొక్క

  సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 6l^2$

  పక్కతల వైశాల్యం $= 4l^2$

  ఘనపరిమాణం $= l^3$
- పక్క తలాలు వక్ర (వ(టు) తలాలుగా, చివరలు సర్వసమాన వృత్తాలుగా గల జ్యామితీయ వస్తువును 'స్థూపము' అందురు. వీటి వృత్తాకార చివరలు మద్యబిందువులను కలుపురేఖ భూమికి లంబముగా ఉంటే ఆ పటాన్ని క్రమ వృత్తాకార స్థూపం లేక క్రమస్థూపం అంటాం.
- 'r' వ్యాసార్థం, 'h' ఎత్తు కల్గిన స్థూపం యొక్క
  - పక్కతల వైశాల్యం $= 2\pi rh$
  - సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 2\pi r\,(r + h)$
  - ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h$
- భూమి వృత్తంగా, దీనికి పై భాగమును దీర్ఘము కల్గిన జ్యామితీయ వస్తువును "శంఖువు" అందురు. శంఖువు నుండి శంఖువు భూమికి గీయబడిన లంబం, శంఖువు భూమి కేంద్రం గుండా పోవుచున్న శంఖువును "క్రమవృత్త శంఖువు" అంటాం.
- శంఖువు భూమి అంచుపై ఏదో ఒక బిందువుతో శీర్షమును కలుపు రేఖాఖండమును 'ఏటవాలు ఎత్తు' (l) అంటాము.

  $l^2 = h^2 + r^2$

  ఇందులో 'h' ఎత్తు, 'r' వ్యాసార్థము

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 389 06-02-2021 14:54

- 'r' వ్యాసార్థము, 'h' ఎత్తు, 'l' ఏటవాలు ఎత్తు గా గల శంఖువు యొక్క
  - పక్కతల వైశాల్యం $= \pi r l$
  - సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi r\,(r + l)$

- ఒకే భూమి, ఎత్తు కల్గిన శంఖువు, స్థూపములను తీసుకొంటే

  శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \times$ స్థూపం ఘనపరిమాణం

  శంఖువు ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

- ఒకే భూమి, ఎత్తు గల్గిన పిరమిడ్, క్రమపట్టకములను తీసుకొంటే, పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం, పట్టక ఘనపరిమాణంలో మూడవ వంతు ఉంటుంది.

  పిరమిడ్ ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{3} \times$ క్రమపట్టక ఘనపరిమాణం

- పక్క తలాలు వక్ర (వక్రు) తలాలుగా, చివరలు సర్వసమాన వృత్తాలుగా గల జ్యామితీయ వస్తువును 'స్థూపము' అందురు. వీటి వృత్తాకార చివరలు మధ్యబిందువులను కలుపురేఖ భూమికి లంబముగా ఉంటే ఆ పటాన్ని క్రమ వృత్తాకార స్థూపం లేక క్రమస్థూపం అంటాం.

- గోళం వ్యాసార్థం 'r' అయిన
  - ఉపరితల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$
  - ఘనపరిమాణం $= \frac{4}{3}\pi r^3$

- త్రి పరిమాణ అంతరాళంలో ఒక దత్త బిందువు నుండి స్థిర దూరములో ఉండు బిందువుల సమితి గోళం. స్థిర బిందువును కేంద్రముగాను, స్థిర దూరమును వ్యాసార్థముగా పరిగణిస్తాం.

- గోళకేంద్రం గుండా పోవు సమతలం గోళాన్ని చేసిన రెండు సమాన భాగాలలో ఒకటిని అర్ధగోళం అందురు.
  - అర్ధగోళం పక్కతల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$
  - అర్ధగోళం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 3\pi r^2$
  - అర్ధగోళం ఘనపరిమాణం $= \frac{2}{3}\pi r^3$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 390
06-02-2021 14:54

అధ్యాయం

5.3 సంయోగము చేసిన ఘనకార వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యము

5.3.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

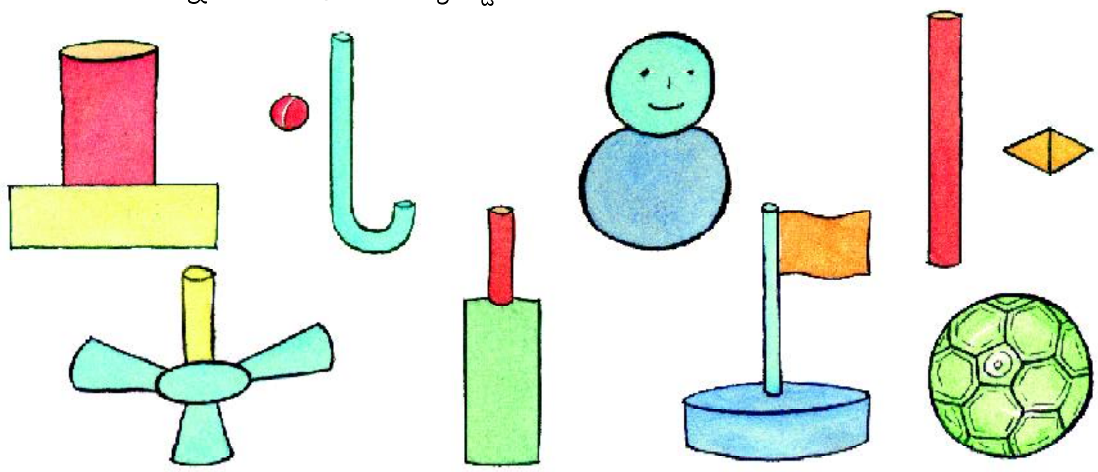
ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- ఘనాకార వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములు, సంపూర్ణతల వైశాల్యములునకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించగలుగుతారు.
- ఒక ఘనాకృతిలో ఉన్న వివిధ ఘనాకృతుల సంయోగము, వాటి ఉపరితల వైశాల్యము, సంపూర్ణ తల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములను కనుగొనగలుగుతారు.
- వివిధ ఘనాకృతుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణములకు సంబంధించిన సూత్రములు అందులోని పదములను వివరించగలుగుతారు.
- క్షేత్రమితికి సంబంధించిన సమస్యలను సాధించినప్పుడు జ్యామితీయ, బీజగణిత, అంకగణిత సూత్రములను, భావనలను ఏ విధముగా ఉపయోగించవచ్చో, అన్వయించవచ్చో తెలుసుకొంటారు.
- సరళమైన, ఘనాకృతులు మరియు సంయోగ ఘనాకృతుల పటములను గీయగలుగుతారు.

5.3.1 పరిచయం

సంయోగము చేసిన ఘనాకార వస్తువుల ఉపరితల వైశాల్యం (Surface Area of Combination of Solids)

మన చుట్టూ యున్న పరిసరాలలో వివిధ ఆకృతులలో నున్న (రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ క్రమాకృతుల కలయికతో వున్నవి) ఘనాకార వస్తువులను చూస్తూంటాము కదా! స్థంబములపై నిర్మింపబడిన ఇండ్లు, ఘనాకృతిలో యున్న పునాదిపై నిర్మింపబడిన స్థూపాకృతిలో యున్న నీటి ట్యాంకులు, స్థూపాకార హ్యాండిల్‌ను కల్గి మిగిలిన భాగమంతా సమతలము గా గల క్రికెట్ బ్యాట్ మొదలగునవి. మీ చుట్టూ యున్న విభిన్న ఆకృతులను గమనించండి? కొన్నింటిని ఈ క్రింది ఇయ్యబడ్డాయి.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 391 06-02-2021 15:07

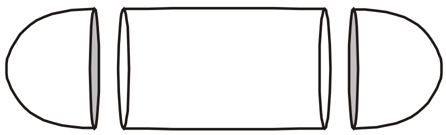
కృత్యం : ఘనాకార వస్తువుల సముదాయ ఉపరితల వైశాల్యము

మనం నిత్యం మన చుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలోని కొన్ని వస్తువులు కొన్ని ఘనాకార ఆకృతుల సముదాయముగా గుర్తిస్తాము. నిత్యజీవితములో చెక్క వస్తువులు, గృహోపకరణములు, మందు బిళ్ళలు, సీసాలు, ఆయిల్ ట్యాంకర్లు మొదలగునవి. మనము ఐస్‌క్రీంను తింటాము. మీరు చెప్పగలరా? ఐస్‌క్రీం ఆకృతిలో ఎన్ని ఘనాకార ఆకృతులున్నాయో? కోన్ ఐస్‌క్రీం సాధారణముగా శంఖువు మరియు అర్ధగోళ ఆకృతుల సముదాయం.

మరో ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం. ఆయిల్ ట్యాంకర్ లేదా నీటి ట్యాంకర్ ఒకే ప్రాథమిక ఆకృతి కల్గిన వస్తువా? మీరు జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే ట్యాంకర్ స్థూపము దాని చివరలు అర్ధగోళకృతులుగా గమనించవచ్చు.

పైన ఉదహరించిన వస్తువుల వలె నున్న వస్తువుల యొక్క ఉపరితల వైశాల్యముగాని ఘనపరిమాణమును గాని కనుగొనాలంటే మనం ఏమి చేయాలి. వీటికి ముందు తరగతులలో నేర్చుకొనే విధముగా వర్గీకరించలేము.

పటములో చూపిన విధముగా ఆయిల్‌ట్యాంకర్ స్థూపము మరియు రెండు అర్ధగోళముల సమూహము. దీనిని ఈ క్రింది పటము ద్వారాచూపించవచ్చు.



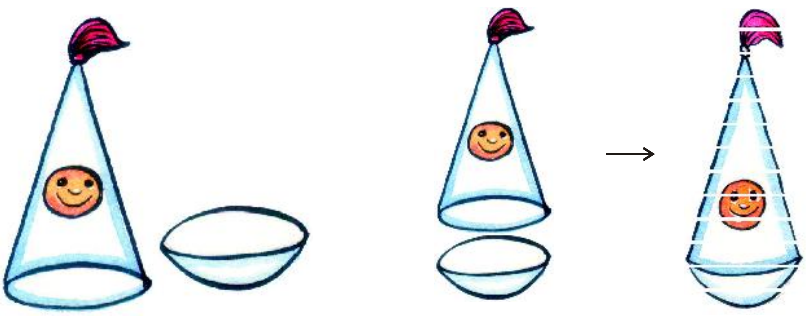
కొత్తగా ఏర్పడిన వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము అర్ధగోళముల వక్రతల వైశాల్యములు మరియు స్థూపము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యములు మొత్తమునకు సమానము.

కొత్తగా ఏర్పడిన ఘనాకార వస్తువుTSA = ఒక చివరి అర్ధగోళ CSA + స్థూపము యొక్క CSA + రెండవ చివరి అర్ధగోళం CSA

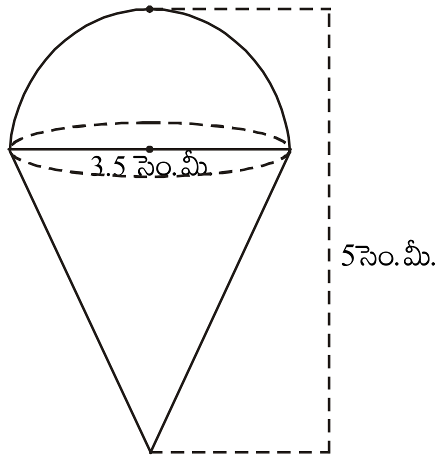
ఇచ్చట TSA అనగా సంపూర్ణతల వైశాల్యము మరియు CSA అనగా వక్రతల వైశాల్యము.

శంఖువు ఆకార భాగము మరియు అర్ధగోళాకార భాగములను కలిపి ఒక ఆట వస్తువును తయారుచేయాలి. అని అనుకుందాము. దీనిని తయారు చేసే విధానములోని సోపానములు పరిశీలిద్దాం.

ముందుగా శంఖువు ఆకార భాగము మరియు అర్ధగోళాకారభాగములను తీసుకోవాలి. శంఖువు యొక్క భూవ్యాసార్ధము, అర్ధగోళ వ్యాసార్ధములు సమానముగా ఉండాలి. ఆట బొమ్మను తయారుచేసే విధానములో సోపానములు.



ఉదాహరణ - 1 : సురేష్‌కు తన పుట్టిన రోజు బహుమానంగా ఒక బొంగరం ఇవ్వబడినది. అతడు దానికి రంగు వేద్దామనుకున్నాడు. ఒక శంఖువుపై ఒక అర్ధగోళాన్ని పెట్టి సంయోగం చేయడం వలన ఏర్పడిన ఆకృతిలో ఆ బొంగరం ఉంది. బొంగరం మొత్తం ఎత్తు 5 సెం.మీ. మరియు దాని అర్ధగోళ వ్యాసార్ధం 3.5 సెం.మీ. అయిన అతడు రంగు వేయాల్సిన ప్రాంత వైశాల్యమును కనుగొనుము. $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$



సాధన : ఈ బొంగరం సమాన భూవ్యాసార్థాలు కలిగిన అర్ధగోళం మరియు శంఖువుల సంయోగం ద్వారా ఏర్పడినది.

అంటే బొంగరం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం =

అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యం + శంఖువు వక్రవతల వైశాల్యం

ఇప్పుడు, అర్ధగోళ వక్రవతల వైశాల్యం

$$= 2\pi r^2$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ చ.సెం.మీ. (అర్ధగోళ వ్యాసార్ధం 3.5 సెం.మీ.)}$$

ఇదే విధంగా, శంఖువు యొక్క ఎత్తు = బొంగరం ఎత్తు – అర్ధగోళ ఎత్తు (అర్ధగోళ వ్యాసార్ధం)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) = 3.25 \text{ సెం.మీ.}$$

కావున, శంఖువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7 \text{ సెం.మీ.}$$

శంఖువు వక్రతల వైశాల్యం $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7 \text{ చ.సెం.మీ.}$$

బొంగరంయొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$ చ.సెం.మీ + $\left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} 3.7\right)$ చ.సెం.మీ.

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ చ.సెం.మీ.}$$

$$= 11 \times 0.5(7.2) \text{ చ.సెం.మీ.}$$

$$= 39.6 \text{ చ.సెం.మీ. (సుమారుగా)}$$

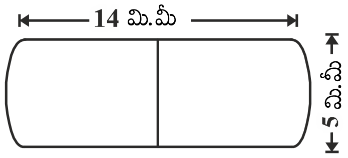
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 393　06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక ఆటవస్తువు అర్ధగోళంపై నిటారుగా నిలుపబడిన అదే వ్యాసము శంఖువు వలెయున్నది. శంఖువు యొక్క భూవ్యాసం 6 సెం.మీ. మరియు 4 సెం.మీ. అయినచో ఆటవస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత? [$\pi = 3.14$ తీసుకొనుము.]
2. ఒక ఘనాకార వస్తువు ఒక చిరవ అర్ధగోళము మరొ చివర శంఖువు ఆకార భాగము కలిగిన స్థూపము వలెయున్నది. రెండింటి యొక్క ఉమ్మడి భూవ్యాసారం 8 సెం.మీ. మరియు స్థూపము, శంఖువు ఆకారముల ఎత్తులు వరుసగా 10 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. అయినచో ఆ వస్తువు యొక్క సంపూర్ణ తల వైశాల్యమును కనుగొనుము. [$\pi = 3.14$ తీసుకొనము.].
3. 64 ఘనపు సెం.మీ. ఘనపరిమాణం గల రెండు సమఘనములు కలుపబడినవి. అయిన ఏర్పడిన కొత్త ఘనాకృతి యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం ఎంత?

అభ్యాసము

1. ఒక నీటి ట్యాంకు రెండు చివరలు అర్ధగోళాకారముగా ఉన్న స్థూపము వలెయున్నది. స్థూపము యొక్క బాహ్యవ్యాసము 1.4 మీటర్లు మరియు దాని పొడవు 8మీటర్లు నీటి ట్యాంకు బయట రంగు వేయడానికి చదరపు మీటరుకు రూ. 20 వంతున ఎంత ఖర్చు అగును?
2. ఒక గోళము, స్థూపము మరియు శంఖువు ఒకే వ్యాసార్ధములను కలిగి ఉన్నాము. అయినచో వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి ఎంత?
3. ఒక మందు బిళ్ళ రెండు చివరల అర్ధగోళాకారంలో నున్న స్థూపము వలె యున్నది. మందు బిళ్ళ యొక్క పొడవు 14 మి.మీ. మరియు మందం 5 మి.మీ. అయితే దాని ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?



ముఖ్యాంశాలు

- ఒక సంయోగ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము అందులోని ప్రతిఘనాకారము యొక్క ఘన పరిమాణము మొత్తమునకు సమానము.
- సంయోగ ఘనాకార వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము అందులోని ప్రతిఘనాకార ఉపరితల వైశాల్యముల యొక్క మొత్తమునకు సమానము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 394 06-02-2021 14:54

యూనిట్ 6 త్రికోణమితి

అధ్యాయం 6.0 త్రికోణమితి - అనువర్తనాలు

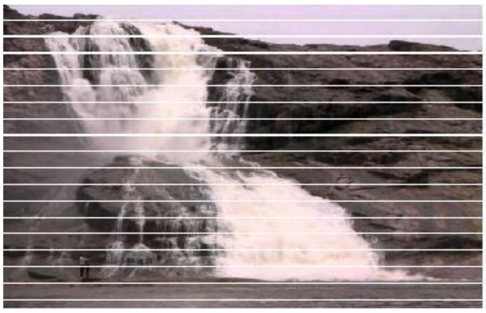
6.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి, మీరు:

- లంబ కోణత్రిభుజం లోని అల్ప కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు వ్రాయగలరు.
- లంబ కోణ త్రిభుజంలో కొన్ని భుజాల కొలతలు మరియు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు తెలిసినట్లయితే మిగిలిన భుజాల కొలతలు కనుగొనగలుగుతారు.
- కోణాలు $0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ లకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుగొనగలుగుతారు.
- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆధారంగా ఎత్తులు , దూరాలు మొదలగు వాటికి సంబంధించిన సమస్యలు సాధించగలుగుతారు.

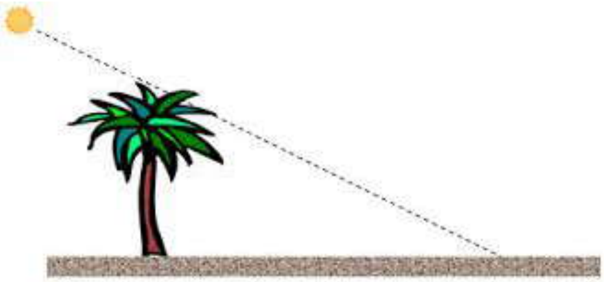
6.1 పరిచయం

మీరు అత్యంత ఎత్తయిన ఎవరెస్టు శిఖరం గురించి వినే వుంటారు. దాని ఎత్తు 8,848 మీ. లేదా 29,029 అడుగులు.



మన తెలంగాణా లోని ఆదిలాబాద్ జిల్లాలో గల కుంటాల జలపాతం యొక్క ఎత్తు 45 మీ. లేదా 150 అడుగులు.

ఇలాంటి వాటి ఎత్తు సాధారణంగా కొలవడం సాధ్యమేనా?కాదు కదా. మరి ఇలాంటి వాటి ఎత్తు కనుగొనడం ఎలా ? ఊహించండి.



ఇదేవిధంగా ఒక కొబ్బరిచెట్టును చూసినప్పుడు దాని ఎత్తు గురించి ఆలోచిస్తాము.

ఇంతకు ముందు చర్చించిన విధంగా చాలా సందర్భాలలో ఎత్తులు , దూరాలు త్రిభుజాలను

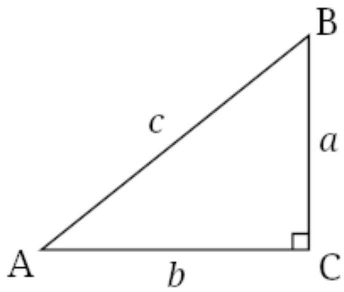
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 395 06-02-2021 14:54

ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చునని గణితపరంగా వచ్చిన ఆలోచనల ద్వారా తెలుస్తుంది. ఈ గణిత శాఖను 'త్రికోణమితి' అంటారు.

త్రికోణమితి అనే పదం గ్రీకు పదం అయిన "ట్రై" అనగా మూడు (త్రి) , "గోనన్" అనగా భుజాలు మరియు "మెట్రాన్ " అనగా(మితి) కొలవడం.ఈ విధంగా త్రికోణమితి అనగా నిజానికి త్రిభుజంలోని భుజాలు మరియు కోణాలు కొలవడం. ఇక్కడ, లంబకోణ త్రిభుజాల ఆధారంగా సూత్రాలు, మరియు ఎత్తులు, దూరాలు కనుగొనుటకు సమస్యా సాధనా ప్రక్రియలు, పద్ధతులు మొదలగు వాటి గురించి ముఖ్యంగా ఈ అధ్యాయంలో చర్చిద్దాం.

6.2 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు - అర్థం

పైథాగొరస్ సిద్ధాంతం (బౌద్ధాయన నియమం)



లంబకోణ త్రిభుజం : ఒక త్రిభుజంలో ఒక కోణం 90^0 లు గా ఉంటే ఆ త్రిభుజాన్ని లంబకోణ త్రిభుజం అంటారు.

ఈ ప్రక్క పటంలో లంబకోణ త్రిభుజం ΔABC లో C వద్ద లంబ కోణం, అనగా $\angle C = 90^0$.

లంబకోణ త్రిభుజంలో కోణం 90^0 లకు ఎదురుగా వున్న భుజం ఆ త్రిభుజంలో అతి పొడవైన భుజం, దీనిని "కర్ణం" అంటారు. పై త్రిభుజంలో 'AB' భుజం "కర్ణం" అవుతుంది.

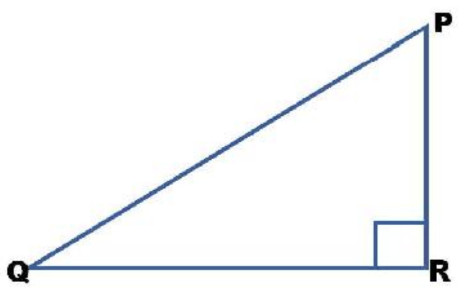
పైథాగొరస్ సిద్ధాంతం ఒక లంబ కోణ త్రిభుజంలో "*కర్ణం మీది వర్గం మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానం*".

పైథాగొరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $AB^2 = BC^2 + AC^2$. ఒక వేళ $AB = c, BC = a$, $AC = b$ అయితే దీనిని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు $c^2 = a^2 + b^2$.

ఈ సిద్ధాంతం ఆధారంగా ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు భుజాల పొడవులు ఇచ్చినట్లయితే మిగిలిన భుజం యొక్క పొడవును తెలుసుకోవచ్చు.

ఉదాహరణ 1 : ΔPQR లో R వద్ద లంబకోణం, PR = 7 సెం మీ. మరియు QR = 24 సెం.మీ. అయిన భుజం PQ పొడవును కొనుగొనండి. (ఒక గోడకు ఒక 7 అడుగులు ఎత్తు గల నిచ్చెన అంచులు తాకునట్లుగా ఏటవాలుగా వేయబడింది. ఆ నిచ్చెన అడుగు భాగం ఆ గోడ పాదం నుండి భూమికి సమాంతరంగా 24 అడుగుల దూరంలో భూమిని తాకుతుంది. అయిన ఆ నిచ్చెన పొడవును కొనుగొనండి.)

సాధన : ΔPQR లో R వద్ద లంబకోణం, PR = 7 సెం.మీ. QR = 24 సెం.మీ. ఇవ్వబడింది. PQ భుజం $\angle R = 90^0$ అనేది కర్ణం.



పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

$= 7^2 + 24^2$

$= 49 + 576 = 625 = 25^2$

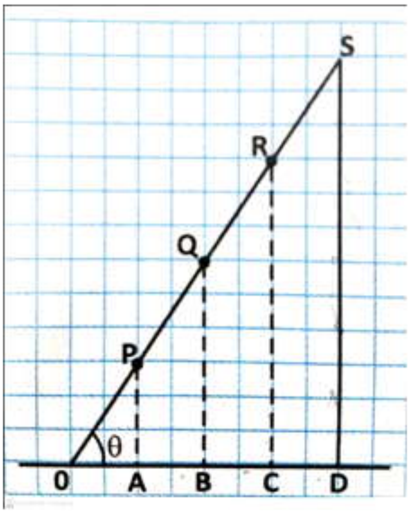
కాబట్టి $PQ^2 = 25^2$, అప్పుడు PQ = 25

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 396 06-02-2021 14:54

త్రిభుజంలోని భుజాలు మరియు కోణాల మధ్య సంబంధం

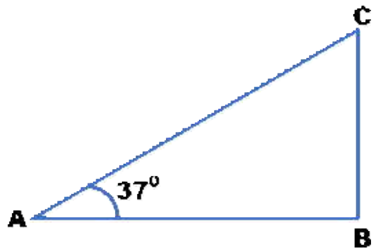
కృత్యం :

లంబకోణ త్రిభుజంలో OA భూమి, లంబము PA, మరియు కర్ణం OP.



వ.సం.	భూమి (సెం.మీ)	ఎత్తు(సెం.మీ)	శాతం
1.	2	3	$\frac{2}{3}$
2.	4	6	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
3.	6	9	$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
4.	8	12	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

ఇదేవిధంగా, మీరు మిగిలిన అన్ని అల్ప కోణాలకు సంబంధాలను ఏర్పరచగలరు.

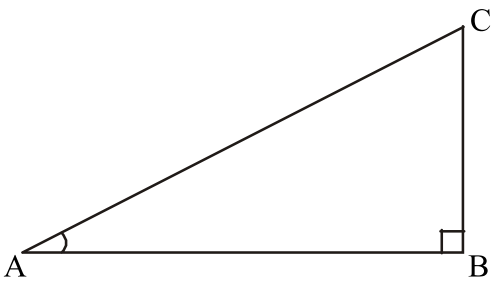


37^0 కోణాన్ని తీసుకుని ఇదే కృత్యాన్ని తిరిగి కొనసాగించండి.

కర్ణం 5 సెం.మీ., 10 సెం.మీ., 15 సెం.మీ., లు గా తీసుకొని ఎత్తు కనుగొనండి.

ఇక్కడ 37^0 కోణాన్ని కలిగి వున్న భుజాల పొడవుల నిష్పత్తి స్థిరంగా వుండడం మీరు గమనించే వుంటారు.

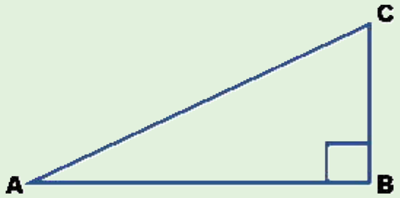
కర్ణం AC పొడవు	భుజం BC పొడవు
5 సెం.మీ	3 సెం.మీ
10 సెం.మీ	6 సెం.మీ
15 సెం.మీ	9 సెం.మీ
20 సెం.మీ	12 సెం.మీ
25 సెం.మీ	15 సెం.మీ



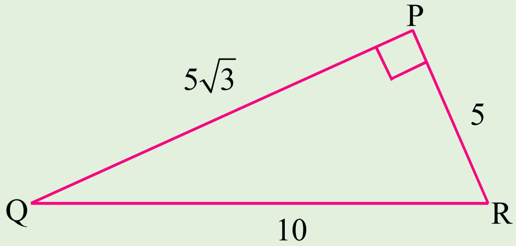
ఇంకా, $\angle C$ అల్పకోణం, దీనికి ఎదుటి భుజం AB. BC ఆసన్న భుజం AC.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 397 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.



1. ప్రక్క త్రిభుజంలో కర్ణమును, కోణం $\angle A$ కు ఎదుటి భుజాన్ని మరియు ఆసన్నభుజాన్ని గుర్తించండి.
2. ప్రక్క పటంలో, కింది కొలతలు రాయండి.
   (i) $\angle Q$ కు ఎదుటి భుజం, ఆసన్న భుజం మరియు కర్ణం
   (ii) $\angle R$ కు ఎదుటి భుజం, ఆసన్న భుజం మరియు కర్ణం

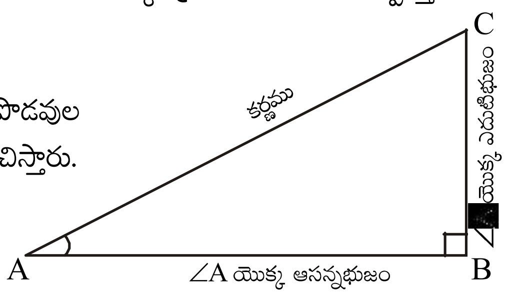


3. త్రిభుజం ΔPQRలో $\angle P = 90^0$, $\angle Q = \theta$ PQ = 17సెం.మీ., QR = 15 సెం.మీ., PR = 8, అయిన θ కు ఎదుటి భుజాన్ని, ఆసన్న భుజాన్ని, కర్ణమును కనుగొనండి.

దీని ద్వారా, లంబకోణం త్రిభుజంలో, అల్పకోణం దృష్ట్యా అన్ని భుజాలు స్థిర నిష్పత్తిని కలిగి వుంటాయి అని తెలుస్తున్నది.

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

ఒక లంబకోణ త్రిభుజం $\angle A$ లో కోణం ABC యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ఇలా నిర్వచించబడినవి.



ఎందుకనగా $\angle A$ కు ఎదుటి భుజం మరియు కర్ణం పొడవుల నిష్పత్తి స్థిరంగా వుంటుంది, ఈ నిష్పత్తిని 'sine A' గా సూచిస్తారు.

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC}$$

అదేవిధంగా, $\angle A$ కు ఆసన్న భుజం మరియు కర్ణం పొడవుల నిష్పత్తి స్థిరంగా వుంటుంది, ఈ నిష్పత్తిని 'cosine A' గా సూచిస్తారు.

$$\text{cosine } A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{AB}{AC}$$

ఇవేకాకుండా, $\angle A$ కు ఎదుటి భుజం మరియు ఆసన్న భుజం పొడవుల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉంటుంది. ఈ విషయం 'tangent A' గా సూచిస్తారు.

$$\text{tangent } A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}} = \frac{BC}{AB}$$

పైన చర్చించిన 'sine A', 'cosine A' మరియు 'tangent A' లను వరుసగా 'sin A', 'cos A' మరియు 'tan A' లుగా సూచిస్తారు.

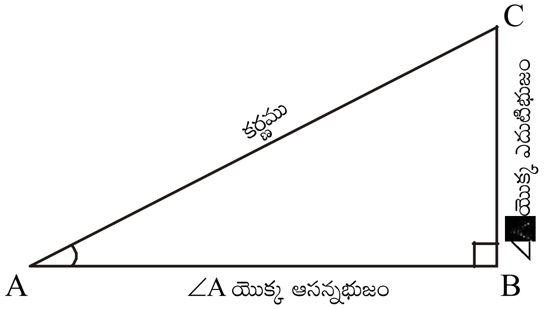
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 398 06-02-2021 14:54

$\angle A = \theta$ అనుకోండి. అప్పుడు విలువలు

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

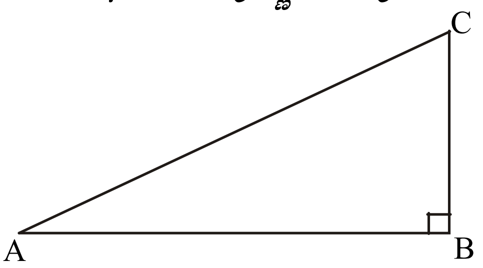


త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు ఎప్పుడూ త్రిభుజంలోని కోణాల మీద ఆధారపడి నిర్ణయించబడతాయి. వివిధ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు వివిధ కోణాలకు వేరు వేరుగా ఉంటాయి. ఉదాహరణకు $\sin 30^0$ యొక్క విలువ $\sin 60^0$ యొక్క విలువ కన్నా తక్కువ. ఇక్కడ, కోణాలు వేరుగా ఉన్నాయి. కాబట్టి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

30^0 ల కోణమునకు ఈ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను గురించి సూచిద్దాం.

ముందు చర్చించిన కృత్యం ద్వారా ***"30^0 ల కోణమునకు ఎదుటి భుజం పొడవు కర్ణం పొడవులో సగం ఉంటుంది"*** అని మనకు తెలుసు.

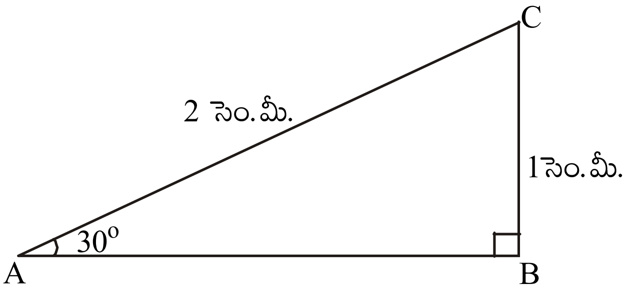
ఉదాహరణ 2 : త్రిభుజం ΔABCలో, $\angle B = 90^0$, $\angle A = 30^0$ మరియు కర్ణం AC = 2 సెం.మీ. గా తీసుకున్నచో, 30^0 ల కోణానికి ఎదుటి భుజం BC = 1 అవుతుంది.



అప్పుడు, $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 2^2 - 1^2$

$= 4 - 1 = 3$



$AB^2 = 3$ కాబట్టి $AB = \sqrt{3}$ సెం.మీ.

$AB = \sqrt{3}$ సెం.మీ, BC = 1 సెం.మీ. మరియు AC = 2 సెం.మీ.

గా మనం పొందగలిగాను. దీని నుండి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు (30^o ల కోణమునకు)

$$\sin 30^o = \frac{30^o \text{ ల కోణానికి ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

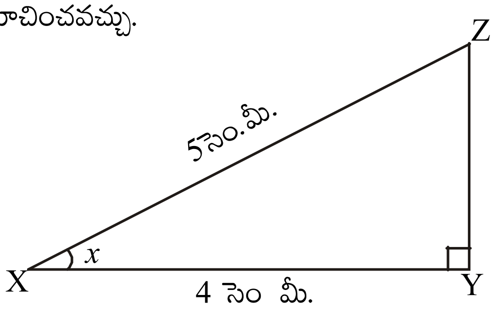
$$\cos 30^o = \frac{30^o \text{ ల కోణానికి ఆసన్నభుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{30^o \text{ ల కోణానికి ఎదుటి భుజం}}{30^o \text{ ల కోణానికి ఆసన్న భుజం}} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 399
06-02-2021 14:54

ఉదాహరణ 3 : త్రిభుజం XYZ లో $\angle Y = 90^0$, $\angle X = x^0$, XZ = 5 సెం.మీ. మరియు XY = 4 సెం.మీ. అయిన *sinx, cosx and tanx*. విలువలు కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన సమాచారాన్ని ప్రక్కటం ద్వారా సూచించవచ్చు.



ఇక్కడ $\angle X = x$, XZ = 5 సెం.మీ.

XY = 4 సెం.మీ అని తెలుసు.

మిగిలిన భుజం YZ పొడవు కనుగొనాలి.

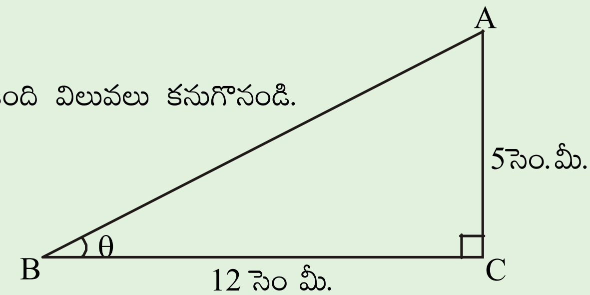
$YZ^2 = XZ^2 - XY^2 = 5^2 - 4^2$

$= 25 - 16 = 9 = 3^2$.

కాబట్టి YZ = 3 సెం.మీ., XZ = 5 సెం.మీ. మరియు XY = 4 సెం.మీ.

$\therefore \sin x = \frac{YZ}{XZ} = \frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{XY}{XZ} = \frac{4}{5}$ మరియు $\tan x = \frac{YZ}{XY} = \frac{3}{4}$

మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.



1. ప్రక్క పటంలోని సమాచారం ఆధారంగా కింది విలువలు కనుగొనండి.
   (i) sin A, cos A మరియు tan A
   (ii) sin C, cos C మరియు tan C
2. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔPQRలో R వద్ద లంబకోణం కలిగి $\angle P = \theta$, PR = 5 సెం మీ. మరియు QR = 12సెం.మీ. అయిన, *sin* θ, *cos* θ మరియు *tan* θ విలువలను కనుగొనండి.
3. ఒక లంబకోణత్రిభుజం ΔABCలో B వద్ద లంబకోణం కలిగి, AC = 10 సెం మీ. మరియు AB = 6 సెం.మీ. అయిన, sin C, cos C మరియు tan C ల విలువలు కనుగొనండి.
4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔPQR లో Q వద్ద లంబకోణం కలిగి, PQ =5 సెం మీ. మరియు PR = 7సెం మీ. అయిన , sin P, cos P, sin R మరియు cos R. sin P – cos R విలువలను కనుగొనండి.

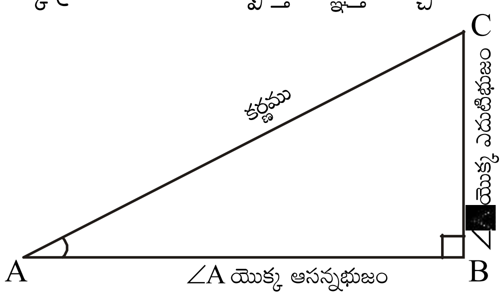
త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలోమ నిష్పత్తులు

ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔABC లో కోణం $\angle A$ యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు జ్ఞప్తి తెచ్చుకోండి.

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}} = \frac{BC}{AB}$$



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 400 06-02-2021 14:54

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు sin A, cos A, tan A లకు వరుసగా cosecant A, secant A మరియు cotangent A విలోమ నిష్పత్తులుగా పేర్కొనబడినవి.

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు	విలోమ నిష్పత్తులు
$\sin A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{BC}{AC}$	$\text{cosecant } A = \dfrac{\text{కర్ణం}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}} = \dfrac{AC}{BC}$
$\cos A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}} = \dfrac{AB}{AC}$	$\text{secant } A = \dfrac{\text{కర్ణం}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}} = \dfrac{AC}{AB}$
$\tan A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}} = \dfrac{BC}{AB}$	$\text{cotangent } A = \dfrac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}} = \dfrac{AB}{BC}$

పై త్రికోణమితీయ విలోమ నిష్పత్తులు cosecant A, secant A, cotangent A లు వరుసగా cosec A, sec A మరియు cot A గా క్లుప్తంగా సూచించబడతాయి.

$\sin x = \dfrac{3}{5}$ అయితే $\operatorname{cosec} x = \dfrac{5}{3}$

$\cos x = \dfrac{4}{5}$ అయితే $\sec x = \dfrac{5}{4}$

మరియు $\tan x = \dfrac{3}{4}$ అయితే $\cot x = \dfrac{4}{3}$

1. Sin A లేదా sin అనేది ఒక సంజ్ఞ మరియు sin అనేది A లేదా θ నుండి విడదీయబడదు.
2. sin అనేది sin × θ కు సమానం కాదు. ఇదే నియమం అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులకు వర్తిస్తుంది.
3. ప్రతీ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి ఒక వాస్తవ సంఖ్య

   ఇంకా (ఒక సంఖ్య a) × (a యొక్క గుణకార విలోమం) = 1 అని మనకు తెలుసు.

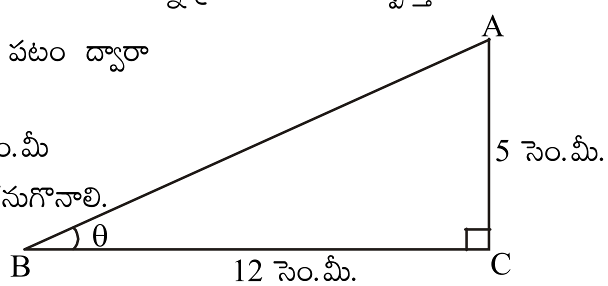
   ఇదేవిధంగా, పైన పరిశీలించిన వాటి నుండి, మనకు

   $$\sin x \times \operatorname{cosec} x = 1$$
   $$\cos x \times \sec x = 1$$
   $$\tan x \times \cot x = 1$$

   అని తెలుస్తుంది. వీటిని ఉపయోగించి కొన్ని సమస్యలు సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 4 : లంబకోణత్రిభుజం ΔABC లో C వద్ద లంబకోణం కలిగి $\angle B = 90^0$ ఇంకా AC = 5సెం.మీ. మరియు BC = 12 సెం.మీ. అయితే θ^0 కు అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు కనుగొనండి.

సాధన : సమస్యలో ఇచ్చిన సమాచారాన్ని ప్రక్క పటం ద్వారా సూచించవచ్చు.



ఇంకా AC = 5సెం.మీ మరియు BC = 12 సెం.మీ అని ఇవ్వబడింది. మనం కర్ణం AB పొడవును కనుగొనాలి.

∠B = θ.

ఇంకా $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 401 06-02-2021 14:54

AB = 13 సెం.మీ. మరియు మనకు AC = 5 సెం.మీ మరియు BC = 12 సెం.మీ. అని ఇవ్వబడింది.

$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$ మరియు $\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ అయితే $\text{cosec}\ \theta = \frac{13}{5}$

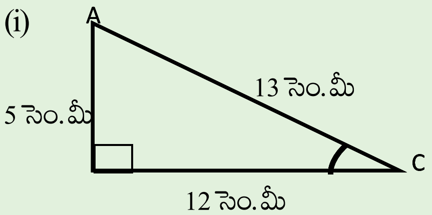
$\cos\theta = \frac{12}{13}$ అయితే $\sec\theta = \frac{13}{12}$

మరియు $\tan\theta = \frac{5}{12}$ అయితే $\cot\theta = \frac{12}{5}$.

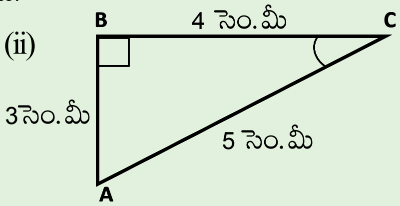
మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.

1. ఇవ్వబడిన ప్రతీ పటంలో ΔABC ఒక లంబకోణత్రిభుజంలో B వద్ద లంబకోణం కలిగి వుంటే, 'θ'కు అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు కనుగొనండి.

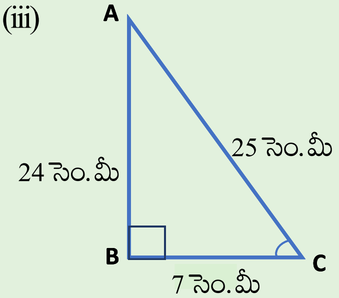
(i)



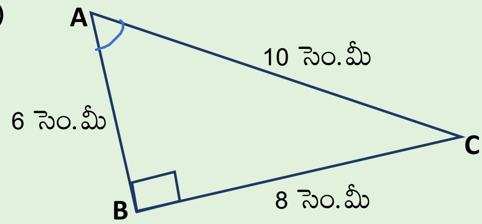
(ii)



(iii)



(iv)



2. $\sin\theta = \frac{x}{y}$, $\cos\theta = \frac{z}{y}$ మరియు $\tan\theta = \frac{x}{z}$ అయితే $\text{cosec}\ \theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ విలువలు కనుగొనండి?

3. లంబకోణత్రిభుజం ΔPQR లో R వద్ద లంబకోణం కలిగి వుంటే, $\angle Q = z$ ఇంకా PR = 15సెం.మీ. మరియు QR = 8 సెం.మీ. అయితే z కు అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు కనుగొనండి.

4. లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో $\angle B = 90^0$ ఇంకా BC = 5 సెం.మీ, AB = 4 సెం.మీ, మరియు $AC=\sqrt{41}$ అయితే sin A, cos A మరియు tanA విలువలను కనుగొనండి.

5. లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో AB = 40 సెం.మీ, BC = 9 సెం.మీ. మరియు AC = 41సెం.మీ, అయితే sin C, cot C, cos A మరియు cot A విలువలను కనుగొనండి.

6. లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో $\angle B = 90^0$ ఇంకా AB = BC = 2సెం.మీ మరియు $AC = 2\sqrt{2}$ సెం.మీ. sec C, cosec C, మరియు cot C విలువలను కనుగొనండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 402 06-02-2021 14:54

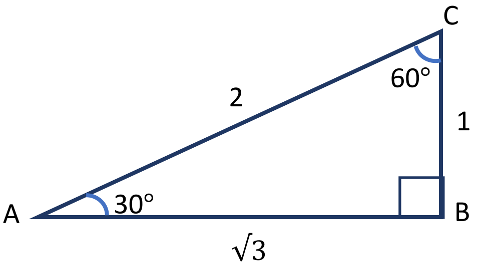
6.3 త్రిమితీయ నిష్పత్తుల విలోమ నిష్పత్తులు (0°,30°,45°, 60°, 90°)

మనం ఇప్పటికీ 30^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు తెలుసుకున్నాము.

30^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

లంబకోణ త్రిభుజంలో 30^0, 60^0, 90^0 కోణాలకు ఎదురుగా వున్న భుజాల పొడవులు నిష్పత్తి $1:\sqrt{3}:2$.

లంబకోణ త్రిభుజం ΔABC లో $\angle B = 90^0$, $\angle A = 30^0$, $\angle C = 60^0$ లుగా ఉన్నాయనుకుంటే మరియు 30^0 ఎదుటి భుజం BC భుజం పొడవు 1 యూనిట్ అనుకుంటే $AB = \sqrt{3}$ యూనిట్లు మరియు AC = 2 యూనిట్లు. అయితే



$\sin 30^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ అయితే $\operatorname{cosec} 30^0 = 2$

$\cos 30^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అయితే $\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ అయితే $\cot 30^0 = \sqrt{3}$

త్రికోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు 60^0

60^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు తెలుసుకుందాము.

త్రిభుజం ΔABC లో పైన ఉదాహరణలో పేర్కొన్నట్లు

60^0 కోణానికి ఎదుటి భుజం $= \sqrt{3}$

ఆసన్నభుజం $= 1$

కర్ణం $= 2$

$\sin 60^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అయితే $\operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos 60^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ అయితే $\sec 60^0 = 2$

$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ అయితే $\cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

45^0 త్రికోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

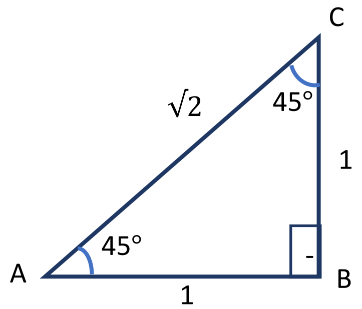
అనగా 45^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు తెలుసుకుందాము.

45^0, 45^0, 90^0 లు కోణాలుగా గల ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజంగా తీసుకుంటే

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 403
06-02-2021 14:54

AB = 1 యూనిట్ మరియు AB = BC

అయితే BC = 1 యూనిట్



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 1^2 + 1^2 = 1 + 1$$

$$AC^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

$\angle A = 45$ ఎదుటి భుజం BC = 1

ఆసన్నభుజం AB = 1

కర్ణం AC = $\sqrt{2}$

$$\text{Sin } 45^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{cosec}45^0 = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45^0 = \sqrt{2}$$

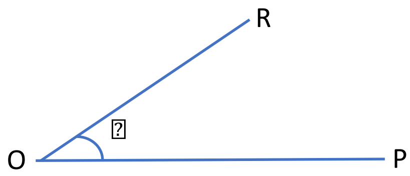
$$\tan 45^0 = \frac{BC}{AB} = 1 \qquad \cot 45^0 = 1$$

0^0, 90^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

0^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు తెలుసుకుందాము.

ఒక క్షితిజ సమాంతర రేఖ OP పొడవు 1 యూనిట్ కన్నా ఎక్కువ వుండేలా తీసుకుందాం.

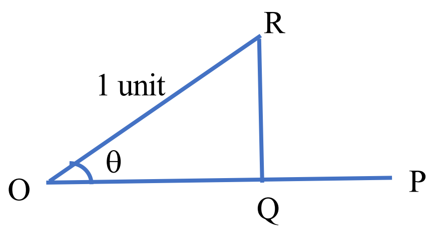
ఒక సరళరేఖ OR = 1 యూనిట్ పొడవు కలిగి మరియు OP తో θ కోణము చేస్తున్నది అనుకొనిన



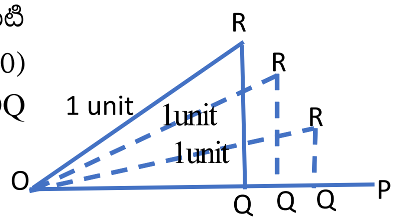
RQ ఎత్తు θ కోణానికి ఎదుటి భుజం అవుతుంది.

OP తో OR చేయు కోణం θ విలువ తగ్గుతున్న కొద్ది ఎదుటి భుజం RQ పొడవు ఏమవుతుంది?

అవును, మీ సమాధానం సరైనది.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 404 06-02-2021 14:54



OP తో OR చేయు కోణం θ విలువ తగ్గుతున్న కొద్దీ ఎదుటి భుజం RQ పొడవు తగ్గుతున్నది ఎదుటి భుజం పొడవు సున్నా (0) అయితే కోణం 'θ' విలువ "0" సున్నా. క్రమంగా OR అనేది OQ రేఖతో కలిసిపోతు మరియు OR = OQ

అప్పుడు $\theta = 0^0$,

ఎదుటి భుజం RQ = 0, ఆసన్న భుజం OQ = OR = 1యూనిట్

$$\sin 0^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \operatorname{cosec} 0^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{0} = \text{(నిర్వచించలేము)}$$

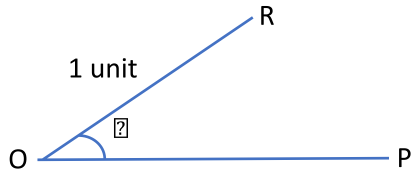
$$\cos 0^0 = \frac{OQ}{OR} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec 0^0 = \frac{OR}{OQ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cot 0^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{0} = \text{(నిర్వచించలేము)}$$

అనగా 90^0 కోణానికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు తెలుసుకుందాము.

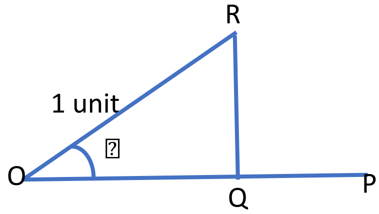
సమాంతర రేఖ OP పొడవు 1యూనిట్ కన్నా ఎక్కువ వుండేలా తీసుకుందాం.

సరళ రేఖ OR = 1యూనిట్ పొడవు కలిగి మరియు OP తో θ కోణం చేస్తున్నది అనుకోనిన



RQ ఎత్తు θ కోణానికి ఎదుటి భుజం అవుతుంది.

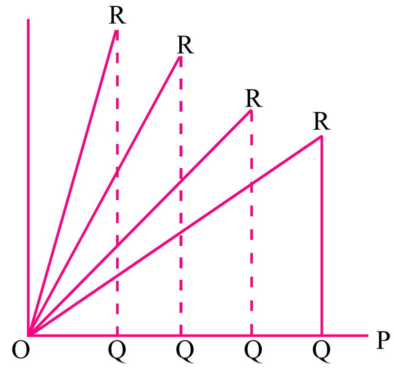
అప్పుడు, కోణం θ విలువ పెంచుతూ వుండండి.



OR చేయు కోణం 'θ' విలువ పెరుగుతున్న కొద్దీ

ఎదుటి భుజం RQ పొడవు ఏమవుతుంది?

అవును, మీ సమాధానం సరైనదే.



OP తో OR చేయు కోణం θ విలువ పెరుగుతున్న కొద్దీ ఎదుటి భుజం RQ పొడవు పెరుగుతున్నది. కోణం 'θ' విలువ 90^0 లు చేరుకున్నచో, $\theta = 90^0$ అయినప్పుడు భుజం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 405
06-02-2021 14:54

RQ = O ఎదుటి భుజం OQ = 1 యూనిట్

$\sin 90^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad$ $\operatorname{cosec} 90^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{0} =$ (నిర్వచించలేము.)

$\cos 90^0 = \frac{OQ}{OR} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad$ $\sec 90^0 = \frac{OR}{OQ} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 90^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad$ $\cot 90^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{0} =$ (నిర్వచించలేము.)

ఇప్పుడు పైన తెలుసుకున్న త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ మరియు 90^o ల విలువలను ఒకేసారి క్రోడీకరించి వ్రాసి చూద్దాం.

కోణం θ / నిష్పత్తి	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించలేము
cosec θ	నిర్వచించలేము	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించలేము
cot θ	నిర్వచించలేము	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

sin యొక్క విలువ కోణం 30^0 ల వద్ద ఎల్లప్పుడూ $\frac{1}{2}$ గానే వుంటుందని మరొక్కసారి అర్థం అవుతుంది.

అనగా $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ ఇలాగే మిగిలిన అన్ని త్రికోణమితీయ విలువలు పైన పేర్కొన్న విధంగా ఎల్లప్పుడూ ఉంటాయి.

గమనిక: అవసరానికి అనుకూలంగా $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$ మరియు $(\tan\theta)^2$ లకు బదులుగా వరుసగా $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\tan^2\theta$ లుగా రాస్తాము. ఇలాగే త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల గరిష్ఠ ఘాతాలను ఈ రూపంలోనే రాసుకుంటాము.

ఉదాహరణ 5 : $\cos 60^0 + \sin 30^0 - \tan 45^0$ యొక్క విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ మరియు $\tan 45^0 = 1$ అని మనకు తెలుసు.

$$\cos 60^0 + \sin 30^0 - \tan 45^0$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$
$$= 1 - 1 = 0$$

ఉదాహరణ 6 : $\cot^2 30^0 + \sec^2 45^0 + \text{cosec}^2 45^0 \cos 60^0$ యొక్క విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $\cot 30^0 = \sqrt{3}$, $\sec 45^0 = \sqrt{2}$ మరియు $\text{cosec } 45^0 = \sqrt{2}$ మరియు $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ అని మనకు తెలుసు.

$$\cot^2 30^0 + \sec^2 45^0 + \text{cosec}^2 45^0 \cos 60^0$$
$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$
$$= 3 + 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 5 + 1 = 6$$

ఉదాహరణ 7 : $\frac{\tan 45^0}{\text{cosec } 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5 \sin 90^0}{2 \cos 0^0}$ యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $\tan 45^0 = 1$, $\text{cosec } 30^0 = 2$, $\sec 60^0 = 2$,

$\cot 45^0 = 1$, $\sin 90^0 = 1$ మరియు $\cos 0^0 = 1$

$$\frac{\tan 45^0}{\text{cosec } 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5 \sin 90^0}{2 \cos 0^0}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5 \times 1}{2 \times 1}$$
$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2}$$
$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0.$$

ఉదాహరణ 8 : $A = 30^0$ వద్ద $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ ను సరిచూడుము.

సాధన : $A = 30^0$ లుగా ఇవ్వబడినవి. మరియు $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ మరియు $\tan 60^0 = \sqrt{3}$ అని మనకు తెలుసు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 407 06-02-2021 14:54

LHS = tan2A = tan (2×30^0) = tan $60^0 = \sqrt{3}$

$$\text{RHS} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0} = \frac{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

ఉదాహరణ 9 : $\sin(A + B) = 1$ మరియు $\cos(A - B) = 1$, $0^0 < A + B \le 90^0$, $A \ge B$, అయితే A మరియు B.

సాధన : $\sin(A + B) = 1$ అని ఇవ్వబడినది మరియు $\sin 90^0 = 1$ అని మనకు తెలుసు.

$\sin(A + B) = \sin 90^0$

$\therefore \quad A + B = 90^0 \qquad$ ...(i)

మరియు, $\cos(A - B) = 1$ అని ఇవ్వబడినది. ఇంకా ఈ $\cos 0^0 = 1$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad A - B = 0^0 \qquad$ ...(ii)

(i) మరియు (ii) లను కూడగా

$A + B + A - B = 90^0$

$2A = 90^0$ or $A = 45^0$

(ii) నుండి, మనకు $B = A = 45^0$ వస్తుంది.

అందువల్ల, $A = 45^0$ మరియు $B = 45^0$.

ఉదాహరణ 10 : $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$ అయిన x విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$ అని ఇవ్వబడినది. ఇంకా $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ & $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

అని మనకు తెలుసు.

అప్పుడు, $\cos(20^0 + x) = \cos 60^0$

$\therefore \quad (20^0 + x) = 60^0$

లేదా $x = 60^0 - 20^0 = 40^0$

అందువల్ల, $x = 40^0$.

ఉదాహరణ 11 : $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ అయిన x విలువ కనుగొనండి.

సాధన : $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ అని ఇవ్వబడినది.

లేదా $\tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^0$

$2x = 60^0$ then $x = 30^0$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 408 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.

1. క్రింది వాటి విలువలు కనుగొనండి.

   (i) $\sin^2 60^0 + \cos^2 45^0$

   (ii) $2\sin^2 30^0 - 2\cos^2 45^0 + \tan 2\ 60^0$

   (iii) $4\sin^2 60^0 + 3\tan^2 30^0 - 8\sin^2 45^0 \cos 45^0$

   (iv) $4(\sin^4 30^0 + \cos^4 60^0) - 3(\cos^2 45^0 - 2\sin^2 45^0)$

   (v) $\dfrac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. $\angle A = 30^0$ వద్ద క్రింద నియబడిన సమీకరణాలు సరిచూడండి.

   (i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

   (ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

   (iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

4. $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \dfrac{1}{2}$, $0^0 < A + B < 90^0$, $A > B$ అయినచో A మరియు B ని కనుగొనండి.

5. $\sin(A+2B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ మరియు $\cos(A+4B) = 0$, అయినచో A మరియు B ని కనుగొనండి.

6. $\cos(40^0 + 2x) = \sin 30^0$, అయిన x విలువ ఎంత?

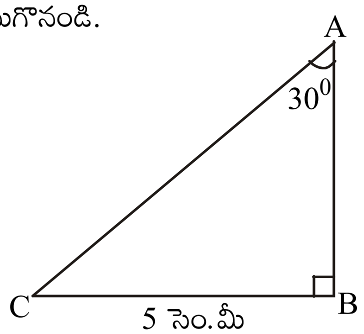
త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను వినియోగించి సమస్యలు సాధిద్దాం.

మనం ఇప్పటివరకు ప్రత్యేక కోణాలు (0º, 30º,45º, 60º మరియు 90º) వీటికి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు సుదీర్ఘంగా చర్చించాము, నిర్ణయించాము.

వీరి నిజజీవితంలో వీటి ఉపయోగం ఏమిటి?

అసలు ఎందుకు ఈ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల గూర్చి తెలుసుకోవాలి?

ఉదాహరణ 12 : ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో Bవద్ద లంబకోణం కలిగి, BC = 5 సెం.మీ, $\angle BAC = 30^0$ లుగా ఉన్నచో భుజాలు AB మరియు ACల పొడవులు కనుగొనండి.



సాధన : $\angle BAC = 30^0$ అని ఇవ్వబడింది. అనగా $\angle A = 30^0$ మరియు BC = 5 సెం.మీ అని ఇవ్వబడినది.

ఇప్పుడు $\sin A = \dfrac{BC}{AC}$

$\sin 30^0 = \dfrac{5}{AC}$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$AC = 2 \times 5 = 10$ సెం.మీ.

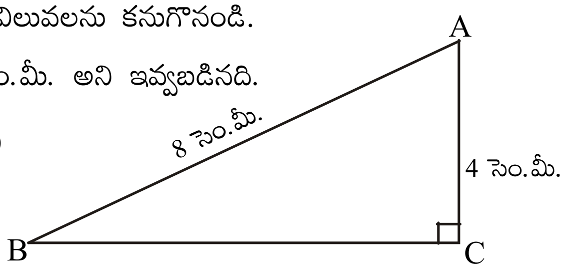
పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి

$AB^2 = AC^2 - BC^2$ (OR) $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$AB = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ సెం.మీ.

అందువల్ల, $AC = 10$ సెం.మీ మరియు $AB = 5\sqrt{3}$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ 13 : ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో, C వద్ద లంబకోణం $AC = 4$ సెం.మీ. మరియు $AB = 8$ సెం.మీ. అయినచో $\angle A$ మరియు $\angle B$ విలువలను కనుగొనండి.



సాధన : $AC = 4$ సెం.మీ. మరియు $AB = 8$ సెం.మీ. అని ఇవ్వబడినది.

ఇప్పుడు $\sin B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

$B = 30^0$ లేదా $\angle B = 30^0$

ఇప్పుడు, ΔABC లో $\angle A + \angle B = 90^0$ మరియు $\angle C = 90^0$ అని తెలుసు.

$\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$\therefore \angle A = 60^0$ మరియు $\angle B = 30^0$.

మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.

1. లంబకోణ త్రిభుజం ΔXYZ లో లంబకోణం Z వద్ద కలిగి, $XY = 50$ సెం.మీ. మరియు $\angle X = 45^0$ లుగా ఉన్నట్లయితే YZ మరియు XZ లను కనుగొనండి.
2. లంబకోణ త్రిభుజం ΔPQRలో లంబకోణం Qవద్ద కలిగి, $PQ = 5$ సెం.మీ. మరియు $\angle R = 30^0$ లుగా ఉన్నట్లయితే QR మరియు PR లను కనుక్కోండి.
3. లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో $\angle B = 90^0$, $AB = 600$ సెం.మీ మరియు $AC = 1200$ సెం.మీ. ఉన్నట్లయితే $\angle A$ మరియు $\angle C$ లను కనుక్కోండి.
4. లంబకోణ త్రిభుజం ΔMPCలో, $\angle M = 90^0$, $MP = 50\sqrt{2}$ సెం.మీ. మరియు $PC = 50$ సెం.మీ. లుగా ఉన్నట్లయితే $\angle P$ మరియు $\angle C$ లను కనుక్కోండి.
5. లంబకోణ త్రిభుజం ΔGODలో, లంబకోణం 'O' వద్ద కలిగి, $OD = 30$ మరియు $\angle G = 36.87^0$ లుగా ఉన్నట్లయితే GO మరియు GD లను కనుగొనండి.

   [ఇక్కడ $\tan(36.87^0) = \frac{3}{4}$ గా ఇవ్వబడినది]

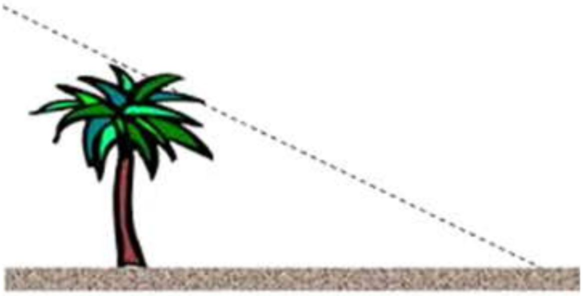
TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 410 06-02-2021 14:54

6.4 త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల అనువర్తనాలు - ఎత్తులు, దూరాలు

మీరు అత్యంత ఎత్తయిన ఎవరెస్టు శిఖరం గురించి వినే ఉంటారు. దాని ఎత్తు 8,848 మీ. లేదా 29,029 అడుగులు మన తెలంగాణలోని ఆదిలాబాద్ జిల్లాలో గల కుంటాల జలపాతం యొక్క ఎత్తు 45 మీ లేదా 150 అడుగులు అలాంటి వాటి ఎత్తు సాధారణంగా కొలవడం సాధ్యమేనా? కాదు కదా. మరి ఇలాంటి వాటి ఎత్తు కనుగొనడం ఎలా? ఊహించండి.

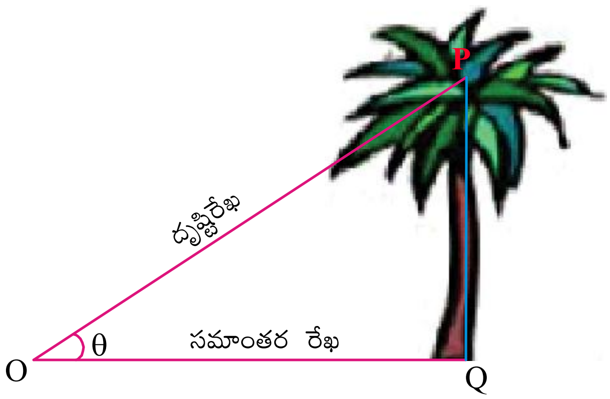
ఇదేవిధంగా ఒక కొబ్బరి చెట్టును చూసినప్పుడు దాని ఎత్తు ఎంత? అనే ప్రశ్న మన మెదడులో తలెత్తుతుంది.

ఒక పద్ధతి ప్రకారం కొలవకుండా ఆ కొబ్బరి చెట్టు ఎత్తు ఎంతో కనుగొనగలరా?



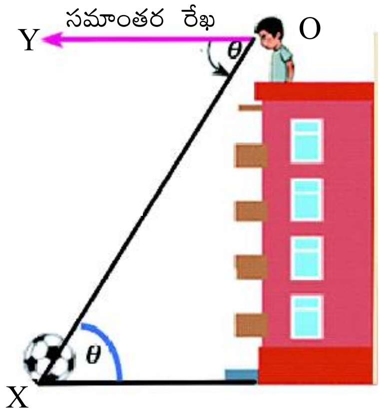
ఊర్ధ్వకోణం

ఒక పరిశీలకుడు (O) తన కన్నా ఎత్తైన వస్తువు (P) ను చూస్తున్నాడు అనుకోండి. అప్పుడు పరిశీలకుడు తన కళ్ళను(తలను పైకెత్తవలసి ఉంటుంది) ఆ వస్తువు వైపు నుంచి చూస్తున్నప్పుడు పరిశీలకుడి కన్ను దృష్టి మరియు వస్తువును కలిపి రేఖ (దృష్టిరేఖ)తో 'క్షితిజ సమాంతర రేఖ'కు మధ్య ఏర్పడు కోణాన్ని ఊర్ధ్వకోణం అవుతుంది.



ప్రక్క పటంలో పరిశీలకుడు (O), వస్తువు (P) అయిన OP అనే రేఖ దృష్టి రేఖ మరియు OQ రేఖ క్షితిజ సమాంతర రేఖ అయి 'θ' ఊర్ధ్వకోణం అవుతుంది.

నిమ్నకోణం



పరిశీలకుడు (O) తాను ఎత్తైన ప్రదేశం నుండి కింద నున్న ఒక వస్తువు (P)ను చూస్తున్నప్పుడు 'క్షితిజ సమాంతర రేఖ"కు "దృష్టిరేఖ" కింది వైపుకు ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో క్షితిజ సమాంతర రేఖతో దృష్టిరేఖ చేయు కోణాన్ని నిమ్నకోణం అంటారు. ప్రక్క పటంలో, OX అనేది 'దృష్టిరేఖ' మరియు OY అనేది 'క్షితిజ సమాంతర రేఖ' ఇంకా ఇక్కడ నిమ్నకోణం 'θ' అయితే $\angle O = \angle X = \theta$.

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ఆధారంగా నిజజీవిత సందర్భాలను దృశీకరిద్దాం.

ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలు సాధించడానికి వివిధ సందర్భాలలో ఇచ్చినటువంటి సమాచారాన్ని ఆధారంగా జ్యామితీయ పటాలలో దృశీకరించి లేదా ప్రాతినిధ్యపరచి పరిష్కారాలు కనుగొంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 411
06-02-2021 14:54

ఈ పటాలను గీసేటప్పుడు కింది విషయాలను దృష్టిలో పెట్టుకోవాలి.

(i) గణిత పరంగా సౌలభ్యం కొరకు టవర్లు, చెట్లు, భవనాలు, ఓడలు, పర్వతాలు మొ॥ వాటిని రేఖీయంగానే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

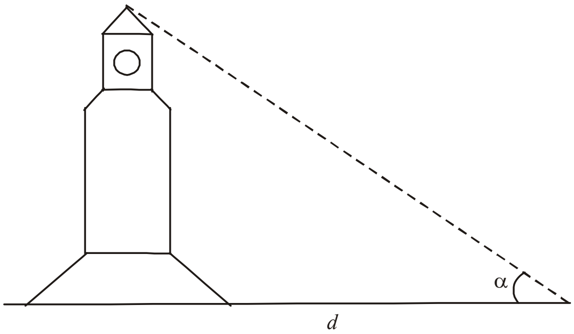
(ii) ఊర్ధ్వకోణం లేదా నిమ్న కోణాన్ని క్షితిజ సమాంతర రేఖ ఆధారంగానే తీసుకోవాలి.

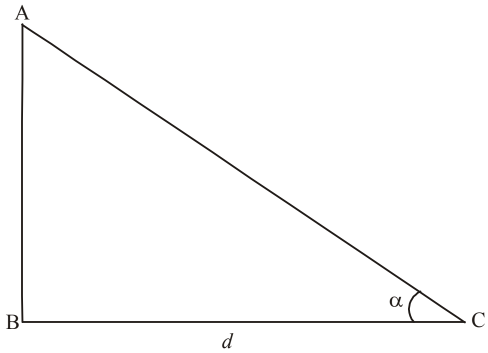
(iii) సమస్యలో పరిశీలిస్తున్న వ్యక్తి ఎత్తు ఇవ్వనట్లైతే, అతడి ఎత్తును ఉపేక్షించి సమస్యను సాధించాలి.

ఎత్తులు మరియు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించే క్రమంలో ఊర్ధ్వ, నిమ్న కోణాలతో ఆ సందర్భాలను జ్యామితీయంగా ఊహించాల్సి ఉంటుంది. సమస్యలను సాధించటానికి వాటికి సంబంధించిన పటాలను గీయడం చాలా ముఖ్యం. ఆ పటాల ఆధారంగా సులభంగా సమస్యలను సాధించవచ్చు. ఇక కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ - 14 : పరిశీలకుని నుండి d మీటర్ల దూరంలో నున్న ఒక క్లాక్ టవర్ యొక్క పై కొన α^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

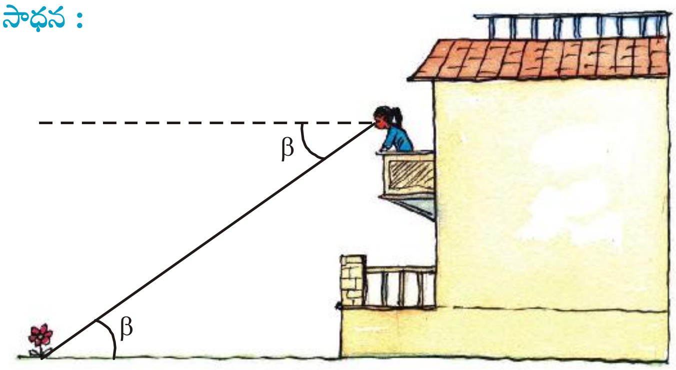
సాధన : సమస్య ఆధారంగా ఈ క్రింది పటం గీయవచ్చు.

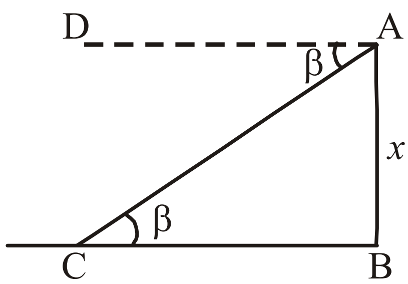




ఉదాహరణ - 15 : రింకి మొదటి అంతస్థులోని బాల్కనీ నుండి బయటి భూమిపై నున్న పూవును β^0 నిమ్నకోణంతో చూస్తుంది. మొదటి అంతస్థు ఎత్తు 'x' మీటర్లు. ఈ సందర్భంలో పటాన్ని గీయండి.

సాధన :



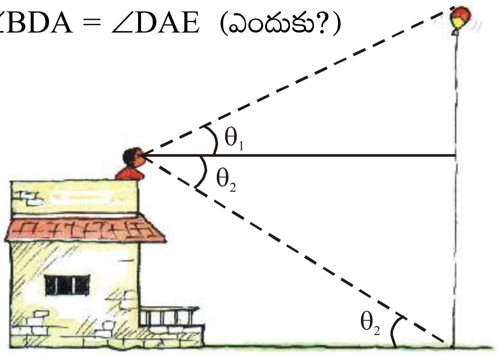


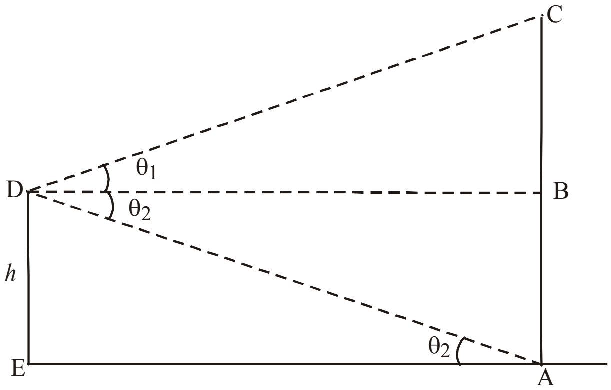
ఇక్కడ $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (ఎందుకు ?)

ఉదాహరణ - 16 : ఒక పెద్ద త్రాడు సహాయంతో ఒక పెద్ద బెలూన్ గాలిలో తేలుతుంది. ఒక భవనంపై నున్న ఒక వ్యక్తి దానిపై భాగాన్ని θ_1 ఊర్ధ్వకోణంతో మరియు త్రాడు అడుగుభాగాన్ని θ_2 నిమ్నకోణంతో పరిశీలించాడు. ఆ భవనం ఎత్తు h అడుగులు. ఈ సందర్భానికి పటాన్ని గీయండి.

సాధన : ఇక్కడ మనం గమనించగా

$\angle BDA = \angle DAE$ (ఎందుకు?)





మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.

1. బంటి ఒక టవరు అడుగు భాగము నుండి 10 మీటర్ల దూరంలో గల ఒక బిందువు నుండి ఆ టవరు పైభాగాన్ని 60^0 ఊర్ధ్వ కోణముతో పరిశీలించాడు. ఈ సమాచారాన్ని సూచించు పటం గీయండి.
2. తనీష్ తన పాఠశాల భవనం పైభాగము నుండి ఆట మైదానంలో పడి ఉన్న ఒక బంతిని 45^0 నిమ్నకోణంతో పరిశీలించాడు. ఆ పాఠశాల భవనము ఎత్తు 20 మీటర్లు. ఈ సమాచారాన్ని సూచించు పటమును గీయండి.
3. భూమితో 60^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తూ ఒక నిచ్చెన గోడకు వాల్చి ఉన్నది. గోడ అడుగుభాగం నుండి నిచ్చెన అడుగుభాగము మధ్యదూరం 1 మీ. ఈ సమాచారాన్ని సూచించు పటమును గీయండి.

ఇప్పటివరకు మనం వివిధ నిజజీవిత సందర్భాలకు సంబంధించిన సమస్యలకు జ్యామితీయ పటాలు గీయడం నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు ఎత్తులు దూరాలకు సంబంధించిన సమస్యల సాధనను తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 17 : ఒక నిచ్చెన ఒక ఇంటి కిటికీకి భూమితో 60^0 ల ఊర్ధ్వకోణము చేస్తూ వాల్చి ఉన్నది. నిచ్చెన పొడవు 10 అడుగులు అయిన గోడ అడుగుభాగం నుండి నిచ్చెన అడుగు భాగానికి గల మధ్య దూరం కనుగొనుము.

సాధన : AC అనేది నిచ్చెన పొడవు, నిచ్చెన BC గోడను వాల్చి ఉంది. AC భుజం, భూమి (AB) తో 60^0 ల ఊర్ధ్వ కోణము చేస్తుంది.

AC = 10 అడుగులు అని ఇవ్వబడినది.

మనం నిచ్చెన అడుగుభాగము A నుండి గోడ అడుగుభాగం B వరకు గల దూరాన్ని కనుగొనాలి.

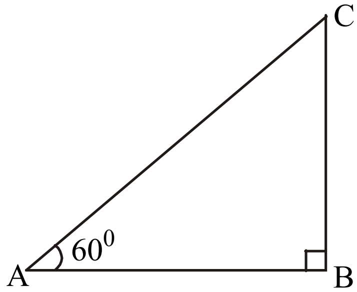
అనగా AB పొడవు

$\angle A$, AC మరియు AB ల మధ్య సంబంధం

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 60^0 = \frac{AB}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{10}$$



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 413
06-02-2021 14:54

$$AB = \frac{10}{2} = 5 \text{ అడుగులు.}$$

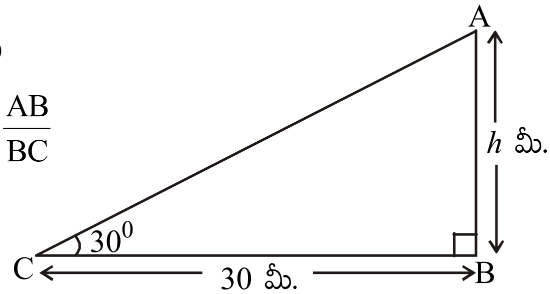
నిచ్చెన అడుగుభాగము A నుండి గోడ అడుగుభాగం B వరకు గల దూరం 5 అడుగులు.

ఉదాహరణ 18 : భూమిపై ఒక టవరు నిటారుగా నిర్మించబడినది. ఆ టవరు పై భాగం, ఆ టవరు అడుగు భాగం నుండి 30 మీ. దూరంలోని బిందువు నుండి 30^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఆ టవరు ఎత్తును కనుగొనండి. ($\sqrt{3} = 1.73$ గా తీసుకోండి.)

సాధన : టవరును ABగా సూచిస్తూ h మీ. ఎత్తుగా తీసుకొందాం.

టవరు అడుగుభాగం నుండి 30 మీ దూరంలో గల బిందువు 'C'గా తీసుకొనిన (భూమిపై)

$$BC = 30 \text{ మీ}$$



ఇంకా సమస్యలో ఇచ్చిన దాన్నిబట్టి, $\angle BCA = 30^0$

ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో, $\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

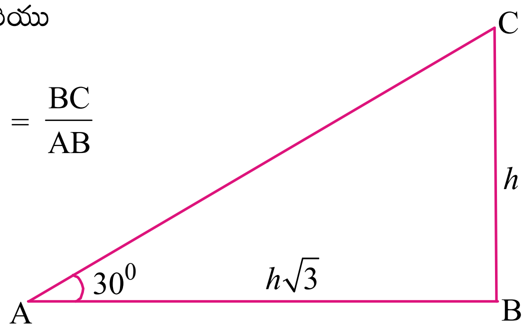
$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} = 10\times1.73 = 17.3 \text{మీ.}$$

ఉదాహరణ 19 : ఉదయం 7 గంటల సమయంలో ఒక స్థంభం పొడవు కంటే దాని నీడ $\sqrt{3}$ రెట్లు ఉన్నది. ఈ సమయంలో సూర్యకిరణాలు భూమిలో 30^0 ల ఊర్ధ్వకోణం చేస్తాయని చూపండి.

సాధన : BC అనేది నిట్టనిలువుగా నున్న స్థంభం, దాని ఎత్తు 'h' యూనిట్లు మరియు 'θ' అనేది A వద్ద సూర్యకిరణం భూమితో చేసే ఊర్ధ్వకోణం

అనుకుంటే, AB అనేది స్థంభం యొక్క నీడ మరియు

$$AB = h \times \sqrt{3} = h\sqrt{3}$$



ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో, $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$

$$\tan\theta = \frac{h}{h\sqrt{3}}$$

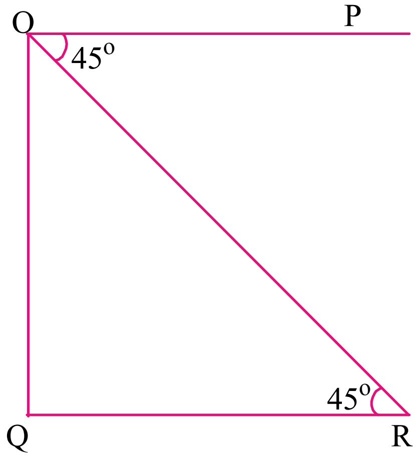
$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ అని తెలుసు.

$$\therefore \theta = 30^0$$

అందువల్ల 7 am సమయంలో సూర్యకిరణాలు భూమిలో 30^0 ల కోణం చేస్తున్నాయి.

ఉదాహరణ 20 : పాఠశాల భవనంపై భాగం నుండి తనీష్ చేత ఆట మైదానంలో ఉన్న ఒక బంతి 45^0 ల నిమ్నకోణంతో పరిశీలించబడింది. ఆ పాఠశాల భవనం ఎత్తు 20మీ. అయిన బంతికి మరియు తనీష్ కంటి వరకు గల మధ్యదూరం ఎంత?



సాధన : OR అనునది దృశ్యరేఖ మరియు OR అనే రేఖ క్షితిజ సమాంతర రేఖ OPతో 45^0ల నిమ్నకోణం చేస్తుందనుకుందాం.

$\angle DAB = \angle BCA = 45^0$

(ఎందుకంటే OP||QR మరియు OR అనే తిర్యగ్రేఖ)

ఇంకా OQ = 20మీ (భవనం ఎత్తు ఇవ్వబడింది)

మనం OR = d యొక్క పొడవు

అనగా దృష్టి రేఖపొడవు కనుగొనాలి.

ఇప్పుడు లంబకోణ త్రిభుజం ΔOQRలో, $\sin 45^0 = \frac{OQ}{OR}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{20}{d}$$

$$d = 20\sqrt{2} = 20 \times 1.414 = 28.28 \text{ మీ.}$$

∴ బంతిని మరియు తనీష్ కంటివద్దకు (దృష్టిరేఖ) గల మధ్యదూరం 28.28 మీ.

మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.

1. ఒక 100 మీ. తాడుతో ఒక బెలూన్ భూమిపై నున్న ఒక స్టేషన్‌కు అనుసంధానించబడి క్షితిజ సమాంతర రేఖతో 60^0ల కోణం చేయు చున్నది. అయిన భూమి నుండి బెలూన్ ఎంత ఎత్తులో ఎగురుతున్నది. (త్రాడుకు ఎలాంటి వడి లేనట్లుగా భావించండి).
2. ఒక నిచ్చెన గోడపై భూమిలో 60^0 ల కోణం చేస్తూ వాల్చి ఉన్నది. నిచ్చెన అడుగు భాగం మరియు గోడ అడుగుభాగం మధ్యదూరం 3 మీ. అయిన ఆ నిచ్చెన పొడవు కనుగొనండి.
3. ఒక టవర్ పాదం నుండి భూమిపై 50 మీ. దూరం గల బిందువు నుండి టవర్‌పై కొనను ఊర్ధ్వకోణం 60^0లతో పరిశీలకుడు పరిశీలిస్తున్న టవరు ఎత్తు కనుగొనండి.
4. 12 అడుగులు ఎత్తు గల ఒక చెట్టుపై భాగం నుండి భూమిపై గల ఒక కుందేలు 30^0 ల నిమ్నకోణంతో పరిశీలించబడుచున్నట్లయితే పరిశీలకుడికి మరియు కుందేలుకు మధ్య దూరం కనుగొనండి.
5. 100 మీ. దారంతో అనుసంధానించబడి భూమితో ఊర్ధకోణం 60^0 లు చేస్తూ ఎగురుతున్న గాలిపటం భూమి నుండి ఎంత ఎత్తుతో ఎగురుతుందో కనుగొనండి. (ఇక్కడ దారమునకు ఎలాంటి వడి లేదనుకోండి.)
6. 100 మీ. ఎత్తులో టవరు పాదం నుండి భూమిపై 100మీ. దూరంలో గల బిందువు నుండి టవరు పై భాగాన్ని కలుపుతూ ఉన్న రేఖ భూమితో చేయు ఊర్ధ్వకోణం ఎంతో కనుగొనండి.

మరికొన్ని ఆసక్తికరమైన సమస్యలు సాధిద్దాం.

ఉదాహరణ 21 : ఒక నది ఒడ్డుపై నుండి ఒక పరిశీలకుడు అవతలి ఒడ్డు పైగల ఒక చెట్టు పైభాగాన్ని 60^0ల ఊర్ధ్వకోణంతో పరిశీలిస్తున్నాడు. అతను తాను నిల్చున్న చోటు నుండి 40మీ. వెనకకి వెళ్ళి అదే చెట్టుపై భాగాన్ని 30^0 ల కోణంతో చూస్తున్నట్లుగా గమనించాడు. అయిన ఆ చెట్టు ఎత్తు మరియు నది వెడల్పును కనుగొనండి.

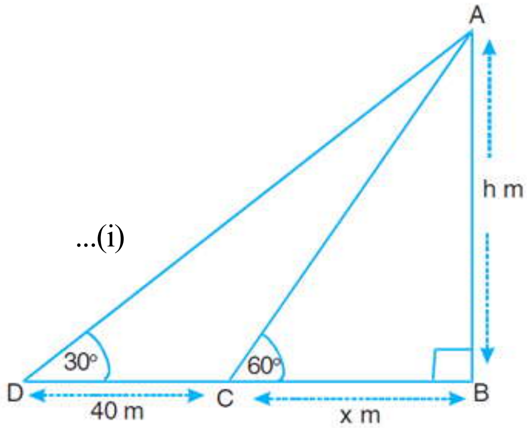
సాధన : AB అనేది చెట్టు ఎత్తు 'h' మీ. అనుకొనిన

నదివెడల్పు BC = x మీ. లుగా అనుకొనిన

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 415

06-02-2021 14:54

లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో



$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

లేదా $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$

లేదా $h = \sqrt{3}\,x$ ...(i)

మరియు లంబకోణత్రిభుజం ΔABDలో,

$$\tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$$ ...(ii)

(i) మరియు (ii) నుండి, మనకు

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{x+40}$$

అని తెలుస్తుంది. దీన్ని అడ్డగుణకారం చేయగా

$3x = x + 40x$

లేదా $2x = 40$

లేదా $x = 20$

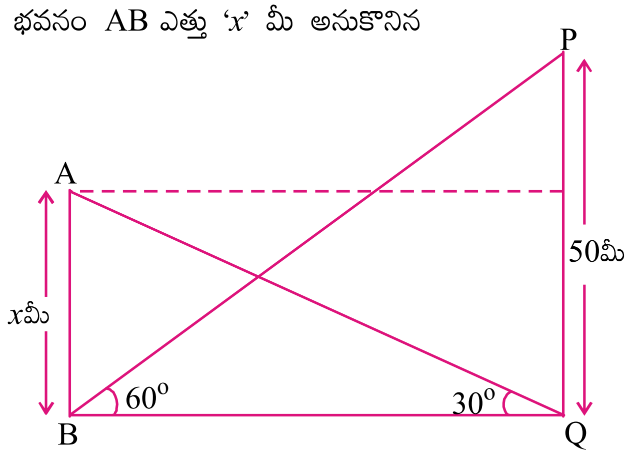
(i) నుండి, $h = \sqrt{3} \times 20 = 20 \times 1.732 = 34.64$

కాబట్టి, నది వెడల్పు 20మీ. మరియు చెట్టు ఎత్తు 34.64 మీ.

ఉదాహరణ 22 : ఒక టవరు పాదం నుండి ఎదురుగా నున్న భవనం పై భాగాన్ని చూస్తున్నప్పుడు ఊర్ధ్వకోణం 30^0లు, మరియు ఆ భవన పాదం నుండి టవరు పై భాగాన్ని చూస్తున్నప్పుడు ఊర్ధ్వకోణం 60^0లు చేయుచున్నది. ఆ టవరు ఎత్తు 50 మీ. అయినచో భవనం ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన : PQ టవరు ఎత్తు = 50 మీ మరియు భవనం AB ఎత్తు 'x' మీ అనుకొనిన

లంబకోణ త్రిభుజం ΔABQ నుండి



$$\tan 30^0 = \frac{AB}{QB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{QB}$$

$QB = x\sqrt{3}$ ...(i)

మరియు లంబకోణ త్రిభుజం ΔPQB నుండి,

$$\tan 60^0 = \frac{PQ}{QB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{50}{QB}$$

$QB = \sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}}$ ... (ii)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 416 06-02-2021 14:54

(i) మరియు (ii) సమీకరణాల నుండి, మనకు

$$x\sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{50}{3} = 16.67$$ గా వస్తుంది.

అనగా, భవనం ఎత్తు 16.67 మీ.

ఉదాహరణ 23 : స్వాతి ఒక 100 మీ ఎత్తున్న టవరుపై నిలబడి ఆ టవరుకు ఇరువైపులా భూమిపై గల రెండు కార్లను పరిశీలిస్తున్నప్పుడు నిమ్నకోణాలు 60^0 మరియు 45^0 లు ఏర్పడినవి. అయిన ఆ రెండు కార్ల మధ్యదూరం ఎంత ?

సాధన : PM అనే టవరు ఎత్తు = 100 టమీ. మరియు A, B లు కార్లు ఉన్న బిందువులు

A వద్ద నున్న కారుతో చేయు నిమ్నకోణం P నుండి 60^0లు అనగా

అనగా, $\angle QPA = 60^0 = \angle PAB$ అవుతుంది.

మరియు $\angle BPR = 45^0 = \angle PBA$

లంబకోణత్రిభుజం ΔPMB లో

$$\tan 45^0 = \frac{QP}{BP}$$

$$1 = \frac{100}{BP}$$

$$BP = 100 \qquad \ldots(i)$$

అలాగే, లంబకోణ త్రిభుజంలో ΔQPA,

$$\tan 60^0 = \frac{QP}{AP}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{AP}$$

$$AP = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{100 \times 1.732}{3} = 57.74$$

AP = 57.74మీ. ...(ii)

కాబట్టి, రెండు కార్ల మధ్యదూరం = AP + PA

= 100 + 57.74 మీ.

= 157.74 మీ.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 417 06-02-2021 14:54

మీ ప్రగతిని పరీక్షించుకోండి.

1. రెండు సమాన ఎత్తు గల స్థంభములు రోడ్డుకు ఇరువైపులా నిలబెట్టి ఉన్నవి. వాటి మధ్యదూరం 100 మీ. ఆ స్థంభాల మధ్యరోడ్డుపై గల ఒక బిందువు నుండి ఆ స్థంభాల పై కొనలను చూస్తున్నప్పుడు వరుసగా ఊర్ధ్వకోణాలు 60^0 లు మరియు 30^0 లు చేస్తున్నవి. అయిన రోడ్డుపై గల ఆ బిందువు స్థానమును మరియు స్థంభముల ఎత్తును కనుగొనండి.
2. ఒక ఎగురుతున్న విమానం పై నుండి మరొక విమానం భూమి నుండి 3000 మీల ఎత్తులో (భూమి నుండి లంబదూరం)లో నుండి వెళుతున్నది. ఈ రెండు విమానాలను భూమిపై గల ఒక బిందువు నుండి పరిశీలించినప్పుడు అవి వరుసగా ఊర్ధ్వకోణాలు 60^0మరియు 45^0లు చేయు చున్నచో ఆ ఎగురుచున్న విమానాల మధ్య లంబదూరం ఎంత?
3. 4 మీ పొడవు గల ఒక నిచ్చెన ఒక గది కిటికీ వాల్చినప్పుడు భూమితో 30^0ల కోణం చేస్తున్నది. నిచ్చెన నిలబడిన (పాదం ఉన్న) స్థానం స్థిరంగా ఉంచి ఆ నిచ్చెనను ఆ గదికి మరొక వైపు ఉన్న గది కిటికీకి వాల్చినప్పుడు ఆ నిచ్చెన భూమితో 60^0ల కోణం చేయుచున్నది. అయిన ఆ రెండు గదుల మధ్యదూరం ఎంత?

అభ్యాసము

1. త్రిభుజం ΔPQR లో, Rవద్ద లంబకోణం కలిగి, $\angle P = \theta$, PR = 7 సెం.మీ. మరియు QR = 25సెం.మీ. అయినచో 'θ' దృష్ట్యా అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుగొనండి.
2. లంబకోణ త్రిభుజం ΔABCలో, Bవద్ద లంబకోణం, AC = 7.5 సెం.మీ, మరియు AB = 6 సెం.మీ. కోణం 'C' దృష్ట్యా అన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కనుగొనండి. మరియు sin A = cos C విలువ కనుగొనుము.
3. లంబకోణ త్రిభుజం ΔPQRలో, Q వద్ద లంబకోణం, PQ=1సెం.మీ మరియు QR = 2సెం.మీ. అయినచో sin P, cos P, sin R మరియు cos R విలువలు ఎంత; ఇంకా sin P-cos R విలువ కనుగొనండి.
4. కింది వాటి విలువలు కనుగొనండి.
   (i) $\text{Sin}60^0\cos30^0 + \sin30^0\cos60^0$

   (ii) $\frac{4}{3}\tan^2 60° + 3\cos^2 30° - 2\sec^2 30° - \frac{4}{3}\cot^2 60°$

   (iii) $\tan^2 60^0 - \sin^2 30^0 - \cos^2 60^0$

   (iv) $(\text{cosec}^2 45^0 \sec^2 30^0)(\sin^2 30^0 + 4\cot^2 45^0 - \sec^2 60^0)$

   (v) $\dfrac{\sin 30^0 - \sin 90^0 + 2\cos 0^0}{\tan 30^0 \tan 60^0}$

   (vi) $\dfrac{4}{\cot^2 30^0} + \dfrac{4}{\sin^2 60^0} - \cos^2 45^0$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 418 06-02-2021 14:54

5. $\sin x = \cos x$ అయిన x అల్పకోణమైతే x విలువ ఎంత?
6. కోణం $\angle A = 30^0$ మరియు 60^0 ల వద్ద $\sin A = \tan A \cos A$ విలువలు సరిచూడండి.
7. $\angle A = 30^0$ మరియు 45^0 ల వద్ద $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ విలువలు సరిచూడండి.
8. $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ మరియు $\tan(A - B) = 1$, $0^0 < A + B < 90^0$ అయినచో A, B ల విలువలు కనుగొనండి.
9. $\sin(2x + 10)^0 = 0.5$ మరియు x అల్పకోణం అయినచో x విలువ ఎంత?
10. $\tan(5x - 2020)^0 = 1$ మరియు $2000 < x < 2050$ అయినచో x విలువ కనుగొనండి.
11. $5\sqrt{3}$ అడుగుల పొడవు గల నిచ్చెన ఒక గోడకు 5 అడుగుల ఎత్తులో వాల్చి ఉన్నది. ఆ నిచ్చెన అడుగు భాగం భూమిలో చేయు కోణం ఎంత?
12. ఒక పరిశీలకుడు ఒక చెట్టు పాదం నుండి 100మీ. దూరంలో గల బిందువు నుండి (భూమిపై నుండి) ఆ చెట్టుపై భాగంను ఊర్ధ్వకోణం 30^0 లతో పరిశీలిస్తున్నాడు. ఆ చెట్టు యొక్క ఎత్తును దగ్గరి పదులలో సవరించి (మీటరులలో) చెప్పండి.
13. రెండు కిలోమీటరు రాళ్ళను ఒక కొండపై నుండి చూస్తున్నప్పుడు వరుసగా నిమ్నకోణాలు 60^o మరియు 30^o లు ఏర్పరుచు చున్నవి. అయిన ఆ కొండ ఎత్తు ఎంత?
14. ఒక 7మీ. ఎత్తున్న భవనంపై భాగం నుండి ఒక టవరు పై కొనను ఊర్ధ్వకోణం 60^o ల చేయునట్లుగా పరిశీలించబడింది. మరియు ఆ భవనం నుండి ఆ టవరు అడుగుభాగాన్ని నిమ్నకోణం 45^o లతో పరిశీలించిన ఆ టవరు ఎత్తును కనుగొనండి.
15. సముద్రపు తీరాన గల పై భాగం టవరు నుండి సముద్రంలో టవరు వైపుకు వస్తున్న పడవ పరిశీలించి చూడగా ఆ పడవ స్థానం 10 నిమిషాలలో నిమ్నకోణం 30^o ల నుండి 60^oలకు మారింది. ఆ పడవ సముద్ర తీరాన్ని చేరుటకు పట్టు అతి తక్కువ సమయం ఎంతో కనుగొనండి.
16. ఒక లైట్‌హౌస్ (దీపపు స్థంభం) నకు ఇరువైపుల నుండి వస్తున్న రెండు పడవల నుండి దీపపు స్థంభం పై భాగంను ఊర్ధ్వకోణాలు వరుసగా 30^o మరియు 45^o చేస్తున్నాయి. ఆ పడవల మధ్య దూరం 100మీ ఉన్నట్లయితే ఆ దీపపు స్థంభం ఎత్తు కనుగొనండి.
17. ఒక టవరు భూమిపై నిటారుగా నిలుచుని ఉంది. సూర్యకిరణాలు భూమితో $\sqrt{3}$ మీ లకు మారినప్పుడు దాని నీడ పొడవు ఆ సూర్యకిరణాలు భూమితో 60^o లు కోణం చేస్తున్నప్పుడు ఉన్న పొడవు కంటే $45\sqrt{3}$ మీ ఎక్కువగా కనిపిస్తున్నది. అయిన ఆ టవరు ఎత్తును కనుగొనండి.
18. భూమిపైన ఉన్న రెండు టవరుల మధ్యదూరం 80 మీ. వాటిలో ఎత్తైన టవరు పై భాగం నుండి రెండవ టవరు పై భాగాన్ని నిమ్నకోణం 30^o లతో పరిశీలించబడింది. రెండవ టవరు ఎత్తు 160 మీ అయినచో మొదటి టవరు ఎత్తును కనుగొనండి.
19. ఒక ఇంటి యొక్క కిటికీ భూమి మీది నుండి 10 మీ ఎత్తులో ఉంది. ఆ కిటికీలో నుండి ఆ ఇంటికి ఎదురుగా మరొక ఇంటిపై భాగాన్ని ఊర్ధ్వకోణం 60^o లతో మరియు ఆ ఇంటి అడుగు భాగాన్ని నిమ్నకోణం 45^o లతో గమనిస్తున్న ఎదురుగా నున్న ఇంటి ఎత్తును కనుగొనండి.

    ($\sqrt{3} = 1.73$గా తీసుకోండి.)
20. ఒక గద్దెపై 1.6 మీ. పొడవైన విగ్రహం నిలబెట్టబడినది. భూమిపై నుండి కొంత దూరంలో గల ఒక బిందువు నుండి ఆ విగ్రహం పై భాగాన్ని మరియు ఆ గది పై భాగాన్ని వరుసగా ఊర్ధ్వకోణాలు 60^o లు మరియు 45^oల చేస్తూ పరిశీలించబడుతున్నచో ఆ గద్దె యొక్క ఎత్తు ఎంత?

ముఖ్యాంశాలు

- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి	దాని వ్యుత్క్రమం/విలోమం
$\sin A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణం}}$	$\text{cosec } A = \frac{\text{కర్ణం}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}$
$\cos A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణం}}$	$\sec A = \frac{\text{కర్ణం}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}$
$\tan A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}$	$\cot A = \frac{\angle A \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\angle A \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}$

- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు వాటి వ్యుత్క్రమాల మధ్య సంబంధం.

  $\sin x \text{ cosec } x = 1$

  $\cos x \sec x = 1$

  $\tan x \cot x = 1$

- ప్రత్యేక కోణాలకు $(0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0)$ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు

కోణం θ / నిష్పత్తి	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించలేము
cosec θ	నిర్వచించలేము	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించలేము
cot θ	నిర్వచించలేము	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- భూమిపై నుండి ఒక వస్తువు పై భాగాన్ని పరిశీలిస్తున్నప్పుడు ఏర్పడే "దృష్టిరేఖ" క్షితిజ సమాంతర రేఖతో చేయు కోణాన్ని "ఊర్ధ్వకోణం" అని అంటారు.
- ఒక ఎత్తైన ప్రదేశం నుండి భూమిపైన గల వస్తువును పరిశీలిస్తున్నప్పుడు ఏర్పడే "దృష్టిరేఖ" క్షితిజ సమాంతరం రేఖతో చేయుకోణాన్ని "నిమ్నకోణం" అని అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 420 06-02-2021 14:54

యూనిట్ 7 సాంఖ్యకశాస్త్రం

అధ్యాయం

7.1 సాంఖ్యకశాస్త్రం పరిచయం

7.1.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయం చదివిన తరువాత మీరు

- సాంఖ్యక శాస్త్ర భావనను అర్థం చేసుకుంటారు.
- ప్రాథమిక దత్తాంశం గౌణ దత్తాంశం మధ్య గల తేడాను గుర్తిస్తారు.
- తరగతి అంతరం, తరగతి మార్కు, తరగతి పరిమాణాలను అర్థం చేసుకొని ఉదహరిస్తారు.
- ఎక్కువ పౌనఃపున్యం గల అవర్గీకృత దత్తాంశానికి గణన చిహ్నాల ఆధారముతో గుర్తించగలుగుతారు.

7.1.1 పరిచయం

ఒకరోజు స్నేహిత్ వాళ్ళ లెక్కల ఉపాధ్యాయుని గారి ఇంటికి వెళ్ళాడు. ఆ సమయంలో ఉపాధ్యాయుడు భారతదేశ జనాభా గణన కొరకు తాను సేకరించిన వివరాలను సంగ్రహించుచున్నాడు.

స్నేహిత్ : నమస్కారం సార్! మీరు పనిలో ఉన్నట్లున్నారు. మీ పనిలో నేను ఏమైనా సహాయం చేయగలనా?

టీచర్ : రా! స్నేహిత్, జన గణన కొరకు కుటుంబాల వివరాలు సేకరించాను గదా! అంటే ఒక ప్రాంతంలో ఒక్కొక్క కుటుంబంలోని సభ్యులు ఎందరు? వారి వయస్సులు ఎంతఎంత? కుటుంబ ఆదాయం ఎంత? మొదలగు వివరాలు సేకరించాను.

స్నేహిత్ : ఈ సమాచారం ఎందుకు ఉపయోగపడుతుంది?

టీచర్ : ఈ సమాచారము ప్రభుత్వము, అభివృద్ధి ప్రణాళిక తయారికి మరియు వనరుల కేటాయింపులకు ఉపయోగపడుతుంది.

స్నేహిత్ : ప్రభుత్వము ఈ సమాచారమును ఎట్లా ఉపయోగిస్తుంది?

టీచర్ : ప్రభుత్వ అధికారులు దత్తాంశ నిర్వహణలోని పద్ధతులను ఉపయోగించి ఈ దత్తాంశమును విశ్లేషణ చేస్తారు. ఆ ఫలితాల సాయంతో క్రొత్త అంచనాలు తయారుచేస్తారు. నీవు కూడా ఇంతకు ముందు తరగతులలో దత్తాంశ నిర్వహణ గురించి నేర్చుకున్నావు కదా! ఇదియే ప్రాథమిక సాంఖ్యక శాస్త్రం.

స్నేహిత్ వలె మనం కూడా వస్తువుల ధరల గురించో, రోజువారి ఉష్ణోగ్రతల గురించో, క్రికెట్ స్కోర్ గురించో, లేక ఎన్నికల ఫలితాల గురించో రకరకాల సమాచారమును సంఖ్యాత్మక రూపంలో, వివరణాత్మక రూపంలో, పట్టికలుగా, గ్రాఫుల రూపములో చూస్తున్నాం కదా. ఇట్లు ఒక ప్రత్యేక ఉపయోగార్థం సేకరించబడిన విషయాలు లేక సంఖ్యాత్మక వివరాలను దత్తాంశం అంటారు. సేకరించిన సమాచారాన్ని అర్థవంతము చేయు గణితశాఖనే సాంఖ్యాకశాస్త్రం అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 421 06-02-2021 14:55

7.1.2 దత్తాంశ సేకరణ

సాంఖ్యక శాస్త్రంలో ఒక లక్ష్యంతో దత్తాంశం సేకరించుట మొదటి ప్రధాన సోపానం దత్తాంశమును సేకరించుటలో మెళకువలను ఈ కృత్యం ద్వారా చర్చిద్దాం.

కృత్యం

తరగతిలోని విద్యార్థులను నాలుగు బృందాలుగా విభజించి, ఒక్కొక్క బృందమునకు కింద చూపిన దత్తాంశముల సేకరణకు కేటాయించాను.

i. మీ తరగతిలోని అందరు విద్యార్థుల బరువులు.

ii. ఒక్కొక్క విద్యార్థి యొక్క (సోదరులు లేక సోదరిల సంఖ్య) తోబుట్టువుల సంఖ్య.

iii. గత మాసంలో రోజువారిగా గైరుహాజరయిన వారి సంఖ్య.

iv. తరగతిలో ప్రతి విద్యార్థి యొక్క ఇంటి నుండి పాఠశాల దూరము.

పై దత్తాంశములు సేకరించుటలో విద్యార్థులు ఉపయోగించిన పద్ధతులను చర్చిద్దాం.

1. వివరాలు సేకరించుట కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని ప్రశ్నించి లేదా స్వయంగా వారి ఇళ్లకు వెళ్లి వివరాలు రాబట్టారా?
2. పాఠశాలలోని రికార్డులు లేక మరి ఏదైనా రికార్డుల నుండి వివరాలు సేకరించారా?

వీటిని పరిశీలిస్తే (i), (ii) మరియు (iv) వ దత్తాంశముల కొరకు ప్రతి విద్యార్థిని నేరుగా సంప్రదించి వివరాలు సేకరించ వలసి ఉంటుంది. ఇట్లు దత్తాంశములోని రాశులను (విలువలను) మూలము నుండి నేరుగా సేకరించినచో దానిని 'ప్రాథమిక దత్తాంశము' (Primary Data) అంటారు.

(iii) వ దత్తాంశము కొరకు వివరాలను విద్యార్థుల నుండి కాకుండా అంతకు పూర్వమే రోజువారి హాజరు వివరాలు రికార్డు చేయబడిన హాజరు పట్టికల నుండి సేకరించవచ్చును. ఈ విధంగా ముందుగనే సేకరింపబడియున్న దత్తాంశము లేక దత్తాంశములనుండి సేకరించు దత్తాంశమును 'గౌణ దత్తాంశము' (Secondary Data) అంటారు.

7.1.3 దత్తాంశమును ప్రదర్శించుట

దత్తాంశము సేకరించిన అనంతరము విశ్లేషకుడు దత్తాంశము విశ్లేషించి, దానిని అర్థవంతంగా, సమగ్రముగా ప్రదర్శించుట రెండవ ముఖ్య సోపానము వివిధ సందర్భాలలో ప్రదర్శించగల దత్తాంశము తెలిసికొందాము.

గణిత పరీక్షలో 15 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు (గరిష్టంగా 50) క్రింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

ఇట్లు రాశుల అన్నింటిని విడివిడిగా ప్రకటించు దత్తాంశము 'ముడి' దత్తాంశము(raw data) అంటాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 422 06-02-2021 14:55

ఈ దత్తాంశము నుండి కనిష్ట విలువ, గరిష్ట విలువ గల రాశులను సులభంగా గుర్తించవచ్చును. గరిష్ట, కనిష్ట రాశుల భేదమును ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క 'వ్యాప్తి' (range) అంటారని మీకు జ్ఞాపకముండవచ్చు.

ఈ దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి = గరిష్ట విలువ గల రాశి – కనిష్ట విలువ గల రాశి

$= 50 - 7 = 43,$

అనగా దత్తాంశంలోని రాశులన్ని 7, 50 ల మధ్య ఉంటాయి.

ఈ దత్తాంశము పరంగా కింది ప్రశ్నలను చర్చించిన

(i) దత్తాంశం యొక్క మధ్యరాశి ఏది?

(ii) 60% లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులెందరు?

చర్చ :

(i) పరీక్షలో గరిష్ట మార్కులు 50 కావున మధ్యరాశి 25 అని ఇవాన్ అభిప్రాయపడ్డాడు. ప్రిన్సి ఇది సరైన మధ్యరాశి కాదు అంటున్నది. మీ అభిప్రాయం ఏమిటి?

ఈ దత్తాంశములోని 15 రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చగా

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

వీటిలో 8వ రాశి 34 దత్తాంశం యొక్క మధ్యమరాశి (మధ్యగతం) అవుతుంది.

(ii) 50 మార్కులకు 60% (అనగా $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

దత్తాంశములో (60%) 30 లేక అంతకన్నా ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు 9 మంది.

ఒక దత్తాంశములోని రాశులు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు, వాటిని ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో రాయడం, విశ్లేషించడం ఎక్కువ సమయం తీసుకొంటుంది. ఈ విశ్లేషణను సులభతరం చేయడానికి దత్తాంశమును మరొక విధంగా ప్రదర్శించవలసి ఉంటుంది.

కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ - 1 : గణిత పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఈ విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

5, 8, 6, 4, 2,	5, 4, 9, 10, 2,	1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2,	1, 1, 3, 4,4,	5, 8, 6, 7, 10,
2,8, 6, 4, 2,	5, 4, 9, 10, 2,	1, 1, 3, 4, 5,
8, 6,4, 5, 8		

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 423 06-02-2021 14:55

సాధన :

మార్కులు	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1	𝍸 |	6
2	𝍸 |	6
3	|||	3
4	𝍸 ||||	9
5	𝍸 ||	7
6	𝍸	5
7	||	2
8	𝍸 |	6
9	||	2
10	||||	4
	మొత్తం	**50**

దత్తాంశమునకు గణన చిహ్నాలు ఉపయోగించి పట్టికలో చూపబడినది. ఒక మార్కును సాధించిన మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్యను ఆ మార్కు యొక్క పౌనఃపున్యం అందురు.

ఉదాహరణకు 4 మార్కులు సాధించిన విద్యార్థుల సంఖ్య 9 అంటే 4 మార్కుల యొక్క పౌనఃపున్యం 9,

ఈ పట్టికలోని గణన చిహ్నాలు ముడి దత్తాంశంలోని రాశులను పోల్చి లెక్కించుటకు ఉపయోగపడతాయి.

పట్టికలోని అన్ని పౌనఃపున్యం మొత్తము దత్తాంశంలోని రాశుల మొత్తమును సూచిస్తుంది.

ఈ విధంగా దత్తాంశంలోని అన్ని విభిన్న రాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక లేక 'రాశుల భారత్వ పట్టిక' అంటారు.

కృత్యం

మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల ఇంటి పేరులో (ఆంగ్లములో) మొదటి అక్షరాలు (*Initials*) సేకరించండి. అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజక పట్టిక తయారుచేసి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

(i) ఎక్కువ మంది విద్యార్థుల ఇంటి పేర్ల మొదటి అక్షరం ఏది?

(ii) ఎంత మంది విద్యార్థుల ఇంటి పేర్ల మొదటి అక్షరం 'I'?

(iii) ఏ అక్షరం అతి తక్కువ సార్లు ఉపయోగించబడినది?

ప్రత్యేక అవసరార్థం విద్యార్థులను మూడు బృందాలుగా అనగా (i) ప్రత్యేక తరగతులకు హాజరు కావలసిన వారు (ii) సాధారణ విద్యార్థులు (iii) బాగుగా చదవగలిగిన విద్యార్థులు అనే విభాగాలుగా విభాజించి కింది విధంగా పౌనఃపున్య విభజనకు తయారుచేయవచ్చును.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 424 06-02-2021 14:55

తరగతిఅంతరం (మార్కులు)	బృందం రకం	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1-3	(ప్రత్యేక బృందం)	𝍸 𝍸 𝍸	15
4-5	(సాధారణ బృందం)	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
6-10	(బాగుగ చదివే బృందం)	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు సమాచారం కుదింపుకు కూడా ఈ విధమైన పౌనఃపున్య విభాజనము ఎంతో ఉపయుక్తంగా ఉంటుంది. మరొక ఉదాహరణను కూడా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ - 2 : ఒక బుట్టలోని 50 నారింజ పండ్లు విడివిడి బరువులు (గ్రాములలో) కింద ఇవ్వబడ్డాయి.

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

దత్తాంశంలోని రాశులను ఒక్కసారిగా ప్రదర్శించుటకు, సమగ్రంగా, సులభంగా అర్థం చేసుకొనుటకు అనువుగా రాసులన్నిటిని తరగతులు, 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119 గా విభజిస్తాం. ఈ చిన్న చిన్న వర్గములు లేక సమూహాలను తరగతులు అంటారు. ఒక్కొక్క తరగతి యొక్క పరిమాణము 'తరగతి పొడవు' లేక 'తరగతి వెడల్పు' అంటారు. ఉదాహరణకు తరగతి 30-39లో 30 ను దిగువ అవధి అని, 39 ను 'ఎగువ అవధి' అని అంటారు. ఈ తరగతి పొడవు 10 (దిగువ ఎగువ అవధులతో సహా).

తరగతులు(నారింజ పండు బరువు)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం (నారింజ పండ్ల సంఖ్య)
30-39	𝍸 |	6
40-49	𝍸 |||	8
50-59	𝍸 ||||	9
60-69	𝍸 |	6
70-79	|||	3
80-89	𝍸	5
90-99	𝍸 ||	7
100-109	|||	3
110-119	|||	3
మొత్తం		50

దత్తాంశములోని రాశులను చిన్న చిన్న వర్గములుగా విభజించి పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక' అంటారు. ఇది దత్తాంశమును సమగ్రంగా, సంక్షిప్తంగా ప్రదర్శించి అర్థంచేసుకోవడం సులభతరం చేస్తుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 425 06-02-2021 14:55

పై పౌనఃపున్య విభజనములోని తరగతులు ఒకదానిపై ఒకటి అతిపాతం చెందుట లేదు అనగా ఏ విలువ రెండు తరగతులలో పునరావృతము కాదు. ఈ తరగతులను సమ్మిళిత తరగతులు అంటారు. ఏ దత్తాంశంలో అయినా ఎక్కువ తరగతి పొడవుతో తక్కువ తరగతులకు లేక తక్కువ తరగతి పొడవులతో ఎక్కువ తరగతులను ఏర్పాటు చేసుకోవచ్చును. కానీ తరగతులు మాత్రం ఒకదానిపై ఒకటి అతిపాతం చెందకూడదు. సామాన్యంగా మొదటి దత్తాంశపు వ్యాప్తి (వ్యాప్తి = గరిష్ట దత్తంశపు విలువ – కనిష్ట దత్తాంశపు విలువ)ని కనుగొందురు. వ్యాప్తిని ఉపయోగించి తరగతి పొడవు మరియు తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయింతురు. ఉదాహరణకు 30-35, 36-40 .....గా విభజించవచ్చును.

తరగతులు	తరగతి హద్దులు
20-29	19.5-29.5
30-39	29.5-39.5
40-49	39.5-49.5
50-59	49.5-59.5
60-69	59.5-69.5
70-79	69.5-79.5
80-89	79.5-89.5
90-99	89.5-99.5
100-109	99.5-109.5
110-119	109.5-119.5
120-129	119.5-129.5

పై దత్తాంశంలో ఒక నారింజపండు భారము 39.5 గ్రా. అయినచో విలువను ఏ తరగతికి చేర్చవలెను? 30-39 తరగతిలోనా లేక 40-49 తరగతిలోనా?

ఇటువంటి సందర్భంలో తరగతుల యొక్క నిజ అవధులు లేక హద్దులు సహాయపడతాయి. ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి తర్వాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల సరాసరిని తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు అంటారు. అదే విలువ తర్వాతి తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు అవుతుంది. ఇదేవిధంగా అన్ని తరగతుల యొక్క హద్దులను రాయవచ్చు.

మొదటి తరగతికి ముందు ఒక తరగతి ఊహించుకోవడం ద్వారా మొదటి తరగతి దిగువ హద్దును, అట్లే చివరి తరగతికి తర్వాత ఒక తరగతిని ఊహించడం ద్వారా చివరి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దును లెక్కించవచ్చును.

హద్దులు ఏర్పరిచిన తరువాత కూడా 39.5 ను ఏ తరగతిలో అనగా 29.5 లేదా 39.5 లేక 39.5 - 49.5 చేర్చవలెననే విషయం ఏర్పడుతుంది. సాంప్రదాయకంగా తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు ఆ తరగతికి చెందదు అని గ్రహించవలెను.

కావున 39.5 రాశి 39.5 - 49.5 తరగతికి చెందుతుంది.

30-40, 40-50, 50-60, ...తరగతులు ఒకదానిపై ఒకటి అతిపాతం చెందుతాయి. ఈ తరగతులను 'మినహాయింపు తరగతులు' అంటారు. సమ్మిళిత తరగతుల హద్దులలో మినహాయింపు తరగతులు ఏర్పడుట గమనించవచ్చు. ఒక తరగతి ఎగువ మరియు దిగువ హద్దుల భేదము ఆ తరగతి అంతరం. కావున 90−99 తరగతి అంతరం 10 (ఎందుకనగా 99.5−89.5=10).

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 426

06-02-2021 14:55

ఉదాహరణ - 3 : అక్టోబర్ నెలలో ఒక నగరం యొక్క సాపేక్ష ఆర్ద్రత (శాతములలో)లో విలువలు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడ్డాయి.

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89.0

(i) 84-86, 86-88 తరగతి అంతరాలలో వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనకు నిర్మించండి.

(ii) దత్తాంశము వ్యాప్తి ఎంత?

సాధన : (i) ఇచ్చిన తరగతులలో గణన చిహ్నల సహాయముతో నిర్మింపబడిన వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనము.

సాపేక్ష ఆర్ద్రత	గణన చిహ్నలు	పౌనఃపున్యము రోజులు
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	𝍸 ||	7
94-96	𝍸 |	6
96-98	𝍸 ||	7
98-100	||||	4

(ii) దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి = గరిష్ట విలువ – కనిష్ట విలువ

$99.2 - 84.9 = 14.3$

[**సూచన:** దత్తాంశము 90; 90-92 తరగతికి 96; 96-98 తరగతికి చెందును]

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. పదవ తరగతిలోని 36 మంది యొక్క రక్తం గ్రూపులో ఈ విధంగా ఉన్నవి

మార్కులు	5 వరకు	6 వరకు	7 వరకు	8 వరకు	9 వరకు	10 వరకు
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	11	19	31	40	45

ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక తయారుచేయండి. అతి సామాన్యమైన గ్రూపు ఏది? అరుదైన గ్రూపు ఏది?

2. కింది పౌనఃపున్య విభజనము నుండి రాశులు, వాని పౌనఃపున్యములు గల పట్టిక తయారుచేయండి.

[సూచన : తరగతి అంతరము 10 గా తీసుకోండి]

110	184	129	141	105	134	136	176	155
145	150	160	160	152	201	159	203	146
177	139	105	140	190	158	203	108	129
118	112	169	140	185				

3. 10వ తరగతి చదువుతున్న 30 విద్యార్థులు గణిత ఒలింపియాడ్ పరీక్షకు హాజరై కింది విధంగా మార్కులు పొందారు.

46	31	74	68	42	54	14	93	72	53	59
38	16	88	27	44	63	43	81	64	77	62
53	40	71	60	08	68	50	58			

ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయుము. 0-9, 10-19 మొదలగు తరగతులు తీసుకొని పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేసి 49 మార్కుల కంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

4. 40 మంది ఉపాధ్యాయులు గల ఒక పాఠశాలలో వారి వయస్సు (సం॥లలో) ఇవ్వబడింది.

వయస్సు (సం॥లలో)	ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య
25-31	12
31-37	15
37-43	7
43-49	5
49-55	1
మొత్తం	**40**

(i) తరగతి అంతరం ఏమిటి?

(ii) 37-43 లలో ఎగువ హద్దు ఏది?

(iii) 49-55 లలో దిగువ హద్దు ఏది?

అభ్యాసము

1. 53, 61, 48, 60, 78, 68, 55, 100, 67, 90 ల యొక్క వ్యాప్తి ఎంత?

2. పౌనఃపున్య విభాజనము నుండి రాశులు, వాటి పౌనఃపున్యము గల పట్టిక తయారుచేయండి.

మార్కులు	8 వరకు	22 వరకు	15 వరకు	25 వరకు	32 వరకు	40 వరకు
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	11	19	31	40	45

3. 10వ తరగతిలోని 36 మంది యొక్క రక్తపు నమూనాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 428 06-02-2021 14:55

పై దత్తాంశముకు పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారు చేయండి. రక్త నమూనాలో ఏ రక్తపు నమూనా సర్వసాధారణము? ఏ రక్తపు నమూనా అరుదైనదో గుర్తించి వ్రాయుము.

4. 3 నాణెములు వరసగా 30 సార్లు ఎగురవేయబడ్డాయి. ప్రతిసారి ఎన్ని బొమ్మలు పడ్డాయో రికార్డు చేయబడ్డాయి. ఆ వివరాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

పై దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయండి.

5. ఒక టి.వి. ఛానల్ వారు ధుమపాన నిషేధంపై SMS (సంక్షిప్త సందేశాలు) అభిప్రాయాలను ఆహ్వానించింది. ఇచ్చిన ఐచ్ఛికములు A – పూర్తి నిషేధము B – బహిరంగ ప్రదేశంలో నిషేధము, C – నిషేధము అవసరం లేదు. అని ఇవ్వగా SMS సమాధానములు ఇట్లున్నవి.

A	B	A	B	C	B				
A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

పై దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము తయారుచేయండి. సరియైన SMS సమాధానములు ఎన్ని? వాటిలో అధిక సంఖ్యాకుల అభిప్రాయము ఏది?

ముఖ్యాంశాలు

- విద్యార్థి దత్తాంశంలోని రాశులను (విలువలను) మూలము నుండి నేరుగా సేకరించినచో దానిని 'ప్రాధమిక దత్తాంశము' అంటారు.
- ముందుగానే సేకరింపబడి ఉన్న దత్తాంశము లేక దత్తాంశము నుండి సేకరించు దత్తాంశమును 'గౌణ దత్తాంశము' అంటారు.
- గరిష్ఠ, కనిష్ఠ రాశుల భేధమును ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క 'వ్యాప్తి' అంటారు.
- దత్తాంశములోని అన్ని విభిన్న రాశులను పౌనఃపున్యములతో సూచించు పట్టికను 'అవర్గీకృత విభాజన పట్టిక' లేక 'రాశుల భారత్వ పట్టిక' అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 429 06-02-2021 14:55

- ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో రాయబడిన దత్తాంశములోని మధ్యమరాశిని మధ్యగతము అంటారు.
- దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' బేసిసంఖ్య అయిన $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ రాశివిలువ మధ్యగతము అవుతుంది.
- దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' సరిసంఖ్య అయిన $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ వ రాశుల సరాసరి మధ్యగతము అవుతుంది.
- మధ్యగతము దత్తాంశమును, రెండు సమభాగములుగా విభజిస్తుంది. అంటే దత్తాంశంలోని సగం రాశుల విలువలు మధ్యగతం కన్నా ఎక్కువ మిగిలిన సగం రాశుల విలువలు దత్తాంశంకన్నా తక్కువ ఉంటాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 430 06-02-2021 14:55

అధ్యాయం

7.2 కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు

7.2.0 అభ్యసన లక్ష్యాలు

- కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అర్థం చేసుకొంటారు.
- వర్గీకృత అవర్గీకృత దత్తాంశం గుర్తిస్తారు. అర్థం చేసుకొని సమస్యలను సాధిస్తారు.
- మధ్యగతం యొక్క వర్గీకృత ఆవర్గీకృత దత్తాంశం గుర్తిస్తారు.
- అర్థం చేసుకొని సమస్యలను సాధిస్తారు.
- నిజజీవితపు సమస్యలను అంకగణిత మధ్యమము, మధ్యగతం మరియు బహుళకము ద్వారా సాధిస్తారు.

7.2.1 పరిచయం

కేంద్రీయ స్థాన విలువలు

కింది సందర్భమును పరిశీలించండి.

సందర్భం - 1 : ఒక వసతి గృహంలోని 50 మంది విద్యార్థులు ఉదయం అల్పాహారంలో 200 ఇడ్లీలు తింటారు. మరొక 20 మంది వసతి గృహంలో చేరినచో ఎన్ని ఇడ్లీలు అవసరం ?

సందర్భం - 2 : ఒక పరిశ్రమలోని ఉద్యోగుల నెలవారీ జీతములు (వేలల్లో) కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. అందరు ఉద్యోగుల జీతములకు ప్రాతినిధ్యం వహించు జీతం ఏది?

ఉద్యోగి	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
జీతం (వేలల్లో)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

సందర్భం - 3 : ఒక నగరంలోని ప్రయాణ సాధనాల వివరాలు (శాతములలో) ఇవ్వబడ్డాయి అందరు ఉద్యోగుల జీతములకు ప్రాతినిధ్యం వహించు జీతం ఏది?

1. కారు 15%
2. రైలు 12%
3. బస్సు 60%
4. స్కూటర్ 13%

మొదటి సందర్భములో దత్తాంశము యొక్క సరాసరి కనుగొని దానినుండి అవసరమగు అంచనాలను చేయవచ్చును.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 431 06-02-2021 14:55

రెండవ సందర్భములో సరాసరి రూ.30.7 వేలు అవుతుంది. కానీ, దత్తాంశాన్ని పరిశీలిస్తే అది వారి ఆదాయములకు సరియగు అంచనా కాదు. ఉద్యోగుల జీతముల ఈ విలువకు దగ్గరలో లేవు. ఇంకనూ ఎక్కువమంది జీతములు 12 నుండి 18 వేలు మధ్యలో గలవు. కావున ఈ దత్తాంశమునకు మధ్యగతము తగిన సమాధానము అవుతుంది.

మూడవ సందర్భములో బాహుళకము సరియగు సమాధానము.

కావున దత్తాంశపు స్వభావం మరియు సేకరణ ఉద్దేశముల ననుగుణంగా సగటు కాని మధ్యగతము కాని బాహుళకము గణనకు తీసుకొందాము.

ఈ క్రింది నిజ జీవితపు సంఘటనలు పరిశీలించి, మీ మిత్రునితో చర్చించండి.

1. ఆంకగణిత మధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము విడివిడిగా ఉపయోగించు సందర్భములను మూడింటిని రాయండి. ఈ సందర్భమును గమనించండి. క్రికెట్ క్రీడాకారులు నిహాల్, నిషికాంత్‌ల క్రీడా సామర్థ్యం గురించి వారి అభిమానులు గత 5 పోటీల ఫలితాలను బట్టి చర్చిస్తున్నారు.

పోటీలు		1వ	2వ	3వ	4వ	5వ
పరుగుల	నిహాల్	50	50	76	31	100
సంఖ్య	నిషికాంత్	65	23	100	100	10

ఇద్దరు ఆటగాళ్ల అభిమానులకు పరుగుల సరాసరిలను కింది విధంగా లెక్కించారు.

$$\text{నిహాల్ సరాసరి} = \frac{307}{5} = 61.4$$

$$\text{నిషికాంత్ సరాసరి} = \frac{298}{5} = 59.6$$

నిహాల్ సరాసరి నిషికాంత్ సరాసరి కన్నా ఎక్కువ కాబట్టి నిహాల్ గొప్పవాడని అతడి అభిమానులు వాదిస్తున్నారు. కానీ నిషికాంత్ అభిమానులు ఇన్నింగ్స్ వివరాలను అవరోహణ క్రమంలో అమర్చి పరిశీలించారు.

నిహాల్	100	76	50	50	31
కళ్యాణ్	100	100	65	23	10

పరుగులను పరిశీలించినచో నిహాల్ యొక్క మధ్యమ పరుగులు 65, కానీ నిషికాంత్ మధ్య పరుగులు 50 మాత్రమే కావున నిషికాంత్ గొప్ప వాడిని అతని అభిమానులు వాదిస్తున్నారు.

మరొక రకంగా పరిశీలిస్తే నిషికాంత్ రెండు శతకాలు చేశాడు కావున అతడు గొప్ప వాడవచ్చును.

పై చర్చలోని సరాసరి అనగా అంకగణిత మధ్యమ మధ్యరాశి అనగా మధ్యగతము, ఎక్కువ సార్లు అనగా బాహుళకములను లెక్కించడమే కదా? మరొకసారి ఈ విలువలను లెక్కించు గణించుట గురించి చర్చిద్దాం.

పునరావృత స్కోరులు లెక్కించగా (బాహుళకం) నిహాల్ యొక్క స్కోర్ బాహుళకం 50, నిషికాంత్ స్కోరు బాహుళకము 100 వీటన్నింటిలో ఏది సరైన మాపకము.

సరాసరి, మధ్యగతం, బాహుళకములో దీనిని ఎప్పుడు వాడతాము?

ఇప్పుడు మనము సరాసరి అర్థం చేసుకుందాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 432 06-02-2021 14:55

7.2.2 అంకగణిత మధ్యమము/సరాసరి/సగటు

ఒక దత్తాంశంలోని అన్ని రాశుల మొత్తమును ఆ రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును అంకగణిత మధ్యమ లేక “సరాసరి” లేక “సగటు” అంటారు.

$$\text{అంకగణిత మధ్యమము } \bar{x} = \frac{\text{రాశుల మొత్తము}}{\text{రాశుల సంఖ్య}} \text{ లేదా } = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

ముడి దత్తాంశం యొక్క అంకగణిత మధ్యమము

ఉదాహరణ - 1 : ఒక వారము ఒక పట్టణపు వర్షపాతం 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ. 12 సెం.మీ. 3 సెం.మీ, 6 సెం.మీ, 8 సెం.మీ 0.5 సెం.మీ. అని రికార్డు చేయబడినది అయినా దినసరి సరాసరి వర్షపాతం ఎంత?

సాధన : వారంలో రోజువారి వర్షపాతం (సెం.మీ) = 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 12 సెం.మీ, 3 సెం.మీ, 6 సెం.మీ, 8 సెం.మీ, 0.5 సెం.మీ.

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $(n) = 7$

అంకగణిత మధ్యమము $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{\text{n}}$. x_1, x_2 ..... x_n రాశులు.

మరియు $\bar{x}$ వాటి సగటు $= \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5$ సెం.మీ.

ఉదాహరణ - 2 : 10, 12, 18, 13, P మరియు 17 ల సరాసరి 15 అయినా విలువను కనుగొనండి.

సాధన : సరాసరి $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$90 = 70 + P$

$P = 20.$

అవర్గీకృతం పౌనఃపున్య విభాజనమునకు అంకగణిత మధ్యమమం

ఒక తరగతిలోని 40 మంది విద్యార్థుల బరువులు కింది అవర్గీకృతం పౌనఃపున్యం విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

విద్యార్థి బరువు కి.గ్రా (x)	30	32	33	35	37	41
విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	5	9	15	6	3	2

40 మంది విద్యార్థుల బరువుల అంకగణిత మధ్యమమెంత ?

పట్టికను గమనిస్తే, మొదటి 5 మంది విద్యార్థులలో ఒక్కొక్కరి బరువు 30 కి.గ్రా. అనగా 5 మంది మొత్తం బరువు $5 \times 30 = 150$ కి.గ్రా. ఇదేవిధంగా మిగిలిన బరువులు గల విద్యార్థుల బరువులు విడివిడిగా కనుగొని ఆ లబ్ధము మొత్తమునకు కూడగా రాశుల మొత్తం అవుతుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 433 06-02-2021 14:55

అంకగణిత మధ్యమ $\bar{x} = \dfrac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

కావున సరాసరి $\bar{x} = \dfrac{5\times30+9\times32+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2} = \dfrac{1336}{40} = 33.4$ కి.గ్రా.

దత్తాంశములోని విభిన్న రాశులు $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ మరియు వాని పౌనఃపున్యములు $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ అయినచో

$$\text{అంకగణితమధ్యమం } \bar{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4+f_5x_5+f_6x_6}{f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

ఉదాహరణ - 3 : కింది పౌనఃపున్య విభాజనకు అంకగణితమధ్యమం కనుగొనండి.

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

సాధన :

సోపానం - 1 : ప్రతి వరుసలో $f_i \times x_i$ కనుగొనుము.

సోపానం - 2 : పుణ్యముల మొత్తం (Σf_i) మరియు $f_i \times x_i$ లబ్ధముల మొత్తం (Σf_ix_i) లను కనుగొనుము.

సోపానం - 3 : అంకగణితమధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_ix_i = 755$

ఉదాహరణ - 4 : కింది పౌనఃపున్యం విభజన యొక్క అంకగణిత మధ్యమ 7.5, అయిన 'A'విలువను కనుగొనుము.

మార్కులు	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	10	17	A	8	4

సాధన : కావున పుణ్యముల మొత్తం $(\Sigma f_i) = 42 + A$

రాశుల మొత్తం $f_i \times x_i$ $(\Sigma f_ix_i) = 306 + 8A$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 434　　06-02-2021 14:55

అంకగణితమధ్యమం $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i xi}{\Sigma f_i}$

ఇచ్చిన విలువ ప్రకారం $= 7.5$

కావున, $7.5 = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$$7.5 = \frac{306 + 8A}{42 + A}$$

$\Rightarrow$ 7.5(42 + A) = 306 + 8 A

$\Rightarrow$ $7.5 \times 42 + 7.5A = 306 + 8A$

$\Rightarrow$ 315 + 7.5A = 306 + 8A

$\Rightarrow$ 315 − 306 = 8A − 7.5A

$\Rightarrow$ 9 = 0.5 A

$\Rightarrow$ A = 18

విచలన పద్ధతిలో అవర్గీకృత పౌనఃపున్యం విభాజనమునకు అంకగణితమధ్యమము

ఉదాహరణ - 5 : కింది అవర్గీకృతం పౌనఃపున్యం విభాజనమునకు అంకగణిత మధ్యమం కనుగొనండి.

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

సాధన :

(i) సాధారణ పద్ధతి

అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సగటునకు కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16 (A)	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 435
06-02-2021 14:55

(ii) విచలన పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశంలోని ఏదైనా ఒక రాశిని ఊహించిన అంకగణితమధ్యమంగా గుర్తించి అంకగణిత మధ్యమం కనుగొంటారు. ఈ దత్తాంశంనకు ఊహించిన అంకగణిత మధ్యమం A = 16 అనుకొని పట్టికను పూరించగా

పౌనఃపున్యముల మొత్తం = 40

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	−6	−24
12	5	−4	−20
14	8	−2	−16
16	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		−60+42 = −18

విచలనముల $f_i \times d_i$ లబ్ధాల మొత్తం = −60 + 40

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

అంకమధ్యమం మొత్తం $\bar{x} = A + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \left(\dfrac{-18}{40}\right)$

$= 16 - 0.45$

$= 15.55.$

అవర్గీకృత దత్తాంశ సగటు

ఉదాహరణ 6: జిల్లాపరిషత్ సెకండరీ పాఠశాల సంగెం లోని 10వ తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థులు గణితంలో పొందిన మార్కులు పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల సగటు కనుక్కోండి.

పొందిన మార్కులు (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

సాధన : పై దత్తాంశాన్ని క్రింద చూపిన పట్టికలో తిరిగి వ్రాయగా

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 436 06-02-2021 14:55

పొందిన మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (fi)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
మొత్తం	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

కాబట్టి, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

$\therefore$ మార్కుల సగటు 59.3.

దైనందిన జీవితంలో చాలా సందర్భాలలో, చాలా పెద్ద పెద్ద దత్తాంశాలను సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి, అట్టి (అవర్గీకృత) దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత దత్తాంశంగా మార్చుకోవాల్సిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. అట్లు మార్చుకొని, దాని సగటును కనుగొనుటకు పద్ధతులను చర్చిందాం. ఉదా: 6లో ఇవ్వబడిన అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని, 'తరగతి అంతరం'. 15గా ఉండేటట్లుగా వర్గీకరించుకుందాం. ఇవి అవిభాజిత తరగతి అంతరాలు కావున పౌనఃపున్యాలను కేటాయించేటప్పుడు ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దుకి సమానమైన దత్తాంశాన్ని పొందిన విద్యార్థులను తరువాత తరగతిలో చూపించాలని గుర్తించుకోవాలి. ఉదాహరణకు 40 మార్కులు పొందిన నలుగురు విద్యార్థులు '25-40' తరగతిలో కాక, తరువాత తరగతి '40-55' లోకి తీసుకున్నాము. దీనిని దృష్టిలో ఉంచుకొని మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేసుకుందాం.

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

తరగతి మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక విలువ (స్థానము) మనకు అవసరం. ఒకటి తరగతి పౌనఃపున్యము (అనగా తరగతిలోని అన్ని రాశులు) ఆ తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ చుట్టు కేంద్రీకృత మైనట్లు భావిస్తారు. కాబట్టి ఒక తరగతి యొక్క మధ్య విలువను ఆ తరగతి యొక్క అన్ని విలువలను ప్రాతినిధ్యంగా

భావిస్తాము. దీనినే తరగతి 'మార్కు' (Class-Mark) లేక 'మధ్యవిలువ' అంటారు. ఈ తరగతి మార్కు అనేది ఆ తరగతి యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ అవధుల సరాసరి అని గుర్తించుకోవాలి.

$$\text{ఒక తరగతి మధ్యవిలువ} = \frac{\text{ఆ తరగతి ఎగువ అవధి} + \text{ఆ తరగతి దిగువ అవధి}}{2}$$

10-25 అనే తరగతి యొక్క తరగతి మార్కు $\frac{10+25}{2} = 17.5$ అదేవిధంగా మిగిలిన తరగతుల యొక్క 'తరగతుల మార్కు'లను కనుగొనవచ్చు. ఈ తరగతి చిహ్నాలను x_i గా సూచిస్తూ పట్టికలో పొందుపరుస్తాము.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

పై పట్టికలో చివరి నిలువు వరుసలో గల విలువల మొత్తం $\Sigma f_i x_i$ ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సగటు ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

సగటును కనుగొనే ఈ కొత్త పద్ధతిని 'ప్రత్యక్ష పద్ధతి' అంటారు. పై రెండు సందర్భాలలో కూడా ఒకే దత్తాంశానికి, ఒకే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సగటును కనుగొన్నప్పుడు ఉదా: 6లో ఖచ్చిత సగటు 59.3 కాగా, 62 అనేది సరాసరి సగటుగా పరిశీలించవచ్చు. ఈ రెండు సందర్భాలలో సగటు విలువలో భేదం ఎందుకు వచ్చిందో? ఆలోచించండి?

కొన్ని సందర్భాలలో x_i , f_i విలువలు చాలా పెద్దగా ఉండి వాటి లబ్ధాన్ని గుణించడం కష్టం మరియు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. సగటు కనుగొనుటలో గణనను సులభతరం చేయుటకు "మరొకపద్ధతి"ని గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

మనము 'f_i' లను మార్చే అవకాశం లేదు కాని f_i x_i ల లబ్ధమును సులభతరం చేయుటకు 'x_i' లను చిన్నవిలువలుగా మార్చుకోవచ్చు. కాని ఇది ఎలా చేయగలం.

ఉదాహరణ 6లోని దత్తాంశమునకు సగటు కనుగొనుటను ఈ క్రింది పద్ధతి ద్వారా ప్రయత్నించి చూద్దాం. మొదటి సోపానంలో x_iలలోని ఒక దాని విలువను 'ఊహించిన సగటు'గా ఎన్నుకొంటాము. దీనినే 'a' చే సూచిస్తాము. గణనలను ముమ్ముందు మరింత సులభతరం చేయడానికి $x_1, x_2, ..., x_n$. ల మధ్య విలువ 'a' ను ఎంచుకుంటాము. కావున మనం $a = 47.5$ లేదా $a = 62.5$ ఎన్నుకోవచ్చు. ఇప్పుడు

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 438 06-02-2021 14:55

$a = 47.5$ ఎన్నుకొందాము. రెండవ సోపానంలో ప్రతి x_i నుండి a యొక్క దూరము $(x_i - a)$ల కనుగొందాము. దీనిని విచలనము d_i గా సూచిస్తాము.

$$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

మూడవ సోపానంలో d_i మరియు వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యం(f_i)ల లబ్దాన్ని మరియు $f_i\,d_i$ ల యొక్క మొత్తాన్ని కనుగొంటాము. ఈ గణనలు క్రింది పట్టికలో చూపబడ్డాయి.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి చిహ్నం (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $d_i = x_i - a$	$f_i\,d_i$
10-25	2	17.5	−30	−60
25-40	3	32.5	−15	−45
40-55	7	47.59(a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i\,d_i = 435$

పై పట్టిక నుండి విచలనాల సగటు $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ఇప్పుడు, $\bar{d}$ మరియు $\bar{x}$ ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం!

d_i ని పొందడానికి మనకు ప్రతి 'x_i' నుండి 'a' ను తీసివేసినాము. అందువల్ల సగటు ($\bar{x}$) ను పొందడానికి 'a' ను '$\bar{d}$' కి కూడవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనిని గణితపరంగా క్రింది విధంగా వివరించవైనది.

విచలనాల సగటు $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

విచలనాల సగటు $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

అందువల్ల, $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 439
06-02-2021 14:55

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$$

పట్టికలోని a, $\Sigma f_i d_i$ మరియు Σf_i ల విలువలను, పై సూత్రముతో ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

∴ విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు సగటు = 62.

పైన చర్చించబడిన విధానాన్ని "విచలన పద్ధతి" (Deviation Method) లేదా "ఊహించిన సగటు పద్ధతి" (Assumed Mean Method) అంటారు.

ప్రక్క పేజిలో ఇవ్వబడిన పట్టికలోని '4' వ నిలువు వరుసలో విలువలను గమనించగా ఆ విలువలన్నీ 15 యొక్క గుణిజాలే. అందువల్ల ఒకవేళ మనం 4వ నిలువ వరుసలోని విలువలను 15చే భాగించగా, మనకు ఆ విలువలు చిన్న సంఖ్యలలో వస్తాయి. అప్పుడు ఆ విలువలను f_i తో గుణించడం సులభం (ఇక్కడ 15 అనేది తరగతి అంతరం లేదా 4వ నిలువ వరుసలోని విలువల యొక్క గ.సా.కా).

అందువల్ల $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ గా తీసుకుంటాము. ఇచ్చట a ఊహించిన సగటు మరియు h అనేవి తరగతి అంతరం.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి విలువ (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	–30	–2	–4
25-40	3	32.5	–15	–1	–3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
మొత్తం	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

ఇచ్చట, మరలా $\bar{u}$ మరియు $\bar{x}$ మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం.

$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ మరియు

$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$ అని మనకు తెలుసు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 440 06-02-2021 14:55

అందువల్ల $\bar{u} = \dfrac{\dfrac{\Sigma f_i (x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\,(\bar{x} - a)$$

లేదా $h\bar{u} = (\bar{x} - a)$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = a + h\left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$\bar{x} = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h$$

పై సమీకరణంలో $a, \Sigma f_i u_i h, \Sigma f_i$ మరియు h విలువలను పట్టిక నుండి తీసుకొని ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + \left[\frac{29}{30}\right] \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62.$$

అందువల్ల, విద్యార్థుల సాధించిన మార్కుల సగటు = 62.

పైన చర్చించబడిన పద్ధతిని "సంక్లిష్ట విచలన పద్ధతి" లేదా "సోపానవిచలన పద్ధతి" అంటారు.

గమనించినది :

- ఒకవేళ d_i లకు ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉంటే, సోపాన విచలన పద్ధతి అనేది వినియోగించడానికి అనుకూలమైన పద్ధతి.
- పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనబడిన సగటు విలువ ఒకటే.
- ఊహించిన సగటు పద్ధతి మరియు సోపాన - విచలన పద్ధతులు అనేవి ప్రత్యక్ష పద్ధతి యొక్క సులభతరం చేయబడిన పద్ధతులు మాత్రమే.
- ఒకవేళ a మరియు h విలువలు పైవిధంగా ఇవ్వనప్పటికీ, శూన్యేతర సంఖ్యలు అయి $\bar{x} = a + h\bar{u}$ అనే సూత్రము వ్యవస్థితం అవుతుంది. ఎందుకనగా $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

ఈ పద్ధతులను మరికొన్ని ఉదాహరణలకు అనువర్తింపజేద్దాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 441
06-02-2021 14:55

ఉదాహరణ - 7 : భారతదేశములోని వివిధ రాష్ట్రాలు కేంద్రపాలిత ప్రాంతాలకు చెందిన గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళ ఉపాధ్యాయుల శాతముల వివరములు ఈ క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినాయి. పై మూడు పద్ధతులనుపయోగించి మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతాన్ని కనుక్కోండి.

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య	6	11	7	4	4	2	1

(NCERT వారు నిర్వహించిన 7వ అఖిల భారతీయ పాఠశాల విద్యా సర్వే గణాంకాల ప్రకారం)

సాధన : తరగతి మధ్యవిలువ x_i కనుగొని, దానిని పట్టికలో పొందుపరచుదాం.

ఇచ్చట $a = 50$, $h = 10$.

అప్పుడు $d_i = x_i - 50$ మరియు $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

ఇప్పుడు మనము d_i మరియు u_i విలువలను కనుగొని పట్టికలో పొందుపరచగా

మహిళ ఉపాధ్యాయులు శాతం (C.I)	రాష్ట్రాల/కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15-25	6	20	−30	−3	120	−180	−18
25-35	11	30	−20	−2	330	−220	−22
35-45	7	40	−10	−1	280	−70	−7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
మొత్తం	35				1380	−360	−36

పై పట్టిక నుండి, $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$, $\Sigma f_i d_i = -360$, $\Sigma f_i u_i = -36$.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 442 06-02-2021 14:55

ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

సోపాన విచలన పద్ధతి $\bar{x} = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

$\therefore$ గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతము = 39.71.

ఒకవేళ తరగతి పొడవుల వేరువేరుగా ఉన్ననూ మరియు x_i విలువలు పెద్ద సంఖ్యల అయినప్పటికినీ d_i ల యొక్క సామాన్య కారణాంకాన్ని h గా తీసుకొని సంక్షిప్త విచలన పద్ధతిలో సగటు కనుగొనవచ్చు..

ఉదాహరణ - 8 : వన్‌డే క్రికెట్ ఆటలో బౌలర్లు సాధించిన వికెట్ల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో చూపించనైనది సరియైన పద్ధతిని ఎంచుకొని బౌలర్లు సాధించిన సగటు వికెట్లను కనుగొనుము. ఇట్టి సగటు యొక్క ప్రాముఖ్యత ఏమిటి?

వికెట్ల సంఖ్య	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
బౌలర్ల సంఖ్య	7	5	16	12	2	3

సాధన : ఇచ్చుట తరగతి పొడవులు వేరువేరుగా ఉన్నాయి. మరియు x_i విలువలు పెద్దవిగా ఉన్నాయి. అయినప్పటికినీ సగటు కనుగొనడానికి సంక్షిప్త విచలన పద్ధతినే ఎంచుకుందాము; ఇచ్చుట a = 200 మరియు h = 20.

వికెట్ల సంఖ్య	బౌలర్ల సంఖ్య (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ $h = 20$	$f_i u_i$
20-60	7	40	−160	−8	−56
60-100	5	80	−120	−6	−30
100-150	16	125	−75	−3.75	−60
150-250	12	200(a)	0	0	0
250-350	2	300	100	5	10
350-450	3	400	200	10	30
మొత్తం	45				−106

అందువల్ల $\bar{x}_i = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$

$\therefore$ 45 మంది బౌలర్లు వన్‌డే క్రికెట్‌లో సాధించిన వికెట్ సగటు = 152.89.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 443 06-02-2021 14:55

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. రవాణా కార్యాలయంలో పార్శిళ్ళ బరువులు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

బరువు కి.గ్రా.	50	65	75	90	110	120
పార్సల్ సంఖ్య	25	34	38	40	47	16

పార్శిళ్ళ సగటు బరువును కనుగొనండి ?

2. పిల్లల సంఖ్యకు అనుగుణంగా ఒక గ్రామంలోని కుటుంబాల సంఖ్య క్రింద ఇవ్వబడింది.

పిల్లల సంఖ్య	0	1	2	3	4	5
కుటుంబాల సంఖ్య	11	25	32	10	5	1

ప్రతి కుటుంబానికి పిల్లల సగటు సంఖ్యను కనుగొనండి?

3. క్రింది పౌనఃపున్యం పంపిణీ యొక్క సగటు 7.2 అయితే 'K' విలువను కనుగొనండి.

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

7.2.3 మధ్యగతము (Median)

దత్తాంశములోని రాశులను ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో రాసినప్పుడు మధ్యమ రాశి విలువను దత్తాంశపు మధ్యగతము అంటారు. ఇది దత్తాంశమును రెండు సమభాగములుగా విభజిస్తుంది. అంటే దత్తాంశములోని సగం రాశుల విలువలు మధ్యగతము కన్నా ఎక్కువ అయితే మిగిలిన సగం రాశుల విలువలు మధ్యగతము కన్నా తక్కువ.

కింది తరగతులలో నేర్చుకొన్న విధంగా ముడి దత్తాంశమునకు మధ్యగతము కింది విధంగా లెక్కిస్తాము.

ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో రాసిన దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య 'n' మరియు

'n' బేసి సంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశివిలువ.

'n' సరిసంఖ్య అయిన మధ్యగతము = $\left(\frac{n}{2}\right)$ మరియు $\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశుల సరాసరి

పౌనఃపున్య విభాజనమునకు మధ్యగతము

భారత్వ దత్తాంశ రాశులు (అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము) మధ్యగతము కనుగొను పద్ధతిని ఉదాహరణ పూర్వకంగా చర్చిద్దాం. ఒక సంస్థలోని 100 మంది ఉద్యోగుల నెలసరి వేతనాలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

నెలసరివేతనం ₹	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
ఉద్యోగుల సంఖ్య	4	18	30	20	15	8	5

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 444 06-02-2021 14:55

దత్తాంశములోని రాశులు ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో ఉండునట్లుగా విభాజన పట్టికను రాసి, సంచిత పౌనఃపున్యములను రాయవలెను. (ఏదైన ఒక రాశి వరకు సంచిత పౌనఃపున్యము అనగా ఆ రాశి పౌనఃపున్యము మరియు ముందు రాశి వరకు పౌనఃపున్యముల మొత్తమే. దత్తాంశములోని మొదటి రాశి యొక్క పౌనఃపున్యమే దాని సంచిత పౌనఃపున్యము అవుతుంది) పట్టికను గమనించండి.

దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య N అయిన $\frac{N}{2}$వ రాశిని కలిగి ఉన్న తరగతిని 'మధ్యగత తరగతి' అంటారు.

దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య N= 100 కావున $\left[\frac{N}{2}\right]$వ మరియు $\left[\frac{N}{2}+1\right]$వ రాశులు.

అనగా 50, 51వ రాశుల విలువను పట్టిక నుండి గ్రహించండి. అంటే ఒక్కొక్క వేతనము 8500. అనగా 8500 దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము.

వర్గీకృత దత్తాంశములో సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికల నుండి మధ్యవిలువ అనేది ఏదో ఒక తరగతి అంతరంలోని ఒక విలువ అవుతుంది. కాబట్టి ఈ మొత్తం విభాజనమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే తరగతిలోని ఒక మధ్యవిలువను మనం కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. కాని అది ఏ తరగతి అవుతుందో ఎలా కనుగొనడం? ఈ తరగతి కనుగొనడానికి మనం $\frac{n}{2}$ విలువను మరియు అన్ని తరగతుల యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యాలు కనుగొంటాము. తర్వాత ఏ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{n}{2}$ ను మొదటిసారి అధిగమిస్తుందో ఆ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా గుర్తిసారు.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యం (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
80-90	7	45
90-100	8	53

పై విభాజనము నందు $n = 53$, కావున $\frac{n}{2} = 26.5$. 26.5 కన్నా ఎక్కువైన కనీస సంచిత పౌనఃపున్యం గల తరగతి 60-70. దీనిని మధ్యగత తరగతి అంటారు.

సంచిత పౌనఃపున్యం 29 ($\frac{n}{2}$ = 26.5 కంటె కొంచెం పెద్దది).

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 445 06-02-2021 14:55

ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతంను క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొంటాము.

మధ్యగతము $M = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$

ఇందులో

l = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు

n = దత్తాంశములోని రాశుల సంఖ్య

cf = మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యము

f = మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

h = మధ్యగత తరగతి పొడవు.

పట్టిక నుండి $\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60,\ cf = 22,\ f = 7,\ h = 10$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

మధ్యగతము $= 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{7} \right] \times 10$

$= 60 + \frac{45}{7}$

$= 66.4.$

$\therefore$ తరగతి లోని సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా తక్కువ మార్కులు మిగిలిన సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా ఎక్కువ మార్కులు వచ్చి ఉంటాయి.

ఉదాహరణ -9 : ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతి బాలికల ఎత్తు గురించి చేసిన సర్వే ఫలితాలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. వారి ఎత్తుల మధ్యగతం కనుగొనండి?

ఎత్తు (సెం.మీ)	140 కన్నా తక్కువ	145 కన్నా తక్కువ	150 కన్నా తక్కువ	155 కన్నా తక్కువ	160 కన్నా తక్కువ	165 కన్నా తక్కువ
బాలికల సంఖ్య	4	11	29	40	46	51

సాధన : మధ్యగతము కనుగొనుటకు మొదట తరగతి అంతరాలను, వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యమును కనుగొనవలెను. ఇచ్చిన విలువలు ఎగువ హద్దు కన్నా తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యాలు కావు. ఎత్తులు 140, 145, 150, . . ., 165 లు ఎగువ హద్దులు, అనగా తరగతి అంతరాలు 140 కన్నా తక్కువ, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165. అవుతాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 446 06-02-2021 14:55

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యము	సంచిత పౌనఃపున్యము
140 కన్నా తక్కువ	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

పట్టికను పరిశీలిస్తే 140 కన్నా తక్కువ పొడవు గల వారు బాలికల సంఖ్య 4 అనగా 140 కన్నా తక్కువ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము 4,145 సెం.మీ కన్నా తక్కువ పొడవు గల వారు 11 మంది. అనగా 140 – 145 తరగతి పౌనఃపున్యం 11 – 4 = 7. ఇదేవిధంగా మిగిలిన పౌనఃపున్యములను లెక్కించవచ్చు.

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 51$,

$$\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$$

దత్తాంశంలోని 25.5 మారి 145–150 తరగతికి చెందుతుంది.

$\therefore$ 145 – 150 మధ్యగత తరగతి

మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు $l = 145$,

మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి సంచితపౌనఃపున్యం $cf = (145 - 150) = 11$,

మధ్యతరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము $f = (145 - 150) = 18$,

మధ్యగత తరగతి పొడవు $h = 5$.

సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతం $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

$\therefore$ బాలికల పొడవుల యొక్క మధ్యగతము 149.03 సెం.మీ. అనగా తరగతిలో 50% మంది బాలికలు 149.03 సెం.మీ కన్నా ఎక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు. మిగిలిన 50% మంది 149.03 సెం.మీ. కన్నా తక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 447
06-02-2021 14:55

ఉదాహరణ -10. : క్రింది దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 525 మరియు దత్తాంశం లోని రాశుల మొత్తం 100 అయిన x, y విలువలను కనుగొనండి.

తరగతి అంతరం	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
పౌనఃపున్యం	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

సాధన : దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 100$ అని ఇవ్వబడింది.

$\therefore$ $76 + x + y = 100$, i.e $x + y = 24$ ... (1)

మధ్యగతం 525 అను రాశి 500 – 600 తరగతికి చెందుతుంది.

కావున, $l = 500$, $f = 20$, cf $= 36 + x$, $h = 100$

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7 + x$
300-400	12	$19 + x$
400-500	17	$36 + x$
500-600	20	$56 + x$
600-700	y	$56 + x + y$
700-800	9	$65 + x + y$
800-900	7	$72 + x + y$
900-1000	4	$76 + x + y$

సూత్రమును ఉపయోగించి

$$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{\cancel{20}_1} \times \cancel{100}^5$$

$525 - 500 = (14 - x) \times 5$

$25 = 70 - 5x$

$5x = 70 - 25 = 45$

$x = 9$

సమీకరణం (1) నుండి $x + y = 24$

$9 + y = 24$ $(\because \; x = 9)$

$y = 15$.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 448 06-02-2021 14:55

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. కింది పట్టిక 400 నియాన్ దీపాల జీవిత కాల పంపిణీని తెలియజేస్తుంది.

జీవిత కాలం (గం.లలో)	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
దీపాల సంఖ్య	14	56	60	86	74	62	48

దీపం యొక్క సగటు జీవిత సమయాన్ని కనుగొనండి.

2. దిగువ పంపిణీ ఒక తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థుల బరువును తెలియజేస్తుంది. విద్యార్థుల సగటు బరువును కనుగొనండి.

బరువు కి.గ్రా.	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	8	6	6	3	2

7.2.4 బాహుళకము (Mode)

ఒక దత్తాంశములో మిగిలిన రాశుల కన్నా ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యముగల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకము అంటారు.

ఉదాహరణ 11 : క్రింద ఒకరోజు దుకాణదారు అమ్మిన పాదరక్షల సైజు నంబర్లు ఇవ్వబడినవి. బాహుళకము కనుగొనండి.

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

సాధన : దత్తాంశ రావులను ఆరోహణ క్రమంలో రాయగా 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 లేక పౌనఃపున్య విభాజనను రాయగా

కొలత సంఖ్య	6	7	8	9	10
అమ్మిన చెప్పుల సంఖ్య	4	5	1	2	1

ఇచ్చట 7 అను సంఖ్య 5 సార్లు వచ్చింది.

$\therefore$ దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము = 7.

ఉదాహరణ 12 : 100 మార్కులకు నిర్వహించిన పరీక్షలో 20 మంది విద్యార్థుల మార్కులు

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) 91-100, 81-90, ... తరగతులతో పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక తయారుచేయండి.

(b) బాహుళక తరగతిని గుర్తించండి. (అత్యధిక పౌనఃపున్యం గల తరగతిని 'బాహుళక తరగతి' అంటారు).

(c) మధ్యగతపు తరగతులను గుర్తించండి.

సాధన : (a)

మార్కులు	పౌనఃపున్యము	సంచిత పౌనఃపున్యం
91 - 100	9	20
81 - 90	6	11
71 - 80	3	5
61 - 70	0	2
51 - 60	2	2
మొత్తం	20	

(b) గరిష్ట పౌనఃపున్యాలు '9' గల తరగతి 91-100 కావున ఇదే బాహుళకపు తరగతి.

(c) 20లో మధ్యమ రాశి 10.

దత్తాంశముగాని రాశులను ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో ఎలా లెక్కించినను 10 వ రాశి 81-90 తరగతిలో గలదు. కావున 81-90 ను మధ్యగత తరగతి అంటారు.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనానికి (వర్గీకృత దత్తాంశానికి), పౌనఃపున్యాలను పరిశీలించి "బాహుళకము" కనుగొనడం సాధ్యం కాదు. ఇచట మనం గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం ఉన్న ఒక తరగతిని మాత్రం సూచించగలం, అట్టి తరగతిని బాహుళక తరగతి (modal class) అంటారు. బాహుళకం అనేది బాహుళక తరగతిలో ఉండే ఒక విలువ మరియు దీనిని క్రింది సూత్ర సహాయమున లెక్కించవచ్చును.

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

ఇచ్చుట, l = బాహుళక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు

h = బాహుళక తరగతి పొడవు

f_1 = బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_2 = బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

ఈ సూత్రాన్నుపయోగించి బాహుళకమును కనుగొనే విధానాన్ని ఈ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలించుదాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 450 06-02-2021 14:55

ఉదాహరణ -13 : ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో కొంత మంది విద్యార్థుల బృందం. 20 కుటుంబాలను సర్వే చేసి, కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్యను ఈ క్రింది చూపిన పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో చూపనైనది.

కుటుంబ పరిమాణం	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
కుటుంబాల సంఖ్య	7	8	2	2	1

ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని' కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చట గరిష్ఠ తరగతి పౌనఃపున్యము 8, ఈ పౌనఃపున్యానికి సంబంధించిన తరగతి 3-5. అందువల్ల బాహుళక తరగతి 3-5

ఇప్పుడు,

బాహుళక తరగతి = 3-5 మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు (l) = 3,

తరగతి పొడవు (h) = 2

బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యము (f_1) = 8,

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_0) = 7,

బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_2) = 2.

పై విలువలను, ఈ క్రింది సూత్రములో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$$\text{బాహుళకం} = l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$$

$$= 3+\left(\frac{8-7}{2\times 8-7-2}\right)\times 2 = 3+\frac{2}{7} = 3.286$$

పై దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 3.286.

ఉదాహరణ 14 : ఒక తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కులు పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టిక ఈ క్రింద నీయబడినది. ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకము'ను కనుగొనుము. అదేవిధంగా బాహుళకము మరియు సగటులను పోల్చి, వ్యాఖ్యానించుము.

తరగతి అంతరం (CI)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	F_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తము	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_{ixi} = 1860$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 451
06-02-2021 14:55

సాధన : దత్తాంశములోని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు (7 గురు) 40-55 తరగతి అంతరంలోని మార్కులు సాధించి యున్నారు. కనుక 40 - 55 అనేది బాహుళక తరగతి అవుతుంది.

మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు (l) = 40,

తరగతి పొడవు (h) = 15,

బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_1) = 7,

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి పౌనఃపున్యము (f_0) = 3

బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న పౌనఃపున్యము (f_2) = 6.

$$\text{బాహుళకము} = l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$$

$$= 40+\left(\frac{7-3}{2\times 7-6-3}\right)\times 15 = 40+12 = 52$$

వ్యాఖ్యానం : పై దత్తాంశానికి బాహుళకము 52; అదేవిధంగా సగటు 62 (ఉదాహరణ-1 ద్వారా) అని తెలియుచున్నది. అనగా తరగతిలోని 52 మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎక్కువ మంది ఉన్నారని, ఒక్కొక్క విద్యార్థి యొక్క సగటు మార్కులు 62.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. కింది పట్టిక ఒక నిర్దిష్ట రోజున ఆసుపత్రిలో చేరిన రోగుల వయస్సును చూపుతుంది.

వయస్సు సం.లో	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

బాహుళకము కనుగొనుము?

2. 225 విద్యుత్ భాగాల యొక్క జీవితకాల సమయం (గంటల్లో) ఈ క్రింది సమాచారము తెలుపుతుంది.

జీవిత కాలం గం.లో	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
పౌనఃపున్యం	10	35	52	61	38	29

వాటి బాహుళకము కనుగొనండి.

3. భారతదేశంలోని ఉన్నత మాధ్యమిక పాఠశాలల్లో రాష్ట్రాల వారీగా, ఉపాధ్యాయ – విద్యార్థి నిష్పత్తి ఇస్తుంది. ఈ క్రింది విధంగా ఉంది. అంకగణిత మధ్యమము, బాహుళకము కనుగొని రెండు చర్యలను అర్థం చేసుకోండి.

విద్యార్థుల సంఖ్య	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
రాష్ట్రాల సంఖ్య	3	8	9	10	3	0	0	2

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 452 06-02-2021 14:55

4. వన్డే అంతర్జాతీయ క్రికెట్ మ్యాచ్‌లలో ప్రపంచంలోని కొందరు అగ్రశ్రేణి బ్యాట్స్ మెన్ చేసిన పరుగుల సంఖ్య ఈ క్రింద చూపనైనది.

పరుగులు	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
బాట్స్‌మెన్ సంఖ్య	4	18	9	7	6	3	1	1

బాహుళకమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము

1. నాలుగు బస్తాల గోధుమల బరువు (కి.గ్రా లో) 103, 105, 102, 104. అంకగణిత మధ్యమమును కనుగొనండి?

2. గత ఐదేళ్లలో ఒక పాఠశాలలో నమోదు 605, 710, 745, 835 మరియు 910. సంవత్సరానికి సగటు నమోదు ఎంత?

3. ఒక పాఠశాలలో పదవ తరగతి 30 మంది విద్యార్థుల గణిత పరీక్షలో ఈ క్రింది మార్కులు పొందారు.

40	73	49	83	40	49
27	91	37	31	91	40
31	73	17	49	73	62
40	62	49	50	80	35
40	62	73	49	31	28

సగటు మార్కులను కనుగొనండి.

4. మొదటి పది సహజ సంఖ్యల సగటును కనుగొనండి.

5. దుకాణంలో 6 రోజుల చక్కెర అమ్మకం క్రింద ఇవ్వబడింది. చక్కెర సగటు రోజువారీ అమ్మకాన్ని లెక్కించండి.

సోమవారం	మంగళవారం	బుధవారం	గురువారం	శుక్రవారం	శనివారం
74 కి.గ్రా.	121కి.గ్రా.	40కి.గ్రా.	82కి.గ్రా.	70.5కి.గ్రా.	130.5కి.గ్రా.

6. విచలన పద్ధతిని ఉపయోగించి కింది పంపిణీ నుండి సగటు/అంకగణిత మధ్యమము రోజువారీ వేతనాన్ని లెక్కించండి.

రోజువారి వేతనాలు రూ.లలో	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
కార్మికుల సంఖ్య	5	8	15	10	2

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 453 06-02-2021 14:55

7. బాస్కెట్ బాల్ టీమ్ ఒక సీరిస్‌నందు సాధించిన పాయింట్లు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

16, 1, 6, 26, 14, 4, 13, 8, 9, 23, 47, 9, 7, 8, 17, 28 మధ్యగతం కనుక్కోండి.

8. 15 మార్కులకు గాను గణిత పరీక్షలో 35 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు క్రింద నివ్వబడ్డాయి. వాటి యొక్క సగటును కనుగొనండి.

వచ్చిన మార్కులు	3	5	6	11	15	14	13	7	12	10
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	6	5	3	1	7	3	2	3	1

9. 11 మ్యాచ్‌ల సీరిస్‌లో ఒక జట్టు సాధించిన గోల్స్ కింద నీయబడినది.

1, 0, 3, 2, 4, 5, 2, 4, 4, 2, 5

స్కోర్ యొక్క మధ్యమము కనుగొనుము.

10. కింది డేటా యొక్క బాహుళకము కనుగొనుము.

9, 6, 8, 9, 10, 7, 12, 15, 22, 15

11. పర్యావరణ అవగాహన కార్యక్రమములో భాగంగా విద్యార్థుల బృందం ఒక సర్వే నిర్వహించింది. దీనిలో వారు మొక్కల యొక్క సంఖ్యకు సంబంధించి ఈ క్రింది డేటాను సేకరించారు. ఒక ప్రాంతంలో 20 ఇల్లు. ఇంటికి సగటు మొక్కల సంఖ్యను కనుగొనండి.

మొక్కల సంఖ్య	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
ఇండ్ల సంఖ్య	1	2	1	5	6	2	3

12. ఒక పరిశ్రమలోని 50 మంది కార్మికుల రోజువారి వేతనాల పంపిణీ ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.తగిన పద్ధతిని ఉపయోగించి సగటు రోజువారీ వేతనాలను కనుగొనండి.

రోజువారి వేతనాలు(రూలలో)	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
కార్మికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

13. ఒక ప్రాంతపు పిల్లల యొక్క పాకెట్ మనీ ఈ క్రింది విధంగా ఉంది. ఈ పాకెట్ మనీ ₹ 18 అయిన అంకమధ్యమము 'f' యొక్క పౌనఃపున్యము కనుగొనుము.

పాకెట్ మనీ (₹ లలో)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

14. కింది పట్టిక ఒక సంవత్సర కాలంలో ఆసుపత్రిలో చేరిన రోగుల వయస్సును తెలుపుతుంది.

వయస్సు (సం॥లలో)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

ఇచ్చిన డేటా యొక్క సగటు మరియు బాహుళకమును కనుగొని రెండింటిని పోల్చండి.

15. వరికోలు గ్రామంలోని 200 కుటుంబాల గృహావసరాల ఖర్చులు ఈ క్రింద నీయబడ్డాయి. కుటుంబాల నెలవారి ఖర్చుల సగటును కనుగొనుము. నెలవారి వ్యయాన్ని కనుగొనండి.

ఖర్చు (రూ॥లలో)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
కుటుంబాల సంఖ్య	24	40	33	28	30	22	16	7

16. ఒక ప్రాంతంలోని 68 మంది విద్యుత్ వినియోగదారుల నెలవారీ విద్యుత్ వినియోగం ఈ క్రింద తెలుపబడినది. అంకగణితమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము కనుగొని వాటిని పోల్చండి.

నెలవారీ వినియోగం	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
వినియోగదారుల సంఖ్య	4	5	13	20	14	8	4

17. 60 పరిశీలనల మధ్యగతం 28.5 అయిన x మరియు y విలువలు కనుగొనుము.

తరగతిఅంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యం	5	x	20	15	y	5

18. జీవిత భీమా ఏజెంటు 100 పాలసీదారుల వయస్సు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నట్లు కనుగొన్నారు. వారి సగటు వయస్సు లెక్కించండి. [18 నుండి 60లోపు వయస్సు వారికి మాత్రమే జీవిత భీమా పాలసీలు ఇస్తారు.]

వయస్సు (సం॥లలో)	20 లోపు	25 లోపు	30 లోపు	35 లోపు	40 లోపు	45 లోపు	50 లోపు	55 లోపు	60 లోపు
పాలసీదారుల సంఖ్య	2	6	24	45	78	89	92	98	100

ముఖ్యాంశాలు

- ఒక దత్తాంశములో ఏరాశి చుట్టూ మిగిలిన రాశులన్నీ కేంద్రీకృతమై ఉంటాయో ఆ రాశిని కేంద్రస్థానపు కొలత అంటారు.
- కేంద్రీయస్థాన విలువలు : అంకగణితమధ్యమము (సరాసరి/సగటు), మధ్యగతము, బాహుళకము.
- రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా ఫలితమును దత్తాంశము యొక్క అంకగణితమధ్యమము అంటారు.

$$\text{అంకగణితమధ్యమము} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}} \quad \text{లేక} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 455	06-02-2021 14:55

- ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమములో రాయబడిన దత్తాంశములోని మధ్యమరాశిని మధ్యగతము అంటారు.
- ఒక దత్తాంశములో మిగిలిన రాశులకన్నా ఎక్కువ సార్లు పునరావృతం అగు రాశిని అనగా ఎక్కువ పౌనఃపున్యంగల రాశిని ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకము అంటారు.
- వర్గీకృత దత్తాంశ అంకగణితమధ్యమము

(i) ప్రత్యక్షపద్ధతి

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ఇక్కడ x_i తరగతి మార్కులు f_i పౌనఃపున్యము.

(ii) ఊహించిన సగటు పద్ధతి

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

ఇక్కడ a ఊహించిన సగటు మరియు $d_i = x_i - a$.

(iii) సోపాన విచలన పద్ధతి

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right) \times h$$

ఇక్కడ a అనేది ఊహించిన అంకగణితమధ్యమము, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ మరియు h తరగతి అంతరం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 456 06-02-2021 14:55

అధ్యాయం

7.3 దత్తాంశాన్ని గ్రాఫు ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరచుట దృశీకరించుట

7.3.0 అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ పాఠ్యాంశములో చదివిన తరవాత, మీరు.

- ఇవ్వబడిన బార్‌గ్రాఫ్‌ను వివరించగలరు మరియు అందులో ఉన్న సమాచారాన్ని వివిధ రకాలుగా పోల్చగలరు, వివరించగలరు.
- ఇచ్చిన దత్తాంశానికి (వర్గీకృత/అవర్గీకృత) – బార్ గ్రాఫ్‌ను నిర్మించగలరు మరియు దాని ద్వారా సమాచారాన్ని ప్రాతినిధ్యపరచగలరు.
- ఇచ్చిన దత్తాంశానికి హిస్టోగ్రామ్ నిర్మించగలరు.
- ఇచ్చిన దత్తాంశానికి ఓజివ్ వక్రము (ఆరోహణ, అవరోహణ) లను గీయగలరు.

7.3.1 పరిచయం

మనం ఒక దత్తాంశాన్ని పరిశీలించినప్పుడు, అందులో కొలవదగిన ధర్మమున్న విలువను “చరరాశి” అంటారు. ఇంకనూ అట్టి దత్తాంశములో గల వివిధ రకాల అంశాలను, ఆ దత్తాంశం యొక్క చరరాశి యొక్క విలువగా పరిగణిస్తాం. ఉదాహరణకు, మన ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతి విద్యార్థులకు, ఒక విద్యాసంవత్సరంలో వచ్చిన మొత్తం మార్కులను చరరాశి ‘x’, అని, ఒక్కొక్క విద్యార్థులు పొందిన మార్కులను x_i ($i = 1, 2, 3$ ...). చరరాశి విలువలు (పరిశీలనలు) అని పరిగణిస్తాం. మొత్తం విద్యార్థులు పొందిన మొత్తం మార్కుల వివరాలను ఆపాఠశాల యొక్క సమగ్ర – సవివరమైన x_i దత్తాంశంగా భావిస్తాము.

ఒక అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని సరళంగా ఒక పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరచడం వల్ల అట్టి దత్తాంశాన్ని సాంఖ్యక శాస్త్రపరంగా విశ్లేషించడం సులభం అవుతుంది. ఇది సాంఖ్యాక శాస్త్ర పరంగా విశ్లేషణకు ఒక ఆధారం అవుతుంది. కాని ఇవ్వబడిన దత్తాంశంలోని పరిశీలనాంశాలను (సంఖ్యా విలువలను) పరిశీలించడం ద్వారా అట్టి దత్తాంశం యొక్క లక్షణాలను సులభంగా గుర్తించలేము. ఇదే దత్తాంశాన్ని గనుక గ్రాఫ్ ద్వారా వ్యక్తపరిస్తే, అట్టి దత్తాంశములో గల సంఖ్యల (విలువల) అమూర్త భావనలను సులభంగా అవగతం చేసుకొని, అట్టి దత్తాంశం యొక్క లక్షణాలను సులభంగాను అర్థం చేసుకోవచ్చు. సామాన్యమైన వ్యక్తులు అప్పుడప్పుడు దత్తాంశంలోని సంఖ్యలను, పట్టికలను చూసి సందిగ్ధంలోనూ పడవచ్చు. సాంఖ్యాకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం కాసింత ఉన్ననూ, గ్రాఫ్ రూపంలో వ్యక్తపరచిన దత్తాంశాన్ని గూర్చి వివరించడం, నిర్ణయాలు ప్రకటించడం సులభతరం అవుతుంది. దత్తాంశం యొక్క పౌనఃపున్యాలలోని మార్పులను (పెరుగుదల, తరుగుదల) సరిగ్గా గమనించడానికి గ్రాఫులు చాలా ఉపయోగపడతాయి. ఇంకనూ దత్తహరూన పౌనఃపన్యాల మధ్య సంబంధాలను, వాటి సౌష్టవతను అర్థం చేసుకోవచ్చును.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 457 06-02-2021 14:55

సాధారణంగా ఒక దత్తాంశానికి సంబంధించిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలోని ఒక చరరాశి విలువను - క్రింది గ్రాఫుల ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరుస్తాయి. (1) బార్‌గ్రాఫ్, (2) హిస్టోగ్రామ్ (3) పౌనః పున్యవిభాజన వక్రము (4) ఓజీవ్ వక్రము (a) ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము (b) అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

7.3.2 కమ్మీ రేఖాచిత్రము

సమాన మధ్య దూరము కలిగి, సమాన వెడల్పుల, పౌనఃపున్యములకు అనుపాతంలో పొడవులు గల కమ్మీలతో దత్తాంశమును చూపు రేఖాచిత్రమును కమ్మీ రేఖాచిత్రం అంటారు.

ఈ క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి. ఉదాహరణకు ఒక పాఠశాలలోని 40 మంది విద్యార్థులు గ్రేడుల వివరాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడినాయి.

గ్రేడులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
A	13
B	9
C	6
D	7
E	5

పై చిత్రములో గమనిస్తే, క్షితిజ సమాంతర అక్షం అయిన X-అక్షంపై సమాన వెడల్పులు మరియు దూరాలలో దీర్ఘచతురస్రాకార కమ్మీల వెడల్పును తీసుకోవడం జరిగింది. అట్టి దీర్ఘచతురస్రాల పొడవు, లంబ అక్షం అయిన Y-అక్షంపైన, వాటి పౌనఃపున్యాలకు అనులోమానుపాతంలో తీసుకోనైనది. (విద్యార్థుల సంఖ్య).

ఇక్కడ తీసుకోబడిన దీర్ఘచతురస్రాకార కమ్మీ యొక్క వెడల్పుకు ప్రత్యక్షమైన అర్థం అనేది ఏమయా లేదు, (దీర్ఘచతురస్రం అకర్షణీయంగా ఉండటానికి తీసుకోనైనది)

(7.3.1.1) - చిత్రంలోని కమ్మీరేఖాచిత్రాన్ని గమనించారా?

అట్టి కమ్మీరేఖా చిత్రంను చూచి మీరేమి నిర్ణయించగలరు?

ఎంత మంది విద్యార్థులు 'A' గ్రేడు సాధించారు?

ఏ గ్రేడు సాధించిన విద్యార్థులు గరిష్టంగా ఉన్నారు?

ఏ గ్రేడు సాధించిన విద్యార్థులు అతి తక్కువగా ఉన్నారు?

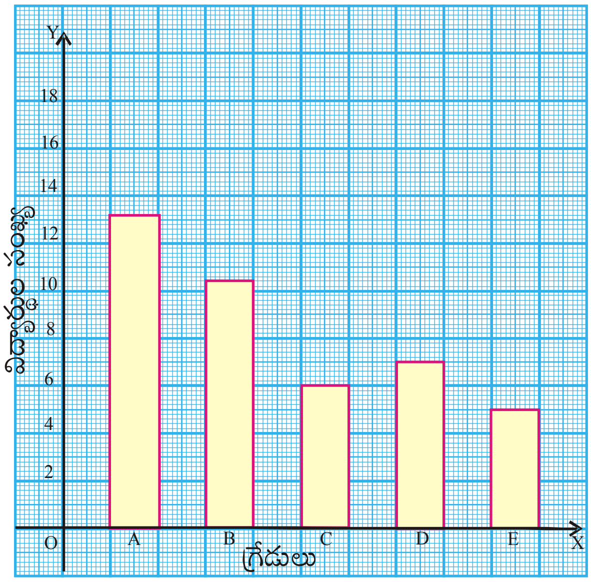
పై విధంగా ప్రశ్నించుకుంటూ లేదా ఇవ్వబడిన సమాచారాన్ని చూసి ఈ క్రింది విధంగా నిర్ణయానికి రావచ్చు.

(i) 'A' గ్రేడు సాధించిన విద్యార్థుల సంఖ్య అత్యధికం లేదా గరిష్ఠం.

(ii) 'E' గ్రేడు సాధించిన విద్యార్థుల సంఖ్య అత్యల్పం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 458 06-02-2021 14:55

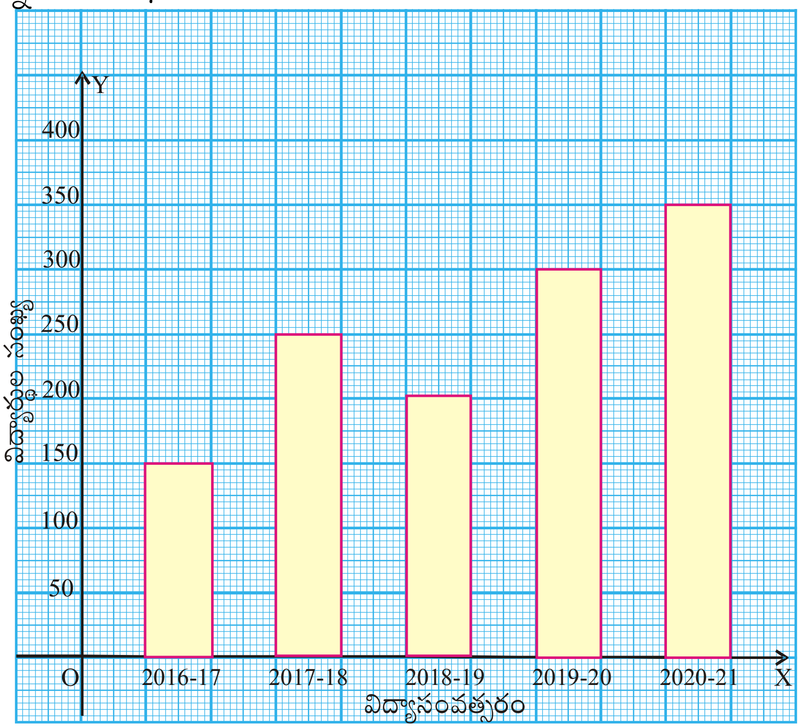
- మన నిజ జీవితంలో, కమ్మీ చిత్రాలను ఆర్థిక వేత్తలు, వ్యాపారస్తులు, వ్యవసాయ సంబంధ శాఖవారు, వివిధ ప్రభుత్వ, ప్రైవేటు శాఖలు, విద్యా, వైద్యం మొదలగు రంగాలలో, సమాచారాన్ని సులభంగా అవగతం చేసుకొనుటకు విరివిగా ఉపయోగిస్తారు.



- పై దత్తాంశానికి Y-అక్షంపై గ్రేడులు; X-అక్షంపై గ్రేడుల వారిగా విద్యార్థుల సంఖ్యను తీసుకొని చిత్రం 7.3.1.2 లో చూపిన విధంగా కూడా కమ్మీ చిత్రం గీయవచ్చును.

ఉదాహరణ

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన (7.3.1) కమ్మీ చిత్రం అనేవి జిల్లా పరిషత్ ఉన్నత పాఠశాల తాటికొండ 2016-17 నుండి 2020-21 విద్యా సంవత్సరంలోని విద్యార్థుల సంఖ్యను సూచించుటను. ఇట్టి రేఖా చిత్రమును పరిశీలించి ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాయండి.



(i) పై కమ్మీ చిత్రము ఏ విధమైన సమాచారాన్ని సూచిస్తుంది.

(ii) ఏ విద్యాసంవత్సరంలో 250 మంది విద్యార్థులు ఉన్నారు?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 459
06-02-2021 14:55

(iii) ఏ విద్యాసంవత్సరంలో పాఠశాలలోని విద్యార్థుల సంఖ్య గరిష్ఠంగా ఉంది?

(iv) ఈ క్రింది వాక్యము సత్యమా? అసత్యమో వివరించండి.

2017-18 విద్యాసంవత్సరంలోని విద్యార్థుల సంఖ్య 2016-17 విద్యాసంవత్సరంలోని విద్యార్థుల సంఖ్యకు రెట్టింపు

సాధన :

(i) పై కమ్మీ చిత్రం జిల్లాపరిషత్ ఉన్నత పాఠశాల, తాటికొండ నందు 2016-17 నుండి 2020-21 విద్యా సంవత్సరాలలో గల విద్యార్థుల సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

(ii) 2017-18 విద్యాసంవత్సరంలో పాఠశాల విద్యార్థుల సంఖ్య 250.

(iii) 2020-21 విద్యాసంవత్సరంలో పాఠశాల విద్యార్థుల సంఖ్య గరిష్ఠంగా కలదు.

(iv) 2017-18 విద్యాసంవత్సరంలో 250 మంది

2016-17 విద్యాసంవత్సరంలో 150 మంది. కావున ఇవ్వబడిన వాక్యం అసత్యం.

కమ్మీరేఖాచిత్రం – నిర్మాణం (Construction of bar graph)

ఉదా : ఈ క్రింది దత్తాంశము, ములుగు మండలంలోని రైతులకు, ఒక బ్యాంకు ద్వారా 2016 సం॥ నుండి 2020 సంవత్సరాలలో అందజేయబడిన రూపాయల(కోట్ల) వివరాలను తెలియజేయును. ఇట్టి దత్తాంశము నకు కమ్మీరేఖా చిత్రమును గీయుము.

సంవత్సరం	2016	2017	2018	2019	2020
రుణం (కోట్లలలో) రూపాయలలో	25	30	40	60	55

సాధన :

కమ్మీరేఖా చిత్రం గీయుట

సోపానం 1 : ఒక గ్రాఫ్ కాగితం తీసుకొని రెండు పరస్పర లంబరేఖలను గీచి, వాటిని X-అక్షము మరియు Y-అక్షము అని గుర్తించుము.

సోపానం 2 : క్షితిజ సమాంతర అక్షం (X-అక్షం) పైన సంవత్సరములను, లంబ అక్షం (Y-అక్షం) పైన ఆయా

సోపానం 3 : క్షితిజ సమాంతర అక్షం (X-అక్షం) పైన, ఒకే పరిమాణమైన వెడల్పు గల కమ్మీలను, మధ్యలో సమాన ఖాళీ ఉండే విధంగా (గ్రాఫ్ కాగితం యొక్క పరిమాణం ఆధారంగా) ఎంచుకోవాలి.

సోపానం 4 : కమ్మీల యొక్క పొడవులను, వాటి విలువల ఆధారంగా ఎంచుకోవాలి. (లేదా స్కేలు ఆధారంగా (Y-అక్షం) పై వాటిని గుర్తించాలి).

2016 : $\frac{1}{10} \times 25 = 2.5$ యూనిట్లు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 460 06-02-2021 14:55

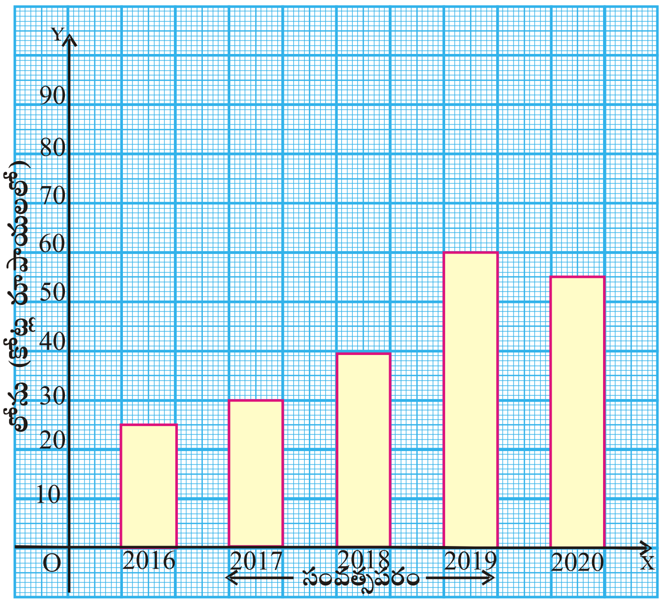
2017 : $\frac{1}{10} \times 30 = 3$ యూనిట్లు.

2018 : $\frac{1}{10} \times 40 = 4$ యూనిట్లు.

2019 : $\frac{1}{10} \times 60 = 6$ యూనిట్లు.

2020 : $\frac{1}{10} \times 55 = 5.5$ యూనిట్లు.

సమానమైన (ఒకే వెడల్పు), వాటి మధ్య సమానంగా ఖాళీ ఉండేటట్లు, సోపానం-4లో పొందిన, కమ్మీల ఎత్తులకు అనుగుణంగా, ఆయా సంవత్సరాలకు అనుగుణంగా గుర్తించి, కమ్మీలను గీయాలి.

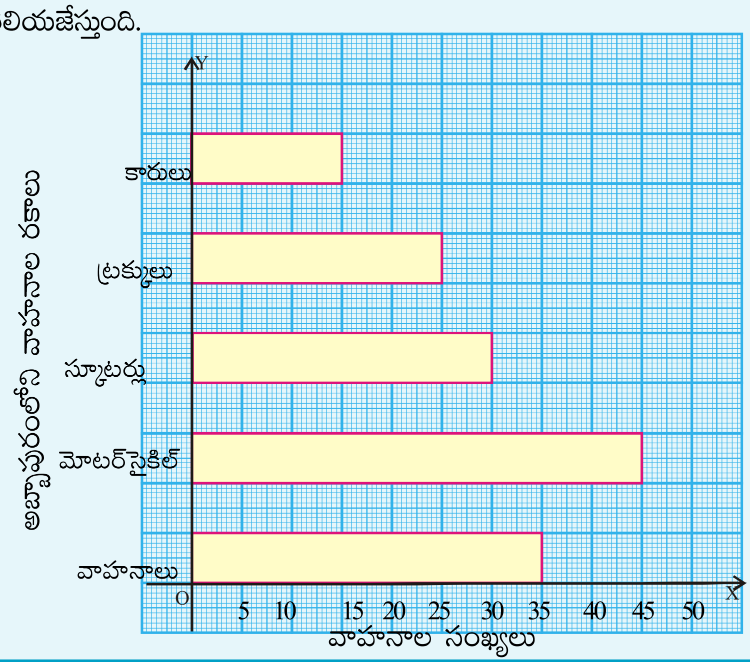


(2016 నుండి 2020 వరకు ఇవ్వబడిన అప్పుకు సంబంధించిన కమ్మీరేఖాచిత్రం).

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఖాళీలను పూరించండి.
   (i) ఇవ్వబడిన దత్తాంశం విలువలకు అనుగుణంగా, సమాన వెడల్పు గల .... లను ఉపయోగించి గీచే చిత్రమే కమ్మీ చిత్రము.
   (ii) కమ్మీ చిత్రాలలో, కమ్మీల మధ్య .... దూరం ఉంటుంది.
   (iii) కమ్మీచిత్రాలలో, దీర్ఘచతురస్రాల ఎత్తు అనేది వాటి .... లకు అనుపాతంలో ఉంటుంది.

2. ఈ క్రింది కమ్మీచిత్రమును, ములుగు జిల్లా, అబ్బాపురం గ్రామంలోని ప్రజలు వినియోగించే వివిధ రకాల వాహనాల సమాచారాన్ని తెలియజేస్తుంది.



i .

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 461   06-02-2021 14:55

పై కమ్మీ చిత్రమును పరిశీలించి, ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయుము.

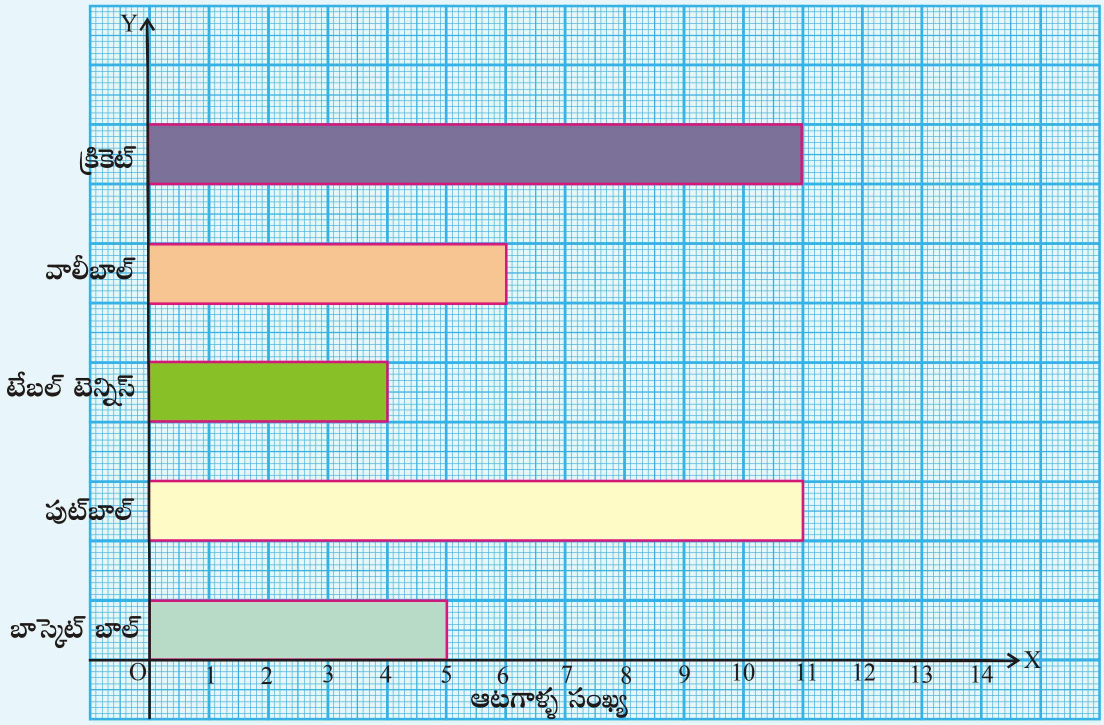
(i) ఆ గ్రామంలో గల ద్విచక్ర వాహనములు ఎన్ని?

(ii) ఏ విధమైన వాహనాలు అతితక్కువగా ఉన్నాయి?

(iii) ఆ గ్రామంలో గల స్కూటర్‌లు మరియు బైకులు కలిపి ఎన్ని ఉన్నాయి?

(iv) కార్ల సంఖ్య కంటే ట్రక్కులు సంఖ్య ఎంత ఎక్కువ?

3. ఈ క్రిందనీయబడిన కమ్మీచిత్రం ఇవ్వబడిన ఆటలలో, ఒక్కొ జట్టులో ఎంత మంది సభ్యులు ఉంటారో తెలియజేయండి.



పై కమ్మీచిత్రమును పరిశీలించి, ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను రాయండి.

(i) వాలీ బాల్ జట్టులో ఎంతమంది క్రీడాకారులు ఉంటారు?

(ii) పై ఆటలలో గరిష్ఠంగా జట్టు సభ్యులు కలిగి ఉన్నాయి.

(iii) నలుగురు సభ్యులతో మాత్రమే ఆడే ఆట ఏమిటి?

(iv) ఏ ఏ ఆటల్లో సమాన సంఖ్యలో జట్టు సభ్యులను కలిగి ఉన్నాయి.

7.3.3 సోపాన రేఖాచిత్రము (Histograms)

- వర్గీకృత (దత్తాంశాన్ని) పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని - రేఖా చిత్రం (గ్రాఫ్) ద్వారా ప్రాతినిధ్యపరచుట.
- ఇంతక ముందు మీరు ఇవ్వబడిన వర్గీకృత దత్తాంశాన్ని కమ్మీరేఖా చిత్రం ద్వారా ప్రాతినిధ్యం ఎలా చేయవచ్చునో నేర్చుకుని ఉంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 462 06-02-2021 14:55

ప్రస్తుతం, మనం విలీన తరగతులు గల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని - గ్రాఫ్ (రేఖా చిత్రం) ద్వారా ఏ విధంగా ప్రాతినిధ్యం చేస్తారో నేర్చుకుందాం.

ఈ క్రిందనీయబడిన దత్తాంశానికి గీయబడిన సోపానచిత్రమును గమనించండి.

తరగతి అంతరం (మార్కులు)	0-10	11-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
పౌనఃపున్యం	3	5	9	10	15	19	13	11	9	6

(i) పై రేఖాచిత్రములో ఎన్ని కమ్మీ (bar) లు ఉన్నాయి.

(ii) దీర్ఘచతురస్రాల పొడవు అనేది దేనికి అనుపాతంలో ఉంది.

(iii) దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క వెడల్పు సమానం. అందుకుగల కారణం ఏమిటి?

(iv) ఏ రెండు కమ్మీలనైనా స్థానభ్రంశం (తరుమారు) చేయవచ్చునా?

- పై గ్రాఫ్ ద్వారా మీరు ఈ క్రింది విషయాలను గమనించి ఉంటారు?
  (i) పౌనఃపున్య విభాజనంలో 10 తరగతులకు రేఖాచిత్రంలో 10 దీర్ఘచతురస్రాలున్నవి.
  (ii) దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క పొడవులు, దీర్ఘచతురస్రాలచే సూచించబడు పౌనఃపున్యాలకు అనుపాతంలో ఉన్నవి.
  (iii) అన్ని తరగతుల అంతరములు సమానము కావున వాటిని సూచించు దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పులు సమానములు.
  (iv) దత్తాంశము అవిభాజ్య శ్రేఢి కావున వరుస తరగతులు అదే వరుసలో దీర్ఘచతురస్రాలను సూచిస్తాయి. కావున ఏ రెండు దీర్ఘచతురస్రాలను అయినా స్థానభ్రంశం చేయరాదు.

అవిభాజ్య శ్రేఢి (మినహాయింపు తరగతులు) గల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీయు రేఖాచిత్రములలో మొదటిది "సోపాన రేఖాచిత్రం".

- ఒక సోపాన రేఖాచిత్రం అనేది ఒక నిలువు కమ్మీలు గలది మరియు వాటి మధ్య ఏ విధమైన సంచులేనటువంటి కమ్మీ రేఖాచిత్రం .
- వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క తరగతులను (X-అక్షరం) (క్షితిజ సమాంతర అక్షం) పైన తీసుకొంటారు మరియు ఆయా తరగతులకు సంబంధించిన పౌనఃపున్యాలను (Y-అక్షం) (లంబ అక్షం) పైన తగిన స్కేలు ఆధారంగా గుర్తించబడుతాయి.
- ప్రతీ తరగతికి, ఆ తరగతి యొక్క తరగతి అంతరం వెడల్పుగా, తీసుకొని, అట్టి తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యానికి అనుగుణంగా (స్కేలు ఆధారంగా) చతురస్రాల యొక్క వైశాల్యాలు వాటి పౌనఃపున్యాలకు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

సోపాన చిత్ర నిర్మాణం

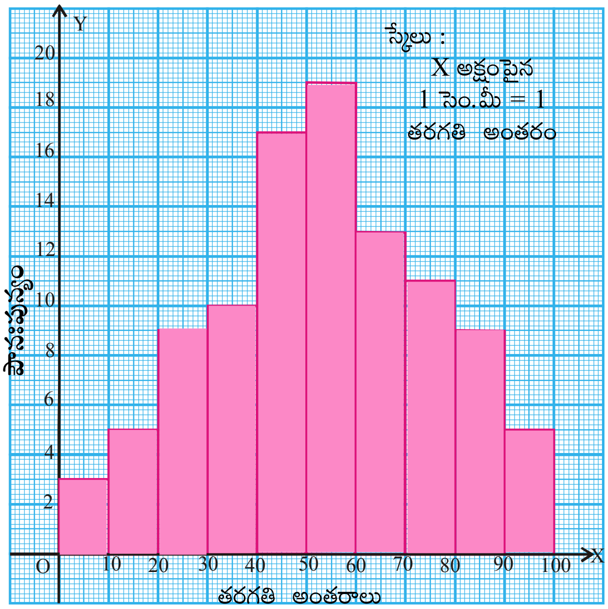
- సోపాన చిత్ర నిర్మాణం క్రమాన్ని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా వివరిద్దాం.
- ఒక TV చానెల్ వారు వారి ప్రసారములను ఎంతమంది తిలకిస్తున్నారో తెలుసుకోవాలని అనుకున్నారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 463 06-02-2021 14:55

ఒక గ్రామంలోని ఒక వార్డులో చేసిన సర్వే వివరాలు ఇవ్వబడినాయి. ఈ దత్తాతంశం నకు సోపాన చిత్రమును నిర్మిందాం.

తరగతి అంతరం (వయసు)	పౌనఃపున్యం (వీక్షకుల సంఖ్య)	తరగతి అంతరాలు
11-20	10	10.5-20.5
21-30	15	20.5-30.5
31-40	25	30.5-40.5
41-50	30	40.5-50.5
51-60	20	50.5-60.5
61-70	5	60.5-70.5
అవధులు		హద్దులు

సోపానం 1 : ఇచ్చిన దత్తాంశంలో సమ్మిళిత తరగతులు ఉంచి, వాటిని మినహాయింపు తరగతులు (హద్దులు) రాయవలెను.



సోపానం 2 : సరియైన సూచికను తీసుకొని X-అక్షంపైన తరగతి అంతరాలను గుర్తించవలెను.

సోపానం 3 : సరైన సూచికను తీసుకొని Y-అక్షము పై పౌనఃపున్యములను గుర్తించవలెను.

సోపానం 4 : తరగతి అంతరము వెడల్పుతో వరుస పౌనఃపున్యముకు అనుపాత పొడవులతో దీర్ఘచతురస్రాలను నిర్మించవలెను.

పౌనఃపున్య బహుభుజి

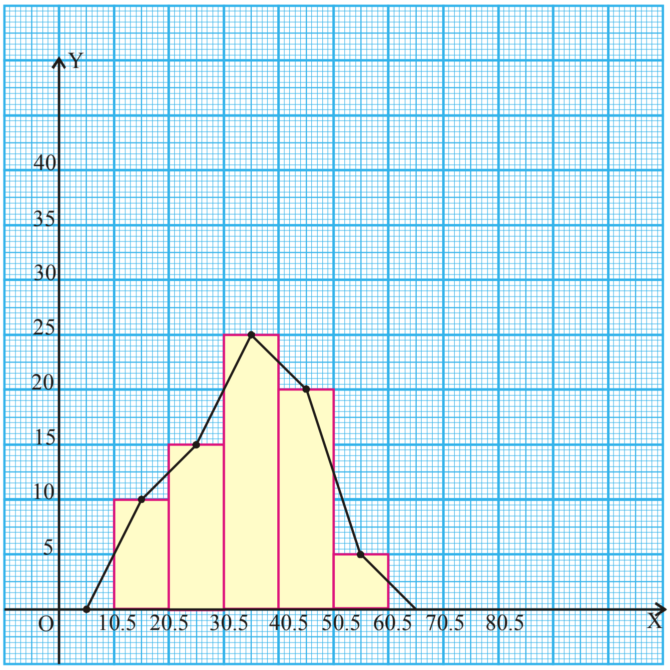
- వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమును సూచించుటకు సోపాన రేఖాచిత్రము కంటే మెరుగైన రేఖాపటము పౌనఃపున్య బహుభుజి.

మనం పైన చర్చించబడిన ఉదాహరణను మరొకసారి పరిగణిద్దాం. ఒక TV చానెల్ వారు, వారి చానెల్‌ను (ఒక వార్డులోని వారు) ఏఏ వయస్సువారు వీక్షిస్తున్నారు ఈ క్రింది విధంగా ఇవ్వనైనది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 464 06-02-2021 14:55

తరగతి అంతరం (వయసు)	తరగతి అంతరం (విలీన తరగతి)	తరగతి అంతరాలు (వీక్షకుల సంఖ్య)
11 - 20	10.5-20.5	10
21 - 30	20.5-30.5	15
31 - 40	30.5 - 40.5	25
41 - 50	40.5 - 50.5	30
51 - 60	50.5 - 60.5	20
61 - 70	60.5 - 70.5	5

- కింద నున్న సోపాన చిత్రమును పై దత్తాంశాన్ని వ్యక్తపరచడానికి ఉపయోగించబడింది.



పై నున్న సోపాన చిత్రంలోని సోపానముల (దీర్ఘచతురస్రాల) మధ్య బిందువులను రేఖాఖండములచే కలుపుదాం.

అట్టి మధ్యబిందువులను B, C, D, E, F మరియు G మనము ఎప్పుడైతే అట్టి మధ్య బిందువులను రేఖాఖండములచే కలుపగా, BCDEFG అను చిత్రము వచ్చును.

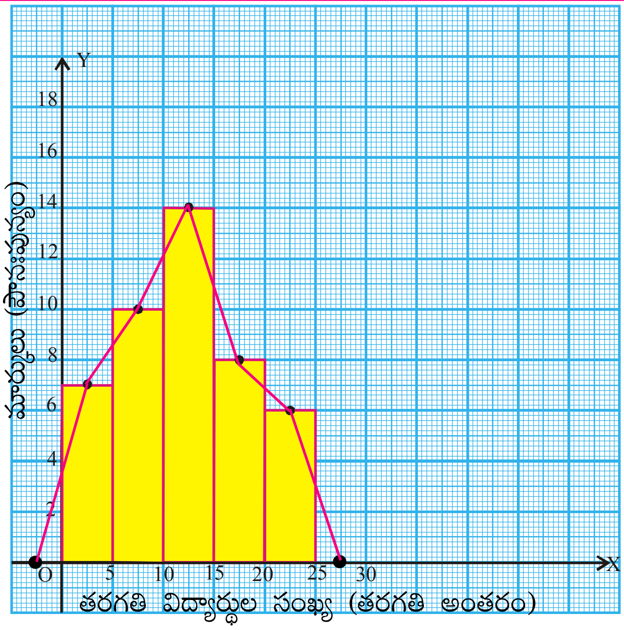
బహుభుజిని పూర్తి చేయుటకు, ఇచ్చిన తరగతులకు ముందు ఒకటి, తరువాత ఒకటి తరగతులను '0' (సున్న) పౌనఃపున్యము లలో ఊహించి, వాటి మధ్యబిందువులు (10.5 - 20.5 మధ్యబిందువు A ; 60.5 - 70.5 మధ్యబిందువు H)A, H లను కలిపితే, ABCDEFGH అనే పౌనఃపున్యబహుభుజి వస్తుంది.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 465
06-02-2021 14:55

7.3.4 పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణం

ఒక తరగతిలోని 45 మంది విద్యార్థులు ఒక పరీక్షలో సాధించిన మార్కులు (గరిష్ఠం 25) క్రింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మిద్దాము.

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యము	మధ్యబిందువు
0 - 5	7	2.5
5 - 10	10	7.5
10 - 15	14	12.5
15 - 20	8	17.5
20 - 25	6	22.5
మొత్తం	45	



నిర్మాణ సోపానములు:

సోపానం 1 : తరగతి మధ్య విలువలను గణించవలెను.

సోపానం 2 : దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖాచిత్రమును నిర్మించి, ప్రతి సోపానము యొక్క పై వెడల్పుల మధ్య బిందువులు B, C, D, E, F లను గుర్తించి కలుపవలెను.

సోపానం 3 : తరగతుల యొక్క ముందు తరగతి, తరువాత తరగతులను ఊహించి, వాని పౌనఃపున్యములు '0'గా తీసుకొని తరగతి మధ్యవిలువను గుర్తించవలెను.

సోపానం 4 : మొదటి తరగతి ముందు తరగతిని, చివరి తరగతికి తరువాత తరగతులను ఊహించుకోండి. అంటే 0–5 తరగతికి ముందు తరగతి X- అక్షమునకు ఋణాత్మక దిశలో (-5-0) గా తీసుకోండి. అదేవిధంగా 20–25 తరగతికి తరువాత తరగతి 25–30గా తీసుకోండి. వీటి మధ్య విలువలు A, G లుగా గుర్తించండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 466 06-02-2021 14:55

సోపానం 5 : ఇప్పుడు B బిందువును Aతోనూ, F బిందువును Gతోనూ కలిపితే పౌన=పున్య బహుభుజి ఏర్పడుతుంది. పౌనఃపున్యబహుభుజి నిర్మించుట ప్రతిసారి సోపాన రేఖాచిత్రము నిర్మించనవసరము లేదు. దీనికి బదులుగా తరగతి మధ్య విలువలను, పౌనఃపున్యములను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య భుజిని నిర్మించవలెను.

గమనిక : సోపాన చిత్రము గీయకుండానే, ఇవ్వబడిన పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించవచ్చును. దీనికి బదులుగా తరగతి మధ్యవిలువలను, పౌనఃపున్యములను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించవలెను.

వర్గీకృత పౌనపున్య విభాజనమునకు సోపాన చిత్రము నిర్మించకుండా – పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించుట :

డయాబెటిస్ వ్యాధిగ్రస్తులపై జరిపిన వైద్యసర్వేలోని కొన్ని వివరాలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మిద్దాం.

వయస్సు	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య	5	10	13	18	4

- సోపాన చిత్రం నిర్మించకుండానే పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించడం తెలుసుకుందాం.

సోపానం 1 : తరగతుల మధ్య విలువలు గుర్తించాలి.

సోపానం 2 : సూచికను నిర్ణయించవలెను.

X - అక్షము 1సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

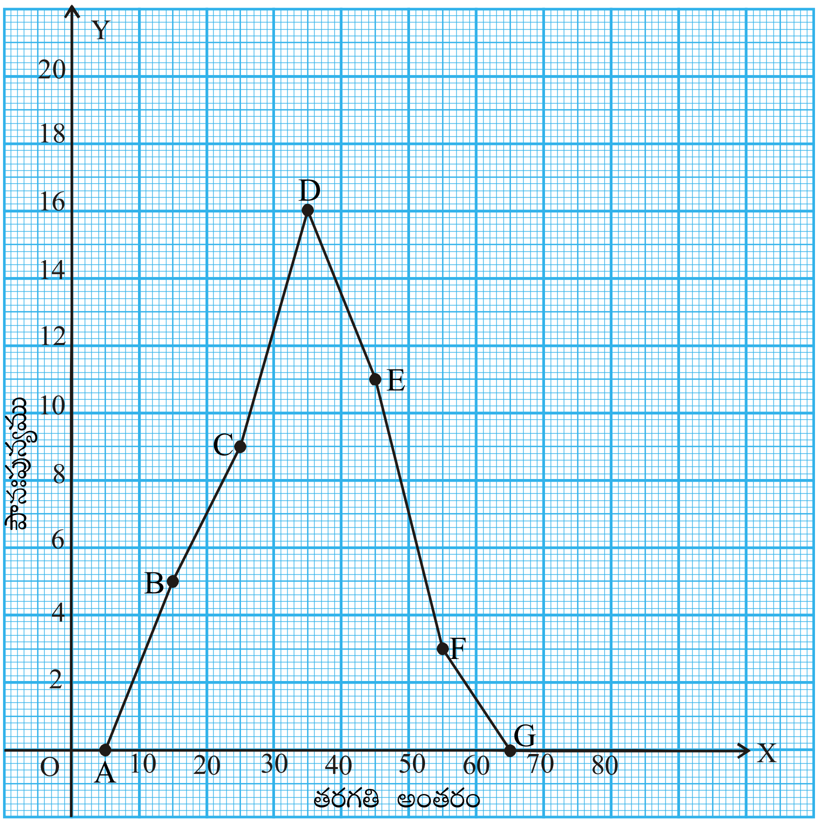
Y - అక్షము 1సెం.మీ = 2 మార్కులు.

సోపానం 3 : తరగతి మధ్యవిలువలు 'x' మరియు తరగతి పౌనఃపున్యము 'f' అయిన బిందువు ('x', 'f') ను గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించవలెను.

సోపానం 4 : అన్ని తరగతులకు బిందువులు గుర్తించి వరుసగా కలుపవలెను.

తరగతిఅంతరాలు (వయస్సు)	వ్యాధిగ్రస్తుల సంఖ్య (f)	తరగతి మధ్యవిలువలు (x)	బిందువులు (x, f)
0-10	0	5	(5, 0)
10-20	5	15	(15, 5)
20-30	9	25	(25, 9)
30-40	16	35	(35, 16)
40-50	11	45	(45, 11)
50-60	3	55	(55, 3)
60-70	0	65	(65, 0)

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 467 06-02-2021 14:55



మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి.
   (i) సోపాన రేఖాచిత్రము నందు, సాధారణంగా తరగతి అంతరములను .... అక్షము వెంబడి తీసుకుంటారు.
   (ii) సోపాన రేఖాచిత్రముల నందు, సాధారణంగా పౌనఃపున్యము లను .... అక్షం వెంబడి తీసుకుంటారు.
   (iii) సోపాన రేఖాచిత్రము నందు, దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాలు అనేవి ఆయా తరగతుల యొక్క .... కు అనుపాతంలో ఉంటాయి.
   (iv) సోపాన రేఖాచిత్రము అనేది ....ను ప్రాతినిధ్య పరిచే రేఖాచిత్రము.
2. ఈ క్రింద నీయబడిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక 45 మంది విద్యార్థుల యొక్క వివిధ స్థాయిలలో గల ప్రజ్ఞా (IQ) వివరాలను తెలియజేయును. ఇట్టి దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రమును గీయుము.

IQ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	6	15	12	9	5

3. 250 మంది రోజువారి కూలీల యొక్క కూలి వివరాలు ఇవ్వబడినవి. ఇట్టి దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

రోజువారి కూలి	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
కూలీల సంఖ్య	30	42	50	55	45	28

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 468
06-02-2021 14:55

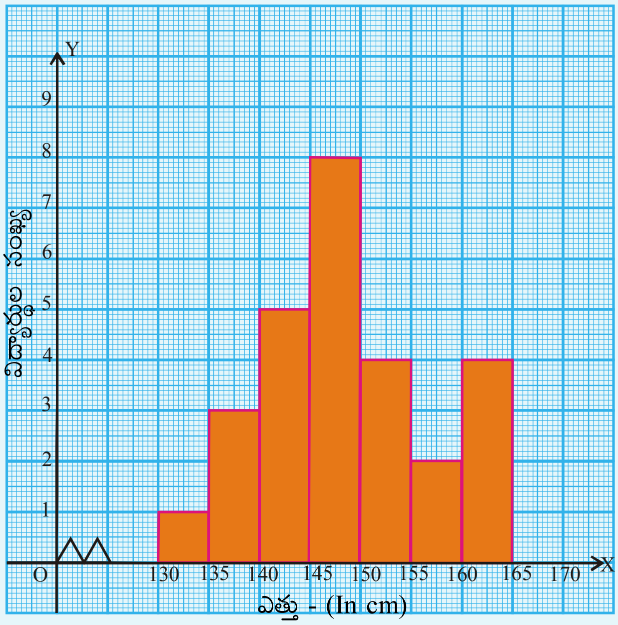
4. క్రిందనున్న సోపాన చిత్రమును గమనించి, క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయుము.

(i) ఈ సోపాన చిత్రము ఏ అంశముకు సంబంధించినది.

(ii) ఏ తరగతి నందు విద్యార్థుల సంఖ్య గరిష్ఠంగా కలదు?

(iii) 145 సెం.మీ. కంటే ఎక్కువ ఎత్తు కలిగిన విద్యార్థులు ఎందరు?

(iv) 140 సెం.మీ కంటే తక్కువ ఎత్తు కల్గిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?



7.3.5 సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాల రేఖాచిత్రాలు (ఓజీవ్ చక్రము)

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము నందలి దిగువ/ఎగువ హద్దులను, సంచిత పౌనఃపున్యములకు గీయు సున్నిత వక్రమును 'సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము లేక 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు. ఒక అవిచ్ఛిన్న శ్రేఢి యొక్క సంచితన పౌనఃపున్య వక్రము నుండి దత్తాంశములోని ఏదైనా ఒక హద్దు వరకు లేక హద్దు నుండి దత్తాంశం చివరి వరకు ఎన్ని రాశులు కలవో తెలుసుకోవచ్చు.

ఓజివ్ అనే పదాన్ని ఓజీవ్ అనే ఉచ్ఛరిస్తాం. "Ojeev" అనేది ogee నుండి వచ్చినది. ఒక Ojeev (ogee) అనేది ఒక పుటాకార మరియు కుంభాకార వక్రములను కలిగి ఉంటుంది. అందువల్ల ఇది ఒక S-ఆకారంలో నిలువు చివరల గల వక్రము. 14వ మరియు 15వ శతాబ్దంలో కట్టడాల ఆకారంలో ఓజీవ్ ఆకారం అనేది ఒక ముఖ్యమైన లక్షణం.

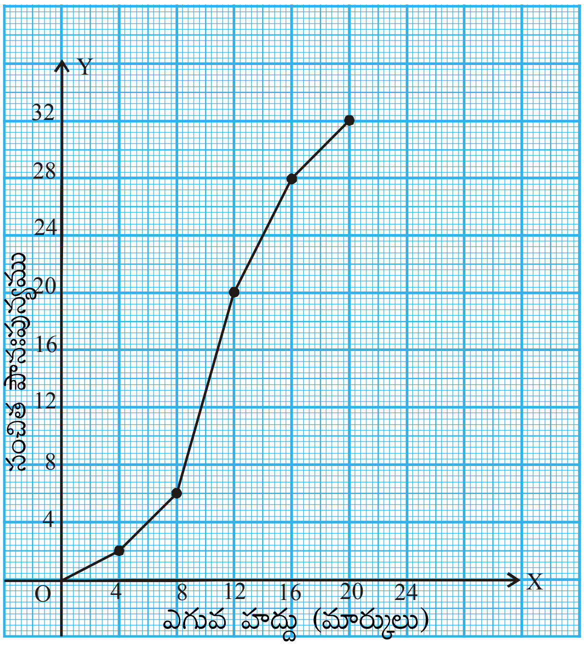
అవిచ్ఛిన్న తరగతులలో ఒక హద్దు వద్ద కంటే ఎక్కువ లేదా తక్కువ గల రాశుల మొత్తాన్ని తెలుసుకొనుటకు ఓజివ్ వక్రం ఉపయోగపడుతుంది.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యవక్రము

ఒక తరగతిలో 32 మంది విద్యార్థులకు గణితం – నిర్మాణాత్మక మదింపులో వచ్చిన మార్కులు (20 మార్కులకు గాను) వివరాలు క్రింద నీయబడినాయి.

మార్కులు	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	12	10	3

తరగతుల అంతరాలు (మార్కులు)	విద్యార్థుల సంఖ్య (*f*)	ఎగువ హద్దు (UB)	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	బిందువులు (L, B, f)
0-4	2	4	2	(4, 2)
4-8	5	8	7	(8, 7)
8-12	12	12	19	(0, 19)
12-16	10	16	29	(16, 29)
16-20	3	20	32	(20, 32)



సోపానం 1 : ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని తరగతులు సమ్మిళిత తరగతులయితే, మినహాయింపు తరగతులుగా మార్చవలెను.

సోపానం 2 : అరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలను గుణించవలెను.

సోపానం 3 : X-అక్షంపై ఎగువ హద్దులు Y-అక్షంపై ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు గుర్తించాలి.

సూచిక :

X-అక్షం 1 సెం.మీ = 1 తరగతి అంతరం

Y-అక్షం 1 సెం.మీ = 4 ధరఖాస్తులు

సోపానం 4 : మొదటి తరగతి దిగువ హద్దు (ఊహించిన ముందు తరగతి, యొక్క ఎగువ హద్దు) పౌనఃపున్యము '0' తో బిందువును గుర్తించవలెను.

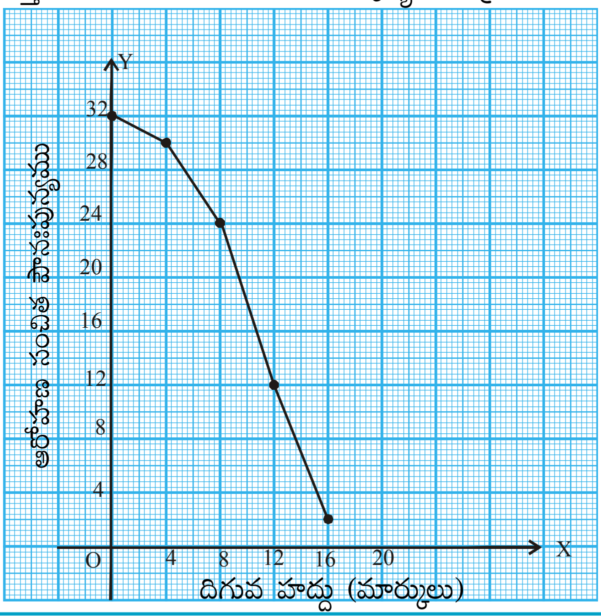
సోపానం 5 : అన్ని బిందువులను వరుసగా సున్నిత వక్రముచే కలుపవలెను. ఈ వక్రమును 'ఓజివ్ వక్రము' అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 470
06-02-2021 14:55

అవరోహణ, సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

తరగతి అంతరాలు (మార్కులు)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	బిందువులు (LB, M.Cu.fr)
0-4	2	0	32	(0, 32)
4-8	5	4	30	(4, 30)
8-12	12	8	25	(8, 25)
12-16	10	12	13	(12, 13)
16-20	3	16	3	(16, 3)

- ఇదేవిధంగా తరగతి ఎగువ హద్దులను X-అక్షంపై ఆ తరగతుల అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను Y-అక్షంపై గుర్తించి 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము వక్రము' లేక 'ఓజివ్ వక్రము'ను గీయవచ్చును.



మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రిందనివ్వబడిన సమాచారం అనేది ఒక పరిశ్రమలో 50 దినసరి కూలీల యొక్క వేతనాలకు సంబంధించినది.

రోజువారివేతనం(రూ॥లలో)	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
కూలీల సంఖ్య	5	7	14	8	6	10

పై దత్తాంశానికి ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనపున్య పట్టికలను రూపొందించి ఓజీవ్ వక్రములను గీయుము.

2. ఈ క్రింది దత్తాంశము 70 మంది విద్యార్థుల ఎత్తుల వివరాలను తెలియజేయును. ఇట్టి దత్తాంశమునకు ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనపున్య విభాజన పట్టిక తయారుచేసి ఓజీవ్ వక్రమును గీయుము.

ఎత్తు (సెం.మీలలో)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	171-180
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	7	14	8	6	10	3

అభ్యాసము

1. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు కమ్మీరేఖాచిత్రము గీయుము.

బరువు (కేజీలలో)	32	34	36	38	40	40
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	8	3	12	6	5

2. ఈ క్రింది దత్తాంశము ఒక ఆవాసంలో గల 50 కుటుంబాలు ఖర్చు చేసే విద్యుత్ వివరాలను తెలియజేయును. ఇట్టి దత్తాంశమునకు "కమ్మీరేఖా చిత్రము" గీచి, దానిని వివరించుము.

నెలవారి విద్యుత్ వినియోగం(వాట్స్)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-16
కుటుంబాల సంఖ్య	8	10	18	7	7

3. ఈ క్రింది దత్తాంశము 50 విద్యార్థుల యొక్క ప్రజ్ఞా లబ్ధి (IQ) ను తెలుపుతుంది. ఇట్టి దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము గీయుము.

IQ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	6	7	11	9	9	5

4. 10వ తరగతి వార్షిక పరీక్షలలో 540 విద్యార్థుల మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి. 600 లకు గాను దీనికి సోపాన చిత్రం గీయుము.

మార్కులు	360	400	440	480	520	560
విద్యార్థుల సంఖ్య	90	115	130	85	70	50

5. ఒక పరిశ్రమలో పనిచేసే 250 మంది కూలీల యొక్క వారంతపు జీతముల వివరములు ఇవ్వబడినవి. ఇట్టి దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రమును గీసి దానిపై పౌనపున్య బహుభుజిని నిర్మించండి.

వారంతపు జీతం	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
కూలీల సంఖ్య	30	40	52	55	45	28

6. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు ఓజీవ్ వక్రమును గీయుము.

తరగతి	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
పౌనఃపున్యం	12	10	11	10	7	6	4	5

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 472

06-02-2021 14:55

7. ఈ క్రింద 175 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు వివరాలు ఇవ్వబడినవి. ఇట్టి దత్తాంశమునకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం మరియు అవరోహణ సంచిత పౌన ఃపున్యవక్రము (ఓజీవ్ వక్రము)ను గీయుము.

మార్కులు(C.I)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	6	8	12	24	48	31	24	12

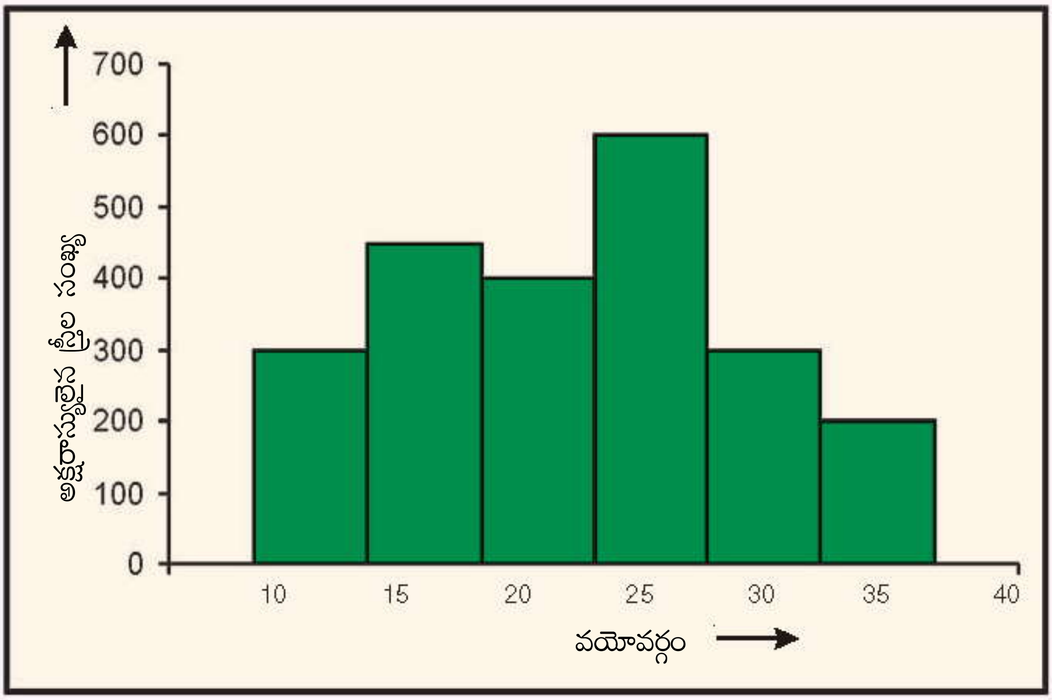
8. ఈ క్రింది దత్తాంశము 50 మంది పోటీదారులు పదకేళి పోటీలో పాల్గొన్న వివరాలను తెలియజేస్తుంది. ఇట్టి పదకేళిని ఎవరెవరు ఎంత సమయంలో పూర్తిచేసారో తెలియజేయండి.

సమయం (ని॥లలో)	పోటీదారుల సంఖ్య
20-25	8
25-30	10
30-35	9
35-40	12
40-45	6
45-50	5

(i) సోపాన చిత్రమును నిర్మించుము.

(ii) పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించుము.

9. ఈ క్రింది దత్తాంశము అనేది ఒక పట్టణములో గల 10 సంవత్సరముల నుండి 40 సంవత్సరాల వయస్సు గల అక్షరాస్యులైన స్త్రీల సంఖ్యను తెలియజేయును.



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 473 06-02-2021 14:55

పై సోపాన చిత్రమును పరిశీలించి ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయుము.

(i) ఆ పట్టణములో 10 సంవత్సరముల నుండి 40 సంవత్సరాల వయస్సుగల మొత్తం అక్షరాస్యులైన స్త్రీల జనాభా ఎంత?

(ii) ఏ వయస్సు గల అక్షరాస్యులైన స్త్రీలు ఎక్కువ సంఖ్యలో ఉన్నారు.

(iii) ఏ వయస్సు గల అక్షరాస్యులైన స్త్రీలు సమాన సంఖ్యలో ఉన్నారు.

ముఖ్యాంశాలు

- వర్గీకృత దత్తాంశానికి కమ్మీ రేఖాచిత్రమును గీయుట, వివరించుట. ఇచ్చిన కమ్మీ చిత్రము ఆధారంగా సమాచారాన్ని విశ్లేషించుట.
- వర్గీకృత దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి మరియు ఓజీవ్ వక్రములను గీయుట మరియు సమాచారాన్ని విశ్లేషించుట.
- సమాన మధ్యదూరము కలిగి, సమాన వెడల్పుల, పౌనఃపున్యములకు అనుపాతంలో పొడవులు గల కమ్మీ (దీర్ఘచతురస్రము)లతో దత్తాంశమును చూపు రేఖాచిత్రమును కమ్మీ రేఖా చిత్రము అంటారు.
- అవిభాజ్యశ్రేఢి (మినహాయింపు తరగతులు) గలం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు గీయు రేఖా చిత్రములలో మొదటిది "సోపాన రేఖాచిత్రం" ఒక సోపాన చిత్రం అనేది ఒక నిలువు కమ్మీలు (దీర్ఘచతురస్రాలు) గలవీ మరియు వాటి మధ్య ఏవిధమైన సందు లేనటువంటి కమ్మీ రేఖాచిత్రం.
- సోపాన చిత్రములో ప్రక్కప్రక్కన గల దీర్ఘచతురస్రాల చివరి మధ్యబిందువలను కలుపుతూ, తరువాత అతి చిన్న తరగతి ముందున్న తరగతి మధ్యబిందువును మరియు అతిపెద్ద తరగతికి తరువాత గల తరగతి మధ్యబిందువును కలపడం ద్వారా 'పౌనఃపున్య బహుభుజిని' గీయవచ్చు.
- సోపాన చిత్రం గీయకుండానే, ఇవ్వబడిన పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించవచ్చును. దీనికి బదులుగా మధ్యవిలువలను, పౌనఃపున్యములను ఉపయోగించి పౌనఃభుజిని నిర్మించవచ్చును.
- వర్గీకృత పౌనఃపున్యములకు గీయు నున్నత వక్రమును "సంచిత పౌనఃపున్యవక్రము" లేదా "ఓజీవ్ వక్రము" అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 474 06-02-2021 14:55

అధ్యాయం

7.4 సంభావ్యత - పరిచయం

7.4.0 అభ్యసన ఫలితాలు

ఈ అధ్యాయం చదివిన తరువాత, మీరు

- ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత అనే భావనను అవగాహన చేసుకుంటాయి.
- పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటే ఏమిటో ఉదాహరణ పూర్వకంగా వివరిస్తారు.
- నితయజీవితంలో (ఏక ఘటనకు) సంబంధించి సంభావ్యత సమస్యలను సాధించగలరు.
- పూరక ఘటనలు అనగానేమో, సోదాహరణంగా వివరిస్తారు.
- సంభావ్యత భావనను, నిజజీవిత సమస్యల సాధనలోను, ఇతర విషయాలకు సంబంధించిన అంశాలలో అనుసంధానం చేయగలరు.

7.4.1 పరిచయం

మన నిజజీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో ఈ క్రింది విధమైన వాక్యాలను మనం వినియోగిస్తూ ఉంటాం.

(i) వర్షం పడవచ్చు.

(ii) రైలు ఆలస్యం అయ్యే అవకాశం కలదు.

(iii) ఇది బ్యాంకు ద్వారా జరిగిన తప్పిదం కానట్లు ఉన్నది.

(iv) వచ్చే సెప్టెంబర్ మాసంలో పప్పుదినుసుల యొక్క రేట్లు తగ్గే అవకాశం కలదు.

(v) అతడు పందెం గెలుస్తాడు అని నేను సంశయిస్తున్నాను.

అవకాశం కలదు, అవకాశం లేదు, బహుశా జరగవచ్చు, జరగకపోవచ్చు, సందేహం వంటి పదాలను ఒక ఘటనకు సంబంధించిన వాడుతూ ఉంటాం. మనం ఒక ఘటన జరుగుతుందో, లేదో వంటి అనిశ్చిత అంశాలను గూర్చి నిత్యజీవితంలో అనేక సందర్భాలలో వాడుతూ ఉంటాం.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 475 06-02-2021 14:55

ఈ అధ్యాయంలో మనం ఇటువంటి ప్రశ్నలకు సంబంధించి అధ్యయనం చేస్తాం. ఇంకనూ మనం "బహుశా" (probably), అవకాశం (chance) కలదు (likely) సాధ్యమయినంతవరకు (possibly) మొ॥లగు పదాలను, ఒక ఘటనను మాపనం చేయుటకు ప్రయత్నిస్తాము.

మనం నిత్యజీవితంలో పొడవు, ద్రవ్యరాశి లాంటి ఏవిధంగా కొలుస్తామో, భవిష్యత్తులో సంభవించే సంఘటనలు, అవి జరిగే అవకాశం లేదా జరగకపోయే అవకాశాన్ని కూడా మాపనం చేయడానికి ప్రయత్నిస్తాము. ఈ మాపనం మనం క్రమబద్ధంగా నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఉపయోగపడతాయి. కాబట్టి ఒక విషయం ఏర్పడడానికి ఎన్ని రకాల అవకాశాలు ఉన్నాయో గుర్తించడానికి మనం "సంభావ్యత"ను అధ్యయనం చేస్తాం.

సాధారణ విచక్షణను గణనలోకి మార్చడమే సంభావ్య పియరి. సైమన్ వాప్లస్

ప్రయోగపూర్వ ఫలితాలను ఆధారం చేసుకొని లెక్కించిన సంభావ్యతను 'ప్రయోగిక సంభావ్యత' అంటారు. ఈ ప్రయోగిక సంభావ్యత అంచనాకు ఒక ప్రయోగము దాని ఫలితాలు ఆధారము, అనగా ఇదే ప్రయోగాన్ని మరలా 1000 సార్లు చేసినప్పుడు ఇదే సంభావ్యత ఏర్పడుతుందని చెప్పలేము. స్వల్ప బేధము ఏర్పడవచ్చును.

ఇదేవిధంగా నాణెమును ఎగురవేసి బొమ్మపడే సంభావ్యతను అంచనా వేసే ప్రయోగాన్ని ప్రపంచము నలుమూలల నుంచి ఎందరో వ్యక్తులు చేసి ఉన్నారు.

ఉదాహరణకు పద్దెనిమిదవ శతాబ్దంలో ఫ్రెంచి శాస్త్రవేత్త కాంట్ డి.బఫన్ నాణెమును 4040 సార్లు ఎగురవేసి 2048 సార్లు బొమ్మబడినట్లుగా లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత = $\frac{2048}{4040} = 0.507$.

బ్రిటన్ శాస్త్రవేత్త J.E. కెరిచ్ నాణెమును 10,000 సార్లు ఎగురవేసి 5067 సార్లు బొమ్మ పడినట్లుగా లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత = $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ అట్లే సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు కారల్ పియర్సన్ 24000 సార్లు ఎగురవేసి 12012 సార్లు బొమ్మ పడినట్లు లెక్కించాడు. అనగా ప్రయోగిక సంభావ్యత 12012/24000 = 0.5005.

మనమిప్పుడు ఇదే ప్రయోగాన్ని 10 లక్షలసార్లో లేక కోటిసార్లో చేసి బొమ్మపడె సంభావ్యతను లెక్కించవలసి వస్తే, పై ప్రయోగాలన్నింటి యొక్క పర్యవసానముగా బొమ్మకానీ, బొరుసుకానీ పడే సంభావ్యత సంఖ్యాత్మకంగా 0.5 లేక $\frac{1}{2}$ అని చెప్పవచ్చు. అంటే ప్రయోగం చేయకుండానే అన్ని పర్యవసానములను బట్టి ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యతను అంచనా వేయవచ్చును. దీనినే "సైద్ధాంతిక సంభావ్యత" లేక "సాంప్రదాయక సంభావ్యత" అంటారు.

ఈ సిద్ధాంతమును ఆధారంగా చేసికొని కొన్ని ప్రాథమిక సమస్యల సాధన గురించి చర్చిద్దాము.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 476 06-02-2021 14:55

7.4.2 యాదృశ్చిక ప్రయోగము మరియు పర్యవసానాలు

ఈ క్రింది సందర్భాలను పరిశీలించండి:

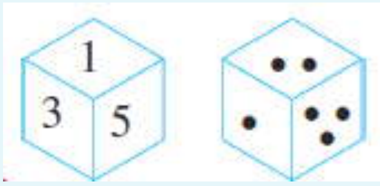
(1) ఉదాహరణకు మనం ఒక నాణెమును ఎగురవేయుట అనే సందర్భం తీసుకుంటే; మనకు ముందే తెలుసు, అది భూమిపై పడేటప్పుడు బొమ్మ (H) లేదా బొరుసు (T) పైకి వస్తుంది.

(2) ఒకవేళ మనం ఒక పాచికను విసిరినప్పుడు, దాని ముఖములపై 1 నుండి 6 అంకెలలో ఏదో ఒకటి మాత్రమే పైకి వచ్చును. (అనగా 1, 2, 3, 4, 5 లేదా 6).

(3) ఒక వేళ మనం 4 గింజలను (విత్తనాలను) భూమిలో నాటి, మూడు రోజుల తరువాత అవి మొలకెత్తుతాయా లేదా పరిశీలిస్తే, మొలకెత్తే విత్తనాలు 0, 1, 2, 3, లేదా 4 కావచ్చు.

ఎప్పుడైతే నాణెలను ఎగురవేయుట గూర్చి మాట్లాడినప్పుడు, అది నిష్పక్షపాతమైనది, మరియు సౌష్టవత కల్గిన నాణెం అని గమనించాలి.

పాచిక అంటే 6 ముఖాలు కల్గిన ఒక్కొక్క ముఖంపైన 1 నుండి 6 అంకెలు లేదా చుక్కలు గల సమఘనం



పైన తెలపబడిన సందర్భాలలో నాణెమును ఎగురవేయుట, పాచికను దొర్లించుట, విత్తనములు మొలకెత్తుట అనేవి ప్రతి ఒక్కటి యాదృశ్చిక ప్రయోగానికి ఉదాహరణలు. పై సందర్భాలలో మొదటి(1) నాణెమును ఎగుర వేయుట అనే యాదృశ్చిక ప్రమాణాలలో 1వ ప్రమాణం : బొమ్మ (H) మరియు బొరుసు (T), 2వ ప్రమాణం : పాచికను దొర్లించుటలో, పర్యవసానాలు 1, 2, 3, 4, 5 లేదా 6.

3వ ప్రమాణాలలో : 0, 1, 2, 3 లేదా 4 అనేవి పర్యవసానాలు అవుతాయి.

ఒక యాదృశ్చిక ప్రయోగంలో ఒకటి ఎక్కువ పర్యవసానాలు ఎల్లప్పటికి ఉంటాయి. ఎప్పుడైతే మనం అట్టి ప్రయోగాన్ని నిర్వహిస్తామా, మొత్తం పర్యవసానాలలో ఎవో ఒకటి మాత్రమే వస్తుంది. ఇంకనూ ప్రయోగం నిర్వహించకముందూ మనం పలానా పర్యవసానం వస్తుంది. అని ముందే ఖచ్చితంగా చెప్పలేము. ఈ ప్రయోగాన్ని పలుమార్లు పునరావృతం చేయడం వల్ల భిన్నమైన పర్యవసానాలను పొందుతాయి.

యాదృశ్చిక ప్రయోగానికి మరికొన్ని ఉదాహరణలు:

(i) ఒక సంచిలో / పెట్టెలో గల ఒకే పరిమాణం గల వివిధ రంగుల బంతుల నుండి (చూపకుండా) ఒక బంతిని యాదృశ్చికంగా ఎన్నుకొనుట.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 477
06-02-2021 14:55

(ii) ఒక సంచిలో గల 1 – 100 వరకు గల సంఖ్యా కార్డుల నుండి ఒక కార్డును ఎన్నుకొనుట.

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఈ క్రింది వానిలో ఏది యాదృశ్చిక ప్రయోగం.
   (i) A, B, C మరియు D అనే సమాధానములు గల బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలకు ఏదో ఒకటి మాత్రమే సరియైన సమాధానం అని ఊహించుట(ఎన్నుకొనుట).
   (ii) 1 నుండి 20 వరకు గల సహజసంఖ్యలు రాయబడి ఉన్న కార్డులు గల సంచి నుండి (చూడకుండా) ఒక కార్డును ఎన్నుకొనుట.
   (iii) పై నుండి రాయిని క్రిందికి జారవిడుచుట.
   (iv) 1, 2, 3 సంఖ్యలలో హరి మరియు జాన్‌లు ఒక సంఖ్యను స్వతంత్రముగా ఎన్నుకొనుట.
2. మొదటి ప్రశ్నలో గల సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఏమిటి?

7.4.3 సమసంభవ పర్యవసానాలు (Equally likely outcomes)

మనం ఒక నాణాన్ని ఎగురవేయునప్పుడు, పాచికను దొర్లించినప్పుడు నాణాన్ని, పాచికను నిష్పక్షికమైనవిగా తీసుకొంటాము. (అనగా అన్ని పర్యవసానాలు ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశాలు ఉంటాయి). మనం ప్రయోగాలు చేసి సమాచారం సేకరిస్తాము. ఈ సేకరించిన సమాచారాన్ని బట్టి అవి సాధ్యమయ్యే అవకాశాలను మాపనం చేస్తాము.

ఒక నాణాన్ని ఎగురవేసి బొమ్మ బొరుసులను పట్టికలో రాయడం జరిగింది. నాణేన్ని ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు ఏర్పడిన ఫలితాలను పట్టికలో గమనించండి.

నాణాన్ని ఎగురవేసే సంఖ్య	బొమ్మల సంఖ్య	బొరుసుల సంఖ్య
50	22	28
60	26	34
70	30	40
80	36	44
90	42	48
100	**48**	**52**

పై పట్టికను పరిశీలించిన నాణేన్ని మరిన్ని ఎక్కువసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మల సంఖ్య మరియు బొరుసుల సంఖ్య దాదాపు సమానంగా ఉంటాయి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 478 06-02-2021 14:55

పై ప్రయోగాలను నాణెంతోనే కాకుండా పాచికను దొర్లించి కూడా చేయవచ్చు. ఒక పాచికను ఎక్కువసార్లు దొర్లించిన ఏర్పడిన పర్యవసానాలను పట్టికలో పరిశీలించండి.

పాచిక దొర్లింపుల సంఖ్య	ప్రతి పర్యవసానం ఎన్నిసార్లు ఏర్పడిందో తెలిపే సంఖ్య (పై ముఖం మీద కనిపించే అంకె)					
	1	2	3	4	5	6
50	9	5	12	9	8	7
100	17	19	19	16	13	16
150	28	24	28	23	21	26
200	34	34	36	30	32	34
250	40	40	43	40	43	44
300	48	47	49	52	52	52

పై పట్టిక నుండి పాచిక దొర్లింపుల సంఖ్య పెరిగే కొద్ది, సాధ్యమయ్యే ఆరు పర్యవసానాల సంఖ్య దాదాపు సమానం. పై ప్రయోగాల ద్వారా ప్రతి పర్యవసానాల సంఖ్య దాదాపు సమానం. పై ప్రయోగాల ద్వారా ప్రతి పర్యవసానం ఏర్పడటానికి సమాన అవకాశాలు ఉన్నాయి అని తెలుస్తుంది.

7.4.4 యత్నాల మరియు ఘటనలు (Trails and Events)

పై ప్రయోగాల నుండి ఒకసారి, నాణేన్ని ఎగురవేసిన లేదా పాచికను దొర్లించిన దానిని యత్నం (Trial) అని అంటారు. దానినే యాదృశ్చిక ప్రయోగం అని కూడా చెప్పవచ్చు.

ఒక్కసారి పాచికను దొర్లించిన,

పాచిక పై ముఖంపై 5గాని అంతకంటే ఎక్కువగాని సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఎన్ని ?

రెండు పర్యవసానాలు సాధ్యము (అవి 5, 6)

పాచిక పై ముఖంపై సరిసంఖ్య పడే పర్యవసానాలు ఎన్ని? అవిఏవి?

పర్యవసానాలు 3 (అవి 2,4 మరియు 6).

ఈ విధంగా ప్రతి ప్రత్యేకయత్నాన్ని లేదా కొన్ని ప్రత్యేక యత్నాలను కలిపి ఒక ఘటనగా పేర్కొంటాము.

పై యత్నాలలో పాచిక పై ముఖంపై 5 కంటే ఎక్కువ అంకె ఏర్పడేది, మరియు సరిసంఖ్య ఏర్పడేవి ఘటనలకు ఉదాహరణలు. ప్రతి ఘటనలో ఒకే పర్యవసానం ఉండనక్కరలేదు. ఒక యాదృశ్చిక ప్రయోగం యొక్క ప్రతి పర్యవసానాన్ని ఘటన (Event) గా చెప్పవచ్చు. ఇక్కడ ఘటన యొక్క ప్రాథమిక పరిజ్ఞానం ఇవ్వబడింది. ఘటనను గూర్చి మరింత క్షుణ్ణంగా పై తరగతులలో నేర్చుకొంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 479 06-02-2021 14:55

అవకాశాలను, సంభావ్యతకు అనుసంధానం చేయుట (Linking the chance to Probability)

నాణేన్ని ఎగురవేసే ప్రయోగాన్ని మరొకసారి గమనించండి. ఒకసారి నాణేన్ని ఎగురవేసిన ఎన్ని పర్యవసానాలుంటాయి? బొమ్మ లేదా బొరుసు అనే రెండు పర్యవసానాలుంటాయి. అవి రెండూ సమ సంభావాన్ని కల్గి ఉంటాయి.

నాణేన్ని ఒకసారి ఎగురవేసిన బొమ్మవచ్చే అవకాశం ఎంత?

నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు సాధ్యమయ్యే రెండు అవకాశాలలో బొమ్మ వచ్చే అవకాశం 1 అనగా $\frac{1}{2}$ దీనినే క్రింది విధంగా కూడా చెప్పవచ్చు.

నాణేన్ని ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ పడే సంభావ్యత $\frac{1}{2}$ దీనిని బొమ్మ యొక్క సంభావ్యత లేదా

క్లుప్తంగా **$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5$ లేదా 50% గా రాస్తాము.**

బొరుసు పడే సంభావ్యత ఎంత?

ఇప్పుడు పాచికను దొర్లించే ఉదాహరణను తీసుకుందాం. ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాలు ఎన్ని? అవిఏవి?

సమసంభవం కలిగిన పర్యవసానాలు సాధ్యం అవి 1, 2, 3, 4, 5 మరియు 6.

పాచికను దొర్లించినప్పుడు పై ముఖంపై బేసి సంఖ్య వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?

మొత్తం సాధ్యమయ్యే 6 పర్యవసానాలలో 3 అనుకూల పర్యవసానాలు (అవి 1, 3 లేదా 5)

సంభావ్యత $\frac{1}{3}$ లేదా $\frac{1}{2}$

A అనే ఘటన యొక్క సంభావ్యతను కింది విధంగా రాస్తాము.

$$P(A) = \frac{\text{ఘటన 'A' యొక్క అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

7.4.5 సంభావ్యత - సైద్ధాంతిక వివరణ (PROBABILITY - A THEORETICAL APPROACH)

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో నిష్పాక్షిక నాణెమును ఎగురవేయుట అను సందర్భమును గమనించండి. ఇచ్చట నాణెము సౌష్టా సౌష్టవంగా ఉన్నప్పుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పడే సంభవములలో ఏది ఎక్కువ సార్లు? ఏది తక్కువ

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 480 06-02-2021 14:55

సార్లు? అనుటకు అవకాశము లేదు. అందువల్ల నాణెమును నిష్పాక్షికము అని, ఎగురవేయుటను 'యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము' అని అంటారు. బొమ్మ, బొరుసులను 'సమసంభవ ఘటనలు (equally likely) అంటారు.

ఈ పాఠ్యాంశములో యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో వెలువడు ఫలితములు సమసంభవమైనవి గాను మరియు ప్రతి రూప అవరణ పరిమితమైనది గాను పరిగణించబడ్డాయి. కనుక నాణెముల లే పాచికలను తీసుకొన్నప్పుడు అవి నిష్పాక్షికమైనవిగా పరిగణించాలి.

ఒక ఘటన (E) యొక్క ప్రయోగిక సంభావ్యత P(E)ను లెక్కించుటకు

సూత్రం $$P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

నాణెమును ఎగుర వేయుట, పాచికను దొర్లించుట వంటి ఉదాహరణలలో చర్చించినట్లుగా "సమసంభవ పర్యవసానములు" అను ఊహ ఆధారంగా సంభావ్యత యొక్క నిర్వచనము క్రింది విధంగా ఇవ్వబడింది.

T అనే ఘటన యొక్క సైద్ధాంతిక (లేక సాంప్రదాయక) సంభావ్యతని P(T)అని వ్రాస్తాం.

అనగా $$P(T) = \frac{\text{ఘటన Tకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగంలో సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$ అని నిర్వచిస్తాం.

ఇచ్చుట అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములుగా పరిగణించాలి. సాధారణంగా 'సైద్ధాంతిక సంభావ్యత'ను 'సంభావ్యత' అని వ్యవహరిస్తాము.

పరస్పర వర్జిత ఘటనలు (Mutually Exclusive Events)

ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ లేక బొరుసు పడుతుంది కానీ రెండూ ఒకేసారి సంభవము కాదు. అదేవిధంగా ఉన్నత పాఠశాలలోని ఏ విద్యార్థిని అయినా తీసుకొంటే అతడు 6, 7, 8, 9 లేక 10 తరగతులలో ఏదో ఒక తరగతికి మాత్రమే చెంది ఉంటాడు. అనగా పరిగణించిన ఘటన ఒక పర్యవసానము అయితే మిగిలిన పర్యవసానములు అన్నీ అసంభవములే. ఇటువంటి సంఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంత కన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే, ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

సంభావ్యతను గణించుట

సమసంభవ ఘటనల యొక్క సంభావ్యతను ఎలా కనుగొనంటాము? నాణెమును ఎగురవేయుట అనేది సమసంభవ పర్యవసానములు గల ప్రయోగముగా పరిగణిస్తాము. అనగా ప్రతిసారి రెండు సమసంభవ పర్యవసానములు ఉంటాయి. ఈ పర్యవసానముల సమూహమును 'ప్రతిరూప ఆవరణము' (sample space) అంటారు. ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు ప్రతిరూప ఆవరణము {H, T} ఎరుపు, నీలం, పసుపు, తెలుపు, బంతుల గల సంచి నుండి ఒక బంతిని తీయుటలో ప్రతిరూప ఆవరణము {R, B, Y, W} అట్లే ఒక పాచికను దొర్లించుటలో ప్రతిరూప ఆవరణమును ఊహించగలరా?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 481 06-02-2021 14:55

సమసంభవము మరియు పరస్పర వర్జిత ఘటనల యొక్క సంభావ్యతను ఎట్లు కనుగొనవచ్చునో కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ- 1 : ఒక నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మపడే సంభావ్యతను, బొరుసు పడే సంభావ్యతను లెక్కించండి.

సాధన : నాణెమును ఒకసారి ఎగురవేసినప్పుడు సాధ్యపడు పర్యవసానములు రెండు, బొమ్మ (H) లేక బొరుసు (T). బొమ్మ పడుట అనే ఘటన E అయితే అనుకూల పర్యవసానములు 1.

$$P(E) = P\,(\text{బొమ్మ}) = \frac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \frac{1}{2}$$

ఇదేవిధంగా బొరుసుపడు అనే ఘటన F అయిన

$$P(F) = P(\text{బొరుసు}) = \frac{1}{2} \quad (\text{ఎందుకు? చర్చించండి})$$

ఉదాహరణ 2: ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు, i) 3 వచ్చుటకు సంభావ్యత ఎంత? ii) 3 కాకుండా ఇతర సంఖ్య వచ్చుటకు సంభావ్యత ఎంత?

సాధన :

(i) E అనేవి '3' వచ్చుటకు అనే ఘటన అయిన

సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యవసానాలు : 1, 2, 3, 4, 5, 6

సాధ్యమయ్యే మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 6

3 వచ్చుటకు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 1 (అది 3)

$$P(E) = \frac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}} \quad P(3) = \frac{1}{6}$$

(ii) 3 తప్ప, ఇతర సంఖ్యలు వచ్చుట –

అనే ఘటన F అనుకొనిన సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాలు = {1, 2, 4, 5, 6}

E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 5 (అవి :1, 2, 3, 4, 5, 6)

మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య = 6

F కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 5 (i.e., 1, 2, 4, 5, 6)

$$\therefore\ P\,(F) = \frac{5}{6}$$

గమనిక : *F* అనే ఘటన ఉదాహరణ 1లోని ఘటన *E* కానిది అనే దానికి ఒకే విధమైన పోలిక కలదు.

ఉదాహరణ - 3 : ఒక సంచిలో ఒక ఎరుపు బంతి, ఒక నీలం బంతి, ఒక పసుపు బంతి ఉన్నాయి. అన్ని బంతులు ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉన్నాయి. సంచిలోనికి చూడకుండా మానస ఒక బంతి తీస్తే ఆ బంతి (i) పసుపు రంగు బంతి (ii) ఎరుపు బంతి (iii) నీలం బంతి అవడానికి సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 482
06-02-2021 14:55

సాధన : మానస చూడకుండా బంతి తీసుకున్నది కావున అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములు పసుపు రంగు బంతిని తీయు ఘటన Y , నీలం బంతి తీయు ఘటన B మరియు ఎరుపు బంతి తీయు ఘటన R అయిన ప్రతిరూప ఆవరణము {Y, B, R}

పర్యవసానములు = 3.

(i) Yకి అనుకూల పర్యవసానములు = 1.

$P(Y) = \frac{1}{3}$

అదేవిధంగా, $P(R) = \frac{1}{3}$,

$P(B) = \frac{1}{3}$.

ఉదాహరణ - 4 : 1 నుండి 100 వరకు గల సంఖ్యలు వరసగా రాయబడిన 100 కార్డులు కలిగిన ఒక సంచి నుండి ఒక కార్డును యాదృశ్ఛికంగా ఎంపిక చేసుకున్నచో అది (i) సరిసంఖ్య (ii) బేసి సంఖ్య అగుటకు సంభావిత ఎంత?

సాధన : (i) E అనేది సరిసంఖ్య కార్డును ఎన్నుకొనుట అనే ఘటన అనుకొనిన

సరిసంఖ్యగల కార్డుల సంఖ్య = 50 {2, 4, 6, ... 100}

అందువల్ల E అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 50

మొత్తం కార్డుల సంఖ్య = 100

అందువల్ల, $P(E) = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

(ii) F అనేది బేసిసంఖ్య కార్డును ఎన్నుకొనుట అనే ఘటన అనుకొనిన

బేసిసంఖ్యగల కార్డుల సంఖ్య = 50 {1, 3, 5, ... 99}

అందువల్ల F అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య = 50

మొత్తం కార్డుల సంఖ్య = 100

అందువల్ల, $P(F) = \frac{\text{E కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{సాధ్యపడు మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

ఒకసారి పరిశీలిద్దాం:

1. ఒక ప్రమాణంలో ఒక ఘటనకు పర్యవసానము ఒక్కటి మాత్రమే అయిన దానిని ప్రాథమిక ఘటన (elementary event) అంటారు. 1వ ఉదాహరణలో E, Fలు, 2 ఉదాహరణలో E, Fలు మరియు 3వ ఉదాహరణలో, Y, B, R లు ప్రాథమిక ఘటనలు.

2. ఉదాహరణ (1)లో $P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

   ఉదాహరణ (2)లో $P(Y) + P(R) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 483
06-02-2021 14:55

పూరక ఘటనలు - సంభావ్యత (Complementary Events and Probability)

$P(E) + P(\bar{E}) = 1$

ఈ ఉదాహరణలో ప్రయోగంలో E, Fలు మాత్రమే ఘటనలు 'F' మరియు 'E' కానిది సమానములు. 'E కానిది' అను ఘటనను $\bar{E}$ అని చూపుతాము. దీనిని ఘటన E యొక్క 'పూరక ఘటన' అంటారు.

$\therefore$ P(E) + P(E కానిది) = 1

లేక $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, దీని నుండి $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

సాధారణంగా E ఏదైనా ఒక ఘటన అయిన $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినప్పుడు దాని ముఖముపై కావచ్చు సంభావ్యత ఎంత?
2. ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినప్పుడు దాని సంభావ్యతను ఈ క్రింది సందర్భాలలో కనుగొనడానికి
   (i) దాని ముఖంపై 7 వచ్చుట? (ii) 5 కంటె చిన్న సంఖ్య వచ్చుట
3. 0 నుండి 20 మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యలలో, ఒక సంఖ్యను ఎన్నుకొనగా అది ప్రధాన సంఖ్య అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?
4. ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు రంగు బంతులు, 3 తెలుపు రంగు బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుండి యాదృశ్చికంగా ఒక బంతిని ఎన్నుకొనిన (i) ఎరుపు రంగు బంతి (ii) తెలుపు రంగు బంతి అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

అసంభవ ఘటన ఖచ్చిత లేక ధృఢ ఘటనలు

1, 2, 3, 4, 5, 6 అని గుర్తించి పాచికను దొర్లించామనుకొనండి.

(i) పాచిక ఒక్కసారి దొర్లించినప్పుడు 7పడే సంభావ్యత ఎంత ?

ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు 1, 2, 3, 4, 5, 6 అను ఆ పర్యవసానములు మాత్రమే సంభవాలు కానీ 7 గుర్తించబడి ఉండదు కాబట్టి 7 యొక్క అనుకూల పర్యవసానములు శూన్యము.

$$\therefore \text{P(7 పడుట)} = \frac{0}{6} = 0$$

అనగా 7 పడుట అసంభవము. ఇటువంటి ఘటననే "అసంభవ ఘటన" అంటారు.

(ii) పాచికను ఒక్కసారి దొర్లించినపుడు 6 లేక 6 కన్నా తక్కువపడే సంభావ్యత ఎంత?

పాచికను ఒకవైపు 6 మరియు మిగిలిన వైపులు 6 కన్నా తక్కువ 1, 2, 3, 4, 5 లు గుర్తింపబడి ఉంటాయి. కనుక పాచికను దొర్లించినపుడు 6 కానీ, 6 కన్నా తక్కువ కానీ పడుతుంది. అనగా అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య, మొత్తం పర్యసానాల సంఖ్యలు సమానం.

$$\therefore P(E) = \text{P(6 లేక 6 కన్నా తక్కువ పడుట)} = \frac{6}{6} = 1$$

ఘటన సంభవము ఖచ్చితము మరియు సంభావ్యత 1. ఇటువంటి ఘటనలనే ఖచ్చిత లేక ధృఢ ఘటనలు అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 484
06-02-2021 14:55

గమనిక : పై ఉదాహరణలన్నింటి నుండి సంభావ్యత నిర్వచనం $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ లోని లవము ఎల్లప్పుడు హారము కన్నా తక్కువ లేక సమానము అని తెలియుచున్నది. కావున **0 $\leq$ P(E) $\leq$ 1.**

మీ ప్రగతిని తెలుసుకోండి.

1. ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు, ఈ క్రింది వాని సంభావ్యత ఎంత?
   (a) ఒక సరిసంఖ్య (b) ఒక బేసిసంఖ్య (c) ఒక ప్రధాన సంఖ్య
2. పై ప్రశ్నలో P(ఒక సరిసంఖ్య) + P(ఒక బేసిసంఖ్య) = 1అవుతుందా పరిశీలించండి.
3. ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు ఈ క్రింది వాని సంభావ్యత ఎంత?
   (i) 4 కన్నా తక్కువ సంఖ్య (ii) 4 లేదా అంతకంటే పెద్దదైన సంఖ్య
   (iii) ఒక సంయుక్త సంఖ్య (iv) సంయుక్త సంఖ్య కాని సంఖ్య
4. ఒకవేళ P(E) = 0.88 అయితే "E కానిది" సంభావ్యత ఎంత?
5. ఒకవేళ P(E) = 0, అయితే P(E కానిది) సంభావ్యత ఎంత?
6. ఒక సంచిలో 15 తెలుపు బంతులు 10 నీలిరంగు బంతులు ఉన్నాయి. అట్టి సంచి నుండి చూడకుండా యాధృశ్చికంగా ఒకబంతిని తీసినచో ఈ క్రింది వాని సంభావ్యత కనుగొనండి.
   (i) నీలి రంగు బంతి కానిది (ii) తెలుపు రంగు బంతికానిది
7. ఒక సంచిలో 3 ఎర్ర రంగు గోలీలు, 4 ఆకుపచ్చ రంగు గోలీలు మరియు 2 నీలి రంగు గోలీలు అట్టి సంచి నుండి చూడకుండా యాధృశ్చికంగా ఒక గోలీని తీసినచో ఈ క్రింది వాని సంభావ్యత కనుగొనండి.
   (i) ఆకుపచ్చది కానిది (ii) ఎరుపురంగు కానిది (iii) నీలి రంగు కానిది
8. రెండు ఒకేవిధమైన నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు వచ్చేటటువంటి సాధ్యపడు పర్యవసానాలను రాయండి. ఈ సందర్భంలో ఒక నాణెంపై బొమ్మ మరియు మరొక నాణెంపై మరొక నాణెంపై బొరుసు వచ్చుటకు సంభావ్యతను లెక్కించండి.
9. రెండు ఒకేవిధమైన నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు రెండునాణెములపై బొరుసు వచ్చుటకు సంభావ్యత ఎంత?
10. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినప్పుడు వాటిముఖములపై వచ్చు సంఖ్యలను రాయండి. వాటి ముఖములపై వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం
    (i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 (v) 12
    అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 485 06-02-2021 14:55

అభ్యాసము

1. ఈ క్రింది వానిలో ఏవి సత్యము (T) ఏవి అసత్యము (F):

   (a) ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1.01

   (b) $P(E) = 0.08$ అయిన $P(\bar{E}) = 0.02$

   (c) ఒక అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1

   (d) ఏదైనా ఒక ఘటన Eకు, $0 \leq P(E) \leq 1$

   (e) $P(E) = 1 + P(\bar{E})$

2. 100 నుండి 200 వరకు (వరసగా) రాయబడిన సంఖ్యా కార్డులు గల ఒక సంఖ్యనుండి ఒక కార్డును యాదృశ్చికంగా తీసినప్పుడు అది సరిసంఖ్య అవుటకు సంభావ్యత ఎంత?

3. రెండు నాణెములను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు కనీసం ఒక బొమ్మ పడుటకు సంభావ్యత ఎంత?

   [Hint: P(కనీసం ఒక బొమ్మ) = 1 – P(బొమ్మ లేనిది)]

4. ఒకవేళ $P(E) = 0.05$ అయిన 'E కానిది' ఘటన సంభావ్యత ఎంత?

5. ఒక సంచిలో నిమ్మరుచి గల చాక్లెట్‌లు ఉన్నాయి. రాము వాటి నుండి యాదృశ్చికంగా ఒక చాక్లెట్ తీసినట్లయితే అది

   (i) ఒక నారింజ రుచిగల చాక్లెట్ (ii) ఒక నిమ్మరుచి గల చాక్లెట్

   అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

6. ముగ్గురు విద్యార్థులుగల సమూహంలో ఇద్దరు పుట్టినరోజులు 'ఒకేరోజు కాకుండా' ఉండటానికి గల సంభావ్యత 0.992. అయిన అట్టి సమూహంలో ఇద్దరు విద్యార్థుల పుట్టినరోజులు 'ఒకేరోజు అయ్యే' సంభావ్యత ఎంత?

7. ఒక పాచికను దొర్లించినప్పుడు దాని ముఖంపై వచ్చే సంఖ్యల ఆధారంగా క్రింది వాని సంభావ్యతను కనుగొనుము.

   (i) ఒక ప్రధాన సంఖ్య అగుటకు

   (ii) 2 నుండి 6 మధ్యగల సంఖ్య వచ్చుటకు

   (iii) ఒక బేసి సంఖ్య వచ్చుటకు

8. 1 నుండి 100 వరకు కార్డులు గల ఒక సంచి నుండి యాదృశ్చికంగా ఒక సంఖ్యా కార్డును తీస్తే అది ప్రధాన సంఖ్య అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 486 06-02-2021 14:55

9. ఒక పాచికను రెండు సార్లు దొర్లించినప్పుడు వాటి పై వచ్చే అంకెలను ప్రతిసారి రాయగా అట్టి సంఖ్యల మొత్తం

(i) 12 కంటే ఎక్కువ? (ii) 12 కంటే తక్కువ?

(iii) 11 కంటే ఎక్కువ? (iv) 2 కంటే ఎక్కువ?

10. ఒక సంచిలో 15 ఎరుపు రంగు బంతులు మరియు కొన్ని ఆకుపచ్చ బంతులు ఉన్నాయి. ఒకవేళ ఆకుపచ్చ బంతిని యాధృశ్చికంగా ఎన్నుకునే సంభావ్యత $\frac{1}{6}$ అయిన ఆకుపచ్చ బంతులు ఎన్ని?

11. ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు బంతులు 5 నలుపు బంతులు ఉన్నాయి. (i) ఎరుపుదై ఉండుటకు ? (ii) ఎరుపుది కాకపోవుటకు సంభావ్యత ఎంత?

12. ఒక పెట్టెలో 5 ఎరుపు, 8 తెలుపు, 4 ఆకుపచ్చ గోళీలు కలవు. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక గోళీను తీస్తే అది (i) ఎరుపు (ii) తెలుపు (iii) ఆకుపచ్చకానిది అగుటకు సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

13. ఒక కిడ్డీ బ్యాంకు డబ్బాలో వంద 50పై నాణెములు, యాభై ₹1 నాణెములు, ఇరవై ₹2 నాణెములు, పది ₹5 నాణెములు ఉన్నాయి. డబ్బాను తలక్రిందులు చేసి నప్పుడల్లా యాదృచ్ఛికంగా ఒక్క నాణెం పడుతుంటే అది (i) 50 పై నాణెం అగుటకు, (ii) ₹5 నాణెం కాకపోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

14. 20 విద్యుత్ బల్బులు కల పెట్టెలో 4బల్బులు లోపాలు కలిగి ఉన్నవి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా తీసిన బల్బు లోపాలు కలిగి ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంత? ఒకవేళ అది మంచి బల్బు అయిఉండి, దానిని పెట్టెలో పెట్టకుండా రెండవ బల్బును తీసుకొంటే అది కూడా మంచిదై ఉండుటకు సంభ్యావత ఎంత?

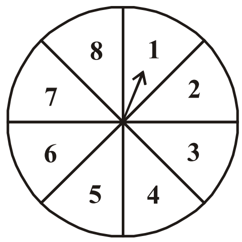
15. ఒక పెట్టెనందు 1 నుండి 90 వరకు వ్రాయబడి ఉన్న 90 ఫలకాలు ఉన్నాయి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక ఫలకాన్ని ఎన్నుకొంటే దానిపై క్రింది సంఖ్యలు ఉండుటకు సంభావ్యత ఎంతెంత? (i) రెండంకెల సంఖ్య (ii) ఖచ్చిత వర్గ సంఖ్య (iii) 5 చే భాగింపబడు సంఖ్య.

16. అఖిల అక్వేరియం దుకాణం నుండి ఒక చేపను కొన్నాడు. అక్వేరియంలో 5 మగ చేపలు, 8 ఆడచేపలు ఉండినప్పుడు, వ్యాపారి యాదృచ్ఛికముగా ఒక చేపను తీసి ఇచ్చి ఉంటే, ఆ చేప మగ చేప అవడానికి సంభావ్యత ఎంత?

17. ఒక ఆట నందు వేగంగా త్రిప్పబడిన బాణపు గుర్తు పటములో చూపబడినట్లు, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 లేక 8 ని సూచిస్తూ ఆగుతుంది. అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములైతే క్రింది ఘటనల సంభావ్యతలు లెక్కించండి. బాణపు గుర్తు సూచించేది

(i) 8 (ii) ఒక బేసిసంఖ్య

(iii) 2 కన్నా పెద్ద సంఖ్య (iv) 9 కన్నా చిన్న సంఖ్య



TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 487 06-02-2021 14:55

ముఖ్యాంశాలు

ఈ అధ్యాయంలోని చర్చల ద్వారా క్రింది విషయాలను అవగాహన చేసుకొన్నాము.

- ప్రయోగిక సంభావ్యత, సైద్ధాంతిక సంభావ్యతల గురించి తెలుసుకొన్నాము.
- ఘటన E యొక్క సైద్ధాంతిక సంభావయతను P(E) తో సూచిస్తాము. మరియు

  $P(E) = \dfrac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$ ఇందు అన్ని పర్యవసానాలు సమసంభావలని పరిగణిస్తాము.
- ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1.
- అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.
- ఘటన E యొక్క సంభావ్యత P(E) సంఖ్యాత్మకం మరియు $0 \leq P(E) \leq 1$.
- E ఒక ఘటన అయిన 'E కాదు' అనుఘటను $\overline{E}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని పూరక ఘటన అంటారు.

  $P(E) + P(\overline{E}) = 1$.
- ఈ అధ్యాయంలో క్రింది నిర్వచనాల గురించి చర్చించాము.

- ప్రయోగిక సంభావ్యత, సైద్ధాంతిక సంభావ్యతల గురించి తెలుసుకొన్నాము.
- ఖచ్చిత లేక ధృఢ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 1.
- అసంభవ ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0.
- ఘటన E యొక్క సంభావ్యత P(E) సంఖ్యాత్మకం మరియు $0 \leq P(E) \leq 1$
- ఒకే ఒక అనుకూల పర్యవసానము గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ఒక ప్రయోగంలోని అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం 1 అవుతుంది.
- E ఒక ఘటన అయిన 'E కాదు' అనుఘటనను $\overline{E}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని పూరక ఘటన అంటారు.

  $P(E) + P(\overline{E}) = 1$.
- ఈ అధ్యాయంలో క్రింది నిర్వచనాల గురించి చర్చించాము.

  యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : ఒక ప్రయోగంలోని ఫలితాల జాబితా ముందుగా తెలిసి ఉంటుంది. కానీ నిర్దిష్ట ఫలితాన్ని మాత్రం ఊహించలేము. ఇలాంటి ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటాం.

  సమసంభవ ఘటనలు : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు సంభవించ డానికి సమాన అవకాశములు ఉంటే వాటిని సమ సంభవ ఘటనలు అంటారు.

  పరస్పర వర్జిత ఘటనలు : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంత కన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలంటారు.

  పూరక ఘటనలు : ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటన యొక్క అనుకూల పర్యవసానములు కాని, ప్రతిరూప ఆవరణలోని మిగిలిన అన్ని పర్యవసానములు గల ఘటనను మొదటి దాని యొక్క పూరక ఘటన అంటారు.

  పూర్ణ ఘటనలు : ఒక ప్రయోగములోని అన్ని ఘటనల సమ్మేళనము ప్రతిరూప ఆవరణము అయిన, వానిని పూర్ణఘటనలు అంటారు.

  ఖచ్చిత ఘటన : ఒక ప్రయోగములో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము ఖచ్చితము మరియు సంభావ్యత 1 అయిన దానిని ఖచ్చిత లేక దృఢ ఘటన అంటారు.

  అసాధ్యఘటన : ఒక ప్రయోగంలో ఒక ఘటన ఎప్పుడూ సాధ్యపడక పోతే దానిని అసాధ్య ఘటన అంటారు.

TSOSS Mathematics TM PDF files 05-02-2021.pdf 488 06-02-2021 14:55