गणित

कक्षा - 10

प्रमुख सलाहकार

श्रीमती चित्रा रामचंद्रन I.A.S.,
विशेष मुख्य सचिव, शिक्षा विभाग, तेलंगाणा सरकार

प्रमुख संपादक

डॉ. एच.के.दीवान
शिक्षा सलाहकार, विद्या भवन सोसाइटी, राजस्थान

पाठ्यपुस्तक मुद्रण परिषद्

श्रीमती. ए. देवसेना IAS
स्कूली शिक्षा निदेशक
तेलंगाणा, हैदराबाद

श्री. ए. कृष्णाराव
निदेशक, ओपन स्कूल सोसाइटी
तेलंगाणा, हैदराबाद.

श्री. वेंकटेश्वर शर्मा
निदेशक, पाठ्यपुस्तक मुद्रण प्रेस
तेलंगाणा, हैदराबाद.

समन्वय और सहयोग

श्री. एम. सोमी रेड्डी,
संयुक्त निदेशक
TOSS-तेलंगाणा, हैदराबाद

श्री. बोयिनपल्ली वेंकटेश्वरा राव,
राज्य समन्वय, ओपन स्कूल सोसयटी
तेलंगाणा, हैदराबाद

मुद्रण
ओपन स्कूल सोसयटी
तेलंगाणा, हैदराबाद.

रRespect the Law
Get to Right

Grow by Education
Behave Humbly

ओपन स्कूल सोसायटी, तेलंगाणा 2021-22

First Published 2021

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Open School Society, Telangana - 2021-22

Printed in India
at the Telangana Govt.Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

संपादक

डॉ. शरण गोपाल, Asst. Prof. BITS-Philani, हैदराबाद कॉम्पस, मेडचल जिला.

डॉ. टी. नागय्या, Asst. Prof. Kakatiya University, वरंगल (अर्बन) जिला.

श्री. एम. सोमय्या, Rtd. Lecturer, DIET, वरंगल, वरंगल (अर्बन) जिला.

श्री. के. रामाचारी, Lecturer, DIET, विकाराबाद, विकाराबाद जिला.

श्री. के.के.वी. रायुलु, Rtd. Principal, CTE, महबूबनगर, महबूबनगर जिला.

विषय विशेषज्ञ - समन्वयक - लेखक

श्री. काकुलवरम राजेंदर रेड्डी,

समन्वयक, गणित पाठ्यपुस्तक, सेवानिवृत्त शिक्षक, यादाद्री भुवनगिरी जिला.

लेखक

श्री. के. श्रीधर चार्युलु, S.A., Maths, ZPHS, नारसिंगि, मेदक जिला.

श्री. पी.डी.एल. गणपति शर्मा, S.A., Maths, GHS, मुडफोर्ट, हैदराबाद जिला.

श्री. धर्मेंदर सिंह, S.A., Maths, ZPHS, मन्नूर, आदिलाबाद जिला.

श्री. के. रामैय्या, S.A., Maths, ZPHS, ताटिकोंडा, घनपुर (स्टे.), जनगाँव जिला.

श्री. पी. सुरेश कुमार, S.A., Maths, GHS, विजयनगर कॉलनी, हैदराबाद जिला.

श्री. आर. लक्ष्मा नरसिंहामूर्ति, , S.A., Maths, ZPHS, थूप्रानपेट, यादाद्री भुवनगिरी जिला.

श्री. एस. वेंकट रमेश,P.G.T., Maths, TS Model School, घनपुर, जनगाँव जिला

श्री. एन. रवि गौड, S.A., Maths, ZPHS, भीरावल्ली, निर्मल जिला.

श्री. के. संतोष, S.A., Maths, ZPHS, चिनरसपल्ली, के.बी. आसिफाबाद जिला.

श्री. वी. कोमुरय्या, S.A., Maths, ZPHS, संगेम, वरंगल रूरल जिला.

श्री. ई. श्रीनिवास, S.A., Maths, ZPHS, बंडा तिम्मापुर, सिद्दीपेट जिला.

श्री. एम. गोविंद,S.A., Maths, ZPHS, आलुर, चेवेल्ला, रंगारेड्डी जिला

श्रीमती. आर. निवेदिता, S.A., Maths, ZPHS, पोलकमपल्ली, महबूबनगर जिला.

शैक्षिक सहायता

कु. नेहा कश्यप, विद्या भवन सोसयटी, राजस्थान **कु. वर्षा शुक्ला,** विद्या भवन सोसयटी, राजस्थान

कु. शिवंगी, विद्या भवन सोसयटी, राजस्थान

अनुवादक समूह

श्री सय्यद मतीन अहमद, समन्वयक, हिंदी विभाग, राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, हैदराबाद

श्रीमती पुष्पलता, प्रिंसिपल, टी.एस.एम.एस. वेलदंडा, नागरकर्नूल.

श्रीमती योगिता भाटिया, हिंदी लेखिका, नई दिल्ली

श्री रौशन भाटिया, हिंदी लेखिका, नई दिल्ली

मुखपृष्ठ चित्रांकन : के. सुधाकर चारी, एम पी पी एस मैलाराम, रायापर्ति(M), वरंगल रूरल

DTP, Page Layout & Design : सुंकरा कोटेश्वर राव, पवन ग्राफिक्स, विद्यानगर, हैदराबाद.
सुंकरा सुनिता, पवन ग्राफिक्स, विद्यानगर, हैदराबाद.
श्रीमती आरिफ़ा सुल्ताना, तेलंगाणा हिंदी अकादमी, हैदराबाद

National Song

- Bankim Chandra Chatterjee

Vande Mataram!

Sujalam, suphalam, malayaja
shitalam,

Shasyashyamalam, Mataram!

Vande Mataram!

Shubhrajyotsna pulakitayaminim,

Phullakusumita drumadala
shobhinim,

Suhasinim sumadhura bhashinim,

Sukhadam varadam, Mataram!

Vande Mataram, Vande Mataram!

OUR NATIONAL ANTHEM

- Rabindranath Tagore

Jana-gana-mana-adhinayaka, jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Punjab-Sindh-Gujarat-Maratha
Dravida-Utkala-Banga
Vindhya-Himachala-Yamuna-Ganga
Uchchala-Jaladhi-taranga.
Tava shubha name jage,
Tava shubha asisa mage,
Gahe tava jaya gatha,
Jana-gana-mangala-dayaka jaya he
Bharata-bhagya-vidhata.
Jaya he, jaya he, jaya he,
Jaya jaya jaya, jaya he!

PLEDGE

- Pydimarri Venkata Subba Rao

"India is my country. All Indians are my brothers and sisters.
I love my country, and I am proud of its rich and varied heritage.
I shall always strive to be worthy of it.
I shall give my parents, teachers and all elders respect,
and treat everyone with courtesy. I shall be kind to animals
To my country and my people, I pledge my devotion.
In their well-being and prosperity alone lies my happiness."

Foreword

शिक्षण मानव प्रबोधन और सशक्तिकरण की प्रक्रिया है। शिक्षण की इस विशाल क्षमता को ध्यान में रखते हुए सभी प्रगतिशील सामाजिक तत्वों ने इसके वैश्वीकरण तथा सबके लिए गुणवत्तापूर्ण शिक्षा प्रदान करने का निश्चय किया है। फलस्वरूप माध्यमिक शिक्षा के वैश्वीकरण में तीव्रता आई है।

माध्यमिक स्तर पर, प्राथमिक स्तर की शिक्षा द्वारा सीखे गये गणितीय ज्ञान की समृद्धता की अनुशासित शुरूआत होती है। तार्किक भावनाओं, प्रमेयों आदि को इस स्तर पर परिचय कराया जाता है। साथ ही साथ गणित एक विशिष्ट विषय होने के साथ अन्य विषयों के अंतर्गत तार्किक विश्लेषण में भी सहायक होते है।

मुझे विश्वास है कि तेलंगाना के इस स्तर के छात्र, इस पाठ्यपुस्तक को पढ़कर गणित का आनंद लेंगे, अपने दैनिक जीवन के अनुभवों और समस्याओं में गणित का उपयोग कर सकेंगे, गणित की मूल भावनाओं व संरचनाओं को समझ सकेंगे।

अध्यापकों के लिए पाठ्यक्रम व शिक्षण संबंधी दृष्टिकोण के समीक्षात्मक अंशों को समझना और, साथ ही गुणात्मक शिक्षण पर ध्यान देना आज की विशेष आवश्यकता है। इसके लिए कक्षा में समावेशी व सहयोगपूर्ण वातावरण की आवश्यकता है ताकि शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया को प्रभावी बनाया जा सकें। सकारात्मक कक्षाकक्ष वातावरण का निर्माण एक ऐसी शक्ति है जिसके माध्यम से बच्चों के रहन-सहन को संस्कारित एवं प्रभावित किया जा सकता है।

टी.एस.एस.सी.एफ.-2011 में गणित आधार पत्र सिद्धांतों की विस्तारपूर्वक प्रस्तुति है। साथ ही कक्षागत पाठ्यक्रम और शैक्षिक मापदंड निर्दिष्ट हैं। इन सबको पाठ्यपुस्तक बनाते समय ध्यान में रखा गया है। पाठ्यपुस्तक निर्माण के समय संवेदनशील मुद्दों के प्रति विशेष सावधानी बरती गई है।

मैं, पाठ्यपुस्तक निर्माण में सहयोग देने वाली पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति, राष्ट्रीय स्तर के विषय विशेषज्ञ, विश्वविद्यालय आचार्य, शिक्षाविद्, लेखकगण, अनुवादक गण, चित्रकार, प्रकाशन विभाग आदि के प्रति कृतज्ञतापूर्ण धन्यवाद अर्पित करती हूँ। **पाठ्यपुस्तक के परिशोधन में प्रोत्साहन देने के लिए श्रीमती चित्रा रामचंद्रन,** IAS, **विशेष मुख्य सचिव, शिक्षा को भी विशेष धन्यवाद दिया जाता है। समय-समय पर सहायता और मार्गदर्शन देने के लिए शिक्षा मंत्री** श्रीमती सबिता इंद्रा रेड्डी को **भी हृदयपूर्वक धन्यवाद दिया जाता है।** साथ ही साथ ओपन स्कूल सोसायटी के कर्मचारियों के लिए भी आभारी हूँ कि उन्होंने लेखकों, संपादकीय बोर्ड, डिजाइनरों, विषय समन्वयकों के साथ समन्वय और चर्चा करके सफलतापूर्वक पाठ्यपुस्त निर्माण में अपना सहयोग दिया है।

मैं आशा करता हूँ यह पुस्तक सभी विद्यार्थीयों के उनके ज़रूरतों को पूरा करेंगे और उनके गणित के मानकों को सुधारेंगे। हम अपने कार्य में निरंतर प्रयास से सुधार करें इसके लिए हम आपके सुझावों तथा टिप्पणियों का स्वागत करते है।

दिनांक: 24-12-2020
स्थान : हैदराबाद

ए. कृष्णा राव
निदेशक, तेलंगाणा मुक्त विद्यालय सोसाइटी, हैदराबाद

Instructions to Learners

F पाठ्य पुस्तक के संकल्पनाएँ समझने के लिए अनेक परिस्थितियों के चित्र दिये गये हैं, संकल्पनाओं के संबंध को ध्यान में रखते हुए आप अध्ययन करना चाहिए।

F गतिवधियों की अवधारणाओं को समझते समय कुछ संदेह उत्पन्न हो सकते हैं। इनको अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा के माध्यम से उन संदेहों को स्पष्ट करें और बिना कोई शंका के गणितीय अवधारणाओं को समझे।

F ''आपकी प्रगती जाँचिए'' अभ्यास स्वयं प्रयत्न के लिये दिया जाता है जिससे यह ज्ञात होता है कि अवधारणयें आपको कहाँ तक समझमें आई है। यदि आप इन अभ्यासों में समस्याओं को करने में कोई कठिनाई का सामना कर रहे हैं, तो आप अपने शिक्षक के साथ चर्चा करके उन्हें स्पष्ट करें।

F ''उदाहरण तथा गतिविधियों'' में दी गई समस्याओं को रचनात्मक और बड़े पैमाने पर सोच कर, तर्क के द्वारा हल किया जा सकता है। आप इन समस्याओं को हल करने में कठिनाई का सामना करते हैं, तो आप अपने मित्रों और शिक्षकों की सहायता ले सकते हैं।

F ''सोचिये और चर्चा कीजिये'' में दी गई कार्यविधियाँ, या गतिविधियाँ, गंभीर सोच की अवधारणा की व्यापकता को समझने के लिये दिये गये हैं। इन गतिविधियों को अपने साथी छात्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा द्वारा हल किया जाना चाहिये।

F अध्याय में चर्चा की गई-विभिन्न अवधारणाओं के साथ समस्याओं के विभिन्न प्रकार के अवधारणा/अध्याय के अंत में दिये गये अभ्यास में हैं। स्कूल में, घर में या अवकाश के समय में अपने आप इन समस्याओं को हल करने का प्रयास करें।

F तालिकाओं में कुछ रिक्त स्थान दिए गए है। जो आपको तुरंत उत्तर देने में सहायक होंगे जिसे आप पाठ्य पुस्तक में ही लिख सकते है।

F प्रत्येक विद्यार्थी साप्ताहिक कार्य को उसी सप्ताह में पूर्ण करें। उसे शेष मत रखिए जो आपको आगे बोझ लगेगा।

F अधिक समस्याओं को इकट्ठाकर, सीखी गई अवधारणाओं पर नई समस्याएँ बनाये और उन्हें अपने साथी शिक्षकों और सहपाठियों को दिखाने का प्रयास करें।

F अनेक पहेली, खेल और गणितीय अवधारणाओं से संबंधित रोचक बातें इकट्ठा करें और अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ साझा (share) करें।

F शैक्षणिक मापदंड (Academic Standards) के अनुसार आप अपने अंदर उसकी क्षमता को विकास करना चाहिए। माध्यमिक स्तर (Secondary Level) पर शैक्षणिक मापदंड 5 है। (1) समस्या का हल, (2) कारण और उपपत्तियाँ (3) गणितीय वार्तालाप (4) गणितीय संबंध (5) गणितीय प्रस्तुतीकरण

F पाठ्यक्रम की अपेक्षाओं को ध्यान में रखते हुए अभ्यास के प्रश्नों को हल करें जो अनेक शैक्षणिक मापदंडो को समाहित करते है और अपेक्षित दक्षताओं को प्राप्त करने का प्रयत्न कीजिए।

F कुछ विषय परीक्षा के लिए नहीं दिए गए है लेकिन सही धारणा को समझने के लिए उपयोगी होंगे। वास्तविक धारणा को जानने से पहले इसके मूलभूत विचारों को समझने पर ध्यान देना चाहिए।

F प्रमेय, सूत्र तथा परिभाषा के अनुप्रयोग पर ध्यान देना चाहिए न कि उसे याद रखने के लिए इसी विचारधारा से प्रश्नों का अभ्यास करें।

F आपकी पुस्तक में विभिन्न अध्याय जो संख्या पद्धति, बीजगणित, ज्यामिति, क्षेत्रमिति, अंक गणित, सांख्यीकि आदि है इन सभी क्षेत्रों से वे आपको परिक्षा के अगले अभ्यास में सहायक होंगे।

F आपको अनेक पुस्तकों की और इंटरनेट फोरम की सहायता लेना चाहिये, जो एक समस्या को हल करने के लिये और संकल्पनाएँ समझने के लिए उपयोगी है।

''हम आपको शुभकामनाएँ देते है''

Instructions to Instructors

- गणित की पुस्तक में दी गई प्रत्येक धारणा को समझकर विद्यार्थीयों को पढाइए.

- इस पाठ्यपुस्तक के आमुख, विद्यार्थीयों को सूचना, शैक्षणिक मापदण्ड, पाठ्यक्रम अपेक्षाएँ, सीखने की संप्राप्तियाँ दी गई है इन विषयों को पढ़कर समझकर इस स्तर पर गणित को पढाइए।

- विद्यार्थीयों को ''विद्यार्थीयों के लिए सूचनाओं'' पढ़ाइए। विद्यार्थीयों के साथ आप भी उसको पढिए और ''विद्यार्थीयों को क्या करना है''? इसे जानिए तथा विद्यार्थियों का मार्गदर्शन कीजिए।

- इस पुस्तक को पाठों को पूर्ण करने के लिए या परिक्षा के परिणामों के लिए नहीं बनाई गई है लेकिन ''आपेक्षित दक्षताएँ प्राप्त करने के लिए बनाई गई है। आप इसे शैक्षणिक मापदण्ड तथा सीखने की संप्राप्तियाँ पढने के बाद समझ सकते है।

- पाठ की मुख्य धारणा को अंत में ''सारांश'' के रूप में दिया गया है। उसी प्रकार सीखने की संप्राप्तियों को प्राप्त करने के लिए क्रियाकलाप तथा अभ्यास के प्रश्न दिए गए है।

- पाठ्यपुस्तक में पाठ के इकाईयों के क्रम को समझकर उसी प्रकार विद्यार्थीयों को बताइए।

- सभी संपर्क वर्गों को ध्यान में रखकर पाठ का विभाजन विद्यार्थीयों के साथ चर्चा कीजिए।

- विद्यार्थीयों को केवल संकल्पना समझना नहीं बल्कि दिए गए अभ्यास को स्वयं हल करना है।

- ''अपनी प्रगति को जाँचिए'' में दिए गए प्रश्नों को विद्यार्थी स्वयं हल कर सके इस प्रकार उनको तैयार कीजिए। उन्हें ब्लैक बोर्ड पर उत्तर लिखने के लायक बनाए उन्हें मुख्य अंशो को अच्छे से समझाइए।

- प्रत्येक विद्यार्थी को ग्राफ उतारने में, रचनाओं में तथा तालिकाओं में शामिल करें।

- विद्यार्थीयों को संकल्पना की अच्छी समझ के लिए 6वीं से 10वीं कक्षा की पुस्तकों का अध्ययन कीजिए।

- विद्यार्थीयों को प्रश्नों को अलग उत्तर पुस्तिका में हल करने के लिए कहिए उसका निरीक्षण कर उन्हें सुझाव दीजिए।

- विद्यीर्थीयों को ऑन-लाइन अध्ययन के लिए मार्गदर्शन कीजिए।

- परिक्षा में प्रश्न सीधे पुस्तक के नहीं दिए जायेंगे इसलिए उसी प्रकार के और अधिक प्रश्नों को हल कर परिक्षा की तैयारी कीजिए।

Academic Standards, Learning Outcomes achieved through 10th Class Mathematics Textbook

शैक्षणिक मापदण्ड

अपेक्षित दक्षतायें, वे कथन हैं जो छात्रो को स्पष्ट करते हैं कि उन्हें क्या जानना चाहिये और उन्हें क्या करने में सक्षम होना चाहिये।

I. समस्या समाधान

गणितीय समस्याओं को हल करने के लिये निम्न प्रकार से अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को उपयोग करना।

a. समस्याओं के प्रकार :

अनेक प्रकार की समस्यायें हो सकती हैं, जैसे :- पहेलियाँ, शब्दों की समस्यायें, चित्रात्मक समस्यायें, प्रक्रिया की समस्यायें, प्रदत्तों को पढना, तालिकाओं को और आलेखों को पढना, आदि।

b. समस्याओं को हल करने के तरीके

- समस्या को पढना।
- सूचनाओं और प्रदत्तों के सभी भागों को पहचानना।
- संबंधित सूचनाओं को पृथक करना।
- उसमें गणितीय अवधारणा को समझाना।
- प्रक्रियाओं और सूत्रों को पुनःस्मरण करना।
- प्रक्रिया का चयन करना।
- समस्या को हल करना।
- समस्या संबंधी प्रमेयों और उनके उत्तरों की जाँच करना।

c. जटिलता :

एक समस्या की जटिलता निम्न पर आधारित होती है।

- संबंध बनाना (जैसे कि संबंधित विभाग में दिया गया है।)
- सोपानों की संख्या
- संक्रियाओं की संख्या
- विषय वस्तु को समझना
- प्रक्रिया की प्रवृत्ति

II. उपपत्तियों का अवलोकन

- विविध सीढियों का अवलोकन (चर या अचर राशियों से सम्मिलित)
- गणितीय सामान्यीकरण और अनुमानों को समझना और निर्माण करना
- प्रक्रियाओं के औचित्य को समझना।
- तार्किक वाद-विवाद का परीक्षण करना।
- उपपत्तियों की संकल्पना को समझना।
- आगमन और निगमन के तर्क के उपयोग।
- गणितीय अनुमानों का परीक्षण करना

III. संचार

- गणितीय संकल्पनाओं को लिखना और पढना (शाब्दिक और सांकेतिक रूप)

उदाहरण : $3+4=7$ $3 \neq 5;$

$n_1+n_2 = n_2+n_1$

त्रिभुज के कोणों का योग = 180°

- गणितीय व्यंजकों का निर्माण
- गणितीय विचारों को अपने शब्दों में समझाना जैसे वर्ग एक चार समान भुजाओं वाली बंद आकृति है और सभी कोण समान है।
- गणितीय प्रक्रिया जैसे दो या दो से अधिक अंको वाली संख्या को जोडना जिसमें पहले इकाई स्थान वाले अंको को जोडना उसके बाद दहाई के स्थान वाले अंको को जोडना जिसमें हासिल वाली संख्या को मस्तिष्क में रखना।
- गणितीय तर्कों को समझना।

IV. संबंध

- गणित की सीमा के भीतर संकल्पनाओं का संबंध। उदाहरण संकलन का गुणनफल से संबंध एक संपूर्ण को अनुपात और भागफल से, प्रतिरूप और सममिति, मापन और स्थान।
- दैनिक जीवन से संबंध बनाना।
- गणित को अन्य विषयों से संबंधित करना।
- विविध गणितीय अवधारणाओं को आँकडों के संचालन और अंक-गणित से या अंक गणित और स्थान से संबंधित करना।
- विविध प्रक्रियाओं को संकल्पना से संबंधित करना।

V. काल्पनिक दर्शन और प्रस्तुतीकरण

- 2-D आकार और 3- D आकार के चित्र, संख्या रेखा, चित्रालेखन तथा संभालेखन, और तालिका में दिये दत्तों को पढना तथा विश्लेषण करना।
- तालिकायें, संख्या रेखा, चित्रालेखन, संभालेखन और चित्र बनाना।
- गणितीय संकेत और आकार।

सीखने की संप्राप्तियाँ

+ संख्या पद्धति

- विद्यार्थी दी गई संख्याओं का ल.स.गु तथा म.स.भा को गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करेंगे।
- परिमेय तथा अपरिमेय संख्या वाले प्रश्नों को हल करेंगे।
- दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए वास्तविक संख्याओं की संकल्पनाओं का संबंध जोडना।
- दिए गए दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याओं को ज्ञात करेंगे।
- परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के बीच अंतर को ज्ञात करना।
- परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के उदाहरण देंगे।
- आवर्त तथा अनावर्त दशमलव संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शायेंगे।

+ बीजगणित

- बहुपदियों से संबंधित प्रश्नों को हल करेंगे। (चरराशियों को ज्ञात करना, शून्य ज्ञात करना, बहुपदियों का भाग, खण्ड ज्ञात करना)
- बीजगणितीय सर्वसमिकाओं की जाँच करेंगे।
- बहुपदियों के उदाहरण उन्हें एकपदी या द्विपदी के आधार पर देंगे।
- दो चर राशि वाले द्विघातीय समीकरणों के रैखिक समीकरण वाले प्रश्नों को हल करेंगे।
- रैखिक समीकरण, द्विघातीय समीकरणों के उत्तरों की जाँच करेंगे।
- दैनिक जीवन से संबंधित घटनाओं को रैखिक तथा द्विघातीय समीकरणों को दर्शायेंगे।
- दो चरराशि वाले रैखिक तथा द्विघातीय समीकरणों के प्रश्नों को हल करेंगे।
- रैखिक समीकरणों को ग्राफ पेपर पर दर्शा कर उसका विश्लेषण करो।
- द्विघातीय समीकरणों को हल कर कारण बताइए।
- दिए गए संख्या पैटर्न साधारण तथा आवश्यक पद ज्ञात कर सकते है।

ज्यामिती

- रैखिक युग्म, समरूप त्रिभुज, समान त्रिभुजों से संबंधित प्रश्न हल करेंगे।
- प्रतिच्छेदित तथा समकेंद्रिय रेखाओं के बीच अंतर ज्ञात करेंगे।
- स्वयं अनुभव से स्वयंसिद्ध पर आधारित दैनिक जीवन की घटनाओं को परिभाषित करेंगे।
- युक्लिद ज्यामितीय स्वयंसिद्धों की प्रशंसा करेंगे।
- विभिन्न प्रकार के कोणों, सर्वसमान त्रिभुज तथा सर्वसमान त्रिभुज की विशेषताओं को समझायेंगे।
- त्रिभुजों की सर्वसमानता की जाँच करेंगे (भु.को.भु., को.भु.को., भु.भु.भु, स.क.भु)
- ज्यामितीय संरचना के चरणों को बतायेंगे।
- दिए गए मापों से ज्यामितीय रचनाओं को उतारेंगे।
- वृत्त की स्पर्शरेखा तथा छेदन रेखाओं के बीच अंतर बताएँगे।
- निर्देशांक तल पर दो बिंदुओं के बीच अंतर ज्ञात करेंगे।
- रेखा के मध्य बिंदु, त्रिभुज का गुरूत्व केंद्र तथा रेखा के झुकाव पर प्रश्नों को हल करेंगे।

क्षेत्रमिति

- दो ठोस आकृतियों के संयोजन के तलीय क्षेत्रफल तथा आयतन को ज्ञात करेंगे।
- दो ठोस आकृतियों के संयोजन के तलीय क्षेत्रफल तथा आयतन को ज्ञात कर उसका कारण बतायेंगे।
- विभिन्न ठोस आकृतियों के तलीय क्षेत्रफल में उपयोगी सूत्रों के पदों को समझायेंगे।
- क्षेत्रमिति के प्रश्नों को हल करने के लिए विभिन्न ज्यामितीय, बीजगणितीय, अंकगणितीय धारणाओं का उपयोग करेंगे।
- दिए गए ठोस आकृतियों से साधारण नए आकारों को बनाएँगे।

अंकगणित

- दिए गए अनुपातों से संयुक्त अनुपात ज्ञात करेंगे।
- संयुक्त अनुपात, लाभ तथा हानी, प्रतिशत, कटौती, कर आदि के प्रश्नों को हल कर सकेंगे।
- साधारण ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज, सीधा या विलोम अनुपात, समय-कार्य तथा समय-दूरी पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे।
- दी गई स्थितियों पर प्रतिशत, लाभ-हानि, तथा कटौती के प्रश्नों का अनुमान लगाकर कारण बता सकेंगे।
- साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज में अंतर कर सकेंगे।
- प्रतिशत तथा अनुपातों को सांकेतिक रूप में दर्शा सकेंगे।
- लाभ-हानी, लाभ प्रतिशत, हानि प्रतिशत, कटौती, साधारण ब्याज आदि को सूत्रों के पदों को समझा सकेंगे।
- प्रतिशत के दैनिक जीवन स्थिति में सीधे तथा विलोम अनुपात को लगाएँगे।

त्रिकोणमिति

- 0^0 से 90^0 के बीच वाले त्रिकोणमितीय अनुपातों तथा त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं के प्रस्नों को हल कर सकेंगे।
- 0^0 से 90^0 के बीच त्रिकोणमितीय अनुपातों तथा भुजाओं के लंबाईयों को ज्ञात कर कारण बताएँगे।
- त्रिकोणमितीय अनुपातों की जाँच कर सकेंगे।
- कर्ण, सम्मुख भुजा, आसन्न भुजा को साइन, कोसाइन, टानजेंट में समझा सकेंगे।
- त्रिकोणमितीय अनुपातों के प्रश्नों को हल करने में (बीजगणितीय धारणाओं का उपयोग करेंगे।)
- 0^0 से 90^0 के बीच वाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की तालिका बना सकेंगे।

सांख्यिकी

- समूहबद्ध तथा असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान, मध्यिका, बहुलक ज्ञात कर सकेंगे।
- दिए गए असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान, मध्यिका, बहुलक का अनुमान लगा कर उसका कारण बता सकेंगे।
- मध्यमान, मध्यिका तथा बहुलक के सूत्रों में उपयोगी पदों को समझ सकेंगे।
- दत्तों को बारंबरिता बंटन / संचित बारंबारिता तालिका में दर्शा सकेंगे।
- दत्तों को ग्राफ विधि से दर्शा सकेंगे।

विषयवस्तु

इकाई - 5 क्षेत्रमिति

इकाई- 6 त्रिकोणमिति

इकाई - 7 सांख्यिकी

इकाई 1

संख्या पद्धति

(वास्तव संख्याओं का परिचय)

अध्याय 1.1

प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक

1.1.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ, अपरिमेय संख्या तथा वास्तविक संख्याओं की आवश्यकता को समझेंगे।
- प्राकृतिक संख्याओं के गुणधर्मों को जानेंगे।
- शून्य के गुणधर्मों को समझायेंगे।
- पूर्णांको को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करेंगे।
- चार मूलभूत संक्रियाओं से सम्मिलित पूर्णांको के प्रश्नों को हल करेंगे।
- विषम, सम संख्याएँ, गुणनखण्ड, गुणक, रूढ़ी तथा संयुक्त संख्याएँ वर्ग तथा धन संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ तथा BODMAS नियम को जानेंगे और अंतर बतायेंगे।
- परिमेय संख्याओं को चार मूलभूत संक्रियाओं को हल करेंगे।
- परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन करेंगे।
- दी गई परिमेय संख्याओं के समतुल्य संख्याएँ लिखकर उनकी तुलना करेंगे।

1.1.1 प्रस्तावना

संख्याओं का आविष्कार यह मानवीय बुद्धिमता का चिन्ह है। संख्याएँ गणित की रीढ की हड्डी है। हम जो संख्या पद्धति का उपयोग करते है उसे ''हिंदु अरबी पद्धति'' कहते है। इसमें हम दस अंको का उपयोग करते है वे है 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. सभी संख्याएँ इन्हीं अंको से बनते है।

हमारे जीवन की प्रत्येक घटना संख्याओं से संबंधित होती है। उदाहरणार्थः- मरीज की पल्स को जानने के लिए डाक्टर को, किसान को अपनी उपज का अनुमान लगाने के लिए, मज़दूरों को भवन निर्माण के मापो के लिए, इंजीनियर के प्लान के लिए, क्लेक्टर के सर्वेक्षण में, भोजन के सामग्री मापन में, विभिन्न देशों के तापमान भिन्नता में, देश के संपत्ति तथा कर्ज के मापन में, शेर बाज़ार के ऊँच, नीच में, इ-कामर्स क्षेत्र में शॉपिंग के लिए आदि... संख्याओं के चारों ओर घूमते हैं।

1.1.2 प्राकृतिक तथा पूर्ण संख्याएँ

प्राकृतिक संख्याएँ NATURAL NUMBERS (N)

संख्याएँ 1, 2, 3, ... जो गणना में उपयोगी होते है उन्हें प्राकृतिक संख्या कहते है। उन्हें 'N' द्वारा सूचित किया जाता है।

$$N = \{1, 2, 3 ......\}.$$

नोट : सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या '1' है।

नोट : प्रत्येक प्राकृतिक संख्या का उत्तर पद होता है। इसलिए हम सबसे बड़ी प्राकृतिक संख्या नहीं ज्ञात कर सकते हैं।

संख्याओं के कुछ गुण

क्र.सं.	गुण	परिभाषा	उदाहरण	टिप्पणी
1	संवृत्त गुण (i) जोड के लिए (ii) गुणा के लिए	यदि $a, b \in N$, हो तो $a + b \in N$ यदि $a, b \in N$, हो तो $ab \in N$	$2, 3 \in N, 2+3=5 \in N$ $2, 3 \in N, 2 \times 3 = 6 \in N$	प्राकृतिक संख्याएँ संवृत गुण जोड तथा गुणा के लिए संतृप्त करता है
2.	क्रमविनिमय गुण (i) जोड के लिए (ii) गुणा के लिए	$a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$	मानलो $2, 3 \in N$ $2 + 3 = 3 + 2 = 5$ $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$	प्राकृतिक संख्याएँ क्रमविनिमय गुण को संतृप्त करता है
3.	सहचर्य गुण (i) जोड के लिए (ii) गुणा के लिए	$(a+b)+c = a+(b+c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	मानलो $5, 6, 7 \in N$ $(5+6)+7 = 5+(6+7)$ $11 + 7 = 5 + 13 = 18$ $(5 \times 6) \times 7 = 5 \times (6 \times 7)$ $30 \times 7 = 5 \times 42$ $210 = 210$	प्राकृतिक संख्याएँ सहचर्य गुण को संतृप्त करता है and multiplication
4.	तत्समक गुण (i) जोड के लिए (ii) गुणा के लिए	$a + 0 = 0 + a = a$ $a \times 1 = 1 \times a = a$ 1 से गुणा के बाद भी संख्या नहीं बदलती है	$7 + 0 = 0 + 7 = 7$ $8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$	'0' को जोड का तत्समक कहते हैं '0' प्राकृतिक संख्याएँ जोड के लिए तत्समक गुण को संतृप्त नहीं करती है.

5.	व्युत्क्रम गुण (i) जोड के लिए (ii) गुणा के लिए	$a+(-a)=0=(-a)+a$ $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$	मानलो $1, -2, \frac{1}{2} \in A$ $2+(-2) = 0 = (-2)+2$ $2 \times \frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{2} \times 2$	ऋणात्मक तथा भिन्न संख्याएँ प्राकृतिक संख्याओं. में नही आती है इसलिए प्राकृतिक संख्याएँ जोड तथा गुण के व्युत्क्रम गुण को संतृप्त नहीं करती है।
6.	बंटन गुण	$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$	मानलो $2, 3, 5 \in N$ $2 \times (3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$ $2 \times 8 = 6 + 10$ $16 = 16$ $(2+3) \times 5 = 2 \times 5 + 3 \times 5$ $5 \times 5 = 10 + 15$ $25 = 25$	

पूर्ण संक्याएँ (W)

मानलो आपके पास चार चाकलेट है। यदि चारों चाकलेट आप अपने मित्र को सभी चाकलेट दे दिए। आपके पास कितने चाकलेट बचेंगे?

अब, $4 - 4 = 0$, हाँ, शून्य

लेकिन आप शून्य (0) को प्राकृतिक संख्याओं में नहीं पायेंगे इसलिए प्राकृतिक संख्याओं का शून्य के साथ विस्तार किया गया जिसे पूर्ण संख्याएँ कहते है जिसे ‘W’ से सूचित किया जाता है।

$W = \{0, 1, 2, 3, ... \}$

नोट : सबसे छोटी पूर्ण संक्या ‘0’ तथा सबसे बड़ी पूर्ण संख्या ज्ञात नहीं कर सकते।

शून्य के गुण धर्म

(i) 0 को जोड का तत्समक कहते है, $a + 0 = 0 + a = a$.

(ii) जब हम 0 से किसी भी संख्या को गुणा करते हैं तो उसका परिणाम शून्य ही होगा।

$$0 \times a = 0 = a \times 0$$

(iii) शून्य से भाग परिभाषित नहीं है अर्थात्, $\frac{a}{0}$ को परिभाषित नहीं.

(iv) $\frac{0}{0}$ को ज्ञात नहीं कर सकते।

पूर्णांक (Z)

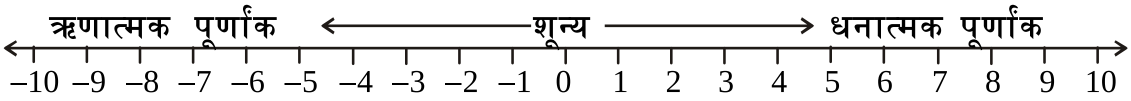
माउण्ट एवरेस्ट की ऊँचाई	+8,848 मीटर	[धनात्मक]
प्रशांत सागर की गहराई	–10,994 मीटर	[ऋणात्मक]
विश्व का सबसे अधिक तापमान	+63.8°C	[धनात्मक]
पृथ्वी का प्राकृतिक सबसे कम तापमान	–89°C	[ऋणात्मक]

उपरोक्त स्थितियों में ऋणात्मक संख्याओं की जानकारी आवश्यक है।

संख्याएँ जो धनात्मक, शून्य तथा ऋणात्मक होती है उन्हें पूर्णांक कहते है और उसे Z से दर्शाया जाता है।

$$Z = \{......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

पूर्णांको का संख्या रेखा पर प्रदर्शन



- दोनो ऋणात्मक तथा धनात्मक संख्याओं को अनंत रूप से विस्तरित कर सकते हैं।
- संख्या रेखा पर दायीं ओर वाली संख्या बायीं से हमेशा बड़ी होती है।

(i) $-1 < 0$ (ii) $-10000 < 1$ (iii) $0 > -105$ (iv) $11 > -100$ आदि.

(चिन्ह '<' को ''से कम है'' तथा '>' को से अधिक है ऐसा पढ़ते है।)

उपसमुच्चय: उपसमुच्चय का चिन्ह $\subset$ है।

"N" की सभी संख्याएँ W में पाई जाती है।

'W' की सभी संख्याएँ Z में पाई जाती है।

- $N \subset W \subset Z$ (इसे N उपसमुच्चय है W का और W उपसमुच्चय है Z का ऐसे पढ़ते है)
- प्रत्येक पूर्णांक का योग पूर्णांक होता है।

2 का योग व्युत्क्रम –2 है।

–9 का योग व्युत्क्रम +9 है।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित में से प्राकृतिक, पूर्ण तथा पूर्णांको को पहचानिए।

1, –1, 3, 0, –100, 8, 17, –19.

हल : प्राकृतिक संख्याएँ 1, 3, 8, 17

पूर्ण संख्याएँ 0, 1, 3, 8, 17

पूर्णांक संख्याएँ –100, –19, –1, 0, 1, 3, 8, 17

उदाहरण 2 : निम्नलिखित में से कौनसे कथन सत्य है या असत्य लिखिए?

(i) प्रत्येक प्राकृतिक संख्या पूर्णांक होती है।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक, पूर्ण संख्या होती है।

(iii) शून्य ‘0’ योग तत्समक है।

(iv) केवल धनात्मक पूर्णांक ही प्राकृतिक संख्या होती है।

हल (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य

उदाहरण 3 : निम्नलिखित पूर्णांको को आरोही तथा अवरोही क्रम में लिखिए।

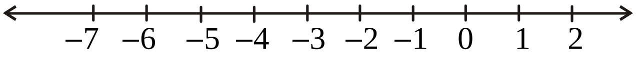
–100, 117, –205, 0, –76, 15, 12.

हल: आरोही क्रम (छोटे से बड़ा) –205, –100, –76, 0, 12, 15, 117.

अवरोही क्रम (बड़े से छोटा) 117, 15, 12, 0, –76, –100, –205

उदाहरण 4 : –7 तथा 2 के बीच वाले पूर्णांको को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

हल :



उपरोक्त चित्र से –7 तथा 2 के बीच आने वाली संख्याएँ –6,–5,–4,–3,–2,–1,0,1 है।

पूर्णांको के चार मौलिक संक्रियाएँ

योग (जोड) :

- जब दो धनात्मक पूर्णांको को जोडते है तो हमें धनात्मक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।
  3 + 5 = 8;　100 + 120 = 220.
- जब दो ऋ णात्मक पूर्णांको को जोडते है तो हमें ऋ णात्मक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।
  (–3) + (–5) = –8;　(–100) + (–250) = –350
  (संख्याओं को जोडिए लेकिन चिन्ह ‘–’ ही लिखना चाहिए।)
- जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोडते हैं तो हमें उनका घटान करना चाहिए और बड़ी संख्या वाला चिन्ह परिणाम के सामने लिखना चाहिए।

उदाहरण 5 : (–3) + (5) को ज्ञात कीजिए।

हल : (–3) + (5) = 2 [3 को 5 में से घटाइए और 5 (बड़ी संख्या) का चिन्ह लिखिए]

उदाहरण 6 : (–7) + 3 को ज्ञात कीजिए।

हल : (–7) + 3 = –4 [3 को 7 में से घटाइए और 7 (बड़ी संख्या) का चिन्ह लिखिए]

घटान (व्याकलन):

पूर्णांको का घटान उसके योग व्युत्क्रम के जोड जैसा ही होता है।

उदाहरण 7 : (–3) – (–5) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : (–3) – (–5)

= –3 + 5 (‘–’ के चिन्ह को + में बदलिए)

= +2 (–5 का योग व्युत्क्रम +5 लिखकर जोड कीजिए।)

उदाहरण 8 : (–100) – (+7) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : (–100) – (+7)

= (–100) + (–7)

= –107

गुणा:

- दो ऋणात्मक पूर्णांको का गुणनफल धनात्मक होता है।

  उदा : $(-4) \times (-3) = +12$; $(-5) \times (-10) = +50$.

- एक धनात्मक तथा एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

  उदा : $6 \times (-2) = -12$; $(-9) \times (3) = -27$.

- ऋणात्मक संख्याओं के सम जोडियों का गुणनफल धनात्मक होता है।

  उदा : $(-2) \times (-3) \times (-5) \times (-6) = +180$ [4 ऋणात्मक संख्याएँ अर्थात् सम जोडियाँ]

- ऋणात्मक संख्याओं के विषम जोडियों का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

  उदा : $(-1) \times (-2) \times (-3) = -6$ [3 ऋणात्मक संख्याएँ अर्थात् विषम जोडियाँ]

भाग:

- यदि अंश तथा हर का एक ही चिन्ह हो तो भागफल धनात्मक होता है।

  उदा : $\frac{-10}{-5} = +2$; $\frac{-15}{-3} = +5$

- यदि अंश तथा हर को विपरित चिन्ह हो तो भागफल ऋणात्मक होता है।

  उदा : $\frac{-6}{2} = -3$; $\frac{8}{-2} = \frac{-8}{2} = -4$

कुछ प्रमुख तथ्य

1. **गुणक:** गुणक वह संक्या होती है जो पूर्णांको से गुणा की जाती है।

   7 के गुणक $7 \times 1 = 7$, $7 \times 2 = 14$, $7 \times 3 = 21$ ... आदि.

   7, 14, 21, 28, ... 7 के गुणक है।

2. **गुणनखण्ड:** वह संख्या जो दी गई संख्या को पूर्ण रूप से विभाजित करती है उसे गुणनखण्ड कहते है।

नोटः प्रत्येक संख्या के कम से कम दो गुणन खण्ड होते है संख्या और एक 1 अलावा।

उदाहरण 9 : 42 के सभी गुणनखण्डों को ज्ञात कीजिए।

हल :

$1 \times 42 = 42$ $\qquad$ $42 \times 1 = 42$

$2 \times 21 = 42$ $\qquad$ हम क्रमविनिमय नियम का उपयोग करेंगे $\qquad$ $21 \times 2 = 42$

$3 \times 14 = 42$ $\qquad$ $14 \times 3 = 42$

$6 \times 7 = 42$ $\qquad$ $7 \times 6 = 42$

$\therefore$ 42 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 है।

3. **सम संख्याएँ:** सम संख्या वह है जो 2 से पूर्ण रूप से विभाजित होती है।

   सम संख्याओं में इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6, 8 पाया जाता है।

   उदा : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... (सम संख्याएँ)

4. **विषम संख्याएँ:** विषम संख्याएँ वह है जो 2 के गुणक नहीं होते है।

   विषम संख्याओं में इकाई के स्थान पर 1, 3, 5, 7, 9 पाया जाता है।

   उदा : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ... (विषम संख्याएँ)

5. **रूढी संख्याएँ:** वह संख्याएँ जो 1 से बड़ी हो तथा केवल दो गुणनखण्ड 1 तथा स्वयं में केवल दो अलग गुणनखण्ड पाए जाते है।

नोट: रूढी संख्याओं में केवल दो अलग गुणनखण्ड पाए जाते है।

नोट:‘2’ एक सम रूढी संख्या है इसके अलावा सभी रूढी संख्याएँ विषम होती है।

उदा: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... (रूढी संख्याएँ)

उदाहरणार्थ 23 गुणनखण्ड 1, 23 है।

6. **संयुक्त संख्याएँ:** संयुक्त संख्याएँ ‘1’से बड़ी होती है तथा रूढी संख्या को छोडकर होती है। संयुक्त संख्याओं के कम से कम 3 गुणनखण्ड होते है।

   उदा: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ... (संयुक्त संख्याएँ)

   उदाहरणार्थ 4 गुणनखण्ड 1, 2, 4 है।

7. सह रूढी संख्याएँ: दो संख्याओं का सबसे बड़ा अभयनिष्ठ गुणनखण्ड '1' हो तो उन्हें सह रूढी संख्याएँ कहते है।

उदा: 2, 3 सह रूढी संख्याएँ है; 2, 9 सह रूढी संख्याएँ है। उनका ग.स.भा.'1'म होता है।

2, 4 सह रूढी संख्याएँ नहीं है, क्योंकि उनका म.स.भा. 2 होता है।

8. वर्ग संख्याएँ: पूर्णांक का उसी संख्या से गुणनफल वर्ग कहलाता है।

उदा : $1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$(-4) \times (-4) = (-4)^2 = 16.$

$\vdots$

$17 \times 17 = 17^2 = 289.$

उदा : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ... वर्ग संख्याएँ है।

9. घन संख्याएँ : तीन समान पूर्णांको के गुणनफल को घन संख्या कहते है।

$1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$ $\quad$ $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

उदा : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 घन संख्याएँ है।

10. सही संख्या: सही संख्या वह धनात्मक पूर्णांक है जिसके गुणनखण्डो का योग वही संख्या होती है।

6 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 6

सही गुणनखण्ड 1, 2, 3

सही गुणनखण्डों का योग = 1 + 2 + 3 = 6

दूसरी सही गुणनखण्ड 28 है।

उदाहरण 10 : 100 + 50 × 2 को सरल कीजिए।

हल : $100 + 50 \times 2$ (गुणनफल)

$= 100 + 100$ (योग)

$= 200$

उदाहरण 11 : 5000 + 500 – 50

हल : $5000 + 500 - 50$

$= 5500 - 50$ (योग)

$= 5450$ (घटान)

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्नलिखित में से प्राकृतिक संख्याओं को पहचानिए।
   $5, 6, -1, 0, 3, 215, -11, -215$
2. निम्नलिखित में से ऐसी संख्याओं को चुनिए जो पूर्ण संख्या नहीं है।
   $6, 7, -8, -9, 0, -100.$
3. निम्नलिखित को सरल कीजिए।
   (i) $(-2) + (-8) + 9$ (ii) $(-3) + (-9) + (-11)$
4. निम्नलिखित को सरल कीजिए।
   (i) $(-2) - (-8)$ (ii) $(-256) + (-85)$
   (iii) $(-18) + (-19) - (-110)$ (iv) $(-975) + (-120) - (-18)$
5. निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $(-3)\times(-8)\times(-11)\times(-1)$ (ii) $(-15)\times 0\times(-19)$
6. निम्नलिखित के मूल्य ज्ञात कीजिए।
   (i) $60 \div 0$ (ii) $(-18) \div (-6)$ (iii) $(-125) \div 5$ (iv) $0 \div 200$
7. सरलीकृत कीजिए।
   (i) $18\times[7 + (-5)]$ (ii) $15\times(-20)\times(-15\div 3)$
8. $-7, -5, 0, 5, 7$ को संख्या रेखा दर्शाइए।

1.1.3 परिमेय संख्याएँ (Q)

प्रसाद के पास एक जमीन है। वह उसे दो बच्चों में बाँटना चाहता है। तो प्रत्येक को कितनी जमीन मिलेगी?. $\frac{1}{2}$ एकड

रत्नम्मा ने मेहनत कर ` 2,00,000/- कमाएँ

उसने उस रकम को 7 वृद्धाश्रमों में समान रूप से बाँटा।

प्रत्येक वृद्धाश्रम को $\frac{2,00,000}{7}$ रूपये मिलेंगे।

प्रत्येक वृद्धाश्रम को बाँटी गई रकम = ` $\frac{2,00,000}{7}$

$\frac{1}{2}, \frac{2,00,000}{7}$ भी संख्याएँ है लेकिन हमें पूर्णांको में ऐसी संख्याएँ प्राप्त नहीं होती है।

इसलिए नई संख्याओं का परिचय कराया गया, जिन्हें परिमेय संख्याएँ कहते है। इसे इस प्रकार परिभाषित कर सकते है।

संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में दर्शाया जाता है, जिसमें p और q दो पूर्णांक होंगे और $q \neq 0$ हो तो उन्हें परिमेय संख्या कहते है। जिन्हें 'Q' से दर्शाता जाता है।

उदा : $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{-6}{7}, -\frac{11}{8}, \frac{-100}{9}, \frac{1}{7}, ...$ आदि।

हम किसी भी पूर्णांक को परिमेय में दर्शा सकते है।

उदा: -3 को $-\frac{3}{1}$ या $\frac{-6}{2}$ या $\frac{-9}{3}$ या $\frac{-12}{4}$..... आदि।

उपरोक्त निरीक्षण से यह प्राप्त होता है कि सभी प्राकृतिक संख्याएँ, सभू पूर्ण संख्याएँ तथा पूर्णांक संख्याओं को परिमेय में दर्शा सकते है। N C W C Z C Q.

उदाहरण 12 : निम्नलिकिथ में से कौनसी परिमेय संख्याएँ है ?

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) $\frac{-3}{-17}$ (iv) $\frac{6}{-13}$

(v) -9 (vi) $\frac{0}{0}$ (vii) $\frac{8-8}{16\times(-4)}$ (viii) $\frac{-17}{3-3}$

हल : (i) (ii) (iii) (iv) (v) (vii) परिमेय संख्याएँ है (vi) तथा (viii) परिमेय संख्याएँ नहीं है।

क्योंकि $\frac{0}{0}$ तथा $\frac{-17}{0}$ परिभाषित नहीं है।

नोट: जब हम परिमेय संख्याओं को लिखते है तब

(i) हमेशा हर धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए

(ii) अंश तथा हर को सरल रूप में लिखना चाहिए

परिमेय संख्याओं का मानक रूप (संक्षिप्त रूप) है

परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ जहाँ p तथा q पूर्णांक तथा $q \neq 0$ है तो q धनात्मक संख्या होगी तथा p तथा q सापेक्षिक रूढी हो तो उसे मानक रूप या संक्षिप्त रूप कहते है।

उदाहरण 13 : निम्न परिमेय संख्याओं को संक्षिप्त रूप में दर्शाइए।

(i) $\frac{4}{8}$ (ii) $-\frac{18}{50}$ (iii) $\frac{-21}{-49}$

हल :

(i) $\frac{4}{8} = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2}$ [अंश तथा हर का म.स.भा. 1 होगा]

$\therefore$ $\frac{4}{8}$ का संक्षिप्त रूप $\frac{1}{2}$ होगा।

(ii) $-\frac{18}{50} = \frac{-2 \times 9}{2 \times 25} = \frac{-2 \times 9}{2 \times 25} = \frac{-9}{25}$

$\therefore$ $-\frac{18}{50}$ का संक्षिप्त रूप $-\frac{9}{25}$ होगा।

(iii) $\frac{-21}{-49} = \frac{-7 \times 3}{-7 \times 7} = \frac{+\cancel{7} \times 3}{+\cancel{7} \times 7} = \frac{3}{7}$

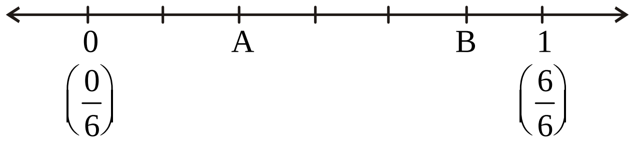
$\therefore$ $\frac{-21}{-49}$ का संक्षिप्त रूप $\frac{3}{7}$ होगा।

संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

किसी भी परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शा सकते है। ध्यान दीजिए कि परिमेय संख्याओं में हर समान भागों को दर्शाता है जो एक इकाई को विभाजित करता है। अंश उनमें से लिए गए भागों को दर्शाता है।

* किसी भी दो परिमेय संख्याओं के मध्य दूसरी परिमेय संख्याएँ होती है इस सिद्धांत को ''घनत्व सिद्धांत'' कहते है।

उदाहरण 14 : A तथा B द्वारा दर्शाए गए परिमेय संख्याओं को पहचानिए।



हल : यहाँ, 0 से 1 के मध्य की इकाई को 6 समान भागों में बाँटा गया है।

A 6 में से 2 भागों को दर्शाता है।

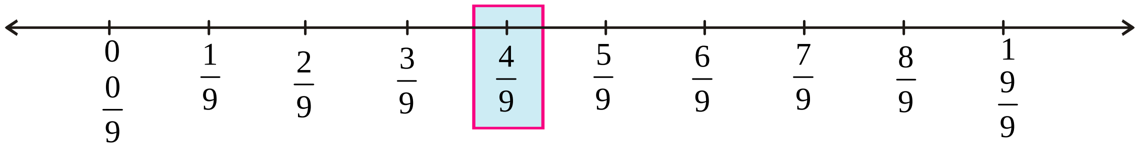
इसलिए A $\frac{2}{6}$ को दर्शाता है।

उसी प्रकार, B $\frac{5}{6}$ को दर्शाता है।

उदाहरण 15 : $\frac{4}{9}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

हल : $\frac{4}{9}$, 0 तथा 1 के बीच आता है।

अब संख्या रेखा को 0 तथा 1 के बीच 9 भगों में बाँटिए।



0 से चौथे स्थान वाली संख्या आवश्यक परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ होगी।

उदाहरण 16 : $-\frac{17}{5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

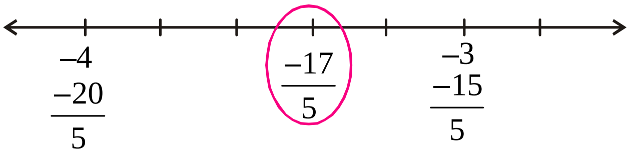
$$-\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5} = -3-\frac{2}{5}$$

हल : $-\frac{17}{5}$ संख्या रेखा पर -3 तथा -4 के मध्य होगी।

संख्या रेखा पर -3 तथा -4 के बीच वाले भाग को 5 समान भागों में बाँटिए।.

-3 से दूसरे भाग को चिन्हित कीजिए।

$$-3 = \frac{-15}{5}, \; -4 = \frac{-20}{5}$$



परिमेय संख्याओं की तुलना

समान हर वाले परिमेय संख्याओं की तुलना सरल होती है। बड़े अंश वाली परिमेय संख्या बड़ी होती है।

उदाहरण 17 : $\frac{5}{13}$ तथा $\frac{8}{13}$ की तुलना कीजिए।

हल: यहाँ दोनो परिमेय संख्याओं का हर एक समान 13 है। तथा अंश में $8>5$

इसलिए, $\frac{8}{13} > \frac{5}{13}$

नोट : यदि दो परिमेय संख्याओं के हर अलग हो तो उनको समानता के अनुसार समान बनाना चाहिए उसके बाद परिणामों के अंशो की तुलना करनी चाहिए।

उदाहरण 18 : $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{3}{7}$ की तुलना कीजिए।

हल : यहाँ हर समान नहीं है।

इसलिए सबसे पहले हम उनके हरों को इस प्रकार से समान बनायेंगे।

$$\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{7}{7}=\frac{14}{35} \qquad \left[\text{प्रथम परिमेय संख्या}\times\frac{\text{दूसरी परिमेय संख्या का हर}}{\text{दूसरी परिमेय संख्या का हर}}\right]$$

$$\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{5}=\frac{15}{35} \qquad \left[\text{दूसरी परिमेय संख्या}\times\frac{\text{प्रथम परिमेय संख्या का हर}}{\text{प्रथम परिमेय संख्या का हर}}\right]$$

$$\frac{15}{35}>\frac{14}{35}$$

$$\therefore \frac{3}{7}>\frac{2}{5}.$$

अपनी प्रगति जाँचिए।

1. इनमें से कौनसी परिमेय संख्याएँ है?

   (i) $\frac{3+3}{3-3}$ (ii) $\frac{0}{8}$ (iii) $-\frac{8}{11}$ (iv) -6

2. इनमें से कौनसी पूर्णांक संख्याएँ है?

   (i) $-24, \frac{-6}{6}, \frac{-18}{19}, \frac{21}{7}, \frac{-19}{-38}.$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संक्षिप्त रूप में लिखिए।

   (i) $\frac{6}{12}$ (ii) $\frac{18}{50}$ (iii) $\frac{-6057}{2019}$

4. दिए गए परिमेय संख्याओं के समान 5 परिमेय संख्याओं को लिखिए।

   (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-\frac{6}{11}$ (iii) $\frac{18}{5}$

5. $-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

6. $\frac{1}{6}, -\frac{5}{8}, \frac{3}{5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

7. $\frac{3}{7}$ तथा $\frac{4}{9}$ की तुलना कीजिए।

1.1.4 परिमेय संख्याओं की चार मूलभूत संक्रियाएँ

परिमेय संख्याओं का योग

(i) जब हर की संख्याएँ समान हो तो केवल अंशो को जोडा जाता है मानलो $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ परिमेय संख्याएँ है जहाँ $(b \neq 0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

हम कभी भी हरों की संख्या का जोड नहीं करते क्योंकि वह केवल समान भागों को दर्शाता है।

(ii) जब हर की संख्याएँ समान न हो तो हर को समान बनाने वाले संकल्पना से पहले परिमेय संख्याओं के हर को समान बनाते है।

दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ को देखिए

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+bc}{bd}$$

उदाहरण 19 : $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}$ को सरल कीजिए।

हल : $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}=\frac{4+9}{7}=\frac{13}{7}$

उदाहरण 20 : $\frac{5}{8}+\frac{7}{9}$ को सरल कीजिए।

हल:
$$\frac{5}{8}+\frac{7}{9}=\frac{5}{8}\times\frac{9}{9}+\frac{7}{9}\times\frac{8}{8}$$
$$=\frac{45}{72}+\frac{56}{72}$$
$$=\frac{45+56}{72}$$
$$=\frac{101}{72}.$$

उदाहरण 21 : निम्न परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{7}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ और $\frac{6}{17}$ (iii) $-\frac{9}{11}$ और $-\frac{11}{12}$

हल : $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{7}$

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7} = \frac{2\times7+3\times5}{5\times7}$$

$$= \frac{14+15}{35}$$

$$= \frac{29}{35}.$$

(ii) हल : $-\frac{3}{5}$ और $\frac{6}{17}$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{6}{17}$$

$$= -\frac{3}{5}\times\frac{17}{17}+\frac{6}{17}\times\frac{5}{5}$$

$$= -\frac{51}{85}+\frac{30}{85}$$

$$= \frac{-51+30}{85} = -\frac{21}{85}$$

(या)

वैकल्पिक विधि:

$$-\frac{3}{5}\quad\frac{6}{17} = \frac{-3\times17+6\times5}{5\times17} = \frac{-51+30}{85} = -\frac{21}{85}$$

(iii) $-\frac{9}{11}$ तथा $-\frac{11}{12}$

हल : $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(-\frac{11}{12}\right)$

$$= \left(-\frac{9}{11}\times\frac{12}{12}\right)+\left(-\frac{11}{12}\times\frac{11}{11}\right)$$

$$= -\frac{108}{132}+\frac{-121}{132}$$

$$= \frac{-108-121}{132}$$

$$= -\frac{229}{132}$$

(या)

वैकल्पिक विधि:

$$\frac{-9}{11} \qquad \frac{-11}{12}$$

$$\frac{-9\times12+-11\times11}{11\times12}=\frac{-108-121}{132}=\frac{-229}{132}$$

परिमेय संख्याओं का व्यवकलन (घटान)

परिमेय संख्याओं के घटान के लिए हम जोड की प्रक्रिया का अनुसरण करते है।

उदाहरण 22 : निम्न को सरल कीजिए।

(i) $-\frac{8}{5}+\frac{7}{9}$ (ii) $-\frac{8}{7}-\left(-\frac{9}{5}\right)$ (iii) $\frac{11}{12}-\frac{9}{5}$

हल : (i) $\frac{-8}{5} \qquad \frac{7}{9}=\frac{-8\times9+7\times5}{5\times9}=\frac{-72+35}{45}=-\frac{37}{45}$

(ii) $-\frac{8}{7}-\left(-\frac{9}{6}\right)$

$$=-\frac{8}{7}+\frac{9}{5}$$

$$=-\frac{8}{7}\times\frac{5}{5}+\frac{9}{5}\times\frac{7}{7}$$

$$=-\frac{40}{35}+\frac{63}{35}$$

$$=\frac{-40+63}{35}=\frac{23}{35}$$

(iii) $\frac{11}{12}-\frac{9}{5}$

हल : $\frac{11}{12}\times\frac{5}{5}-\frac{9}{5}\times\frac{12}{12}$

$$=\frac{55}{60}-\frac{108}{60}=\frac{55-108}{60}=-\frac{53}{60}.$$

वैकल्पिक विधि:

$$\frac{11}{12}-\frac{9}{5}=\frac{11\times5-9\times12}{12\times5}=\frac{55-108}{60}=-\frac{53}{60}.$$

उदाहरण 23 : $\frac{2}{7}$ को $-\frac{3}{5}$ में से घटाइए।

हल : $-\frac{3}{5}-\frac{2}{7} = -\frac{3}{5}\times\frac{7}{7}-\frac{2}{7}\times\frac{5}{5}$

$$= -\frac{21}{35}-\frac{10}{35} = \frac{-21-10}{35} = -\frac{31}{35}$$

परिमेय संख्याओं का गुणा

(i) दो परिमेय संख्याओं का गुणा $\left(\frac{a}{b}\right)$ तथा $\left(\frac{c}{d}\right)$ जहाँ $b\neq 0, d\neq 0$ $\frac{ac}{bd}$

जहाँ $bd\neq 0$. अर्थात् $= \dfrac{\text{अंशो का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

नोटः परिमेय संख्याओं को हमेशा उसके संक्षिप्त रूप में लिखना चाहिए।

उदाहरण 24 : निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का गुणा लिखिए।

(i) $\frac{4}{5}$ तथा $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{7}{8}$ तथा $\left(-\frac{6}{15}\right)$ (iii) $\frac{5}{12}$ तथा $\left(\frac{-3}{-7}\right)$

हल : (i) $\frac{4}{5}\times\frac{11}{2} = \frac{4\times 11}{5\times 2} = \frac{2\times 2\times 11}{5\times 2} = \frac{22}{5}$

(ii) $\frac{7}{8}\times -\frac{6}{15} = \frac{7\times(-6)}{8\times 15} = \frac{7\times(-3)\times 2}{2\times 4\times 3\times 5} = \frac{7\times(-1)}{4\times 5} = -\frac{7}{20}$

(iii) $\frac{5}{12}\times\left(\frac{-3}{-7}\right) = \frac{5\times(-3)}{12\times(-7)}$

$$= \frac{5\times(-3)}{3\times 4\times(-7)} = \frac{5\times(-1)}{4\times(-7)} = \frac{5}{28} = \frac{5}{28}.$$

परिमेय संख्याओं का भाग

परिमेय संख्याओं का भाग उसके विलोम के गुणनफल के समान होता है।

नोट : $\frac{a}{b}$ का गुणा विलोम $\frac{b}{a}$ है, $-\frac{a}{b}$ का गुणा विलोम $-\frac{b}{a}$

मानलो $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ है; जहाँ $b\neq 0$ तथा $d\neq 0$.

$$\therefore \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

उदाहरण 25 : निम्नलिखित को सरल कीजिए।

(i) $\frac{4}{5} \div \frac{6}{11}$ (ii) $\frac{51}{111} \div \frac{34}{37}$

हल: $\frac{4}{5} \div \frac{6}{11} = \frac{4}{5} \times \frac{11}{6}$ [$\frac{6}{11}$ का गुणा विलोम $\frac{11}{6}$ है]

÷ को × में परिवर्तित कीजिए तथा दूसरी परिमेय संख्या का गुणा विलोम

$$= \frac{4\times11}{5\times6} = \frac{2\times2\times11}{5\times2\times3} = \frac{2\times11}{5\times3} = \frac{22}{15}$$

(ii) $\frac{51}{111} \div \frac{34}{37}$

हल : $\frac{51}{111} \times \frac{37}{34}$ $\left(\frac{34}{37}\right.$ का गुणा विलोम $\left.\frac{37}{34}\right)$ है

$$= \frac{51\times37}{111\times34} = \frac{17\times3\times37}{37\times3\times17\times2} = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 26 : सरल कीजिए। (i) $5 \div 5\frac{2}{3}$ (ii) $4 \div \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{7}{8} \div 5$

हल : $5 \div 5\frac{2}{3}$

$5 \div \frac{17}{3}$ $5\frac{2}{3} = \frac{5\times3+2}{3} = \frac{17}{3}$

$= \frac{5}{1} \times \frac{3}{17}$ $\frac{17}{3}$ का गुणा विलोम $\frac{3}{17}$ है।

$= \frac{15}{17}$

(ii) $4 \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{1} = 8$

(iii) $\frac{7}{8} \div 5 = \frac{7}{8} \div \frac{5}{1} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{40}.$

अपनी प्रगति जाँचिए।

1. सरल कीजिए

(i) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}$ (ii) $\frac{8}{15} - \frac{2}{15}$ (iii) $\frac{3}{5} - \left(-\frac{8}{5}\right)$

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को जोडिए :

(i) $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{8}{11}$ (iii) $\frac{7}{6}, \frac{11}{12}$

3. घटाइए।

(i) $\frac{8}{9}$ में से $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{9}{14}$ में से $-\frac{8}{3}$

4. सरल कीजिए।

(i) $4\times\frac{3}{2}$ (ii) $5\times2\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{5}{6}\times\frac{7}{11}$ (iv) $\frac{18}{35}\times\frac{7}{108}$

5. निम्नलिखित भिन्नों के गुणा विलोम लिखिए।

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $-\frac{13}{7}$

6. निम्नलिखित को हल कीजिए:

(i) $18\div\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{7}\div\frac{8}{15}$ (iii) $3\div2\frac{1}{7}$

अभ्यास

1. निम्नलिखित को हल कीजिए:

(i) $(-7) + 10 + (-12) + 6$ (ii) $(-3) - (9) + (-9)$

(iii) $(-230) - (-70) + 175 - 30$ (iv) $(-675) + (-130)-(-180) + 200$

2. निम्नलिखित को सरल कीजिए:

(i) $(-3)\times(-10)\times(-2)\times5$ (ii) $(-100)\times(-1)\times0\times3$

(iii) $(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)\times(-1)$ (iv) $(-1)\times(-10)\times(-1)\times(-10)$

(v) $0\div20$ (vi) $(-56)\div(-7)$

(vii) $-625\div5$

3. सरल कीजिए:

(i) $20\times[10-(-5)]$ (ii) $25\times(-10)\times(21\div(-3))$

4. निम्नलिखित को सरल कीजिए:

(i) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{7}{13}-\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{6}{7}+\frac{5}{9}$ (iv) $-\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$

(v) $\frac{5}{7}-\frac{4}{6}$ (vi) $\frac{5}{13}-\frac{2}{4}$

5. निम्नलिखित को हल कीजिए:

(i) $8\times\frac{5}{2}$ (ii) $5\times3\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{5}\times\frac{4}{13}$ (iv) $\frac{21}{35}\times\frac{7}{66}$

सारांश

- N (प्राकृतिक संख्याएँ) : N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }
- W (पूर्ण संख्याएँ) : W = {0, 1, 2, 3, 4, ... }
- प्राकृतिक संख्याओं के योग तथा गुणा के गुण धर्म

  'O' को योग तत्समक कहते है।

  a का योग विलोम $-a$ तथा परस्पर $-a$ का योग विलोम a होता है।

  a का गुणन विलोम $\frac{1}{a}$ तथा क्रमशः $(a \neq 0)$.
- (i) $0 \times$ कोई भी संख्या $= 0$ (ii) $\frac{0}{\text{कोई भी संख्या}} = 0$

  (iii) $\frac{\text{कोई भी संख्या}}{0}$ परिभाषित नहीं है। (iv) $\frac{0}{0}$ भी परिभाषित नहीं है।
- Z(पूर्णांक) : .... {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ....}

  डेबिट तथा 0^0C से कम तापमान को दर्शाने के लिए हम ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग करते है।

  पूर्णांको पर चारों मूलभूत संक्रियाओं को हल कर सकते है।
- गुणक, गुणनखण्ड, सम तथा विषम संख्याएँ, रूढी तथा संयुक्त संख्याएँ वर्ग तथा घन संख्याएँ, सही संख्याएँ, सापेक्षित रूढी सेख्याएँ तथा BODMAS नियम के बारे में जानकारी प्राप्त की है।
- संख्याएँ जो $\frac{p}{q}$, के रूप में $(q \neq 0$, तथा p, q पूर्णांक) हो तो उन्हें परिमेय संख्याएँ कहते है और उसे Q से सूचित किया जाता है।
- यदि q एक धनात्मक संख्या तथा p तथा q सापेक्षिक रूढी संख्या हो तो उन्हें मानक या परिमेय का संक्षिप्त रूप कहते है।
- परिमेय संख्याओं को समान संख्याओं से गुणा या भाग कर सम परिमेय संख्या प्राप्त कर सकते है।
- परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर दर्शाएँगे।
- परिमेय संख्याओं से मूलभूत संक्रियाएँ हल कर सकते है।

अध्याय
1.2

परिमेय संख्याएँ - अपरिमेय संख्याएँ

1.2.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की अंत तक आप कर सकेंगे:

- किसी भी दो परिमेय संख्याओं के मध्य वाली परिमेय संख्याएँ लिख सकेंगे।
- दी गई संख्याओं के ल.स.गु. (LCM) तथा म.स.भा. (HCF) ज्ञात कीजिए।
- परिमेय संख्याओं को आवर्त तथा अनावर्त दशमलव में दर्शाएँगे।
- परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के उदाहरण देंगे।
- अपरिमेय संख्या के कुछ गुण समझाइए।
- वास्तविक संख्याओं की धारण को समझेंगे।

1.2.1 प्रस्तावना

सभ्यता के इतिहास में संख्याओं की निर्मिती एक बड़ा आविष्कार है। मानलो यदि संख्याएँ न हो तो कुछ प्रश्नों के हमें उत्तर ही नहीं प्राप्त होंगे जैसे ''कितने''? संख्याओं के बिना कुछ प्रश्नों के उत्तर देने में उलझन पैदा हो सकती है। संख्याओं के अन्वेषण जैसे शून्य तथा सभी संख्याओं की जोडियों ने कुछ प्रश्नों के उत्तर में सरलता प्रदान की है, जैसे की

(i) टोकरी में कितने संतरे है?
(ii) अमरनाथ यात्रा के समय कश्मीर के पहलगाँव का तापमान कितना था?
(iii) घर से आफिस जाने के लिए आपको कितना समय लगेगा?
(iv) खेत में कितने बोरी अनाज की फसल प्राप्त हुई ?

ऐसी स्थितियों और दूसरी परिस्थितियों में संख्याओं का ज्ञान तथा उनके संक्रियाओं का मेल होता है।

$\frac{4}{2}$ का मूल्य 2 यह एक परिमेय संख्या है $\frac{4}{5} = 0.8$ यह भी परिमेय संख्या है जो दशमलव में है। $\frac{4}{3}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए? यहाँ हमें उसका मूल्य 1.333 ... प्राप्त होता है जिसे हम $1.\overline{3}$ के रूप में दर्शाता है आपने $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$.... आदि को देखा ही होगा।

इन संख्याओं को क्या कहते है? इस पाठ में हम परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के बारे में चर्चा करेंगे।

दो परिमेय संख्याओं के बीच वाली परिमेय संख्याएँ

क्या 1 और 2 के बीच कोई प्राकृतिक संख्या पाई जाती है ?

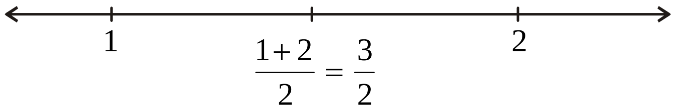
क्या 1 और 2 के बीच कोई पूर्ण संख्या पाई जाती है??

क्या 1 और 2 के बीच कोई पूर्णांक संख्या पाई जाती है?

नहीं किसी भी दो एक के बाद एक आने वाले पूर्णांको के बीच कोई भी पूर्णांक नहीं होता है।

चलिए अब हम 1 तथा 2 के बीच आने वाली परिमेय संख्याओं को लिखेंगे।

यदि 'a' और 'b' दो परिमेय संख्याएँ हो तो $\frac{a+b}{2}$ उनके बीच पाई जाने वाली परिमेय संख्या होगी अर्थात् $\frac{1}{2}(a+b)$



$$1 < \frac{3}{2} < 2$$

अब हम 1 तथा $\frac{3}{2}$ के बीच वाले परिमेय संख्याओं को ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

अर्थात्., $\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1\times 2+1\times 3}{1\times 2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2+3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}\right] = \frac{5}{4}$$

$$1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < 2.$$

उसी प्रकार $\frac{3}{2}$ तथा 2 के बीच वाली परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\times 1+2\times 2}{2\times 1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3+4}{2}\right] = \frac{7}{4}$$

$$1 < \frac{3}{4} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < 2.$$

इसी प्रकार हम किसी भी दो परिमेय संख्याओं के बीच वाली संख्याओं को ज्ञात करेंगे।

वैकल्पिक विधि:

परिमेय संख्याओं के समान मूल्यों वाली धारणा से किसी भी दो परिमेय संख्याओं के बीच वाली परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण 1 : $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{2}{3}$ के बीच वाले 9 परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6};$

यहाँ परिमेय संख्याओं के हर समान है।

अब हम जितने चाहे उतने परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते है।

$$\frac{3}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{60}; \qquad \frac{4}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{60}$$

$\frac{30}{60}$ तथा $\frac{40}{60}$ के बीच वाले परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

$$\frac{31}{60}, \frac{32}{60}, \frac{33}{60}, \frac{34}{60}, \frac{35}{60}, \frac{36}{60}, \frac{37}{60}, \frac{38}{60}, \frac{39}{60}.$$

उदाहरण 2 : $-\frac{7}{8}$ तथा $-\frac{2}{3}$ के मध्य 12 परिमेय संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल: $-\frac{7}{8} = -\frac{7}{8} \times \frac{3}{3} = \frac{-21}{24}$

$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \times \frac{8}{8} = \frac{-16}{24}$

यहाँ परिमेय संख्याओं के हर समान है। परंतु हम यहाँ $\frac{-21}{24}$ तथा $\frac{-16}{24}$ के मध्य परिमेय संख्याओं को ज्ञात नहीं कर सकते है।

ऊपरी परिमेय संख्याओं के सम परिमेय संख्याएँ लिखेंगे।

$\frac{-21}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{-63}{72}$

$\frac{-16}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{-48}{72}$

अब, $-\frac{7}{8}$ तथा $-\frac{2}{3}$ के बीच 12 परिमेय संख्याएँ

$$-\frac{62}{72}, -\frac{61}{72}, -\frac{60}{72}, -\frac{59}{72}, -\frac{58}{72}, -\frac{57}{72}, -\frac{56}{72}, -\frac{55}{72}, -\frac{54}{72}, -\frac{53}{72}, -\frac{52}{72}, -\frac{51}{72}, -\frac{50}{72}, -\frac{49}{72}$$

अपनी प्रगति जाँचिए।

1. दी गई परिमेय संख्याओं के बीच वाली परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
   (i) $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ तथा $\frac{1}{8}$
2. $\frac{2}{7}$ तथा $\frac{4}{9}$ के बीच वाली 9 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. $-\frac{3}{5}$ तथा $\frac{4}{11}$ के बीच वाली 10 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

1.2.2 अंक गणित का मूलभूत प्रमेय

प्रत्येक संयुक्त संख्या को उसने रूढी गुणनखण्ड के गुणा के रूप में दर्शा सकते है यह गुणनखण्ड एकदम दूसरे गुणनखण्डो के क्रम से अलग होते है।

सामान्य तथा यदि दी गई संयुक्त संख्या x है, हम उनके गुणनखण्ड $x = p_1 p_2 p_3 .... p_n$ जहाँ $p_1\ p_2 .... p_n$ रूढी संक्याएँ है और उन्हें आरोही क्रम अर्थात्., $p_1 \leq p_2 \leq .... \leq p_n$ में लिखेंगे। यदि हम समान रूढी संख्याओं को संलग्न करेंगे तो हमें रूढियों के घातांक प्राप्त होंगे जब हम यह निर्णय लेंगे कि खण्ड आरोही क्रम में लिखेंगे वह एक अद्‌वितीय गुणनखण्ड होगा।

उदाहरण 3 : 210 के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल: आपको केवल रूढी संख्याएँ ही लेंगे

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{210} \\ 3 & \underline{105} \\ 5 & \underline{35} \\ 7 & \underline{7} \\ & 1 \end{array}$$

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

इसी प्रकार सभी संयुक्त संख्याओं को रूढी गुणनखण्ड के रूप में लिख सकते है।

नोट: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... रूढी संख्याएँ।

उदाहरण 4 : 2310 के रूढी गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2310 \\ \hline 3 & 1155 \\ \hline 5 & 385 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline 11 & 11 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore\ 2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

संख्याओं का म.स.भा तथा ल.स.गु रूढी गुणनखण्ड से ज्ञात करना

म.स.भा (HCF) : महत्तम समापवर्त्य भाजक

ल.स.गु (LCM) : लघुत्तम समापवर्त्य गुणक2

म.स.भा: दो या दो से अधिक संख्याओं के सबसे बड़े भाजक को म.स.भा. कहते है।

ल.स.गु : सबसे छोटी संख्या जो दी गई संख्याओं से विभाजित होती हो तो उसे ल.स.गु कहते है।

उदाहरण 5 : 6 तथा 20 का रूढी गुणनखण्ड से ल.स.गु तथा म.स.भा ज्ञात कीजिए।

हल: $6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \mathbf{6} \\ \hline 3 & \mathbf{3} \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & \mathbf{20} \\ \hline 2 & \mathbf{10} \\ \hline 5 & \mathbf{5} \\ \hline & 1 \end{array}$$

[6, 20] का म.स.भा = सबसे कम घातांक वाले रूढी गुणनखण्डों का गुणनफल

$= 2^1$ (यहाँ 2^1 सबसे कम घातांक वाला उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है)

$= 2$

(6, 20) का ल.स.गु. = सबसे बड़े घातांक वाले रूढी गुणनखण्डो का गुणनफल

$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ (यहाँ आपको सभी गुणनखण्डों को लेना है सिर्फ उभयनिष्ठ के अलावा)

$= 4 \times 3 \times 5$

$= 60.$

निरीक्षण दी गई संख्याओं का गुणनफल $= 6 \times 20 = 120$

म.स.भा तथा ल.स.गु का गुणनफल $= 2 \times 60 = 120$.

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि

$[a, b]$ का म.स.भा. $\times$ (a, b) का ल.स.गु. $= a \times b$

उदाहरण 6 : 96 तथा 404 का म.स.भा रूढी गुणनखण्ड पद्धति से ज्ञात कर ल.स.गु ज्ञात कीजिए।

हल: 96 तथा 404 का रूढी गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|l} 2 & 96 \\ \hline 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2 & 404 \\ \hline 2 & 202 \\ \hline & 101 \\ \hline \end{array}$$

$96 = 2\times2\times2\times2\times2\times3 = 2^5 \times 3$

$404 = 2\times2\times101 = 2^2 \times 101$

$[96, 404]$ का म.स.भा $= 2^2 = 4$

हम जानते है कि

$[a, b]$ का म.स.भा $\times$ (a, b) का ल.स.गु $= a \times b$

$$\therefore \text{ ल.स.गु } (a, b) = \frac{a\times b}{\text{HCF}[a,b]} = \frac{96\times404}{4}$$

$$= \frac{4\times14\times404}{4}$$

$$= 14 \times 404$$

$$= 5656$$

उदाहरण 7 : 12, 54, 90 का म.स.भा तथा ल.स.गु को रूढी गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

हल: हमारे पास 12, 54, 90 है

$$\begin{array}{r|l c r|l c r|l}
2 & 12 & \quad & 2 & 54 & \quad & 2 & 90 \\
2 & 6 & & 3 & 27 & & 3 & 45 \\
3 & 3 & & 3 & 9 & & 3 & 15 \\
 & 1 & & 3 & 3 & & 5 & 5 \\
 & & & & 1 & & & 1
\end{array}$$

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^3$

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5$

यहाँ 2^1 और 3^1 सबसे कम घातांक वाले उभयनिष्ठ गुणन खण्ड 2 तथा 3 है।

12, 54, 90 का म.स.भा $= 2^1 \times 3^1 = 6$

यहाँ $2^2, 3^3, 5^1$ सबसे अधिक घातांक वाले उभयनिष्ठ गुणन खण्ड 2, 3 और 5 है।

12, 54 और 90 का ल.स.गु $= 2^2 \times 3^3 \times 5^1$

$= 4 \times 27 \times 5$

$= 20 \times 27$

$= 540.$

अपनी प्रगति जाँचिए।

1. निम्नलिखित प्रत्येक संख्या को उसके रूढी गुणनखण्ड के गुणनफल के रूप में लिखिए।
   (i) 256 (ii) 3825 (iii) 7429
2. रूढी गुणनखण्ड विधि से ल.स.गु तथा म.स.भा ज्ञात कीजिए।
   (i) 12, 15 और 21 (ii) 72 और 108
   (iii) 306 और 657 (iv) 84 और 180
3. $7 \times 11 \times 13 + 17$ और $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ संयुक्त संख्याएँ है क्यों समझाइए।
4. 42 तथा 98 का ल.स.गु ज्ञात कर तत्पश्चात म.स.भा ज्ञात कीजिए।

1.2.3 परिमेय संख्याओं का दशमलव रूप में प्रदर्शन

I. दशमलव भिन्न: ऐसे भिन्न जिनके 10 या 10 के घातांक हो उन्हे दशमलव भिन्न कहते है।

उदा : $\frac{3}{10}, \frac{45}{100}, \frac{156}{1000}, ...$

$\frac{3}{10}$ = 3 दशांश = 0.3

$\frac{45}{100}$ = 45 शतांश = 0.45

$\frac{156}{1000}$ = 156 सहस्रांश = 0.156

II. दशमलव का अशिष्ट भिन्नो में परिवर्तन

दशमलव बिंदु के नीचे हर में '1' लगाइए दशमलव के बाद वाले जितने स्थान है उतने शून्य लगाइए।

अब दशमलव को हटाइए और उस संख्या को अंश में लिखिए तथा उस भिन्न को संक्षिप्त में लिखिए।

अब $0.37 = \frac{37}{100}$

$1.235 = \frac{1235}{1000} = \frac{247}{200}$

चलिए, आवर्त तथा अनावर्त दशमलव के बारे जानेंगे।

आवर्त तथा अनावर्त दशमलव

हम जानते है कि परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में होती हैं जहाँ $q \neq 0$ यदि $q = 2^m \times 5^n$ यहाँ m, n अऋणात्मक पूर्णांक होंगे। q का गुणनखण्ड या तो 2 या 5 या दोनो होंगे तो उस परिमेय संख्या का आवर्त दशमलव होगा। यदि नहीं तो वह अनावर्त दशमलव होगा।

उदाहरण 8 : $\frac{11}{20}$ आवर्त दशमलव है या नहीं जाँच कीजिए।

हल: यहाँ हर की संख्या 20 है

$20 = 2 \times 2 \times 5.$

यदि हर में केवल 2 या 5 खण्ड है

$\therefore$ यह आवर्त दशमलव है.

जाँच: इसे हम भाग द्वारा जाँच करेंगे।

$\frac{11}{20} = 0.55$

```
20) 11  (0.55
     0
   ----
    110
    100
   ----
     100
     100
   ----
      0
```

यहाँ शेष शून्य है।

$\therefore$ यह आवर्त दशमलव है।

उदाहरण 9 : $\frac{128}{70}$ को दशमलव में लिखकर यह आवर्त है या नहीं जाँच कीजिए?

चरण 1 : अंश को हर से भाग कीजिए $\frac{128}{70} = \frac{2 \times 64}{2 \times 35} = \frac{64}{35}$ (संक्षिप्त रूप)

चरण 2 : हर को रूढी गुणनखण्डो के रूप में $2^m 5^n$ लिखिए।

$\therefore$ यह $2^m \times 5^n$ के रूप में नहीं है।

इसलिए यह आवर्त दशमलव नहीं है।

चरण 3 : शेष जब तक बचता है तब तक उसका भाग कीजिए।.

$29 < 35.$

चरण 4 : भागफल के अंत में दशमलव बिंदु लगाइए।

चरण 5 : दशमलव के दायीं ओर शून्य लगाइए उसी प्रकार शेष के दायीं ओर भी फिर से उसे पूर्ण संख्याएँ के अनुसार भाग दीजिए।

चरण 6 : 5 वे चरण को शेष शून्य प्राप्त होने तक दोहराइए।

यहाँ दशमलव भिन्न शुरू ...

$\frac{64}{35} = 1.8285714285714 \ldots$

यहाँ 285714 आवर्त.

सामान्यत यह $\frac{64}{35} = 1.8\overline{285714}$ लिखते है।

इसे इस प्रकार पढ़ते है। दशमलव आठ आवर्त दो आठ पाँच सात एक चार।

इसे अनावर्त दशमलव कहते है।

नोट: यदि हर $2^m.5^n$ के रूप में न हो तो उसे अनावर्त दशमलव कहते है।

35)64.0000000... (1.8285714
35
290
280
$\leftarrow$100
70
300
280
200
175
250
245
50
35
150
140
दोहराना शुरू $\leftarrow$10

उदाहरण 10 : निम्न परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखकर कौनसे आवर्त और अनावर्त दशमलव है।

(i) $\frac{11}{60}$ (ii) $\frac{3}{75}$

हल: (i) $\frac{11}{60}$

$$\begin{array}{l} 60)\,11\;(0.1833 \\ \quad\;\; 0 \\ \hline \quad 110 \\ \quad\;\; 60 \\ \hline \quad\;\; 500 \\ \quad\;\; 480 \\ \hline \qquad\; 200 \\ \qquad\; 180 \\ \hline \qquad\;\; 20 \end{array}$$

$\frac{11}{60} = 0.18\overline{3}$, एक अनावर्त दशमलव है।

(ii) $\frac{3}{75} = \frac{3}{3\times5\times5} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25}$ (संक्षिप्त रूप)

$$\begin{array}{l} 25)\;1\;(0.04 \\ \qquad 0 \\ \hline \qquad 10 \\ \qquad\; 0 \\ \hline \qquad 100 \\ \qquad 100 \\ \hline \qquad\;\; 0 \end{array}$$

$\frac{1}{25} = 0.04$, एक आवर्त दशमलव है।

उदाहरण 11 : बिना भाग दिए दि गई संख्याएँ आवर्ती है या अनावर्ती है बताइए।

(i) $\frac{51}{170}$ (ii) $\frac{77}{210}$ (iii) $\frac{129}{2^3.3^1.5^2}$

हल: (i) $\frac{51}{170} = \frac{17\times3}{17\times10} = \frac{3}{10} = \frac{3}{2\times5}$ आवर्ती दशमलव है।

(ii) $\frac{77}{210} = \frac{7\times11}{7\times2\times3\times5} = \frac{11}{2\times3\times5}$ (संक्षिप्त रूप)

परिमेय संख्याओं को संक्षिप्त रूप में लिखने के बाद हर को देखिए यहाँ हर में '3' है।

$\therefore \dfrac{77}{210}$ एक अनावर्त दशमलव है।

(iii) $\dfrac{129}{2^3.3^1.5^2} = \dfrac{3 \times 43}{2^3\,.\,3.5^2} = \dfrac{43}{2^3.5^2}$

$\therefore$ यह आवर्ती दशमलव है।

उदाहरण 12 : बिना भाग किए दशमलव विस्तार लिखिए।

(i) $\dfrac{7218}{3^2.5^2}$ (ii) $\dfrac{9}{80}$

चरण 1 : सबसे पहले दी गई परिमेय संख्या को संक्षिप्त में लिखिए।

चरण 2 : हर को देखिए उसे $2^m \times 5^n$ के रूप में परिवर्तित कीजिए जो 10^n के समान होगा।

चरण 3 : उसे दशमलव रूप में लिखिए।

हल:

(i) $\dfrac{7218}{3^2.5^2}$

$$\begin{aligned}\frac{7218}{3^2.5^2} &= \frac{2 \times 3^2 \times 401}{3^2.5^2} \\ &= \frac{2 \times 401}{5^2} \\ &= \frac{802}{5^2} \\ &= \frac{802}{5^2} \times \frac{2^2}{2^2} \\ &= \frac{802 \times 4}{(5 \times 2)^2} \\ &= \frac{3208}{(10)^2} \\ &= \frac{3208}{100} \\ &= 32.08\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{7218} \\ 3 & \underline{3609} \\ 3 & \underline{1203} \\ 401 & \underline{401} \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 7218 &= 2 \times 3 \times 3 \times 401 \\ &= 2 \times 3^2 \times 401 \end{aligned}$$

(ii) $\frac{9}{80}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 80 \\ 2 & 40 \\ 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$= 2^4 \times 5$

$$\frac{9}{80} = \frac{9}{2^4 \times 5}$$

$$= \frac{9}{2^4 \times 5} \times \frac{5^3}{5^3}$$

$$= \frac{9 \times 125}{2^4 \times 5^4} = \frac{1125}{10^4} = 0.1125.$$

अनावर्ती पुनरवार्ती दशमलव

शुद्ध पुनरावर्ती दशमलव: दशमलव भिन्न जिसमें दशमलव के बाद वाली सभी संख्याएँ दोहराई जाती है उसे शुद्ध पुनरावर्ती दशमलव कहते है।

उदा : $0.\bar{5}, 0.\overline{27}, 0.\overline{675}, ...$ आदि।

शुद्ध पुनरार्ती दशमलव का अशिष्ट भिन्नों में परिवर्तन

चरण 1 : दोहराए गए अंक को अंश में केवल एक बार लिखिए।

चरण 2 : अंश में दोहराए गए अंको के समान 9 हर में लिखिए।

उदा: (i) $0.\bar{3} = \frac{3}{9}$

(ii) $0.\overline{49} = \frac{49}{99}$

(iii) $0.\overline{05067} = \frac{05067}{99999} = \frac{5067}{99999}$

मिश्रित पुनरावर्ती दशमलव: ऐसे दशमलव भिन्न जिसमें कुछ अंक दोहराए नहीं जाते लेकिन कुछ अंक दोहराए जाते है उन्हें मिश्रित पुनरावर्ती दशमलव कहते है।

उदा : $0.25777... = 0.25\bar{7}$

मिश्रित पुनरावर्ती दशमलव का अशिष्ट भिन्नो में परिवर्तन

यदि दीया गया दशमलव इस प्रकार है-

(i) $0.x\overline{yz} = \frac{xyz - x}{990}$

(ii) $x.y\overline{zd} = \frac{xyzd - xy}{990}$

(iii) $xy.z\overline{dab} = \dfrac{xyzdab - xyz}{9990}$

उदा: $1.5\overline{23} = \dfrac{1523-15}{990} = \dfrac{1508}{990} = \dfrac{754}{495}$

$0.22\overline{79} = \dfrac{2279-22}{9900} = \dfrac{2257}{9900}$

अनावर्ती, अपुनरावर्ती दशमलव

निम्नलिखित दशमलव को देखिए।

(i) 0.0234567891011 ....

(ii) 4.56777888899999 .....

हाँ ये संख्याएँ न तो आवर्ती है न ही पुनरावर्ती इन्हें अनावर्ती अपुनरावर्ती दशमलव कहते है।

हम ऊपर वाली संख्याओं को $\dfrac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिख सकते

इसलिए, हम यह निष्कर्ष निकलते है कि दशमलव विस्तार जो अनावर्ती तथा अपुनरावर्ती है इन्हें अपरिमेय संख्याएँ कहते है।

अपर्याप्त परिमेय संख्याएँ

समीकरण को हल कीजिए (i) $x^2 = 4$ (ii) $x^2 = 2$

समीकरण के लिए (i) $x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \underline{+}\, 2$ परिमेय संख्या

समीकरण (ii) के लिए $x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ यह परिमेय संख्या नहीं है।

इसलिए हमें परिमेय संख्याओं के अलावा दूसरे संख्याओं की आवश्यकता है।

नोट: यदि 'n' एक प्राकृतिक संख्या है जो पूर्ण वर्ग $\sqrt{n}$ के अलावा दूसरी अपरिमेय संख्या है।

$\sqrt{2}$ का मूल्य विभाजन विधि से ज्ञात कीजिए।

चरण 1 : एक अंक को छोडकर दूसरे के बाद कॉमा लगाइए। दायें से बायीं हो पूर्ण भाग तथा दशमलव भाग को अलग-अलग

चरण 2 : पहले बायीं ओर वाली संख्या को लीजिए।

चरण 3 : ऐसी पूर्ण वर्ग संख्या लीजिए। जो 2 के समीप है। यहाँ $1 \times 1 = 1$

चरण 4 : विभाजन की प्रक्रिया पूर्ण कीजिए।

चरण 5 : अगली बिंदुओं तक की अंको को नीचे लिखिए।

1	2.00,00,00,00,00 ...	1.41421
	1.......................	
24	100	
	96	
281	400	
	281	
2824	11900	
	11296	
28282	60400	
	56564	
282841	383600	
	282841	
	100759	

चरण 6 : पहले वाले भाजक को दुगुना कर अगले चरण में लिखिए। यहाँ $1 \times 2 = 2$

चरण 7 : अब आपको लिखकर जाँच करनी होगी। भाजक तथा भागफल में समान संख्याएँ होनी चाहिए और जो विभाजन को संतृप्त करता हो।

$2\boxed{1} \times \boxed{1} = 21$ 100 से बहुत छोटी तथा शेष भाजक से बड़ा होगा।

$2\boxed{2} \times \boxed{2} = 44$ 100 से बहुत छोटी तथा शेष भाजक से बड़ा होगा।

$2\boxed{3} \times \boxed{3} = 69$ 100 से बहुत छोटी तथा शेष भाजक से बड़ा होगा।

$2\boxed{4} \times \boxed{4} = 96$ 100 से छोटी संख्या (जिसे ले सकते है)

चरण 8 : ऊपरी प्रक्रिया को जारी रखिए। यहाँ हमने देखा कि $\sqrt{2} = 1.41421$ .....

यह एक अपरिमेय संख्या जो अपुनरावर्ती दशमलव भी है। यह एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमेय 1 : मानलो p एक रूढी संख्या है यदि p विभाजित करता है a^2 p विभाजित करता है a को।

अर्थात्, यदि $\frac{a^2}{p}$ हो तो $\frac{a}{p}$

उदा : $a = 4; \quad p = 2$

$$\frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

अब, हमें जाँच करनी है कि $\frac{4}{2} = 2$ (2 विभाजित करता है 4 को)

उदाहरण 13 : $\sqrt{3}$ अपरिमेय है सिद्ध कीजिए।

हल : मानलो $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ($a, b \in Z, b \neq 0,\ a, b$ सह रूढी संख्याएँ है।)

$\sqrt{3}b = a$

दोनों ओर वर्ग लेने पर

$3b^2 = a^2$

$\therefore \frac{3}{a^2} = b^2$

प्रमेय अनुसार, $\frac{3}{a}$ ...(1)

$\therefore \quad a = 3c,$ किसी भी c के मूल्य

दोनों ओर वर्ग लेने पर

$a^2 = (3c)^2$

$a^2 = 9c^2$

लेकिन $a^2 = 3b^2$

$\therefore \quad 3b^2 = 9c^2$

$b^2 = \frac{9}{3}\ c^2$

$b^2 = 3c^2$

$\therefore \frac{b^2}{3} = c^2$

प्रमेय के अनुसार

$\frac{3}{b}$ ...(2)

(1) और (2) से यह निष्कर्ष निकलता है।

3 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है a और b का

लेकिन यह a तथा b के सह रूढी का व्युत्क्रम तथ्य है

$\therefore$ हमारा मानना गलत है।

अर्थात् $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

नोट 1 : परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का योग तथा अंतर भी अपरिमेय संख्या है।

नोट 2 : अशून्य परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का गुणनफल तथा भागफल भी अपरिमेय ही होगा।

उदाहरण : $5+\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $4-\sqrt{5}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$ अपरिमेय संख्याएँ है।

वास्तविक संख्याएँ (R)

सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का समूह इन संख्या का मेल एक नए संग्रह का निर्माण वास्तविक संख्या कहलाता है। इसे R द्वारा सूचित किया जाता है। संख्या रेखा पर प्रत्येक बिंदू एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को प्रदर्शित करता है।

अपनी प्रगति जाँचिए।

1. दी गई दशमलव संख्या को $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) 0.275 (ii) 0.0125 (iii) 32.25

2. दी गई परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए।

   (i) $\frac{2}{25}$ (ii) $\frac{41}{90}$ (iii) $\frac{18}{125}$ (iv) $\frac{5}{11}$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव लिखिए और उसे बताइए आवर्ती है या अनावर्ती।

   (i) $\frac{5}{16}$ (ii) $\frac{343}{400}$ (iii) $\frac{216}{600}$ (iv) $\frac{3}{7}$

4. बिना विभाजन किए बताइए दी गई परिमेय संख्या आवर्ती दशमलव है या अनावर्ती दशमलव बताइए।

   (i) $\frac{27}{625}$ (ii) $\frac{91}{1300}$ (iii) $\frac{441}{2^3.5^2.7^2}$ (iv) $\frac{21}{24}$

5. बिना विभाजन किए दशमलव विस्तार लिखिए।

   (i) $\frac{41}{25}$ (ii) $\frac{56}{2^3.5}$ (iii) $\frac{143}{110}$

6. कोई भी चार अपरिमेय संख्याएँ लिखकर उन्हें दशमलव रूप में लिखिए।

7. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{256}$ (iii) $0.\overline{2375}$

8. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) $15.7\overline{25}$ (ii) $1.37\overline{5}$ (iii) $20.00\overline{11}$ (iv) $3.\overline{42}$

अभ्यास

1. रूढी गुणनखण्ड विधि से ल.स.गु. तथा म.स.भा ज्ञात कीजिए।

(i) 8, 24, 56 (ii) 108 and 144

(iii) 5, 50, 625 (iv) 72 and 180

2. दिए गए दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए।

(i) 0.675 (ii) 0.018 (iii) 2.375

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{14}{25}$ (ii) $\frac{22}{7}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{52}{250}$

4. बिना विभाजन के दिए गए परिमेय संख्याएँ आवर्ती दशमलव है या अनावर्ती दशमलव है बताइए।

(i) $\frac{29}{125}$ (ii) $\frac{23}{150}$ (iii) $\frac{333}{2^3 5^3}$ (iv) $\frac{27}{2^4 5^4 7^2}$

5. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए।

(i) $0.\overline{7}$ (ii) $0.\overline{13}$ (iii) $0.\overline{435}$ (iv) $1.2\overline{3}$

(v) $12.\overline{23}$ (vi) $3.\overline{143}$

6. $5\sqrt{3}, 4\sqrt{6}, 3+\sqrt{7}$ अपरिमेय संख्याएँ है सिद्ध कीजिए।

सारांश

- किसी भी दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ होती है।
- परिमेय संख्याओं को उसके संक्षिप्त रूप में समान हर रूप में लिखकर तुलना कर सकते है।
- अंकगणित का मूलभूत प्रमेय बताता है प्रत्येक संयुक्त संख्या को रूढी गुणनखण्ड के रूप में अद्वितीय ढंग से लिख सकते है।

- रूढी गुणनखण्ड विधि से म.स.भा तथा ल.स.गु को ज्ञात करेंगे
- (a, b) का म.स.भा $\times$ (a, b) का ल.स.गु $= a \times b$
- यदि $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या जिसमें q के गुणनखण्ड $2^m \times 5^n$, के रूप में हो तो x का दशमलव विस्तार आवर्ती होगा यदि q के खण्ड $2^m \times 5^n$ के रूप में न हो तो x का दशमलव विस्तार अनावर्ती होगा।
- यदि P रूढी संख्या हो और a^2 को P विभाजित करता है जहाँ 'a' एक धनात्मक पूर्णांक हो तो a को भी P विभाजित करता है।
- परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के संग्रह को वास्तविक संख्या कहते है और R से दर्शाते है।

अध्याय 1.3

घात और घातांक

1.3.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की अंत तक आप कर सकेंगे:

- गुणा में दोहराई गई संख्या को घातांक के रूप में लिखेंगे।
- घातांक रूप में लिखि गई संख्या के आधार तथा घातांक को पहचानेंगे।
- प्राकृतिक संख्याओं को रूढी संख्याओं के घातांक के रूप में अद्वितीय रूप से दर्शायेंगे।
- घातांक के नियमों को बतायेंगे।
- a^0 तथा a^{-m} का अर्थ समझायेंगे।
- घातांक के नियमों के आधार पर प्रश्नों को हल करेंगे।
- घातांक वाले व्यंजकों को घातांक के नियमों की सहायता से हल करेंगे।

1.3.1 प्रस्तावना

मानलो आप अपने शहर में पौधे लगाना चाहते है आप उससे ज्यादा लगाना चाहते है आपने श्रृंखला बद्ध पौधारोपण की योजना बना रहे है।

आप एक पौधा लगाकर आगे तीन लोगों को पौधारोपण के बारे में बताइए उन्हे कहिए कि आगे तीन को सूचना दे।

यदि यह श्रृंखला इसी प्रकार आगे बढती है तो

10वें चरण तक कितने पौधों का रोपण किया जाएगा?

30वें चरण तक कितने पौधों का रोपण किया जाएगा?

आपकी सहुलियत के लिए आपके द्वारा रोपित पौधों को मत गिनिए।

चलिए अब हम पौधों को गिनेंगे?.

पहला चरण $\rightarrow$ 3 पौधे $=3$

दूसरा चरण $\rightarrow$ 9 पौधे $=3\times3$

तीसरा चरण $\rightarrow$ 27 पौधे $=3\times3\times3$

चौथा चरण $\rightarrow$ 81 पौधे $=3\times3\times3\times3$

उसी प्रकार दसवा चरण $\rightarrow 3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3 = 59049$

30 वें चरण तक सदस्यों की संख्या 3×3×3×… (30 बार) जो कि 205891132094649 पढने में तथा याद रखने में कठिनाई होती है।

ऐसी संख्याओं को आप कैसे बताएँगे?

उसी प्रकार, हम ऐसी घटनाओं को जीवन में देखते रहते है। हमने गुणा के बारे में पढ़ है आप निम्न लिखित को बड़ी सरलता से लिख सकते है।

4 × 4 × 4 = 64,

11 × 11 × 11 × 11 = 14641 और

2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 256

13 को 15 बार गुणा करने वाली स्थिति के बारे में सोचिए।

यह लिखने में कितनी कठिनाई होगी?

13 × 13 × 13 × .... 15 बार ?

ङर कठिनाई को दूर करने के लिए घातांक पद्धति का परिचय कराया गाय। हम वास्तविक संख्याओं को भी रूढी संख्याओं के गुणा के घातांक रूप में दर्शा सकते है।

1.3.2 घातांक सूचक घातांक का अर्थ

परिचय भाग में दिए गए उदाहरण को याद कीजिए।

चलिए अब हम पौधों की गिनती करें।

पहला चरण → 3 पौधे =3

दूसरा चरण → 9 पौध =3 × 3

तीसरा चरण → 27 पौध =3 × 3 × 3

चौथा चरण → 81 पौध =3 × 3 × 3 × 3

उसी प्रकार दसवें चरण में → 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 जिसका मूल्य 59049 होगा।

तीसवें चरण पर पौधों की संख्या 3 × 3 × 3 × … (30 बार) जो हमें 205891132094649 मूल्य प्रदान करता है जो याद रखने में और पढने में कठिन होता है।

गणित में इसे सरल बना दिया है

निम्न सूचकों को देखिए

3 × 3 को 3^2 के रूप में प्रदर्शित करते है (इसे तीन का वर्ग पढ़ते है।)

3 × 3 × 3 को 3^3 के रूप में प्रदर्शित करते है (इसे तीन का घन पढ़ते है।)

$3 \times 3 \times 3 \times 3$ को 3^4 के रूप में प्रदर्शित कर सकते है। (इस आधार 3 तथा घातांक 4 पढ़ते है)

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ को 3^5 के रूप में लिख सकते है।(इसे तीन का घातांक 5 पढ़ते है)

उसी प्रकार, $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ को 3^{10} के रूप में लिख सकते है।

तो $3 \times 3 \times 3 \times \ldots$ (30 बार) को कैसे लिखेंगे?

हाँ आपका अंदाजा सही है...

$3 \times 3 \times 3 \times \ldots$ (30 बार) को 3^{30} के रूप में लिखते है।

इसलिए गणित ने बड़ी संख्या को सरलता से लिखने का तरीका बताया है जैसे कि 205891132094649 को 3^{30} के रूप में।

जानने वाले पद

जब हमने देखा कि 3^5, 3 को ''आधार'' तथा 5 को घातांक कहते है। इसे 3 का घातांक 5 भी कहते है।

उपरोक्त से हम कह सकते है।

किसी भी संख्या को उसी से कई बार गुणा करने को घातांक रूप कहते है।

अर्थात् $5 \times 5 \times \ldots.$ 20 बार $= 5^{20}$ और $(-7) \times (-7) \times \ldots.$ 10 बार $= (-7)^{10}$

5^{20}, में आधार 5 तथा घातांक 20 है।

$(-7)^{10}$, में आधार -7 तथा घातांक 10 है।

उसी प्राकर, *घातांक को परिमेय संख्या को उसी से कई बार गुणा करने पर लिख सकते है।*

अर्थात्,

$\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^6$ (जब परिमेय संख्याएँ दोहराई जाती है उसे घातांक रूप में लिखने के लिए कोष्टक का उपयोग कर सकते है।

और $-\frac{3}{4}\times-\frac{3}{4}\times-\frac{3}{4}\times\ldots\ldots\ldots.(13\text{बार})=\left(-\frac{3}{4}\right)^{13}$

साधारणतया यदि a एक परिमेय संख्या हो तथा उसी से m बार गुणा किया जाय तो a^m लिखते है।

यहाँ, a को आधार तथा m को घातांक कहते है।

ऊपरी चर्चा को समझाने के लिए कुछ उदाहरण देखेंगे:

उदाहरण 1: निम्नलिखित को घातांक रूप में लिखिए:

(i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

(ii) $-\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times \ldots\ldots\ldots$ (50 बार)

हल: (i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^7$

(ii) $-\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times \ldots\ldots\ldots$ (50 बार) $= \left(-\frac{2}{5}\right)^{50}$

उदाहरण 2: निम्नलिखित को घातांक में लिखकर उसका आधार तथा घातांक भी बताइए।

(i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

(ii) $(-27) \times (-27) \times (-27) \times \ldots$ (100 बार)

हल: (i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^9$

आधार $= \frac{2}{3}$ तथा घातांक $= 9$

(ii) $(-27) \times (-27) \times (-27) \times \ldots$ (100 बार) $= (-27)^{100}$

आधार $= -27$ तथा घातांक $= 100$

उदाहरण 3: निम्नलिखित को हल कीजिए।

(i) $(2)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (iii) $(1)^{2019}$

हल: (i) $(2)^5$

$$\begin{aligned}(2)^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 4 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 8 \times 2 \times 2 \\ &= 16 \times 2 \\ &= 32\end{aligned}$$

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$

$$= \frac{9}{25} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{27}{125} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{81}{625}.$$

(iii) $(1)^{1947} = 1 \times 1 \times 1 \times \ldots..$ (1947 बार)

यहाँ $1 \times 1 = 1$

और $1 \times 1 \times 1 = 1$

उसी प्रकार, $1 \times 1 \times 1 \times \ldots..$ (1947 बार) $= 1$

यहाँ, $(1)^{1947} = 1$.

-1का घात :

निम्न को देखिए।

$(-1)^2 = -1 \times -1 = 1$

$(-1)^3 = -1 \times -1 \times -1 = -1$

$(-1)^4 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 = 1$

$(-1)^5 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

$(-1)^6 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = 1$

$(-1)^7 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

ऊपरी पद्धति में हमने देखा कि

$(-1)^n = 1$ यदि n सम संख्या हो

$(-1)^n = -1$ यदि n विषम संख्या हो

$(-1)^n = 1$; n सम हो

$= -1$; n विषम हो

संख्या की घातांक का विलोम

$\frac{2}{3}$ के विलोम को याद कीजिए $\frac{3}{2}$

4 का विलोम $\frac{1}{4}$

साधारणतया $\frac{p}{q}$ का विलोम $\frac{q}{p}$ होता है जहाँ $p, q \neq 0$.

उदाहरण 4: निम्नलिखित के विलोम लिखकर उनको घातांक रूप में दर्शाइए:

(i) 5^{20} (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

हल:

(i) हम जानते है कि 5 का विलोम $\frac{1}{5}$ होगा।

इसलिए 5^{20} का विलोम $\frac{1}{5^{20}}$ या इसे $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$ भी लिख सकते है।

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

हम जानते है कि $\frac{3}{4}$ is $\frac{4}{3}$

इसलिए $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ का विलोम $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ होगा

(iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

हम जानते है कि $-\frac{5}{6}$ का विलोम $-\frac{6}{5}$ होगा

इसलिए $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$ का विलोम $\left(-\frac{6}{5}\right)^9$ होगा।

1.3.3 संख्याओं को रूढी संख्याओं के गुणन के घातांक के रूप में दर्शाना

संख्याओं के रूढी गुणनखण्ड के घातांक

याद कीजिए किसी भी संयुक्त संख्या को रूढी गुणनखण्डों में लिख सकते है।

चलिए अब कुछ संयुक्त संख्याएँ लेंगे 16, 243 और 72.

(i) $16 = 2 \times 8$

$= 2 \times 2 \times 4$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

2	16
2	8
2	4
	2

(ii) $243 = 3 \times 81$

$= 3 \times 3 \times 27$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 9$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(iii) $72 = 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

चलिए हम अब इन्हें घातांक के रूप में लिखेंगे

(i) $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$16 = 2^4$

(ii) $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$243 = 3^5$

(iii) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$72 = 2^3 \times 3^2$

हमने देखा कि कोई भी 1 के अलावा कोई भी प्राकृतिक संख्या रूढी गुणनखण्डों के घातांक के रूप में अद्वितीय रूप से लिख सकते है।

अब कुछ उदाहरणों को देखेंगे।

उदाहरण 5: निम्नलिखित को घातांक रूप में लिखिए।

(i) 360 (ii) 5445 (iii) 24300

हल:

(i) $360 = 2 \times 180$

$= 2 \times 2 \times 90$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 45$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
	5

(ii) $5445 = 3 \times 1815$

$= 3 \times 3 \times 605$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 121$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 11$

$= 3^2 \times 5^1 \times 11^2$

3	5445
3	1815
5	605
11	121
	11

(iii) $24300 = 2 \times 12150$

$= 2 \times 2 \times 6075$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2025$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 675$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 225$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

अपनी प्रगति जाँचिए।

1. निम्नलिखित को घातांक रूप में लिखिए:

   (i) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$

   (ii) $\left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times \ldots\ldots$ 15 बार

   (iii) $\left(-\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right) \times \ldots\ldots$ 25 बार.

2. निम्न के आधार तथा घातांक लिखिए:

   (i) $(-3)^5$ (ii) $(7)^4$ (iii) $\left(-\frac{6}{5}\right)^9$

3. निम्नलिखित को हल कीजिए।

   (i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$ (iv) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

4. निम्नलिखित के विलोम को ज्ञात कीजिए:

   (i) 3^5 (ii) $(-7)^4$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{3}{11}\right)^{15}$

5. रूढी गुणनखण्डो के घातांक के रूप में लिखिए।

(i) 429 (ii) 648 (iii) 1512

6. निम्नलिखित को घातांक रूप में लिखिए।

(i) 729 (ii) 512 (iii) 2592 (iv) $\frac{1331}{4096}$

(v) $-\frac{243}{32}$

1.3.4 घातांक के नियम

गुणा का नियम

निम्नलिखित पर ध्यान दीजिए

आरंभ से याद कीजिए $3^2 = 3 \times 3$ और $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

ऊपरी दोनो घातांको का गुणनफल क्या होगा?

$3^2 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

इसे कुछ और उदाहरणों से समझेंगे।

$3^2 \times 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$

$3^2 \times 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$

$3^2 \times 3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^9$

$3^2 \times 3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{10}$

प्रत्येक स्थिति में समान आधार वाले घातांको को गुणा करने पर हमें गुणनफल घातांको के योग के रूप में प्राप्त होता है।

चलिए इसे हम सामान्य रूप से देखेंगे।

$a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

$a^2 \times a^4 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

$a^2 \times a^5 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$

.

.

.

$a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \ldots\ m$ बार$) \times (a \times a \times a \times \ldots\ n$ बार$)$

$= a \times a \times a \times \ldots\ (m + n)$ बार $= a^{m+n}$.

इसलिए,

नियम 1: यदि a एक अशून्य परिमेय संख्या हो तो, then $a^m \times a^n = a^{m+n}$

उदाहरण 6: निम्न को सरल करो

(i) $5^3 \times 5^4$ (ii) $(-7)^{13} \times (-7)^7$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40}$

हल:

(i) $(5)^3 \times (5)^4$ में दोनो के आधार समान 5 है तथा घातांको का गुणा करना है

हम जानते है कि नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{m+n}$

इसलिए

$(5)^3 \times (5)^4 = (5)^{3+4} = (5)^7$

(ii) $(-7)^{13} \times (-7)^7$ दोनो में आधार समान -7 है तथा घातांको का गुणा करना है।

हम जानते है कि नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{m+n}$

इसलिए

$(-7)^{13} \times (-7)^7 = (-7)^{13+7} = (-7)^{20}$

(iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40}$ दोनों में आधार समान $\frac{4}{5}$ है तथा घातांको का गुणा करना है।

हम जानते है कि नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{m+n}$

इसलिए

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40} = \left(\frac{4}{5}\right)^{60+40} = \left(\frac{4}{5}\right)^{100}$$

भागफल का नियम

निम्न पर ध्यान दीजिए

हम जानते है कि $3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ और $3^2 = 3 \times 3$

3^6 को 3^2 से भाग देने पर भागफल क्या होगा?

$$\frac{3^7}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

चलिए अब हम कुछ उदाहरण देखेंगे

$$\frac{3^7}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3}}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$$\frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3}} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}} = 3 \times 3 = 3^2$$

प्रत्येक स्थिति में जब हम घातांकों भाग देते है हमें भागफल के रूप में घातांको के घटान भागफल में प्राप्त होता है।

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$$

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$\frac{3^7}{3^6} = 3^{7-6} = 3^1$$

इसे सामान्य रूप से,

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a^{7-2} = a^5$$

इसे कुछ और उदाहरणों से देखेंगे

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times \cancel{a \times a}}{\cancel{a \times a}} = a^{7-2} = a^5$$

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times \cancel{a \times a \times a}}{\cancel{a \times a \times a}} = a^{7-3} = a^4$$

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times \cancel{a \times a \times a \times a}}{\cancel{a \times a \times a \times a}} = a^{7-4} = a^3$$

.
.
.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots (m \text{ बार})}{a \times a \times a \times a \times \ldots (n \text{ बार})} = \frac{a \times a \times a \times \ldots \times \cancel{a \times a \times a \times a \ldots\ldots} (m \text{ बार})}{\cancel{a \times a \times a \times a \ldots\ldots} (n \text{ बार})}$$

$$= a \times a \times a \times \ldots\ldots (m-n) \text{ बार} = a^{m-n}.$$

नियम 2: यदि a एक अशून्य परिमेय संख्या हो तो, $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (या) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

उदाहरण 7: निम्नलिखित को सरल कीजिए

(i) $7^5 \div 7^3$ (ii) $\frac{5^{10}}{5^6}$ (iii) $\frac{13^{100}}{13^{25}}$

हल:

(i) $7^5 \div 7^3$ में दोनो के आधार समान 7 है

हम जानते है कि $a^m \div a^n = a^{m-n}$

इसलिए $7^5 \div 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

(ii) $\frac{5^{10}}{5^6}$ में दोनो के आधार समान 5 है

हम जानते है कि $a^m \div a^n = a^{m-n}$

इसलिए $\frac{5^{10}}{5^6} = 5^{10-6} = 5^4$.

(iii) $\frac{13^{100}}{13^{25}}$, में दोनो के आधार समान 13 है

हम जानते है कि $a^m \div a^n = a^{m-n}$

इसलिए $\frac{13^{100}}{13^{25}} = 13^{100-25} = 13^{75}$

घातांको के नियम

$(5^2)^3$ को देखिए

$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

फिर से $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^6$

उसी प्रकार

$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

फिर से $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^8$

$(5^2)^5 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

फिर से $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^{10}$

प्रत्येक स्थिति में घातांक के घातांक का नियम घातांको का गुणनफल होता है।

चलिए इसका सामान्यीकरण करेंगे

$(5^3)^6 = 5^{3\times6} = 5^{18}$

$(5^3)^7 = 5^{3\times7} = 5^{21}$

$(5^3)^8 = 5^{3\times8} = 5^{24}$

$(5^3)^9 = 5^{3\times9} = 5^{27}$

उसी प्रकार

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots$ (n बार) $= a \times a \times a \times \ldots$ (mn बार) $= a^{m\times n}$

नियम 3: यदि a एक अशून्य परिमेय संख्या हो तो $(a^m)^n = a^{m\times n}$ होगा

उदाहरण 8: निम्न को सरल कीजिए

(i) $(3^5)^4$ (ii) $(1947^{10})^7$ (iii) $(1729^{100})^{13}$ (iv) $[(-5)^{11}]^5$

हल:

(i) $(3^5)^4 = 3^{5\times4} = 3^{20}$

(ii) $(1947^{10})^7 = 1947^{10\times7} = 1947^{70}$

(iii) $(1729^{100})^{13} = 1729^{100\times13} = 1729^{1300}$.

(iv) $[(-5)^{11}]^5 = (-5)^{11\times5} = (-5)^{55}$

शून्य घातांक:

हम जानते हैं कि

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$3^0 = 3^{1-1} = \frac{3^1}{3^1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$4^0 = 4^{1-1} = \frac{4^1}{4^1} = \frac{4}{4} = 1$$

.

.

.

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

अब हम कह सकते है कि अशून्य परिमेय संख्याएँ जिनका घातांक 0 (शून्य) होता है उसका मूल्य केवल 1 होगा।

नियम 4: यदि a एक अशून्य परिमेय संख्या हो तो $a^0 = 1 (a \neq 0)$ होगा

ऋणात्मक घातांक:

फिर से इन संबंधों पर ध्यान दीजिए $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

$m = 0$ को ऊपरी मूल्यों में विस्थापित कीजिए।

हो तो $a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n}$ और हम पहले से जानते है कि नियम-3 के अनुसार $a^0 = 1$

इसलिए, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

नियम 5: यदि a एक अशून्य परिमेय संख्या हो ता $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ होगा

2 के विलोम को यादि कीजिए जो कि $\frac{1}{2}$ तथा $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

उसी प्रकार 3 का विलोम $\frac{1}{3}$ होगा तथा $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

उसी प्रकार 4 का विलोम $\frac{1}{4}$ होगा तथा $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$

इसलिए हम कह सकते है कि a का विलोम a^{-1} होगा।

उसी प्रकार 2^3 का विलोम 2^{-3} होगा

3^5 का विलोम 3^{-5} होगा

7^{10} का विलोम 7^{-10} होगा

$\left(\frac{7}{3}\right)^4$ का विलोम $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ होगा जो कि $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ के समान होगा

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ का विलोम $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ होगा

यदि 'a' एक अशून्य परिमेय संख्या हो और 'm' एक धनात्मक पूर्णांक हो तो a^m का विलो a^{-m} है

उदाहरण 9 : निम्नलिखित को भिन्नों में या पूर्णांको में लिखिए।.

(i) 10^{-3} (ii) $(-2)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ (iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$

हलः

(i) $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ क्योंकि $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ नियम - 5

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

(ii) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5}$ क्योंकि $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ नियम - 5

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{-2\times-2\times-2\times-2\times-2} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

(iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ क्योंकि $a^{-1} = \frac{1}{a}$ नियम-5

और $\frac{1}{5} = 5^{-1}$

इसलिए, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = (5^{-1})^{-3} = 5^{-1\times-3} = 5^3 = 125$

(iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$ क्योंकि $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$ (जैसे हमने पहले चर्चा की है।)

इसलिए, $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1\times4} = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{4} = \frac{81}{625}$

अब तक हमने एक आधार वाले घातांक के नियमों की चार्चा कर चुके है अब हम कुछ और घातांक के नियमों को विभिन्न आधारों पर देखेंगे।

नियम 6: $(a\,.\,b)^m = a^m\,.\,b^n$

नियम 7: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^n},\ (b\neq 0)$

हम जानते है कि $2^3 = 8$ क्या 2 पर दूसरा घातांक हो सकता है जो 8 के समान मूल्य दे सकता है? उसी प्रकार समान मूल्य के लिए दूसरा घातांक संभव नही है इसलिए हम निष्कर्ष निकाल सकते है।

नियम 8: यदि $a^m = b^n$, हो तो $m=n$ हमें $a > 0$ और $a \neq 1$

अपनी प्रगति जाँचिए।

सरल कीजिए।

1. (i) $x^3 \times x^5$ (ii) $a^{55} \times a^{45}$ (iii) $\left(\frac{x}{y}\right)^{70} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{130}$

(iv) $\left(\frac{p}{q}\right)^{500} \times \left(\frac{p}{q}\right)^{200}$

2. (i) $\frac{x^{10}}{x^7}$ (ii) $a^{50} \div a^{20}$ (iii) $(xy)^{25} \div (xy)^{12}$ (iv) $\frac{(ab)^{300}}{(ab)^{200}}$

3. (i) $(x^5)^2$ (ii) $(a^{10})^5$ (iii) $(x^3)^2 \times (x^2)^3$ (iv) $(a^5)^2 - (a^2)^5$

निम्नलिखित को हल कीजिए।

4. (i) $2 + 2^{-1}$ (ii) $1 + 3^{-2}$ (iii) $2^{-3} + 5^{-2}$ (iv) $3^{-2} + 3^{-2} + 3^0$

1.3.5 घातांक नियमों के अनुप्रयोग

चलिए अब हम कुछ और अनुप्रयोगों को देखेंगे।

उदाहरण 10: निम्न प्रश्नों को ऊपरी नियमों के सहयोग से हल करेंगे:

(i) $5x^3 \times 3x^7$ (ii) $(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$ (iii) $\frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

हल:

(i) दिया गया $5x^3 \times 3x^7$

$5x^3 \times 3x^7$ [गुणा करते समय पहले स्थिरांक को तथा घातांक के नियम को लागू कीजिए।]

$= 5 \times 3x^{3+7}$ [नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 15\, x^{10}$

(ii) दिया गया $(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$

$(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$

$= (2^4 x^{2\times4} y^4) \times (25^2\, x^{3\times2}\, y^{2\times2})$ [नियम-3 के अनुसार $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (16x^8y^4) \times (625x^6\, y^4)$

$= 16 \times 625\, x^{8+6}\, y^{4+4}$ [नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 10000x^{14}\, y^8$

(iii) दिया गया $\frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

$= \frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

$= \frac{(6^4 a^{3\times4} b^{2\times4})}{(36^2 a^{2\times2} b^{3\times2})}$ [नियम-3 के अनुसार $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= \frac{1296\ a^{12}b^8}{1296a^4b^6}$

$= a^{12-4}b^{8-6}$ [नियम-2 के अनुसार $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= a^8b^2.$

उदाहरण 11: निम्नलिखित प्रत्येक को सरल कर घातांक रूप में लिखिए:

(i) $\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

(ii) $(8^2 \times 8^4) \div 8^3$

(iii) $\frac{5^7}{5^2} \times 5^3$

(iv) $\frac{5^4 \times x^{16} y^5}{25^2 \times x^7 y^4}$

हल:

(i) दिया गया $\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

$\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

$= \{2^{12} \times 2^8\} \div 2^{12}$ [नियम-3 के अनुसार $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= 2^{(12+8)} \div 2^{12}$ [नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 2^{20} \div 2^{12}$ [नियम-2 के अनुसार $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 2^{(20-12)}$

$= 2^8$

(ii) दिया गया $(8^2 \times 8^4) \div 8^3$

$(8^2 \times 8^4) \div 8^3$ [नियम-1 के अनुसार $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 8^{(2+4)} \div 8^3$

$= 8^6 \div 8^3$ [नियम-2 के अनुसार, $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 8^{(6-3)}$

$= 8^3$ [8 के गुणनखण्ड]

$= (2^3)^3$

$= 2^9$

(iii) दिया गया $\dfrac{5^7}{5^2} \times 5^3$

$= 5^{(7-2)} \times 5^3$ [नियम-2 के अनुसार, $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 5^5 \times 5^3$ [नियम-1 के अनुसार, $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 5^{(5+3)} = 5^8$

(iv) दिया गया $\dfrac{5^4 \times x^{10} y^5}{25 \times x^7 y^4}$

$\dfrac{5^4 \times x^{10} y^5}{(5^2)^2 \times x^7 y^4}$ [25 के गुणनखण्ड]

$= \dfrac{5^4 \times x^{10} y^5}{5^4 \times x^7 y^4}$ [नियम-3 के अनुसार, $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (5^{4-4} \times x^{10-7} y^{5-4})$ [नियम-2 के अनुसार, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= 5^0\, x^3 y^1$ [क्योंकि $5^0 = 1$]

$= 1x^3y = x^3y.$

उदाहरण 12: निम्नलिखित को सरल कर घातांक रूप में लिखिए:

(i) $(x^6y^4z^{x-2}) \times (x^{-3}y^{-5}z^{-1}) \times (x^2yz^3)$

(ii) $\dfrac{a^7b^{-5}c^{-4}}{a^{-3}b^3c^4}$

(iii) $(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$

हल:

(i) Given $(x^6y^4z^{x-2}) \times (x^{-3}y^{-5}z^{-1}) \times (x^2yz^3)$

$(x^6y^4z^{x-2}) \times (x^{-3}y^{-5}z^{-1}) \times (x^2yz^3)$

$= (x^{6+(-3)+2}y^{4+(-5)+1}z^{-2+(-5)+1})$ [नियम-1 के अनुसार, $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= x^{8-3}y^{5-5}z^{1-7}$

$= x^5y^0z^{-6}$ [$y^0 = 1$]

$= \dfrac{x^5}{z^6}$

(ii) दिया गया $\frac{a^7b^{-5}c^{-4}}{a^{-3}b^3c^4}$

$$\frac{a^7b^{-5}c^{-4}}{a^{-3}b^3c^4}$$

$= a^{7-(-3)}b^{5-3}c^{-4-(-4)}$ [नियम-2 के अनुसार, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= a^{7+3}b^{5-3}c^{-4+4}$

$= a^{10}b^2c^0$ [क्योंकि $c^0 = 1$]

$= a^{10}b^2$

(iii) दिया गया $(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$

$$(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$$

$= (p^{2\times3}q^{2\times3}r^{2\times3}) \times (p^{3\times-2}q^{3\times-2}r^{3\times-2})$

$= (p^6q^6r^6) \times (p^{-6}q^{-6}r^{-6})$

$= (p^{6-6}\, q^{6-6}r^{6-6})$

$= (p^0q^0r^0) = 1$

उदाहरण13: सिद्ध कीजिए $\frac{x^{m+n} \times x^{n+l} \times x^{l+m}}{(x^m \times x^n \times x^l)^2} = 1$

हल: LHS $= \frac{x^{m+n} \times x^{n+l} \times x^{l+m}}{(x^m \times x^n \times x^l)^2}$

$= \frac{x^{m+n+n+l+l+m}}{(x^{2m+2n+2l})}$

[अंश में $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$ और हर में $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= \frac{x^{2m+2n+2l}}{(x^{2m+2n+2l})} = 1 =$ RHS सिद्ध किया गया है।

उदाहरण 14 : सिद्ध कीजिए $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^r = 1$

हल: LHS $= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^r$

$= \left(\frac{x^{pr}}{x^{qr}}\right) \times \left(\frac{x^{qp}}{x^{rp}}\right) \times \left(\frac{x^{rq}}{x^{pq}}\right)$ [अनुसार,$(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (x^{pr-qr}) \times (x^{pq-rp}) \times (x^{rq-pq})$ [नियम-3 के अनुसार, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= x^{pr-qr+qp-rp+rq-pq}$

$= x^0 = 1.$

क्योंकि $pq = qp, qr = rq$ and $pr = rp$,

हमें $pr - qr + rp + rq - pq = 0$

उदाहरण 15: यदि $3^{x+2} = 729$, हो तो 3^{x-2} का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया $3^{x+2} = 729$

जब हम 729, के गुणनखण्ड ज्ञात करेंगे हमें $729 = 3^6$ प्राप्त होगा

इसलिए $3^{x+2} = 729$

हो तो $3^{x+2} = 3^6$

नियम -8 बताता है कि यदि $a^m = b^n$, हो तो $m = n$

इसलिए $x + 2 = 6 = x = 4$

यदि $x = 4$, हो तो $x - 2 = 2$

इसलिए, $3^{x-2} = 3^2 = 9$.

1.3.6 मानक रूप (वैज्ञानिक सूचक)

मानलो आपके पिता ने एक मोटर सायकल रू. 1,61,688 में आपने लिए खरीदी। आपके मित्र ने आपसे पूछा ''आपने कितने में खरीदी''? तो आप उसे सरल रूप से कैसे दर्शाएँगे।

क्या आप कहेंगे "1.61 लाख" या "एक लाख इकसठ हजार छः सौ तथा अठासी रूपये".

बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्या को मानक रूप में सरलता से लिख सकते है। मानलो आपको 400000 को मानक रूप में दर्शाना है।

$10^5 = 100000$, इसलिए 1.61 लाख $= 1.61 \times 100000 = 1.61 \times 10^5$.

इसलिए 1.61 लाख को 1.61×10^5 के रूप में लिख सकते है इसी तरह से आप बड़ी संख्याओं को मानक रूप में सरलता से लिख सकते है।

संख्या को मानक रूप में लिखने के लिए नियम है कि पहले आप संख्या 1 से 10 के बीच की लिखकर शेष अंको को दशमलव में होतो उसे $\times 10$ (के घात की संख्या).

छोटी संख्या भी मानक रूप में लिख सकते है। घातांक धनात्मक होना चाहिए (ऊपरी उदाहरण में घातांक 5 है), वह ऋणात्मक हो सकता है।

$0.125 = \frac{125}{1000}$. मानक रूप में हम अंश भाग तथा 1 से 10 तक की पहला अंक लेंगे। इसलिए इसका पहला अंक 1 और संख्या को 1.25 के रूप में लिखेंगे उसका अर्थ है दशमलव दो स्थान बायीं ओर होगा। अब मानक रूप $0.125 = 1.25 \times 10^{-2}$.

उदाहरण 16: 81900000000000 को मानक रूप में लिखिए।

हल: यहाँ 10^{13} होगा क्योंकि दशमलव बिंदु 13 स्थान बायीं ओर होगा हमें 8.19 प्राप्त होगा।

$81\,900\,000\,000\,000 = 8.19 \times 10^{13}$

उदाहरण17 : 0.0000012 को मानक रूप में लिखिए।

हल: यह 10^{-6} होगा क्योंकि दशमलव 6 स्थान दायीं ओर होगा संख्या 1.2 होगी।

$0.0000012 = 1.2 \times 10^{-6}$

अभ्यास

1. निम्नलिखित को सरल कीजिए।

   (i) $x^7 \times x^0$

   (ii) $-3a^5 \times 2a^7$

   (iii) $8a^2x - 4a^3$

   (iv) $32(a^2)^5 \div (2a^5)^2$

   (v) $(x^5)^2 + (y^3)^3 + (z^4)^2$

   (vi) $(2a^3)^2 - (-3b)^3$

   (vii) $(2x^4)^3 + (-3y^2)^2$

   (viii) $x^{a-b} \times x^{b-c} \times x^{c-a}$

2. हल कीजिए।

   (i) $2^3 \times 2^5$

   (ii) $3^2 \times 3^{-2}$

   (iii) $1+\left(\frac{1}{2}\right)^5$

   (iv) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{6}$

   (v) $\left[\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^2\right\}^{-2}\right]^{-1}$

   (vi) $2^{-1} + 2^{-1}$

   (vii) 4×2^{-2}

   (viii) $2^2 \times 2^3 \div 2^5$

3. यदि $2^m = 32$, हो तो 2^{m+3} का मूल्य क्या होगा?

4. यदि $\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{16}{81}$, हो तो $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ का मूल्य क्या होगा?

5. यदि $5^{2x+1} \div 25 = 125$, x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. यदि $a = 3$ तथा $b = 2$ हो तो (i) $a^b + b^a$ तथा (ii) $a^b - b^a$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. $(a+b)(a^{-1}+b^{-1})^{-1} = ab$ को सिद्ध कीजिए।

8. $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. सूर्य तथा पृथ्वी की औसत दूरी 149597870 कि.मी. है इस दूरी को मानक रूप में लिखिए।

10. नोवल कोरोना विषाणु की त्रिज्या 0.0000005 से.मी. मानी गई है इस त्रिज्या को मानक रूप में लिखिए।

सारांश

- $a \times a \times a \times \ldots\ldots m$ बार $= a^m$. इसमें 'a' को आधार तथा 'm' को घातांक और a^m को घातांक रूप कहते है।
- घातांको के नियम
    - o **नियम-1:** $a^m \times a^n = a^{m+n}$
    - o **नियम-2**: $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (OR) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
    - o **नियम-3:** $(a^m)^n = a^{m\times n}$
    - o **नियम-4:** $a^0 = 1\ (a \neq 0)$
    - o **नियम-5:** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
    - o **नियम-6:** $(\mathrm{a}\ .\ b)^m = a^m\ .\ b^n$
    - o **नियम-7:** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{a^n}$, $(b \neq 0)$
    - o **नियम-8**: यदि $a^m = b^n$, हो तो $m = n$ होगा और $a > 0$ तथा $a \neq 1$
- a का विलोम $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. होगा तथा a^m का विलोम a^{-m} होगा और a^{-m} का विलोम a^m होगा।

इकाई 2 बीजगणित

अध्याय 2.1

बीजगणित का मूल

2.1.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- बीजगणित व्यंजकों में चरराशियों को पहचानेंगे।
- बीजगणितीय व्यंजको को बताएँगे।
- दीए गए पदों में सजातीय तथा विजातीय पदों को पहचानेंगे।
- बीजगणितीय व्यंजकों को (एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी, बहुपदी) वर्गीकृत करेंगे।
- बीजगणितीय व्यंजकों को हल करेंगे।
- बीजगणितीय व्यंजकों के प्रश्न मूल संक्रियाओं से हल करेंगे।
- बीजगणितीय व्यंजको के मूल्य ज्ञात करेंगे।
- बहुपदियों के बारे में समझेंगे।
- बहुपदियों के घात तथा बहुपदियों के प्रकार को समझेंगे।
- बहुपदियों के मूल्य ज्ञात करेंगे।

2.1.1 परिचय

अब तक हमने संख्याओं तथा आकार जो अंकगणित और ज्यामितीय गणित में आते है उनके बारे में पढ़ा। अब हम गणित की और एक शाखा बीजगणित के बारे में जानेंगे।

बीजगणित में मुख्यतः वर्णों तथा अक्षरों का उपयोग संख्याओं को दर्शाने में करते है। वे अनजाने मात्राओं को बताते है। दैनिक जीवन की अज्ञात राशियों को ज्ञात करने के लिए हम नई पद्धति का उपयोग करेंगे।

निम्नलिखित वार्तालाप को देखिए।

अर्चना : अंजली 1 से 10 तक संख्याओं में से एक को चुनो।
अंजली : ठीक है, मैंने चुन लीया
अर्चना : अब, उस संख्या को दुगुना करो
अंजली : ठीक है, किया
अर्चना : प्राप्त उत्तर में 10 जोडो

अंजली : मैंने जोडा.

अर्चना : परिणाम को 2 से भाग दो

अंजली : हाँ, मैंने भाग किया

अर्चना : परिणाम से चुने हुई संख्या को घटाओ (2).

अंजली : हाँ, मैंने घटाया

अर्चना : अब, तुम्हारे पास बची संख्या 5 होगी।

अंजली : अरे वाह ! तुमने कैसे प्राप्त किया?

अंजली आश्चर्यचकित हो गई और सोचने लगी। अर्चना ने उत्तर कैसे दिया। इस अध्याय में हम देखेंगे कि उस प्रश्न को कैसे हल किया.

2.1.2 बीजगणितीय व्यंजक

अब एसे उदाहरण देखिए जिसमें कुछ पैटर्न दिखेंगे और बीजगणितीय व्यंजकों को दर्शाने का प्रयत्न करेंगे।

एक स्वयं सेवी संस्था हर पाठशाला के सभी गरीब और हुशार विद्यार्थीयों को छः नोट बुक देने का निश्चय करती है।

एक विद्यार्थी को आवश्यक नोट बुक = 6

2 विद्यार्थी को आवश्यक नोट बुक = 12

3 विद्यार्थी को आवश्यक नोट बुक = 18

उपरोक्त जानकारी को नीचे दिए गए तालिका में लिखिए।.

विद्यार्थीयों की संख्या	1	2	3	4	-
आवश्यक नोट बुक्स	6	12	18	24	-
निरीक्षण (पैटर्न)	6×1	6×2	6×3	6×4	-

यहाँ आवश्यक नोट बुक्स और विद्यार्थीयों की संख्या के बीच के संबंध को ध्यान दीजिए।

ऊपरी तालिका से हमने देखा कि जब विद्यार्थीयों की संख्या परिवर्तित होती है तो आवश्यक नोट बुकों की संख्या भी बदलती है। हमने देखा कि आवश्यक बुको की संख्या विद्यार्थीयों की संख्या के छः गुना होती है।

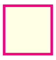
दिए गए विद्यार्थीयों के लिए आवश्यक बुकों की संख्या हम सरलता से ज्ञात कर सकते है।

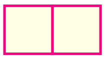
$6 \times a$ या $6a$ जहाँ a विद्यार्थीयों की संख्या होगी उदाहरणार्थ 35 विद्यार्थीयों के लिए आवश्यक $6 \times 35 = 210$ बुक्स होंगे.

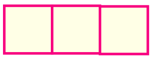
ऊपरी उदाहरण से यह साफ हो जाता है विद्यार्थीयों के लिए आवश्यक विद्यार्थीयों की संख्या सूत्र $6a$ से ज्ञात कर सकते है जहाँ 'a' विद्यार्थीयों की संख्या अर्थात् 1, 2, 3, 4. होगी यहाँ 'a' को चरराशि कहते है जो कि विभिन्न मूल्यों को लेता है इसलिए 'a' के मूल्यों के अनुसार आवश्यक नोटबुकों की संख्या बदलती है।

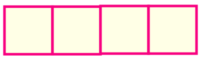
चलिए अब हम एक और उदाहरण देखेंगे

नीचे दिए गए माचिस के तिलियों के व्यवस्थापन को देखिए।


पैटर्न 1


पैटर्न 2


पैटर्न 3


पैटर्न 4

चित्र को बनाने के लिए आवश्यक माचिस के तिलियों की आवश्यकता इस प्रकार होगी।

चित्र का निर्माण	1	2	3	4
माचिस के तिलियों की संख्या	4	7	10	13
पैटर्न	(3×1)+1	(3×2)+1	(3×3)+1	(3×4)+1

माचिस के तिलियों की संख्या को ज्ञात करने का सूत्र

$= 3\times$(वर्गों की संख्या) $+ 1$

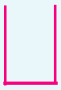
$= 3p + 1$ जहाँ

p एक चरराशि है जो कि वर्गों की संख्या को सूचित करता है। इन उदाहरणों में $6a$ और $3p + 1$ को बीजीय व्यंजक कहते है।

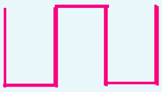
नोट: यदि व्यंजक में कम से कम एक बीजीय पद हो तो उसे बीजगणितीय व्यंजक कहते है।

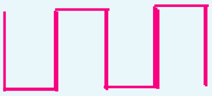
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यदि मध्यान्ह भोजन में प्रत्येक विद्यार्थी को 150 ग्राम चावल दिया जाता है तो कुल चावल की आवश्यकता के लिए सूत्र लिखिए?
2. निम्नलिखित पैटर्न बनाने के लिए आवश्यक माचिक के तिलियों के लिए सूत्र लिखिए।


(i)

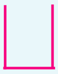

(ii)

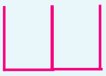

(iii)

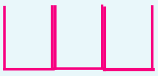

(iv)

3. निम्नलिखित पैटर्न बनाने के लिए आवश्यक माचिस के तिलियों के लिए सूत्र लिखिए।

(i)


(a)


(b)


(c)


(d)

हमने देखा कि बीजगणितीय व्यंजकों चरराशियों की संक्रियाएँ योग, घटान गुणा और भाग से प्राप्त करते है चलिए और कुछ उदाहरणों को देखेंगे।

क्र.सं.	स्थिति	चरराशि	व्यंजकों की सहायता से कथन
1.	x को 5 से गुणा करेंगे	x	$5x$
2.	y को 4 से भाग करेंगे	y	$\frac{y}{4}$
3.	z में से 6 को घटाने पर	z	$z-6$
4.	बड़ा भाई छोटे से 3 वर्ष बड़ा है	छोटे भाई की आयु $= m$	बड़े भाई की आयु $= m + 3$
5.	पेट्रोल का भाव डिजल से 10 रू. अधिक है	डिजल का भाव $= r$	पेट्रोल का भाव$= r + 10$
6.	निरजा के पास रानी 3 गुना रू. 10 कम है	रानी के पास n रू. है	निरजा के पास $3n - 10$ होंगे
7.	रवि, राजू की उपस्थिति का $\frac{1}{3}$ भाग उपस्थित है	राजू के कार्य दिवस a	रवि की उपस्थिति $\frac{a}{3}$
8.	y को 5 से भाग देकर $3z$ को जोडो	y, z	$\frac{y}{5}+3z$
9.	n के तीसरे भाग को m के चार गुना से जोडिए.	m, n	$4m+\frac{n}{3}$
10.	z के चौथे भाग में से y को घटाइए	y, z	$\frac{z}{4}-y$

2.1.3 सजातीय तथा विजातीय पद

$3x + 2$ को देखिए.

यहाँ 'x' को 3 से गुणा कर उसमें 2 जोडा गया है। दोनो '$3x$' और '2' व्यंजक है "$3x$ + 2" में '$3x$' बीजगणितीय पद तथा '2' को संख्या पद कहते है।

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए।

(i) $6x$ और $8x$ (ii) $3x^2y$ और $7x^2y$ (iii) $4a^2$ और $\frac{5}{3}b^2$

(iv) $7a^2b$ और $7ab^2$ (v) 4mn और $\frac{9}{5}$ mn (vi) $6x^2y^2$ और $7x^3y$

1. पहले उदाहरण में दोनों पदों में समान चरराशि 'x' है।
2. दूसरे उदाहरण में दोनो पदों में दो चरराशि 'x' और 'y'है। पहले पद में x का घातांक 2 तथा y का घातांक 1 है और दूसरे पद में भी x का घातांक 2 तथा y का घातांक 1है।
3. उदाहरण 3, में दो पदों में दो विभिन्न चरराशियाँ है। a तथा b और उनके घातांक दोनो चरराशियों के लिए 2 है।
4. उदाहरण 4 में दोनो पदों में दो चरराशियाँ a और b है पहले पद में a का घातांक 2 तथा b का घातांक 1 और दूसरे पद में a का घातांक 1 और b का घातांक 2 है।
5. उदाहरण 5 में दोनो पदों में दो चरराशियाँ m तथा n है और m तथा n का घातांक 1 है।
6. उदाहरण 6 में दोनो पदों में दो चरराशियाँ x और y है पहले पद में x तथा y का घातांक 2 तथा दूसरे पद में x तथा y का घातांक 3 है। ऊपरी उदाहरणों में 1, 2 तथा 5 में समान चर राशियाँ समान घातांकों के साथ है। ऐसे पदों को सजातीय पद कहते है उदाहरण 3, 4, 6 को विजातीय पद कहते है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

दिए गए पदों में से सजातीय पदों को चुनिए

1. $5xy, 4x^2, 3xy, 12x^2y, 6xy^2, 7xy, 8x^2, 9y^2, 10x^2y, 14xy^2, 12xy, 15x^2, 12xy^2$.
2. दिए गए पदों के 5 सजातिय पदों को लिखिए।

(i) $3xz$ ...., ..., ..., ..., ...,

(ii) $4m^2n$ ...., ..., ..., ..., ...,

(iii) $5pq^2$ ...., ..., ..., ..., ...,

(iv) $7a^3b^3$ ...., ..., ..., ..., ...,

(v) $-6p^2$ ...., ..., ..., ..., ...,

2.1.4 बीजगणितीय व्यंजकों के प्रकार

बीजगणितीय व्यंजकों को उनके पदों के आधार पर नाम दिए गए है।

पदों की संख्या	व्यंजक का नाम	उदाहरण
एक पद	एक पदी	(i) x (ii) $3xy$ (iii) $4pqr$ (iv) $4z^2xy$ (v) $6mn^2$
दो विजातीय पद	द्विपदी	(i) $x + y$ (ii) $a^2 + b^2$ (iii) $mn + n^2$ (iv) $x^2 - xy$ (v) $p^2 + q^2$
तीन विजातीय पद	त्रिपदी	(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $m^2 - 2mn + n^2$ (iii) $pq + xy - mn$
एक से अधिक विजातीय पद	बहुपदी	(i) $3x^2 + 4xy + 2z^2 + 5$ (ii) $6p^2 + 7q^2 + 6pq + 8$ (iii) $7x^2 - 2xy - y^2 + 5$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. प्रत्येक बीजगणितीय व्यंजकों के पाँच उदाहरण लिखिए।
2. नीचे दिए गए व्यंजकों में से एकपदी, द्वपति, त्रिपदी तथा बहुपदीयों को पहचानिए।

   (i) $3xyz + 2xy$ (ii) $2pq^2$ (iii) $4x + 3p + q + 1$

   (iv) $3m^2 + 4m - 5$ (v) $2p^2 - 5p$

2.1.5 बीजगणितीय व्यंजकों की संक्रियाएँ

बीजगणितीय व्यंजकों को सरल कीजिए

निम्न बीजगणितीय व्यंजकों को देखिए

$7x^2 + 3y^2 - 6x^2y + 4xy + 5x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy$

हमने देखा कि दिए गए व्यंजकों में कुछ सजातीय पद है। सजातीय पदों को जोडने पर हमें बीजगणितीय व्यंजकों का सरल रूप प्राप्त होता है।

क्र.सं.	चरण	प्रक्रिया
1.	व्यंजकों को लिखिए	$7x^2 + 3y^2 - 6x^2y + 4xy + 5x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy$
2.	सजातीय व्यंजकों का समूह	$(7x^2 - 3x^2) + (3y^2+2y^2)+(-6x^2y+5x^2y) + (4xy-6xy)$
3.	सजातीय व्यंजकों को जोडना	$4x^2 + 5y^2 - 1x^2y - 2xy$

नोट: यदि कोई भी दो पद समान हो तो उसे सरल रूप कहते है।

दूसरा उदाहरण:

$x^2y - 3xy^2 + 4xy^2 - 2x^2y - 8 + 5xy^2 + 6x^2y + 5$

चरण 1 $7x^2y - 3xy^2 + 4xy^2 - 2x^2y - 8 + 5xy^2 + 6x^2y + 5$

चरण 2 $(7x^2y - 2x^2y + 6x^2y) + (-3xy^2 + 4xy^2 + 5xy^2) + (-8 + 5)$

चरण 3 $11x^2y + 6xy^2 - 3$ (सजातीय पदों को जोडने पर))

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्नलिखित को हल कीजिए

(i) $3xy + 7xy - 9xy$

(ii) $10x^2 - 5x^2 + 4x$

(iii) $3x^2y - 5xy^2 + 7xy^2$

(iv) $4a^2 - 5b^2 + 4a^2b - 7ab^2 + 5a^2 - 4b^2$

(v) $6x^2 + 7q^2 - 7pq + 4 - 3p^2 - 6q^2 + 5$

(vi) $7xy^2 + 3xy - 6xy - 4xy^2$

(vii) $3m^3 + 4m^2 + 5m - 4m^3 + 2m$

(viii) $4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5xy - \frac{3}{2}xy$

बीजगणितीय व्यंजकों को जोडना

बीजगणितीय व्यंजकों को जोडने के लिए सजातीय पदों को जोडना चाहिए। यह दो पद्धतियों से कर सकते है।

(i) स्तंभ विधि (ii) पंक्ति विधि

स्तंभ विधि

उदाहरण 1: $5x^2 - 4x - 6$, $7x + 5 + 3xy$ और $8x^2 + 3x - 1$.

चरण 1 पहले व्यंजकों को मानक रूप में लिखिए

$5x^2 - 4x - 6 = 5x^2 - 4x - 6$

$7x + 5 + 3x^2 = 3x^2 + 7x + 5$

चरण 2

$$\begin{array}{l} 5x^2 - 4x - 6 \\ \underline{3x^2 + 7x + 5} \end{array}$$

व्यंजको को एक के नीचे एक लिखना चाहिए।

चरण 3 $5x^2 - 4x - 6$

$3x^2 + 7x + 5$

$\underline{\underline{8x^2 + 3x - 1}}$

सजातीय पदो को स्तंभों में क्रमशः उसके उत्तर को लिखिए।

(ii) पंक्ति या क्षैतिज विधि

उदाहरण 2: $6x^2 + 4 - 3x$ तथा $7x^2 - 8x + 5$

चरण1 व्यंजकों को जोड के चिन्ह के साथ लिखिए

$6x^2 + 4 - 3x + 7x^2 - 8x + 5$

चरण 2 सजातीय पदों को एक समूह में लिखिए

$(6x^2 + 7x^2) + (-3x - 8x) + (4 + 5)$

चरण 3 गुणकों को हल कीजिए $(6 + 7)x^2 + (-5 -8)x + 9$

चरण 4 प्राप्त परिणाम को मानक रूप में लिखिए।

$13x^2 - 11x + 9$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्न व्यंजकों को जोडिए

(i) $6x^2 - 3x + 4$ तथा $7x + 8x^2 - 9$

(ii) $9x - 5x^2 + 11$ तथा $8 + 6x + 4x^2$

(iii) $7x - 8x^2 - 7$ तथा $8x^2 + 8x$

(iv) $6x^2 + 4x - 3$ तथा $9x^2 + 9$

(v) $4x + 5$ तथा $6x^2 - 8$

बीजगणितीय व्यंजकों का घटान

बीजगणितीय व्यंजकों का घटान करने से पहले हमें उनके योग विलमों को परिभाषित करना होगा।

बीजगणितीय व्यंजको का योग विलोमः बीजगणितीय व्यंजकों का योग विलोम प्राप्त करने के लिए प्रत्येक पद के चिन्ह को बदलेंगे।

$6x$ को योग विलोम $-6x$ तथा $-2x^2 + 1$ का योग विलोम $-(-2x^2 + 1)$ जो कि $2x^2 - 1$ के समान है तथा 5 का योग विलोम -5 है।

अर्थात् $6x + (-6x) = 0$

$-2x^2 + (2x^2) = 0$

$5 + (-5) = 0$

उदाहरण 3: निम्नलिखित व्यंजको का योग विलोम ज्ञात कीजिए

$$3x^2 + 2x - 6$$

हल : $3x^2 + 2x - 6$ का योग विलोम $-\ (3x^2 + 2x - 6) = -3x^2 - 2x + 6$

फिर से बीजगणितीय व्यंजकों के घटान के दो विधियाँ है

स्तंभ या खडी विधि :

उदाहरण 4 : $5x^2 - 4x + 3$ में से $3x^2 + 2x - 6$ को घटाइए

चरण 1 : व्यंजको को मानक रूप में लिखेंगे

$$3x^2 + 2x - 6 = 3x^2 + 2x - 6$$

$$5x^2 - 4x + 3 = 5x^2 - 4x + 3$$

चरण 2 : सजातीय पदों को स्तंभ रूप में लिखेंगे

$$\begin{array}{l} 3x^2 + 2x - 6 \\ 5x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

चरण 3 : दूसरे पंक्ति वाले व्यंजको के चिन्हों को बदलकर योग विलोम लिखेंगे

$$\begin{array}{l} \ \ 3x^2 + 2x - 6 \\ \underset{-}{}5x^2 \underset{+}{-} 4x \underset{-}{+} 3 \end{array}$$

चरण 4 : सजातीय पदो को जोडो और उत्तर को उसके स्तंभ में लिखिए।

$$\begin{array}{l} \ \ 3x^2 + 2x - 6 \\ \underset{-}{}5x^2 \underset{+}{-} 4x \underset{-}{+} 3 \\ \hline -2x^2 + 6x - 9 \end{array}$$

पंक्ति या क्षैतिज विधि :

उदाहरण 5: $8y + 4y^2 - 6$ में से $5y^2 - 6y + 9$ को घटाइए

चरण 1 : व्यंजको को एक पंक्ति में अर्थात् घटान के चिन्ह के साथ कोष्टक में लिखेंगे

$$5y^2 - 6y + 9 - (8y + 4y^2 - 6)$$

चरण 2 : दूसरे व्यंजको के योग विलोम को पहले व्यंजक के साथ जोडिए

$$5y^2 - 6y + 9 - 8y - 4y^2 + 6$$

चरण 3 : सजातीय पदों को जोड या घटान कीजिए

$(5y^2 - 4y^2) + (-6y - 8y) + (9 + 6)$

$= y^2 - 14y + 15.$

चरण 4 : मानक रूप में लिखेंगे $y^2 - 14y + 15.$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

दूसरे व्यंजको को पहले व्यंजक में से घटाइए :

1. $6a - 7b + c \,;\, 8a + 9b - 6c$
2. $7a^2 - 3 + 4a \,;\, 3a^2 - 5a + 13$
3. $14x^2 - 15; \quad 12x^2 - 4x + 14$
4. $6p^2 - 7p + 4 \,;\, 5p^2 - 8$
5. $-7m^2 + 5m - 9$ को $3m^2 + 5m - 6$ तथा $5m^2 - 4m + 3.$ के योग में से घटाइए

बीजगणितीय व्यंजको का गुणनफल

दो एकपदियों का गुणन

उदाहरण 6: $3x$ तथा $4y$ को गुणा कीजिए

चरण 1 : दिए गए एक पदियों को गुणनफल के चिन्ह "X" के साथ लिखिए

$= 3x \times 4y$

चरण 2 : सभी गुणको तथा चरराशियो को गुणा के चिन्ह के साथ लिखिए.

$= 3 \times x \times 4 \times y.$

चरण 3 : गुणको गुणा कीजिए और चर राशियों का गुणा कीजिए

$= (3 \times 4)(x \times y)$

$= 12\,xy.$

उदाहरण7 : $3p$ तथा $5pqr.$ को गुणा कीजिए

$= 3p \times 5pqr$

$= 3 \times p \times 5 \times p \times q \times r$

$= (3 \times 5)(p \times p \times q \times r)$

$= 15p^2qr \quad (\because\ p \times p = p^2).$

उदाहरण 8 : $5m^2n \times (-6)mn$. को गुणा कीजिए

$= 5 \times m^2 \times n \times -6 \times m \times n$

$= (5 \times -6)\,(m^2 \times n \times m \times n)$

$= -30m^3n^2 \quad (\because\ m^2 \times m = m^3 \text{ and } n \times n = n^2)$

तीन या अधिक एकपदियों का गुणा

उदाहरण 9: $3xy$, $4y$ तथा $5x$. का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $3xy \times 4y \times 5x$

$= 3 \times x \times y \times 4 \times y \times 5 \times x$

$= (3 \times 4 \times 5)\,(x \times y \times y \times x)$

$= 60x^2y^2$.

उदाहरण 10: $4a^2b \times 5ab^2c \times 6abc$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $4a^2b \times 5ab^2c \times 6abc$

$= (4 \times 5 \times 6) \times (a^2 \times a \times a) \times (b \times b^2 \times b) \times (c \times c)$

$= 120a^4b^4c^2$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्नलिखित एकपदियों को गुणा कीजिए

(i) $3xy,\ 4x$

(ii) $6ac,\ 7b^2c$

(iii) $-8p2q,\ 2qr^2$

(iv) $-5mn,\ -3m^2n$

(v) $x,\ xy,\ xyz$

(vi) $pqr,\ pq^2,\ qr^2$

(vii) $lm,\ mn,\ ln$

(viii) $5abc,\ 6a^2b^2c^2,\ 2abc$

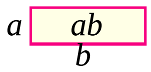
(ix) $3x^2y^2z^2,\ -2xyz,\ -3x^3y^3z^3$

(x) $4xy^2z^3,\ 2x^2y,\ 3x^3y^2z^2$

एकपदी का द्विपदी से गुणा

एकपदी का द्विपदी से गुणा को समझने के लिए ज्यामितिय उदाहरण लेंगे.

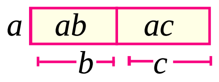
आयत का क्षेत्रफल जिसकी लंबाई b तथा चौडाई a है $= ab$



यदि आयत की लंबाई 'c' इकाई बढ़ा दी जाय तो;

आयत का क्षेत्रफल $= a(b + c)$.

$a(b + c) = ab + ac$



एक तरफ क्षेत्रफल $a(b + c)$ है लेकिन बायीं ओर का भाग का क्षेत्रफल 'ab' तथा दायीं ओर वाले का क्षेत्रफल 'ac' होगा दोनो का मेल क्षेत्रफल $ab + ac$. होगा।

उदाहरण 11: $3x, (4y + 5z)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल :

चरण 1 : एकपदी तथा द्विपदी को गुणा के चिन्ह के साथ लिखिए.

$3x \times (4y + 5z)$

चरण 2 : एकपदी को द्विपदी के प्रथम पद से गुणा कीजिए फिर एकपदी को द्विपदी के दूसरे पद से गुणा कीजिए उनको जोडिए .

$(3x \times 4y) + (3x \times 5z)$

चरण 3 : पदों को सरलीकृत कीजिए

$12xy + 15xz$

उदाहरण12: $2a(3ab - 4ac)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $2a(3ab - 4ac) = 2a \times (3ab - 4ac)$

$$= (2a \times 3ab) + (2a \times -4ac)$$
$$= (2 \times 3 \times a \times a \times b) + (2 \times a \times (-4) \times a \times c)$$
$$= (6 \times a^2 \times b) + (-8 \times a^2 \times c)$$
$$= 6a^2b - 8a^2c.$$

* उसी प्रकार द्विपदी को त्रिपदी से गुणा कर सकते है इसे नीचे दिए गए उदाहरण से समझेंगे।

उदाहरण 13: $(6m + 2n - mn)(-3mn)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $(6m + 2n - mn)(-3mn) = (6m \times -3mn) + (2n \times -3mn) + ((-mn) \times (+3mn))$

$$= (6 \times -3 \times m \times m \times n) + (2 \times -3 \times n \times m \times n)$$
$$+ (-m \times n \times -3 \times m \times n)$$
$$= -18m^2n - 6mn^2 + 3m^2n^2.$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए

(i) $2x, (3xy + 4xz)$

(ii) $5m, (3mn - 2)$

(iii) $(4abc - 6a^2c^2b^2), 3(-abc)$

(iv) $3p, (4pq - 2pr - pqr)$

(v) $(5x - 6y - 7z), (-xyz)$

(vi) $(mn - 2lm - ln), 3lm$

द्विपदी को द्विपदी से गुणा करेंगे

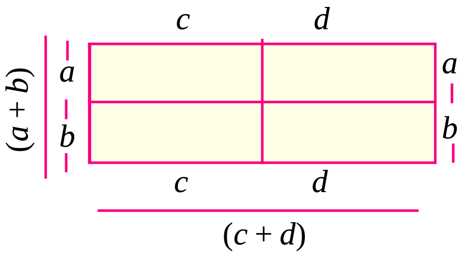
हमने एकपदी को द्विपदी से गुणा करना सीखा $(a + b)e = ae + be$

अब $(c + d)$ को 'e' के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$$

$$\therefore \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

ज्यामितीय प्रदर्शन की सहायता से आयत का क्षेत्रफल $(a+b)$ तथा $(c+d)$ भुजा इस प्रकार



आयत का क्षेत्रफल $(a+b) \times (c+d)$

लेकिन ऊपरी चित्र से आयत का कुल क्षेत्रफल

$$= ac + ad + bc + bd$$

$$\therefore \; (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

उदाहरण 14: $(2x+3y)$ तथा $(5x+4y)$.का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल :

चरण 1 : दोनो द्विपदीयों को लिखिए

$$(2x+3y) \times (5x+4y)$$

चरण 2 : पहले द्विपदी के पहले पद से दूसरे द्विपदी को गुणा कीजिए फिर पहले द्विपदी के दूसरे पद से दूसरे द्विपदी को गुणा करेंगे

$$= 2x \times (5x+4y) + 3y(5x+4y)$$

चरण 3 : सरल कीजिए

$$(2x \times 5x + 2x \times 4y) + (3y \times 5x + 3y \times 4y)$$

$$= 10x^2 + 8xy + 15xy + 12y^2$$

चरण 4 : सजातीय पदों को जोडिए

$$= 10x^2 + 23xy + 12y^2.$$

उदाहरण 15: $(4a+2b)$ और $(2a-3b)$. का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $(4a+2b)(2a-3b) = 4a(2a-3b) + 2b(2a-3b)$

$$= (4a \times 2a) + (4a \times -3b) + (2b \times 2a) + (2b \times -3b)$$

$$= 8a^2 - 12ab + 4ab - 6b^2$$

$$= 8a^2 - 8ab - 6b^2.$$

* इसी प्रकार हम द्विपदी का त्रिपदी से गुणा इस उदाहरण से समझ सकते है।

उदाहरण 16: $(3m - 2l)$ और $(m - 2n - lmn)$. का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल: $(3m + 2l)\,(m - 2n - lmn) = 3m(m - 2n - lmn) + 2l(m - 2n - lmn)$

$$= (3m \times m) + (3m \times -2n) + (3m \times -lmn) + (-2l \times m)$$

$$+ (-2l \times -2n) + (-2l \times -lmn)$$

$$= 3m^2 - 6mn - 3lm^2n - 2lm + 4ln + 2l^2mn\,.$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए

1. $(2p + 3q),\ (3q + 2p)$
2. $(3a - 2b),\ (4a - 5b)$
3. $(6x^2y - 3xy^2),\ (x^2y - xy^2)$
4. $(x - y)\,(3xy - 2x^2y + 2xy^2)$
5. $(3l - 2m)\,(3lm - 2nl - lmn)$
6. $(x + y + z)\,(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)$

2.1.6 बीजगणितीय व्यंजको के मूल्य

$3x^2 - 2x + 1$. को देखो यहाँ $x = 0, 1, 2, -1, \ldots$ हो तो इस व्यंजक का मूल्य क्या होगा? इसके लिए हमें "x" के स्थान पर '0' या '1' या '2' ... को लगाना होगा

उदाहरण17: $4x + 1$ का मूल्य क्या होगा यदि $x = 2$. हो तो

हल:

चरण 1 : $4x + 1$ (व्यंजक को लिखना)

चरण 2 : $4(2) + 1$ (x की जगह 2 लगाने पर)

चरण 3 : $8 + 1 = 9$.

Example 18: $m^2 - 2m + 3$ का मूल्य $m = -1$ और '0'.के लिए क्या होगा?

हल :

चरण 1 : $m^2 - 2m + 3$ (व्यंजक को लिखना)

चरण 2 : $(-1)^2 - 2(-1) + 3$ ($m = -1$ लगाने पर)

चरण 3 : $1 + 2 + 3 = 6$

(अब $m = 0$ को प्रतिस्थापित करने पर)

चरण 1 : $(0)^2 - 2(0) + 3$

चरण 2 : $0 - 0 + 3 = 3$.

उदाहरण 19 : आयत का क्षेत्रफल $A = l \times b$, से दिया गया है यदि $l = 8\text{cm}$, $b = 6\text{ cm}$ हो तो क्षेत्रफल क्या होगा?

हल:

चरण 1 : आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$ (दिए गए मूल्य $l = 8\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$)

चरण 2 : $A = 8 \times 6$ (मूल्यों को लगाने पर)

चरण 3 : $A = 48\text{ cm}^2$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. आयत की परिमिति $p = 2(l + b)$, है यदि $l = 6\text{cm}$, $b = 4\text{ cm}$, हो तो उसका मूल्य ज्ञात कीजिए?
2. यदि $x = -1$, $y = 2$ हो तो निम्न व्यंजको के मूल्य ज्ञात कीजिए?
   (i) $2x + 3y - 5$ (ii) $5x - 2y + 1$ (iii) $3xy - 4x + 2$ (iv) $7x - 3y - 2xy$

2.1.7 बहुपदी

अब तक हमने कई बीजगणितीय व्यंजक देख चुके है। (एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी, अनेक पदी) अब हम बहुपदियों के बारे में जानेंगे?

x का बहुपदी एक ऐसा व्यंजक है जिसमें अनंत पदों को योग a^{x^n} के रूप में वास्तविक संख्या 'a' के लिए होता है।

जहाँ $a \neq 0$ तथा 'n' एक पूर्ण संख्या हो तो.

बहुपदी	बहुपदी नहीं है
$2x$	$4x^{1/2}$ or $4\sqrt{x}$
$\frac{1}{3}x - 4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4 + \frac{1}{x}$
$4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$	$\frac{x^2 + 2}{x} - 6$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्नलिखित में कौनसे बहुपदी है और कौनसे बहुपदी नही है? कारण बताइए।

1. $3x - 4$
2. $4y^2 - \frac{1}{y} + 2$
3. $\sqrt{5}p^2 - 4$
4. $\frac{1}{z} + 2$
5. $(3x + 4)(x - y)$
6. $(2x^2 - 2x)\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $3\sqrt{p}$
8. $z^2 - xyz$
9. $4x - 2y - \sqrt{xy}$
10. $5x^3y^2z$

बहुपदी के घात

बहुपदी के प्रत्येक पद में गुणक तथा सांत राशियाँ जिसके घात अऋणात्मक होता है। पद का घात उसके चर राशियों के घातांको का योग होता है बहुपदी का घात अर्थात सबसे बड़ा घातांक होता है।

उदाहरण 20:

1. $2x^2 - 3x + 4$ 2. $2p^2q^2 + 3pq^2 - 4p^3$.

$2x^2 - 3x + 4$, बहुपदी में $2x^2$, $-3x$ और 4 पद है. $2x^2$ का घात 2, $-3x$ का घात 1 तथा 4 का घात $0(4x^0 = 4)$.

इसलिए $2x^2 - 3x + 4$, बहुपदी सबसे बड़ा घातांक $2x^2$ में है।

इसलिए $2x^2 - 3x + 4$ बहुपदी का घात 2 होगा।

उसी प्रकार $2p^2q^2 + 3p^2 - 4p^3$, में पहले दो पदों में दो-दो चरराशियाँ है। इसलिए हमें उनके घातांको का योग ज्ञात करना होगा।

$2p^2q^2$, $2 + 2 = 4$ घात होगा

in $3p^1q^2$, $1 + 3 = 3$ घात होगा

$4p^3$, 3 घात होगा, ऊपरी मूल्यों में 4घात होगा

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्न बहुपदियों के घात लिखिए

(i) $9x^2 - 3x + 4$ (ii) $5m^2 + 6m - 6$ (iii) $2p^3 - 3pq + 4p^3q$

(iv) $6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ (v) $m^3 - 2mn^2 + 3mn$ (vi) $6a^2b + 3ab^2 - 4ab - 5$

(vii) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (viii) $x^2 + 2xy + y^2$

घात के अनुसार बहुपदी के प्रकार

बहुपदी का नाम	बहुपदी का घात	उदाहरण
शून्य बहुपदी	परिभाषित नही है	0
स्थिर बहुपदी	शून्य	$5, -3, \frac{1}{2}x^0$ etc
रैखिक बहुपदी	1	$x + 2, y - 3, 2p - 1$ $3n - 4$ etc
वर्ग बहुपदी	2	$x^2 - 3x + 4, a^2 - b$ $3m^2 + 4m$ etc.
घन बहुपदी	3	$x^3 - y^3, 3x + 4y^3,$ $9x^3 - 2x^2 + b$ etc.

पदों के आधार पर बहुपदी के प्रकार

अशून्य पदों के नाम	बहुपदी का नाम	उदाहरण	पद
1	एकपदी	$5xy$	$5xy$
2	द्विपदी	$-2m + 6n$	$-2m, 6n$
3	त्रिपदी	$4a^2 + ab + 3$	$4a^2, ab, 3$
3 से अधिक	अनेक पदी	$5x^2 + 3y^2 - 6xy + 7$	$5x^2, 3y^2, -6xy, 7$

नोट : एक बहुपदी अनेक पदी हो सकता है लेकिन अनेक पदी बहुपदी होना जरूरी नही है।

2.1.8 बहुपदी का मूल्य

1. $p(x) = 4x^2 - 2x + 3$.बहुपदी को देखिए

यहाँ $x = 1, 2, 3$ के लिए $p(x)$ का मूल्य क्या होगा

इसके लिए हमें x की जगह 1, या 2 या 3, लगाना होगा

निम्न तालिका देखिए

x	$p(x) = 4x^2 - 2x + 3$	$p(x)$ का मूल्य
1	$p(1) = 4(1)^2 - 2(1) + 3$ $= 4 - 2 + 3$	5
2	$p(2) = 4(2)2 - 2(2) + 3$ $= 4(4) - 4 + 3$ $= 16 - 4 + 3$	15
3	$p(3) =$	...

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

दिए गए मूल्यों के अनुसार बहुपदियों के मूल्य ज्ञात कीजिए.

1. $p(x) = 3x^2 - x - 5$ at $x = 2$
2. $p(m) = 4m^2 - 5m + 6$ at $m = 0$
3. $p(n) = 2n^3 - 3n - 2$ at $n = 1$
4. $p(a) = 3a^3 - 4a^2 + 2$ at $a = 1$ and -2
5. $p(t) = 4t^2 + 2t - 6$ at $t = -1$.

अभ्यास

1. कोई भी पाँच बीजगणितीय व्यंजक लिखिए.
2. सजातीय पदों का समूह बनाइए।
   $5x, 4xy, -3x^2, 10x^2y, 12x^2y^2, -x, 7x^2, 4xy^2, -5x^2y, -3xy, 2x, 4x^2, -x^2y^2, xy.$
3. निम्न में से कौनसे एकपदी, द्विपदी या त्रिपदी है पहचानिए ?
   (i) $3m - 2n$ (ii) $2xy$ (iii) $4x - 3xy - 2$ (iv) $5x^2 + 3xy$
   (v) $4pqr$ (vi) $ax + by - cxy$
4. $5x^2 - 4xy + 2y^2$ को $3x^2 + 2xy - y^2$ में से घटाइए।
5. $2x^2 - 4xy + 3y^2$ तथा $3x^2 + 2xy - y^2$ के योग को $4x^2 - 3xy - 2y^2$ तथा $-3x^2 + xy + 2y^2$ के योग में से घटाइए।
6. $(3xy - 2x)$ तथा $\left(4x+\sqrt{x}y\right)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
7. $(5a^2 - ab + b^2)$ तथा $(a^2 + 6ab + 3b^2)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
8. नीचे दिए गए बहुपदियों केघात को ज्ञात कीजिए।
   (i) $3x^2 - xy + y$ (ii) $m^2 - mn + n^3$ (iii) $3x^2 + y^2 - 3xyz$
   (iv) $a^3 - a^2b^2 + b^2$ (v) $x^5 - 3x^2y^2$ (vi) $x^5 - 4z - y^6$
9. निम्नलिखित बहुपदियों के मूल्य $p(0), p(1), p(2), p(-1)$ तथा $p(-2)$ के लिए ज्ञात कीजिए।
   (i) $p(x) = x^2 - 4x + 2$ (ii) $p(m) = 3m^2 - 4$ (iii) $p(y) = y^3 - 3y^2 - 5$
   (iv) $p(t) = 4t^2 - 3t - 2$ (v) $p(n) = n^3 - 4n - 3$ (vi) $p(x) = 3x - 4 + 5x^2$

सारांश

1. चरराशि को दर्शाने के लिए हम किसी भी अक्षर का उपयोग कर सकते है - $a, b, c, m, n, p, q, s, t, x, y, z$ आदि।
2. चरराशियों के मूल्य स्थिर नहीं होते है स्थितियों के अनुसार बदलते रहते है।
3. सजातीय पद वे है जिनका चरराशियाँ और घातांक समान होते है।
4. एक पद वाले बीजगणितीय व्यंजक को एक पदी कहते है।
   दो विजातीय पद वाले बीजगणितीय व्यंजक को एक पदी कहते है।
   तीन पद वाले बीजगणितीय व्यंजक को एक पदी कहते है।
   तीन से अधिक पद वाले बीजगणितीय व्यंजक को एक पदी कहते है।
5. बहुपदियों को घात के अनुसार रैखिक बहुपदि द्विघातीय बहुपदी तथा त्रिघातीय बहुपदी होते है।
6. वास्तविक संख्या 'a' बहुपदी $p(x)$ का शून्य होता है यदि $p(a) = 0$ इसमें 'a' को भी बहुपदी का शून्य कहते है।

अध्याय

2.2 विशेष गुणा तथा गुणनखण्ड

2.2.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- सर्वसमिका की सहायता से दी गई संख्याओं के वर्ग ज्ञात करेंगे.
- सर्वसमिका की सहायता से प्रश्नों को हल करेंगे.
- गुणनखण्ड (साधारणतया)
- उभयनिष्ठ सामान्य खण्ड से गुणनखण्ड
- पदों के समूह से गुणनखण्ड
- सर्वसमिका की सहायता से गुणनखण्ड

2.2.1 परिचय

पूर्व अध्याय में हमने बीजगणितीय व्यंजकों को जोडना सीखा।

उदाहरण के लिए $3x$ से $5x$ को जोडने पर हमें $3x + 5x = 8x$ प्राप्त होगा और $5x$ को $3y$ से जोडने पर हमें $5x + 3y$ प्राप्त होगा।

बीजगणितीय व्यंजकों को जोड या घटान करने के लिए पहला चरण सजातीय पदो को एकत्रित करना है। हमें यह याद रखना है कि विजातीय पदों को नहीं जोडा जा सकता वे अलग ही रहेंगे। इसलिए $3x^2$ और $6x^2$ से हमें $9x^2$ तथा $5x + 3x^2$ हमेशा $5x + 3x^2$ ही रहेगा।

उसी प्रकार $5xy + 8x + 9y + 3xy$ लीजिए इसमें हम $5xy$ और $3xy$ को जोड सकते है जिससे हमें $8xy$ प्राप्त होता है और दूसरे पर वैसे ही रहेंगे इसलिए व्यंजक $8xy + 8x + 94$ होगा।

हम जानते है कि बीजगणितीय व्यंजको में अक्षर (चरराशियाँ) और संख्याओं को जोड या गुणा कर सकते है।

उदाहरण के लिए $y \times y = y^2$

$x \times y = xy$

$5x \times 3y = 15xy$

और $5(x + y) = 5x + 5y$

चलिए कुछ और उदाहरण देखेंगे।

(i) $x(x+4) = x^2 + 4x$

(ii) $(m+3)(m+n) = m \times (m+n) + 3 \times (m+n)$

$= m^2 + mn + 3m + 3n.$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. इन्हें हल कीजिए

(i) $(m+3)(m+3)$

(ii) $(y-3) \times (y-3)$

(iii) $(p+5) \times (p-5)$

(iv) $(2m+4) \times (3m+6)$

(v) $(x-5) \times (3y-6)$

(vi) $(5x-2y) \times (3y-2x)$

2.2.2 बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ

यहाँ कुछ सामान्य गुणनफल जिसमें अक्षर तथा संख्याएँ उपयोगी होती है जो आगे की गणना में उपयोगी होंगे चलिए अब हम इन बीजगणितीय व्यंजको को संक्रियाओं में पहचानने का प्रयत्न करेंगे। जिन्हें बीजगणितीय सर्वसमिका कहते है। ये सामान्य रूप में और अक्षर तथा संख्याओं का चयन करते है।

बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को प्राप्त करने के लिए कुण गुणनफल करेंगे।

चलिए अब देखेंगे $(a+b) \times (a+b)$ यहाँ a और b कोई भी अक्षर होंगे वे m & n या x & y या p & q आदि....

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a \times (a+b) + b(a+b)\\ &= (a \times a) + (a \times b) + (b \times a) + (b \times b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\end{aligned}$$

जो कि हमें $a^2 + 2ab + b^2$

$\boxed{\therefore (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2} \Rightarrow \boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

उसी प्रकार अब हम $(a-b)$ को $(a-b)$ से गुणा करेंगे

i.e. $(a-b) \times (a-b)$

$$\begin{aligned}(a-b) \times (a-b) &= a(a-b) - b(a-b)\\ &= (a \times a) - (a \times b) - (b \times a) + (b \times b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\end{aligned}$$

हमें $a^2 - 2ab + b^2$ प्राप्त होगा।

$$\boxed{\therefore\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

इसलिए $(a - b)\ (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$.

चलिए अब हम $(a + b) \times (a - b)$ का मूल्य ज्ञात करेंगे

$$(a + b)\ (a - b) = a \times a - b) + b \times (a - b)$$

$$= (a \times a) - (a \times b) + (b \times a) - (b \times b)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.}$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. मूल्यों को ज्ञात कीजिए

(i) $(x + y)\ (x + y)$

(ii) $(x - z) \times (x - z)$

(iii) $(c - d) \times (c + d)$

(iv) $(m - n) \times (m - n)$

इन सर्वसमिकाओं के आधार पर कुछ प्रश्नों को हल करेंगे।

उदाहरण 1 : $(5x + 3)^2$ का गुणनफल उचित सर्वसमिका द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : $(5x + 3)^2$ यह $(a + b)^2$ के रूप में है यहाँ, $a = 5x$ और $b = 3$

a & b की जगह मूल्यों को प्रतिस्थापित करने पर

$$(5x + 3)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + (3)^2 \qquad [\because\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$

$$\therefore\ (5x + 3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$$

उदाहरण 2 : $(y - 8)\ (y - 8)$ का गुणनफल उचित सर्वसमिका से कीजिए।

हल: $(y - 8)\ (y - 8)$ अर्थात् $(y - 8)^2$

तथा हम जानते है कि $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ में मूल्यों को प्रतिस्थापित करने पर

$$(y - 8)\ (y - 8) = (y - 8)^2 = y^2 - 2(y)\ (8) + 8^2$$

$$= y^2 - 16y + 64$$

$$\therefore\ (y - 8)^2 = y^2 - 16y + 64$$

उदाहरण 3 : 102×98 का गुणनफल उचित सर्वसमिका द्वारा ज्ञात कीजिए

हल: 102×98

$$102 \times 98 = (100 + 2)\ (100 - 2)$$

[सूत्र $(x + y)\ (x - y) = x^2 - y^2$]

$$102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2)$$
$$= (100)^2 - (2)^2$$
$$= 10,000 - 4 \qquad [(x + y)(x - y) = x^2 - y^2]$$
$$= 9,996$$

उदाहरण 4 : $987^2 - 13^2$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :

$(987)^2 - (13)^2 = (987 + 13)(987 - 13)$ ($\because$ हम जानते है $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$)

$$= 1000 \times 974$$
$$= 9,74,000.$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. उचित सर्वसमिकाओं को उपयोग से मूल्य ज्ञात कीजिए

(i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 297×303

(iii) $(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2$ (iv) $(5x - 2)(5x - 2)$

(v) 1001×1001 (vi) 80.5×79.5

(vii) $\left(\frac{2}{3}m - \frac{3}{2}n\right)^2$ (viii) $(xy + 3z)^2$

(ix) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

II. $a - b$, का मूल्य ज्ञात कीजिए यदि $a + b = 5$ और $ab = 4$

III. एक वर्गाकर खेत की भुजा $(5x + 3)$ मी. हो तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2.2.3 बीजगणितीय सर्वसमिका के वर्ग को ज्ञात करना

उदाहरण 5 : $(501)^2$ का मूल्य सर्वसमिका की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल :

$$(501)^2 = (500 + 1)^2$$
$$= (500)^2 + 2(500)(1) + (1)^2 \qquad [(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$$
$$= 250000 + 1000 + 1$$
$$= 2,51,001$$
$$\therefore (501)^2 = 2,51,001.$$

उदाहरण 6: 290^2 मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : $(290)^2 = (300-10)^2$

$= (300)^2 - 2(300)\,(10) + (10)^2$

$= 90{,}000 - 6000 + 100$

$= 84{,}100.$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्नलिखित के मूल्यों को उचित सर्वसमिका से ज्ञात कीजिए।.

(i) $(890)^2$ (ii) $(405)^2$ (iii) $(999)^2$ (iv) $(710)^2$

(v) $(302)^2$ (vi) $(801)^2$ (vii) $(404)^2$

2.2.4 बीजगणितीय व्यंजको के गुणनखण्ड

हम जानते है कि प्राकृतिक संख्याओं के गुणनखण्ड कैसे लिखे जाते है? जैसे कि 12, 20, 81 आदि...।

12 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6 & 12 तथा 24 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

उसी प्रकार बीजगणितीय व्यंजको के भी गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते है।

इन उदाहरणों को देखिए

(i) $3xy = 3 \times x \times y$

$= (3 \times x) \times y$

$= 3 \times (x \times y)$

$= (3 \times y) \times x$

यहाँ $3xy$ के गुणनखण्ड $3, x, y, 3x, 3y, 3xy$. होंगे

(ii) $5x^2y = 5 \times x \times x \times y$

$= (5x^2) \times y$

$= 5\,(x^2y)$

$= (5y)x^2.$

यहाँ $5x^2y$ के खण्ड $5, x, y, 5x, 5y, 5x^2, x^2y, xy, 5xy, 5x^2y$ होंगे।

घटको को ज्ञात करने की प्रक्रिया जिसमें घटकों के गुणनफल से पूर्व संख्या प्राप्त हो तो उसे ''गुणनखण्ड'' कहते है।

2.2.5 बीजगणितीय व्यंजको के खण्ड कैसे ज्ञात करेंगे?

चलिए $4x^2 + 8$ को देखिए

* यहाँ दो पद है अर्थात् $4x^2$ & 8

- * क्या उनमें कोई सामान्य खण्ड है?
- * दूसरा गुणनखण्ड 8 को हम 4×2 के रूप में लिख सकते है
- * इसलिए 4 सामान्य खण्ड है जो दोनो में पाया गया है।
- * अब हम दोनों के खण्ड इस प्रकार ज्ञात कर सकते है।

$$4x^2 + 8 = (4\times x \times x) + (4 \times 2)$$
$$= 4(x^2 + 2)$$

जाँच: खण्डित व्यंजको को गुणा कीजिए और देखिए की आपको मूल व्यंजक प्राप्त होता है या नहीं।

उदाहरण 7: $4y^3 + 2y^2$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

- * यहाँ दो पद है $4y^3$ & $2y^2$
- * दोनों में उभयनिष्ठ खण्ड 2 तथा y^2 होगा।
- * इसलिए सबसे बड़ा उभयनिष्ठ खण्ड $2y^2$ होगा
- * अब हम व्यंजक को खण्डित कर सकते है $4y^3 + 2y^2 = 2y^2(2y + 1)$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. गुणनखण्डो को ज्ञात कीजिए।

(a) 73 (b) 120 (c) 200 (d) 100 (e) 91

II. दिए गए पदो के उभयनिष्ठ खण्डों को ज्ञात कीजिए।

(i) $81x,\ 18x^2$
(ii) $3m^2, 7m, 6m^3$
(iii) $4x^2y, 10y^2z$
(iv) $12x^2yz^2, 18xy^2z, 16xyz^2$
(v) $4a^2b^2, 6ab^2, 10a^3b^3$
(vi) $10xy^2, 14x^2y, 20x^3y^2, 18x^3y$

यहाँ हमने म.स.भा की म.स.भा की धारणा का उपयोग किया है इसलिए बीजगणितीय व्यंजकों का गुणनखण्ड अर्थात् दो संख्याओं का म.स.भा.

चलिए अब हम इसे उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण 8 : $24pq^2 - 16p^2q^2$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : पहले दोनो पदों का $24pq^2$ & $16p^2q^2$ म.स.भा ज्ञात करेंगे

$$24\, pq^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times p \times q \times q$$

$16p^2q^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q$

महत्तम सामान्य भाजक $= 2\times2\times2\times p \times q \times q$

$= 8pq^2.$

$\therefore \quad 24pq^2 - 16p^2q^2 = 8pq^2\ (3 - 2p).$

उदाहरण 9: $8x^2y^3 + 10x^3y^2$. के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $8x^2y^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times y$

$10x^3y^2 = 2 \times 5 \times y \times y \times x \times x \times x$

म.स.भा. $= 2 \times x \times x \times y \times y$

$= 2x^2y^2$

$\therefore \quad 8x^2y^3 + 10x^3y^2 = 2x^2y^2\ (y + 5x).$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्नलिखित के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $8xy + 6y^2$ (ii) $9m^2n - 6n^2m$

(iii) $x^2y + y^2x - x^2$ (iv) $6x^7 + 3x^4 - 15x^3$

(v) $a^3b^8 - 7a^{10}b^4 + 2a^5b^2$ (vi) $2x(x^2 + 1)^3 - 16(x^2+1)^5$

उदाहरण 10: $(25p^2 - 49q^2) \div (5p + 7q)$

हल : यहाँ $25p^2 - 49q^2$ को हम $(5p)^2 - (7q)^2$ लिखेंगे।

क्या आपको $x^2 - y^2$ सर्वसमिका याद है?

यहाँ $x = 5p \quad y = 7q$

$$\therefore \quad \frac{25p^2 - 49q^2}{(5p+7q)} = \frac{(5p)^2 - (7q)^2}{(5p+7q)}$$

$$= \frac{(5\cancel{p}+7\cancel{q})(5p-7q)}{(5\cancel{p}+7\cancel{q})}$$

$$= 5p - 7q.$$

ऊपरी दो उदाहरणों में यह देखा गया कि गुणनखण्डों की सहायता से हम बीजगणितीय व्यंजको को सरल रूप से लिख सकते है और उसे सरल कर सकते है।

अब तक हमने यह समझा है कि खण्ड क्या है और बीजगणितीय व्यंजकों के खण्ड कैसे ज्ञात करते है।

चलिए अब हम गुणनखण्डों की विधियों की चर्चा करेंगे.

I. उभयनिष्ठ खण्ड की विधि से

उदाहरण 11: $2x^4 + 4x^2 + 8x^3$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हमें 3 पदों के उभयनिष्ठ खण्ड ज्ञात करेंगे।

उसके लिए में प्रत्येक पद रूढी गुणनखण्ड के गुणनफल के रूप में लिखेंगे।

इसलिए

$2x^4 = 2 \times x \times x \times x \times x$

$4x^2 = 2 \times 2 \times x \times x$

$8x^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x$

3 पदों का महत्तम समापर्त्य भाजक

$2 \times x \times x$ अर्थात् $2x^2$

म.स.भा $2x^2$, लेने पर हमें प्राप्त होगा

$$2x^4 + 4x^2 + 8x^3 = 2x^2\ (x^2 + 2 + 4x)$$

$$= 2x^2\ (x^2 + 4x + 2).$$

उदाहरण 12: $8xy + 4$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $8xy = 2 \times 2 \times 2 \times x \times y$

$4 = 2 \times 2$

दोनों पदों का महत्तम समापवर्त्य भाजक क्या होगा?

$2 \times 2 = 4$ को लेने पर, हमें प्राप्त होगा।

$$8xy + 4 = 4(2xy + 1)$$

$$\begin{tikzcd} 8xy + 4 \arrow[r, bend left, "\text{गुणनखण्ड}"] & 4(2xy+1) \arrow[l, bend left, "\text{विस्तार}"] \end{tikzcd}$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. उभयनिष्ठ खण्डों से गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $4y^3 + 2y^2$

(ii) $3xyz + 16x^2y$

(iii) $5l^2m - 25m^2n + 10lm$

(iv) $8x^2 + 10x^2y - 20xy^2$

II. पदों को समूहबद्ध करने से

उदाहरण निरीक्षण कीजिए

उदाहरण 13 : $12a - n + na - 12$

इस व्यंजक में सभी पदों में कोई भी उभयनिष्ठ खण्ड नहीं है इस स्थिति में हमें पदों को समूहबद्ध करेंगे। समूहबद्ध में हम 3 चरणों पर ध्यान देंगे। 1) दिए गए व्यंजकों को इस प्रकार समूहबद्ध करेंगे जिससे उभयनिष्ठ खण्ड प्राप्त हो। 2) प्रत्येक समूह के खण्ड ज्ञात कीजिए। 3) प्रत्येक समूह में से उभयनिष्ठ खण्ड लेंगे।

उदाहरण में पहला तथा अंतिम पद को ध्यान से देखने पर हमें उभयनिष्ठ खण्ड "12" है। और उसी प्रकार दो या तीसरे पद में उभयनिष्ठ खण्ड "n" है। इसलिए पदों को फिर से समूहबद्ध करेंगे।

$$\begin{aligned} 12a - n + na - 12 &= 12a - 12 - n + na \\ &= (12a - 12) + (na - n) \\ &= 12(a - 1) + n(a - 1) \end{aligned}$$

फिर से हमने देखा कि (a - 1) उभयनिष्ठ खण्ड है

इसलिए $(a - 1)(12 + n)$ प्राप्त होगा।

$\therefore$ $12a - n + na - 12$ के खण्ड $(a - 1)$ & $(12 + n)$ होंगे।

चलिए अब हम एक और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 14 : $xy + 6 + 3x + 2y$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

हल : इस प्रश्न में चार पद है।

क्या उनमें कोई उभयनिष्ठ खण्ड है?

इसमें कोई भी उभयनिष्ठ खण्ड नही है यदि हम ध्यान से देखेंगे की पहले तथा तीसरे पद में "x" उभयनिष्ठ खण्ड है उसी प्रकार दूसरे तथा चौथे पद में 2 उभयनिष्ठ खण्ड है।

इन पदों को समूहबद्ध करने के बाद

$$\begin{aligned} xy + 6 + 3x + 2y &= xy + 3x + 6 + 2y \\ &= x(y + 3) + 2(3 + y) \\ &= x(3 + y) + 2(3 + y) \end{aligned}$$

इनमें $(3 + y)$ उभयनिष्ठ खण्ड है इसलिए हमें $(3 + y)(x + 2)$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ $xy + 6 + 3x + 2y$ के खण्ड $(3 + y)$ तथा $(x + 2)$ होंगे।

* उपरी उदाहरणों को विभिन्न प्रकार से समूह बनाकर हल करने का प्रयत्न कीजिए।

उदाहरण 15 : $a^2 + bc + ab + ac$ को समूहबद्ध कर खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $a^2 + bc + ab + ac$ के पदों को समूहबद्ध करने पर हमें प्राप्त होगा।

$= a^2 + ab + ac + bc$

$= a(a + b) + c(a + b)$

$= (a + b)(a + c)$ [$\because$ यहाँ कौनसा खण्ड उभयनिष्ठ है?]

उदाहरण 16: $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ व्यंजक में

पदों को समूहबद्ध करने पर हमें प्राप्त होता है

$ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$

$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$

$= (x^2 + y^2)(a + b)$ [$\because$ क्यों?]

उदाहरण 17: $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया व्यंजक $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.

$= abx^2 + y^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy$

पदों को व्यवस्थित करने पर

$= (abx^2 + a^2xy) + (aby^2 + bxy)$

$= ax(bx + ay) + by(ay + bx)$

$= ax(bx + ay) + by(bx + ay)$

$= (bx + ay)(ax + by)$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. नीचे दिए गए व्यंजको को समूहबद्ध कर खण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $xy - pq + qy - pz$

(ii) $x^2 + 9y + 9x + xy$

(iii) $7ab - 12bc - 7ax + 12cx$

(iv) $4xy - 7y + 12x - 21$

(v) $2x^2 + ay - ax^2 - 2y$

III. मानक सर्वसमिकाओं का उपयोग

चलिए अब हम खण्डों को मानक सर्वसमीकाओं से हल करने के लिए कुछ उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 18 : $x^2 + 8x + 16$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए व्यंजक को देखने पर उसमें 3 पद दिखेंगे और सभी पद धनात्मक है और पहला तथा अंतिम पद पूर्ण वर्ग है क्या आपको प्रथम सर्वसमिका याद है?

यहाँ $x^2 + 8x + 16$, $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में है

जहाँ $a = x$ तथा $b = 4$

$x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$ $[a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

$= (x + 4)^2$

$= (x + 4)(x + 4)$

$\therefore\ x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$.

उदाहरण 19 : $81m^2 - 100$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : इस प्रश्न को देखने पर दोनों में कोई भी उभयनिष्ठ पद नहीं है। लेकिन हम देखते है दोनों भी पूर्ण वर्ग पद है जिसमें घटान का चिन्ह है।

इस सूचना के अनुसार हम सर्वसमिका $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ के बारे में सोंचेगे।

$81m^2$ तथा 100 को वर्गों में कैसे लिखेंगे?

$81m^2 - 100 = (9m)^2 - (10)^2$ Here $x = 9m$ तथा $y = 10$

$= (9m + 10)(9m - 10)$

$\therefore\ 81m^2 - 100 = (9m + 10)(9m - 10)$

उदाहरण 20: $9x^2 - 12mx + 4m^2$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : इस प्रश्न में $9x^2$ और $4m^2$ पूर्ण वर्ग संख्याएँ है और हम लिख इसे इस प्रकार लिख सकते है।

$9x^2 = (3x)^2$ तथा $4m^2 = (2m)^2$

मध्य पद $12mx$ को इस प्रकार लिख सकते है।

$12mx = 2(3x)(2m)$

इसलिए $9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2m) + (2m)^2$

अब यह $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप में है

जहाँ $a = 3x$ तथा $b = 2m$

लेकिन हम जानते है कि $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$\therefore\ 9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2m) + (2m)^2$

$= (3x - 2m)^2$ [x & y का मूल्य $(a - b)^2$ में प्रतिस्थापित करने पर]

$9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x - 2m)(3x - 2m).$

उदाहरण 21: $16x^2 + 8x + 1$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $16x^2 + 8x + 1 = (4x)^2 + 2(4x)(1) + (1)^2$

यह $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में है

जहाँ $a = 4x$ & $b = 1$

$6x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)^2$ $[\because\ a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

$16x^2 + 8x + 1 = (4x + 1)(4x + 1).$

उदाहरण 22: $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : हमारे पास $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$

यह $a^2 - b^2$ के रूप में है

जहाँ $a = x + 1$ & $b = x - 1$

इसलिए

$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x + 1 + x - 1)(x + 1 - x + 1)$ $[\because\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$= (2x)(2)$

$= 4x.$

उदाहरण 23: $9a^2 - 30a + 25$ के खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : हम इसे $9a^2 - 30a + 25$ के रूप में लिख सकते है।

$$9a^2 - 30a + 25 = (3a)^2 - 2(3a)(5) + (5)^2$$

$$= (3a - 5)^2 \qquad [\because \text{क्यों ?}]$$

$$= (3a - 5)(3a - 5)$$

$\therefore\ 9a^2 - 30a + 25 = (3a - 5)(3a - 5)$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. मानक सर्वसमिकाओं के उपयोग से दिए गए व्यंजको के खण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $x^2 + 10x + 25$
(ii) $4m^2 - 12mn + 9x^2$
(iii) $y^2 - 9$
(iv) $4p^2 - 20pq + 25q^2$
(v) $16x^2 - 36y^2$
(vi) $1 - 25(2a - 5b)^2$
(vii) $m^4 - n^4$ (Hint : $m^4 = (m^2)^2$, $n^4 = (n^2)^2$)

अभ्यास

1. निम्नलिखित व्यंजको के खण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 + 6x$
(ii) $6y^2 + y^3 + 6y^4$
(iii) $7y^2 + 35z^3y$
(iv) $lx^2 + mx + nx^2$
(v) $3x^3 + 6x^2 + 9x^4$

2. उचित सर्वसमिका की सहायता से खण्ड ज्ञात कीजिए

(i) $x^2 - 8x + 16$
(ii) $2x + 1 + 100x^2$
(iii) $72x^2 - 8$
(iv) $x^2 - 10x + 25$
(v) $\dfrac{m^2}{n^2} - 36$

3. खण्ड ज्ञात कीजिए

(i) $c^2 - 2cd + d^2$
(ii) $a^2b^2 - 144$
(iii) $5x^2 - 80$
(iv) $p^2q^2 + 10pq + 25$
(v) $4ab - 5a - 12b + 15$

4. सर्वसमिका की सहायता से दिए गए संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 890 (ii) 605 (iii) 99 (iv) 510 (v) 108

5. खण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $6x^7 + 3x^4 - 9x^3$ (ii) $z^2 - 10z + 21$

(iii) $x^2 + 14x + 49$ (iv) $6w^4 - 7w + 3w^3 - 14w^2$

(v) $2y^6z - y^4z^{10} + 3y^2z^2$

सारांश

1. गुणनखण्ड अर्थात् दिए गए व्यंजको को खण्डो के गुणा के रूप में लिखने की प्रक्रिया होती है।
2. मुख्य बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ
   - (i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   - (iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
3. व्यंजक जिन्हें $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ के रूप में परिवर्तित कर सकते है उन्हें सर्वसमिकाओं के उपयोग से गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते है।
4. $(a + b)^2$ $(a - b)^2$ की सहायता से हम संख्याओं के वर्ग ज्ञात कर सकते है।

अध्याय 2.3

रैखिक समीकरण

2.3.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- दैनिक जीवन की स्थितियों को एक चर राशी तथा दो चर राशी वाले रैखिक समीकरणों में दर्शा सकते है।
- एक चर राशी वाले रैखिक समीकरणों को हल करेंगे।
- दो चर राशी वाले रैखिक समीकरणों को हल करेंगे।

2.3.1 परिचय

किरण तथा माधवी संख्याओं से खेल रहे है किरण माधवी से कहती है कि ''मैं ने एक संख्या सोची है। उसे मैं दुगुना कर उस में से 5 निकालने पर हमें 45 प्राप्त होगा। मैंने कौनसी संख्या सोची? हमें संख्या के बारे में नहीं पता इसलिए इसे हम 'x' अक्षर द्वारा दर्शायेंगे।

मानलो संख्या 'x' है उसका दुगुना "$2x$" होगा।

तत्पश्चात 5 निकाला गया अर्थात् '$2x$' में से 5 घटाया गया

घटान के बाद संख्या $(2x - 5)$, होगी लेकिन किरण के अनुसार वह 45 है।

$\Rightarrow \quad 2x - 5 = 45$

2.3.2 एक चर राशी वाले रैखिक समीकरण

रोहन को 2कि. ग्रा. सेब खरीदने के लिए ₹ 50 दिए गए उसमें से उसे ₹ 10, वापस मिले तो बताइए सेब का एक किलो का मूल्य कितना होगा?

$2x + 10 = 50$ (समीकरण)

LHS (Left Hand side) (बायीं ओर) $= 2x + 10$

RHS (Right Hand side) (दायीं ओर) $= 50$

एक चर राशी वाले रैखिक समीकरण ऐसे ही होते है जैसे बीजगणितीय व्यंजक जिसमें एक घात वाले पद होंगे।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. इनमें से कौनसे रैखिक समीकरण है?

(i) $3x + 7 = 8$ (ii) $4x - 5y = 10$ (iii) $6x^2 - 7xy = 20$ (iv) $xy + yz = 12$

(v) $4 = 2p - 3$ (vi) $7p - 3q = 11$

2.3.2 एक चर राशी वाले रैखिक समीकरणों का हलः

समीकरण हल चर राशी का वह मूल्य होता है जिसमें LHS और RHS समान होंगे। इसी मूल्य को समीकरण के मूल भी कहते है।

समीकरण का संतुलन

समीकरण के संतुलन में यह सिद्धांत लागू करते है कि जो क्रिया दोनो ओर अर्थात् LHS तथा RHS में या तो जोड, घटान, गुणा या भाग हो सकता है। नीचे दिए गए उदाहरण में देखिए।

उदाहरण 1 : i) $x + 3 = 9$, ii) $y - 4 = 7$ समीकरणों को हल कीजिए

हल : i) $x + 3 = 9$ दोनों ओर –3 घटाने पर

$\Rightarrow \quad x + 3 - 3 = 9 - 3$

$\Rightarrow \quad x + 0 = 6$

$\Rightarrow \quad x = 6$

ii) $y - 4 = 7$ दोनों ओर + जोडने पर

$y - 4 + 4 = 7 + 4$

$\Rightarrow \quad y - 0 = 11$

$y = 11.$

उदाहरण 2 : $m - 8 = 9$ को हल कीजिए

हल : $m - 8 = 9$ ...(1)

दोनो ओर + 8 जोडने पर

$\Rightarrow \quad m - 8 + 8 = 9 + 8$

$\Rightarrow \quad m + 0 = 17$

$\Rightarrow \quad m = 17.$

जाँच: LHS की जाँच

$m - 8 \quad [\because m = 17]$

$17 - 8 = 9$ RHS

$\therefore$ LHS = RHS

उदाहरण 3 : $5x = -40$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया $5x = -40$ ...(1)

दोनो ओर 5 से भाग करने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{5x}{5} = -\frac{40}{5} \qquad \ldots (2)$$

$$\Rightarrow \quad x = -8$$

जाँच: $x = -8$ का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर क्या LHS = RHS प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 : $\frac{p}{7} = 4$ हल कीजिए।

हल: दिया गया $\frac{p}{7} = 4$ ... (1)

दोनो ओर 7 से गुणा करने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{7} \times 7 = 4 \times 7 \qquad \ldots (2)$$

$$\Rightarrow \quad p = 28.$$

उदाहरण 5 : $3y + 37 = 8$ समीकरण को हल कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण $3y + 37 = 8$ ... (1)

दोनों ओर 37 घटाने पर

$$\Rightarrow \quad 3y + 37 - 37 = 8 - 37$$

$\Rightarrow \quad 3y = -29$ दोनों ओर 3 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{3y}{3} = \frac{-29}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-29}{3}$$

आपने देखा कि हल $\left(\frac{-29}{3}\right)$ एक परिमेय संख्या है।

जाँच : LHS $\Rightarrow$ $y + 37$

$$3\left(\frac{-29}{3}\right) + 37$$

$$\Rightarrow -29 + 37$$

$$\Rightarrow 8 \quad \text{RHS.}$$

$$\therefore \quad \text{LHS} = \text{RHS.}$$

अब तक देखे गए सभी उदाहरणों में हमने देखा कि RHS एक संख्या है लेकिन आगे ऐसा आवश्यक नहीं है वह चर राशी के साथ व्यंजन होगा।

उदाहरण 6 : $2x - 4 = x + 6$ को हल कीजिए

हल : $2x - 4 = x + 6$

दोनों ओर 4 जोडने पर

$\Rightarrow \quad 2x - 4 + 4 = x + 6 + 4$

$\Rightarrow \quad 2x = x + 10$

दोनो ओर $-x$ जोडने पर

$\Rightarrow \quad 2x - x = x - x + 10$

$\Rightarrow \quad x = 10.$

उदाहरण 7 : $(p - 3) = 3(p - 2).$

हल : $4(p - 3) = 3\,(p - 2)$

$\Rightarrow \quad 4p - 12 = 3p - 6$

दोनों ओर 12 जोडने पर

$\Rightarrow \quad 4p - 12 + 12 = 3p - 6 + 12$

$\Rightarrow \quad 4p = 3p + 6$

दोनो ओर $3p$ घटाने पर

$\Rightarrow \quad 4p - 3p = 3p - 3p + 6$

$\Rightarrow \quad p = 6.$

उदाहरण 8 : $5(x + 3) - 2(3 - 2x) = 3(x + 6) - 4(5 - x)$ को हल कीजिए

हल : LHS : $5(x + 3) - 2(3 - 2x)$

$\Rightarrow \quad 5x + 15 - 6 + 4x$

$\Rightarrow \quad 9x + 9$

RHS :

$3(x + 6) - 4(5 - x)$

$\Rightarrow \quad 3x + 18 - 20 + 4x$

$\Rightarrow \quad 7x - 2.$

$\therefore\ 9x + 9 = 7x - 2$

दोनों ओर 9 घटाने पर

$\Rightarrow$ $9x + 9 - 9 = 7x - 2 - 9$

$\Rightarrow$ $9x = 7x - 11.$

$7x$ को दोनो ओर घटाने पर

$\Rightarrow$ $9x - 7x = 7x - 7x - 11$

$\Rightarrow$ $2x = -11$

दोनो ओर 2 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-11}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11}{2}.$$

अब चरराशियाँ हर में भी हो सकती है.

ऐसे कुछ उदाहरणों को देखेंगे।

उदाहरण 9 : समीकरण $\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$ ... (1)

दोनो ओर $(3x + 5)$ से गुणा करने पर

$$\frac{(5x+2)}{(3x+5)} \times (3x+5) = \frac{6}{7} \times (3x+5)$$

$$\Rightarrow 5x+2 = \frac{6(3x+5)}{7}$$

फिर से दोनो ओर 7 से गुणा करने पर.

$$7(5x+2) = \frac{6(3x+5)}{7} \times 7$$

$7(5x + 2) = 6(3x + 5)$ ... (2)

$\Rightarrow$ $35x + 14 = 18x + 30$

$\Rightarrow$ $35x - 18x = 30 - 14$

$\Rightarrow$ $17x = 16$

$$x = \frac{16}{17}.$$

अब दिए गए समीकरण (1) और (2) को देखिए

दिया गया समीकरण	समीकरण का सरलीकृत रूप
$\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$	$7(5x + 2) = 6(3x + 5)$

आपने क्या देखा? अब तक हल किए गए

1. LHS के अंश को RHS के हर से गुणा करेंगे
2. RHS के अंश को LHS के हर से गुणा करेंगे
3. प्राप्त समीकरण (1) और (2) को सम बनाइए.

$$\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7} \qquad\qquad \frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$$

$$7(5x + 2) = 6(3x + 5)$$

हल करने की इस विधि को "तिरछी गुणनफल विधि" कहते है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए

(i) $6q = 12$ (ii) $-6y = 30$ (iii) $\frac{n}{7} = -3$

(iv) $3x + 1 = 16$ (v) $3p - 7 = 0$ (vi) $6x - 3 = 3x$

(vii) $8m + 9 = 6m + 11$ (viii) $3x + 5 = 6(x + 2)$

(ix) $3(p - 4) = 5(2t - 1)$,

(x) $8(x - 3) - (6 - 2x) = 2(x + 2) - 5(5 - x)$ (xi) $\frac{3p-5}{7p+2} = \frac{2}{3}$

II. एक भिन्न का अंश हर से 4 कम है यदि दोनो में एक जोडने पर वह भिन्न $\frac{1}{2}$ होगा। उस भिन्न को ज्ञात कीजिए।

2.3.3 दो चर राशी वाले समीकरण

यदि रैखिक समीकरण में दो चर राशियाँ हो तो उसे दो चर राशी वाले समीकरण कहते है।

इसलिए कोई भी समीकरण जो $ax + by + c = 0$, को रूप में हो और जहाँ a, b और c वास्तविक संख्या हो और $a \neq 0, b \neq 0$ हो तो उन्हें दो चरराशी वाले रैखिक समीकरण कहते है।

चलिए अब हम कुछ उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 10 : एक नोट बुक का मूल्य पेन के मूल्य से दुगुना है दो चरराशी वाला रैखिक समीकरण लिखिए

हल : मानलो नोट बुक का मूल्य ` x.

पेन का मूल्य ` y

दी गई जानकारी के अनुसार.

नोट बुक का मूल्य = पेन के मूल्य का दुगुना

` $x = 2 \times$ ` y

$x = 2y$

$x - 2y = 0.$ (दोनो ओर $2y$ को घटाने पर)

उदाहरण 11 : रूपा की आयु लास्या से 3 गुना है दो चरराशी वाले समीकरण लिखिए।

हल : मानलो रूपा की आयु "x" वर्ष है तथा लास्या की आयु "y" वर्ष है

दी गई जानकारी के अनुसार

$x = 3y$

$x - 3y = 0$ (दोनो ओर $3y$ को घटाने पर)

उदाहरण 12 : निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखकर a, b तथा c के मूल्यों को बताइए।.

हल :

(i) $3x + 5y = 7$

$3x + 5y = 7$ को हम

$3x + 5y - 7 = 0$ लिख सकते है

यह अब $ax + by + c = 0$ के रूप में है

$a = 3,\ b = 5,\ c = -7$

(ii) $x - \frac{y}{3} - 8 = 0$

$1.x - \frac{1}{3}\ .\ y - 8 = 0$

$a = 1,\quad b = -\frac{1}{3},\quad c = -8.$

(iii) $7 = 2x$

$2x - 7 = 0$

$2x + 0 - 7 = 0$

$a = 2$

$b = 0$

$c = -7.$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए तथा a, b, c का मूल्य बताइए।

   (i) $3x + 7y = 9$ (ii) $-2x + 3y = 8$ (iii) $y - 5 = 0$ (iv) $7 = 3x$

   (v) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} - 7 = 0$ (vi) $5x = \frac{8}{3}$

2. निम्नलिखित कथनों को दो चर राशी वाले रैखिक समीकरण में दर्शाइए

   (i) दो संख्याओं का योगफल 27 है

   (ii) एक पेंसिल का मूल्य पेन से रू. 3 कम है

   (iii) भवानी को रेशमा से दुगुने अंक से 5 अंक अधिक प्राप्त हुए है।

2.3.4 दो चर राशी वाले रैखिक समीकरणों का हल

हम जानते है कि एक चर राशी वाले रैखिक समीकरणों का अद्‌वितीय हल होता है। दो चर राशी वाले रैखिक समीकरणों के हल को क्या कहेंगे ?

उदाहरण $3x - 2y = 5$ को देखिए

इसके हल में क्या हमें केवल एक मूल्य प्राप्त होगा या उससे अधिक ?

क्या आप कह सकते है $x = 3$ इस समीकरण का हल होगा?

$x = 3$ का मूल्य प्रतिस्थापित कर इसकी जाँच करेंगे

$$3x - 2y = 5$$

$$3(3) - 2y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 9 - 2y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 9 - 5 = 2y$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 2y$$

$$\therefore \quad y = 2$$

अर्थात् दिए गए समीकरण का हल हमें प्राप्त नहीं हुआ। इसलिए उसका हल जानने के लिए 'x' के मूल्य के अलावा "y" का भी मूल्य चाहिए।

हमें 'y' का मूल्य समीकरण से प्राप्त होता है।

$\therefore$ 'x' तथा 'y' के वह मूल्य जो समीकरण को संतुष्ट करते है $x = 3$ तथा $y = 2$.

$\therefore$ दो चरराशी वाले रैखिक समीकरणों को दो मूल्यों की आवश्यकता होती है इसलिए x तथा y के मूल्यों की कोई भी जोडी जो समीकरण को संतुष्ट करती है उन्हें उनका हल कहा जाता है।

समीकरण $3x - 2y = 5$ में $x = 3$ तथा $y = 2$ उसका हल होगा क्योंकि $x = 3$ तथा $y = 2$ से हमें।

$$\begin{aligned} \text{LHS : } & 3x - 2y \\ & 3(3) - 2(2) \\ \Rightarrow \quad & 9 - 4 \\ \Rightarrow \quad & 5 \text{ RHS.} \end{aligned}$$

हमने देखा कि $x = 3, y = 2$ समीकरण $3x - 2y = 5$ का हल है इस हल को हम क्रमित युग्म $(3, 2)$, के रूप में लिख सकेत है। हमेशा पहले 'x' का मूल्य तथा बाद में y का मूल्य लिखना चाहिए।

क्या इस समीकरण कोई और मूल्य हो सकते है?

अपनी मर्जी से कोई भी मूल्यों को चुनिए जैसे $x = 4$ और समीकरण $3x - 2y = 5$ में लगाइए

$$\begin{aligned} & 3(4) - 2y = 5 \\ \Rightarrow \quad & 12 - 2y = 5 \\ \Rightarrow \quad & 12 - 5 = 2y \\ \Rightarrow \quad & 7 = 2y \\ \therefore \quad & y = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

इसलिए $\left(4, \frac{7}{2}\right)$ समीकरण $3x - 2y = 5$ का दूसरा हल होगा।

क्या आप $3x - 2y = 5$ के और अधिक मूल्यों को ज्ञात कर सकते है $(1, -1)$ इसका और एक हल होगा इसकी जाँच कीजिए।

दो चरराशी वाले रैखिक समीकरणों के अनेक हल ज्ञात किए जा सकते है।

नोट: अनेक स्थितियों में सरलता से मूल्यों को प्राप्त करने के लिए $x = 0$ लगाकर "y"का मूल्य ज्ञात कर सकते है उसी प्रकार $y = 0$ लगाकर 'x' का मूल्य ज्ञात कर सकते है। चलिए अब हम कुछ उदाहरणों को देखे।

उदाहरण 13 : $4x - y = 3$ के विभिन्न चार हलों को ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) यदि $x = 0$, को समीकरण $4x - y = 3$ में प्रतिस्थापित करने पर

$$4(0) - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad 0 - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad y = -3$$

$\therefore$ हल $(0, -3)$.

(ii) यदि $x = 1$

$$4(1) - y = 3$$
$$4 - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad -y = 3 - 4$$
$$\Rightarrow \quad y = 1$$

$\therefore$ हल $(1, 1)$.

(iii) यदि $x = -1$

$$4(-1) - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad -4 - y = 3$$
$$\Rightarrow \quad -y = 3 + 4$$
$$\Rightarrow \quad -y = 7$$
$$y = -7$$

$\therefore$ हल $(-1, -7)$.

उदाहरण 14 : समीकरण $x - 2y = 4$ के कौनसे हल है जाँच कीजिए

(i) $(4, 0)$ (ii) $(0, -2)$ (iii) $(2, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

हल : समीकरण $x - 2y = 4$ में LHS $x - 2y$ तथा RHS 4 है.

(i) $(4, 0)$ को समीकरण $x - 2y = 4$ में $x = 4$, $y = 0$ को प्रतिस्थापित करने पर

$$4 - 2(0) = 4$$
$$4 - 0 = 4$$
$$4 = 4 \text{ (RHS)}.$$

$\therefore$ $(4, 0)$ या $x = 4$ और $y = 0$ समीकरण $x - 2y = 4$ का हल है।

(ii) (0, –2)

समीकरण $x - 2y = 4$ में $x = 0$ तथा $y = -2$ को प्रतिस्थापित करने पर

$$0 - 2(-2) = 4$$

$$4 = 4 \quad (\text{RHS}).$$

$\therefore \quad x - 2y = 4$ समीकरण का हल (0, –2) है।

(iii) (2, 0)

$x = 2, \; y = 0$ को समीकरण में प्रतिस्थापित करना है

LHS $x - 2y = 4$

$\therefore \quad 2 - 2(0) = 4$

$\Rightarrow \quad 2 \neq 4 \quad (\text{RHS}).$

$\therefore$ (2, 0) हल नहीं हो सकता

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$x = \sqrt{2}, \; y = 4\sqrt{2}$ को समीकरण $x - 2y = 4.$ में लगाने पर

LHS :

$$\sqrt{2} - 2(4\sqrt{2})$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} - 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad -7\sqrt{2} \neq 4(\text{RHS})$

$\therefore \quad (\sqrt{2}, \; 4\sqrt{2})$ समीकरण के हल नहीं है। $x - 2y = 4.$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्न समीकरणों के तीन विभिन्न क्रमित युग्मों को ज्ञात कीजिए।

   i) $5x + 2y = 10$ (ii) $-4x + 3y = 12$ iii) $2x + 3y = 7$

2. इनमें से कौनसे $2x - y = 6$ समीकरण के हल है। या नहीं है?

   i) (3, 0) ii) (0, 6) iii) (2, –2) iv) $(\sqrt{3}, 0)$

3. $3x + 2y = K.$ तथा $x = 1$ और $y = 2$ हो तो 'K' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

अभ्यास

1. निम्न समीकरणो को हल कर उत्तर की जाँच कीजिए।

   (i) $7 - p = 6$ (ii) $2b - 5 = 3$ (iii) $16 - 26 - x$ (iv) $3(x + 2) = 27$

   (v) $by + 4 = 5y - 4$ (vi) $3(x - 3) = 5(2x + 1)$

2. 15 साल बाद मेरी की आयु वर्तमान आयु की 4 गुना हो जाएगी उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

3. निम्न समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखकर a, b तथा c के मूल्यों को लिखिए।

   (i) $3x + 4xy - 7 = 0$ (ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7$ (iii) $\frac{y}{7} = 3x$ (iv) $2x = -7y$

4. निम्नलिखित कथनों को दो चर राशी वाले रैखिक समीकरण लिखिए।

   एक पेंसिल का मूल्य रू.8 तथा पेन का मूल्य रू.15 हो तो पेंसिल को खरीदने के लिए दीक्षिता ने रू. 140 पेन तथा पेंसिल को खरीदने के लिए

5. निम्नलिखित समीकरणों के तीन विभिन्न हल ज्ञात कीजिए।

   (i) $3x + 4y = 7$ (ii) $x + y = 0$ (iii) $10x - 11y = 21$ (iv) $x + 2y = -7$

6. समीकरण $2x - 3y = 5$ में $x = -2$, $y = 1$ हो तो K का मूल्य ज्ञात कीजिए।

सारांश

साधारण समीकरण या रैखिक समीकरण हमें दैनिक जीवन की समस्याओं को हल कर सकते है।

1. समीकरण के संतुलन के लिए
   - (a) दोनों ओर समान संख्या को जोडिए (b) दोनो ओर से समान संख्या को घटाइए
   - (c) दोनो ओर समान संख्या से गुणा कीजिए
   - (d) दोनो ओर समान संख्या से भाग कीजीए
2. यदि रैखिक समीकरण में एक चर राशी हो तो उसे एक चर राशी वाला रैखिक समीकरण कहते है।
3. यदि रैखिक समीकरण में दो चर राशी हो तो उसे दो चर राशी वाला रैखिक समीकरण कहते है।
4. समीकरण हल अर्थात् चर राशीयों का वह मूल्य जो LHS तथा RHS को समान बनाता है।
5. 'x' तथा 'y' के किसी भी युग्म के वह मूल्य है जो समीकरण को संतुष्ट करते है उन्हें उसका हल कहा जाता है।
6. दो चर राशी वाले रैखिक युग्म के कई हल होते है।

अध्याय 2.4

द्विघातीय समीकरण

2.4.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

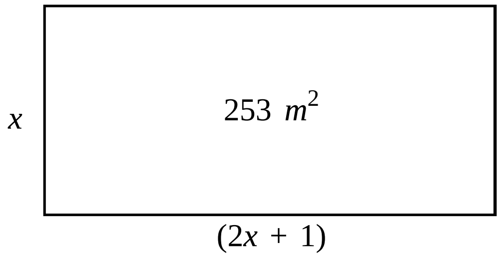
- द्विघातीय समीकरण का मानक रूप बता सकेंगे।
- गुणनखण्ड विधि से द्विघातीय समीकरणों का हल ज्ञात कर सकेंगे।
- जहाँ गुणनखण्ड विधि काम नहीं कर सकती उसके हल के लिए द्विघातीय सूत्र का विकास करेंगे।
- मूलों की सहायता से द्विघातीय समीकरणों को प्राप्त करेंगे।
- दैनिक जीवन की स्थितियों में उत्पन्न होने वाली समस्याओं को द्विघातीय समीकरणों के अनुप्रयोग से हल करेंगे।

2.4.1 परिचय

लाटिन भाषा में वर्ग को "क्वाड्राटम" कहते है जिसमें से शब्द ''क्वाड्राटिक'' बना जिसका अर्थ होता है द्विघात। हम द्विघातीय समीकरण को दूसरे घात का समीकरण कह सकते है। जब हम दैनिक जीवन की स्थितियों को हल करते है तो उनमें द्विघातीय समीकरणों का उपयोग होता है।

उदाहरणार्थ एक मोहल्ले में एक ''योगा केंद्र'' का निर्माण करना चाहते है। उस स्थान का क्षेत्रफल 253 वर्ग मीटर है जिसमें उसकी लंबाई चौडाई के दुगुने से एक मीटर अधिक है। उस हाल की लंबाई तथा चौडाई कितनी होगी?

मानलो हॉल की चौडाई "x" मी. हो तो लंबाई $(2x + 1)$ मी. होगी। इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते है।



आयताकार हॉल का क्षेत्रफल = लंबाई × चौडाई

$= (2x + 1) \times (x)$

$= (2x^2 + x)m^2.$

योगा हॉल का क्षेत्रफल = $253\ m^2$

$$2x^2 + x = 253$$

$$\therefore\ 2x^2 + x - 253 = 0$$

पूर्व भाग में हमने रैखिक समीकरण $ax + by = c$ के रूप में हल कर चुके है। जिसमें 'x' का मूल्य ज्ञात कर रहे थे। उसी प्रकार ऊपरी समीकरण में 'x' का हमें चौडाई का मूल्य बता सकता है।

2.4.2 द्विघातीय समीकरण

$5x^2 + 3x - 8 = 0$ जैसे समीकरण द्विघातीय समीकरण होते है। ऐसे समीकरण भौतिकी में तब उत्पन्न होते है जब हम एक एक निश्चित समय में चलित त्वरण वाली वस्तु द्वारा तय की गयी दूरी ज्ञात करते है। पहेलियाँ जैसे ''एक संख्या दूसरी के दुगुने से 2 अधिक है और गुणनफल 60 हो तो वे दोनो संख्याएँ क्या होगी? या प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल 78 हो तो n का मूल्य ज्ञात कीजिए।

चलिए अब हम दिए गए स्थितियों में कौनसे समीकरण है जानने का प्रयत्न करेंगे।.

पहली स्थिति:

मानलो पहली संख्या x है तथा दूसरी संख्या $(2x + 2)$ (x के दुगुने से दो अधिक है।)

x तथा $(2x + 2)$ का गुणनफल 60 दिया गया है।

समीकरण $x \times (2x + 2) = 60$

या $2x^2 + 2x = 60$

(दोनों ओर 2 से भाग देने पर)

$$x^2 + x = 30$$

समीकरण $x^2 + x - 30 = 0$ होगा (समीकरण 2)

दूसरा उदाहरण प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं की बात करता है।

जानते है प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है।

इसलिए समीकरण $\frac{n(n+1)}{2} = 78$

दोनो ओर 2 से गुणा करने पर

हमें $n(n+1) = 156$ प्राप्त होगा

अर्थात् $n^2 + n = 156$

या $n^2 + n - 156 = 0$ (समीकरण 3)

ये सभी द्वितीय घात वाले बीजगणितीय समीकरण द्विघातीय समीकरण कहलाते है।

$ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ x एक अदृश्य संख्या होती है तथा a, b, c कोई भी वास्तविक संख्याएँ होंगी। पहली स्थिति में

$$5x^2 + 3x - 8 = 0 \Rightarrow a = 5, b = 3 \text{ तथा } c = -8.$$

दूसरी स्थिति में a, b, c का मूल्य देखिए 1, 1 कखा –30 होंगे।

तीसरी स्थिति में अदृश्य संख्या को x के बदले n कह रहे है। लेकिन उसका रूप वही है।

यहाँ $a = 1, b = 1$ तथा $c = -156.$

उदाहरण 1 : निम्न समीकरण द्विघातीय समीकरण है या नहीं जाँच कीजिए।.

(i) $(x-2)^2 + 3 = 2x - 5$ (ii) $x(x+2) + 7 = (x+3)(x-3)$

हल : (i) LHS $(x-2)^2 + 3$

$= x^2 - 4x + 4 + 3$

$= x^2 - 4x + 7$

$\therefore x^2 - 4x + 7 = 2x - 5$

$x^2 - 4x + 2x + 7 + 5 = 0$

$= x^2 - 6x + 12 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है

$\therefore$ यह एक द्विघातीय समीकरण है।

(ii) $x(x+2) + 7 = (x+3)(x-3)$

LHS $\Rightarrow$ $x(x+2) + 7$

$x^2 + 2x + 7$

RHS $\Rightarrow$ $(x+3)(x-3)$

$= x^2 - 9$

$\therefore$ $x^2 + 2x + 7 = x^2 - 9$

$2x + 7 + 9 = 0$

$2x + 16 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$, के रूप में नहीं है इसलिए यह द्विघातीय समीकरण नहीं हो सकता है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्न समीकरण द्विघातीय समीकरण है या नहीं जाँच कीजिए।

i) $3x^2 = 8$

ii) $ax + b = d$

iii) $4x^2 = 3(x + 5)$

iv) $x(4x + 7) = x^2 + 3$

v) $x(x - 7) + 6 = (x - 3)(x + 2)$

समीकरण लिखना

जब हमें स्थितियों को बताते हुए प्रश्न दिए जाते है तो हमें देखना होगा की उन्हें हल करने के लिए कौनसी प्रक्रिया का उपयोग कर सकते है।

उदाहरण के लिए

दो संख्याओं का योगफल 48 तथा गुणनफल 432 हो तो उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हम उस संख्या को 'x' मानेंगे और 'x', का मूल्य कुछ भी हो सकता है दूसरी संख्या को 'y' मानेंगे लेकिन उसे हम 'x' के रूप में दर्शा सकते है। $(48 - x)$.

उनका गुणनफल $xy = 432$.

समीकरण $48x - x^2 = 432$

(ii) दो क्रमागत धनात्मक विषम संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 है.

मानलो दोनो में छोटी संख्या 'x' हो तो दूसरी संख्या $(x + 2)$ होगी.

प्रश्न के अनुसार समीकरण

$x^2 + (x + 2)^2 = 290$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दो क्रमागत पूर्णांको का गुणनफल 306 हो तो पूर्णांको को ज्ञात करने वाला समीकरण लिखिए।
2. एक दो अंको वाली संख्या इस प्रकार है कि अंको का गुणनफल 12 तथा उसमें 36 जोडने पर अंक अपने स्थान परिवर्तित करते है इसे द्विघातीय समीकरण के रूप में लिखिए।
3. रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है उनका आयु का गुणनफल अब से 3वर्ष बाद 360 हो तो इसे द्विघातीय समीकरण के रूप में लिखिए।

2.4.3 द्विघातीय समीकरणों का मानक रूप

हम जानते है कि द्विघातीय बहुपदी को हम $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिखते है यदि द्विघातीय व्यंजक शून्य के बराबर है वह द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का निर्माण होता है।

$\therefore$ द्विघातीय समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$.

उदाहरण 2 : निम्न समीकरणों को मानक रूप में लिखकर a, b, c का मूल्य लिखिए।

(i) $2x^2 - 3x = 7$ (ii) $6 = x^2 - 3x$

(iii) $x^2 = -9$ (iv) $x^2 = \sqrt{7}x$

हल :

(i) $2x^2 - 3x = 7$

हम समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ में लिख सकते है।

$\therefore \quad 2x^2 - 3x = 7$

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 3x - 7 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है।

$\therefore a = 2, \; b = -3$ तथा $c = -7$

(ii) $6 = x^2 - 3x$

इसे मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप लिख सकते है

$6 = x^2 - 3x$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 6 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$a = 1, \; b = -3, \; c = -6$

(iii) $x^2 = -9$

इसे मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप लिख सकते है

$x^2 = -9$

$\Rightarrow \quad x^2 + (0)(x) + 9 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\therefore \; a = 1, \; b = 0$ तथा $c = 9$

(iv) $x^2 = \sqrt{7}x$

इसे मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप लिख सकते है

$$x^2 = \sqrt{7}x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \sqrt{7}x + 0 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1, \quad b = -\sqrt{7}, \quad c = 0.$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

निम्न समीकरणों को उसके मानक रूप में लिखिए और a, b, c का मूल्य लिखिए।

(i) $x^2 = 2x - 3$

(ii) $6 = x^2 - 4\sqrt{2}\,x$

(iii) $\frac{1}{2} = 3x^2 - 4x$

(iv) $4x = -\frac{3}{2}x^2$

2.4.4 गुणनखण्ड विधि से द्विघातीय समीकरणों का हल

गणितीय अदृश्य चर राशी “x” के साथ

अब हमें ‘x’ का मूल्य द्विघातीय समीकरण $x^2 + 6x - 7 = 0$ में ज्ञात करना है। यदि ‘x’ के स्थान पर 1, लगाते है तो हमें

$$(1)^2 + 6(1) - 7 = 0$$

$$1 + 6 - 7 = 0$$

$$= 0 \quad \text{(RHS)}$$

चूँकी 1 समीकरण को संतृप्त करता है। हम कह सकते है द्विघातीय समीकरण $x^2 + 6x - 7 = 0$ का मूल 1 है।

$\therefore \; x = 1$ समीकरण का हल होगा

हम कह सकते है कि 1 द्विघातीय बहुपदी $x^2 + 6x - 7 = 0.$ का शून्य है।

साधारणतया वास्तविक संख्या ‘α’ को द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0.$ का मूल है यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$ हो तो $x = \alpha$ समीकरण का हल होगा।

नोट : द्विघातीय बहुपदी $ax^2 + bx + c \; (a \neq 0)$ का शून्य तथा द्विघातीय समीकरण $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \; (a \neq 0)$ मूल समान होंगे।

उदाहरण 3 : गुणनखण्ड विधि से $x^2+6x+5=0$, द्विघातीय समीकरण मूल ज्ञात कीजिए।

हल: चलिए अब हम मध्य पद को अलग करेंगे याद कीजिए ax^2+bx+c एक द्विघातीय बहुपदी हो तो उसके मध्य पद को अलग कर सकते है हमें दो संख्याएँ p तथा q को ज्ञात करना है।

वह $p + q = b$ तथा $p \times q = a\,c$ होगा

इसलिए $x^2 + 6x + 5 = 0$ के मध्य पद को अलग करने के लिए

हमें 'p' तथा 'q' दो संख्याओं को ज्ञात करने पर

वह इस प्रकार $p + q = 6$ तथा $p\times q = 1 \times 5 = 5$ के रूप में होना चाहिए

इसलिए हम $p = 5$ तथा $q = 1$ को लेंगे

इसलिए $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x(x + 5) + 1(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x + 5) = 0$$

अब हम $x^2 + 6x + 5 = 0$ को $(x + 1)(x + 5) = 0$ के रूप में लिख सकते है।

अब $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

और $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

इसलिए $x = -1$ और $x = -5$ समीकरण का हल होगा

उदाहरण 4 : गुणनखण्ड विधि से निम्न समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए।.

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

(iii) $x^2 - 9 = 0$ (iv) $x^2+2\sqrt{2}x-6=0$

हल:

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = 0$

$\Rightarrow x(x - 6) + 1(x - 6) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0$ या $x - 6 = 0$

इसलिए दिए गए समीकरण के मूल

$x = -1$ और $x = 6$ होंगे.

(ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

इसमें पहला पद $9x^2$ हम $3x$ को जोड तथा घटान कर समीकरण को इस प्रकार लिख सकते है।

$\Rightarrow 9x^2 - 6x + 3x - 2 = 0$

हमने देखा कि यदि $9x^2 - 6x$ में से $3x$ को उभयनिष्ठ खण्ड लेंगे तो हमें $3x - 2$ प्राप्त होगा और शेष पद $(3x - 2)$ रहेगा. इससे हमें प्राप्त होगा

$\Rightarrow 3x(3x - 2) + 1\,(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow (3x + 1)\,(3x - 2) = 0$

$\Rightarrow$ $3x + 1 = 0$ या $3x - 2 = 0$

यदि $3x + 1 = 0$ $3x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ समीकरण $9x^2 - 3x - 2 = 0$ के मूल $x = -\frac{1}{3}$ और $x = \frac{2}{3}$. होंगे।

(iii) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9}$

$x = \underline{+}3$

$\therefore$ समीकरण $x^2 - 9 = 0$ के मूल $x = 3$ और $x = -3$ होंगे।

(iv) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

यहाँ क्रम को देखेंगे तो $c = -6$ को जोड कर तथा $\sqrt{2}x$ को घटाकर हमें प्राप्त होगा

$\Rightarrow$ $x^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x - 6 = 0$

$\Rightarrow$ $x(x + 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}(x + 3\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow$ $(x - \sqrt{2})\,(x + 3\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow$ $x - \sqrt{2} = 0$ या $x + 3\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow$ $x = \sqrt{2}$ और $x = -3\sqrt{2}$

$\therefore$ समीकरण $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$ के मूल $x = \sqrt{2}$ और $x = -3\sqrt{2}$ होंगे।

इन समीकरणों को हल करेंगे

चलिए अब हम प्रथम उदाहरण को देखेंगे दो संख्याओं का योग 48 तथा उनका गुणनफल 432 है।

उदाहरण 5 : दो संख्याओं का योग 48 तथा उनका गुणनफल 432 हो तो उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो पहली संख्या 'x' होगी

$\therefore$ दूसरी संख्या $(48 - x)$

हो तो $(x)(48 - x) = 432$

$\Rightarrow \quad 48x - x^2 = 432$

$\Rightarrow \quad x^2 - 48x + 432 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 36x - 12x + 432 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x - 36) - 12(x - 36) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 36)(x - 12) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 36 = 0$ या $x - 12 = 0.$

$\therefore \quad x - 36 = 0$ या $x = 12.$

$\therefore$ संख्याएँ $x, (48 - x)$

यदि $x = 36$

$36, (48 - 36)$

$36, 12$

यदि $x = 12$

$12, (48 - 12)$

$12, 36$

$\therefore$ दो संख्याएँ 36 और 12 होंगी।

उदाहरण 6: दो क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्ग का योग 313 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: मानलो 2 क्रमागत संख्याएँ x और $x + 1$ होंगे

$(x)^2 + (x + 1)^2 = 313$

$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2x - 312 = 0$

दोनों ओर '2' से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{2x}{2} - \frac{312}{2} = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 156 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 13x + 12x - 156 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x + 13) - 12(x + 13) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 12)\ (x + 13) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 12 = 0 \ \text{ or } \ x + 13 = 0$

$\quad x = 12 \text{ or } x = -13$

चूँकि 'x' एक प्राकृतिक संख्या है तो वह ऋणात्मक नही हो सकती इसलिए $x = 12$, अर्थात् क्रमागत संख्याएँ

$x = 12$ तथा $x + 1 = 13$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. गुणनखण्ड विधि से समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए.

   i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

2. ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिसका योग 27 तथा गुणनखण्ड 182 हो।
3. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का गुना है उन दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए।
4. एक पिता तथा बेटे के आयु का योग 45 वर्ष है पाँच वर्ष पहले उनकी आयु का गुणनफल 124 वर्ष हो तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

2.4.5 द्विघातीय समीकरणों का सूत्र की सहायता से हल

अनेको बार मध्य पद को अलग करना संभव नहीं होता तब हम मूलों ज्ञात करने साधारण विधि का उपयोग करते है जो हर स्थिति में मूलों को देते है चलिए अब हम उसके बारे में देखेंगे।

द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. को देखिए और 'a' से भाग देने पर.

चरण I : $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$

$\therefore \ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

चरण II : $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$

चरण III: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 = \frac{-c}{a} + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ ($\frac{-c}{a}$ के आगे + चिन्ह की आवश्यकता है)

$\left[\text{adding} \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 \text{both sides}\right]$ जिससे हम पूर्ण वर्ग बनायेंगे।

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{-c}{a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

चरण IV : यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो तो हम वर्ग मूल से प्राप्त करेंगे

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

इसलिए $x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ और } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac \geq 0.$$

यदि $b^2 - 4ac < 0$, हो तो समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे? (क्यों?)

अर्थात् $b^2 - 4ac \geq 0$, हो तो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

यह सूत्र द्विघातीय समीकरण के मूलों को ज्ञात करने वाले सूत्र को ''द्विघातीय सूत्र'' कहते है।

सूत्र के उपयोग को जानने के लिए कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 7 : एक बगीचे की चौडाई 'x' मीटर है उसकी लंबाई $(2x + 1)$ मीटर है उसका क्षेत्रफल 528 वर्ग मीटर उस बगीचे की लंबाई तथा चौडाई ज्ञात कीजिए।

हल: बगीचे का क्षेत्रफल $= (x) \times (2x + 1)$

दिया गया है $2x^2 + x = 528$

$\because \quad 2x^2 + x - 528 = 0$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ रूप में है

जहाँ $a = 2, b = 1, c = -528$

इसलिए हल प्राप्त करने द्विघातीय सूत्र

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1-65}{4} = \frac{-66}{4} = \frac{-33}{2}$$

or

$$x = \frac{-1+65}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

i.e., $x = 16$ or $x = \frac{-33}{2}$

चूँकी 'x' ऋणात्मक नहीं हो सकता इसलिए बगीचे की चौडाई 16 मी. तथा लंबाई $(2x + 1)$ है।

$2(16) + 1$

$32 + 1 = 33$ मीटर

उदाहरण 8 : दो क्रमागत धनात्मक विषम पूर्णांको को ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 होगा?

हल: यदि दोनों में छोटी संख्या 'x' हो तो दूसरा पूर्णांक $(x + 2)$ होगा।

हम 'x' को इस प्रकार ज्ञात कीजिए

$x^2 + (x + 2)^2 = 290$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

$2x^2 + 4x - 286 = 0$

$x^2 + 2x - 143 = 0$

द्विघातीय समीकरण में 'x' को मूल्य सूत्र की सहायता से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

हमें प्राप्त

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$x = 11$ या $x = -13.$

'x' को विषम धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए

$\therefore \quad x \neq -13.$

इसलिए दो क्रमागत विषम पूर्णांक

11 तथा $(x + 2) = 11 + 2 = 13$

$\therefore$ हम देखते है कि : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290.$

उदाहरण 9 : द्विघातीय सूत्र के उपयोग से वास्तविक मूल ज्ञात करेंगे। यदि वह निम्न रूप में होगा।

i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

हल :

i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

यहाँ $a = 3, b = -5, c = 2$

इसलिए $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$

$$\therefore \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} = x = -1 \text{ or } x = \frac{-2}{3}$$

इसलिए मूल $\frac{-2}{3}$ और -1 होंगे।

उदाहरण 10 : $x + \frac{1}{x} = 3$ के मूलों को ज्ञात कीजिए

हल : $x + \frac{1}{x} = 3$ दोनों ओर 'x' से गुणा करने पर

$$x^2 + 1 = 3x$$

अर्थात्, $x^2 - 3x + 1 = 0$, यह एक द्विघातीय समीकरण है।

इसलिए $a = 1, \; b = -3, \; c = 1$

इसलिए $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

इसलिए, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (क्यों)

इसलिए मूल $\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ होंगे।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. सूत्र की सहायता से द्विघातीय समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए
   - (i) $2x^2 - 7x + 3$
   - (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$
   - (iii) $3x^2 + 2x - 1 = 0$
   - (iv) $6x^2 + x - 2 = 0$
2. $x - \frac{1}{x} = 3$.के मूल ज्ञात कीजिए।
3. निम्नलिखित के लिए द्विघातीय समीकरण लिखकर हल कीजिए।
   - (i) एक आयतकार क्षेत्र का कर्ण उसकी छोटी वाली भुजा से 60मी. अधिक है यदि बड़ी भुजा छोटी से 30मी अधिक है उस क्षेत्र की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।
   - (ii) दो संख्याओं का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का 8 गुणा है उन दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

2.4.6 दिए गए मूलों से द्विघातीय समीकरणों की निर्मिती

मानलो α तथा β द्विघातीय समीकरण के दो मूल है द्विघातीय समीकरण का सूत्र याद कीजिए।

$$x^2 - (\alpha + \beta)(x) + \alpha\beta = 0$$

अर्थात्

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल = 0

हमने देखा कि द्विघातीय समीकरणों के गुणको तथा उनके मूलों के बीच प्रतिच्छेदित संबंध होता है।

यदि द्विघातीय समीकरण का मानक रूप दिया गया हो तो हम उनके मूलों का योग तथा गुणनफल ज्ञात कर सकते है

चलिए अब हम द्विघातीय समीकरण के मानक रूप को देखेंगे.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

मानलो "α" तथा "β" दिए गए समीकरण के दो शून्य है तो

मूलों का योग तथा गुणनफल ज्ञात करने का सूत्र

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणक}}{x^2 \text{ का गुणक}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{स्थिर पद}}{x^2 \text{ का गुणक}}$$

नोट : द्विघातीय समीकरणों का अपरिमेय मूल युग्मों में प्राप्त होता है।

अर्थात् यदि $(m+\sqrt{n})$ मूल हो तो $(m-\sqrt{n})$ उसका दूसरा मूल होगा।

चलिए अब हम कुछ उदाहरण देखेंगे जिसमें मूलों से द्विघातीय समीकरण की निर्मिति को सीखेंगे।

उदाहरण 11 : उस समीकरण को लिखिए जिसके मूल 2 तथा 3 है

हल : मानलो $\alpha = 2, \beta = 3$

मूलों का योग $\alpha + \beta = 2 + 3 = 5$

मूलों का गुणनफल $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$

द्विघातीय समीकरण

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - (5)\times (x) + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

इसलिए द्विघातीय समीकरण

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

उदाहरण 12 : उस द्विघातीय समीकरण लिखिए जिसके मूल $\frac{1}{4}$ तथा -1 होंगे?

हल : मानलो $\alpha = \frac{1}{4}, \ \beta = -1$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= \frac{1}{4}+(-1)$

$$= \frac{1}{4}-1 = \frac{-3}{4}$$

मूलों का गुणनफल $= \left(\frac{1}{4}\right) \times (-1) = \frac{-1}{4}$

द्विघातीय समीकरण

$= x^2 - x$(मूलों का योग) + मूलों का गुणनफल $= 0$

$$x^2 - x\left(\frac{-3}{4}\right)+\left(\frac{-1}{4}\right) = 0 = x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

दोनो ओर 4 से गुणा करने पर $4x^2 + 3x - 1 = 0.$ प्राप्त होगा।

उदाहरण 13 : यदि द्विघातीय समीकरण का एक मूल $(2+\sqrt{3})$ हो तो उस समीकरण को लिखिए।

हल : $(2+\sqrt{3})$ एक अपरिमेय संख्या है।

हम जानते है कि अपरिमेय मूल हो तो उसका परिमेय खण्ड की जोडी होती है।

इसलिए $(2+\sqrt{3})$ और $(2-\sqrt{3})$ समीकरण के मूल होंगे।

इसलिए $(2+\sqrt{3})$ और $(2-\sqrt{3})$ समीकरण के मूल होंगे।

मूलों का योगफल

$(2+\sqrt{3})\ +\ (2-\sqrt{3})$

$= 4$

मूलों का गुणनफल

$(2+\sqrt{3})\ (2-\sqrt{3})$

$= 2^2-(\sqrt{3})^2 = 4-3=1$

द्विघातीय समीकरण

$x^2 - x$(मूलों का योग) + मूलों का गुणनफल = 0

$\therefore\ x^2 - x\ (4) + 1 = 0$

$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$\therefore$ द्विघातीय समीकरण $x^2 - 4x + 1 = 0$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. उस समीकरण को लिखिए जिसके मूल दिए गए है
   (i) 1, 1 (ii) 4, 1
2. यदि द्विघातीय समीकरण का एक मूल $(5-\sqrt{7})$ हो तो उसका समीकरण लिखिए।

2.4.7 प्रश्नों को हल करने के लिए द्विघातीय समीकरणों के अनुप्रयोग

1. यदि एक संख्या तथा उसके गुणन विलोम का योग $2\frac{1}{30}$ हो तो संख्या को ज्ञात कीजिए।
2. एक आयताकार क्षेत्र की परिमिति 82 मीटर और क्षेत्रफल 400 वर्ग मी. हो तो उस आयत की चौडाई ज्ञात कीजिए।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 व.से.मी. हो तो उसके समान भुजाओं की लंबाई 13 सें.मी. हो तो उसका आधार ज्ञात कीजिए।

4. 60 विद्यार्थीयों वाली कक्षा में प्रत्येक लडका उतना सहयोग देता है जितनी कक्षा में लडकियाँ है और प्रत्येक लडकी लडको की संख्या के बराबर सहयोग देती है यदि जमा की गई कुल रकम `1600 हो तो कक्षा में कितने लडके होंगे.

अभ्यास

1. निम्न में कौनसे द्विघातीय समीकरण है।

(i) $x^2 + 8x = 0$
(ii) $x^2 + \frac{1}{x} = 2, \ (x \neq 0)$
(iii) $x^2 + 2x + 1 = 0$
(iv) $x + 2 = 0$
(v) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$
(vi) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$.

2. निम्न द्विघातीय समीकरणों के मूलों को गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$
(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
(iv) $100x^2 - 20x + 1$
(v) $x - \frac{3}{x} = 2$

3. सूत्र की सहायता से द्विघातीय समीकरणों के मूलों को ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
(ii) $6x^2 + 7x - 10 = 0$
(iii) $15x^2 - 28 = x$
(iv) $12x^2 + 17x + 6 = 0$

4. निम्न समीकरणों के मूलों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,$
(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30} \ (x \neq -4, 7)$

5. 2 तथा 3 मूल वाले द्विघातीय समीकरण को लिखिए।

6. यदि द्विघातीय समीकरण का एक मूल $(5 + \sqrt{3})$ हो तो समीकरण को लिखिए।

7. $ax^2 + 7x + 12 = 0$ के मूल α तथा β हो तो उस समीकरण को ज्ञात कीजिए। जिसके मूल $(\alpha + \beta)$ तथा $(\alpha - \beta)^2$ है।

8. $x^2 + px + q = 0$ के मूल α तथा β हो तो उस समीकरण को ज्ञात कीजिए। जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ तथा $\frac{\beta}{\alpha}$ है।

9. एक क्रिकेट मैच में बुमराह ने शमी, द्वारा लिए गए कुल विकेटों की संख्या के दुगुनी से 3 विकेट कम लिए। दोनों द्वारा लिए गए विकेटो का गुणनफल 20 हो तो प्रत्येक द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

10. दो अंको वाली संख्या इस प्रकार है जिनका गुणनफल 20 है और संख्या में 9 जोडने पर अंको का स्थान बदल जाता है उस संख्या को ज्ञात कीजिए।

11. एक भिन्न का अंश, हर से 3 कम है यदि अंश तथा हर में 2 जोडा जाय तो नए भिन्न का योग $\frac{29}{20}$ होगा उस भिन्न को ज्ञात कीजिए।

12. एक वर्ष पहले एक व्यक्ति अपने बेटे की आयु का 8 गुना आयु वाला था अब उसकी आयु बेटे की आयु के वर्ग के समान है। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

सारांश

इस अध्याय में हमने द्विघातीय समीकरण वह है जिसके द्विघातीय बहुपदी $p(x)$, $p(x) = 0$ हो तो द्विघातीय समीकरण कहलाता है।

(i) यदि $p(x) = 0$ हो तो द्विघातीय समीकरण बहुपदी $p(x)$ के मूल उस समीकरण के शून्य होंगे अर्थात् $p(x) = 0$

(ii) द्विघातीय समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ होंगी। $a \neq 0$.

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल 'α' तथा 'β' हो तो समीकरण को $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ लिख सकते है

या

$$x^2 - (\text{मूलों का योग}) \times (x) + (\text{मूलों का गुणनफल}) = 0$$

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों को $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, भी लिख सकेत है जहाँ $b^2 - 4ac \geq 0$. इसे द्विघातीय सूत्र कहते है।

(v) यदि हम $ax^2 + bx + c = 0$ को दो खण्डो में विभाजित कर सकते है तो द्विघातीय समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को प्रत्येक खण्ड बराबर शून्य लगाकर ज्ञात कर सकते है।

अध्याय 2.5

संख्या पैटर्न

2.5.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

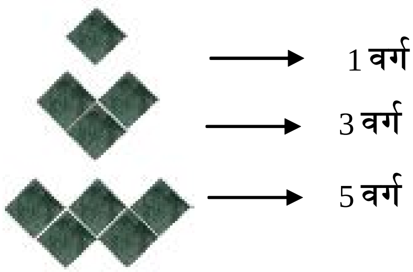
इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- दी गई संख्या सूची में से समानांतर श्रेणी को पहचानेंगे.
- समानांतर श्रेणी का सामान्यपद (*n* वाँ पद) ज्ञात करेंगे.
- समानांतर श्रेणी का *n* वाँ पद ज्ञात करना है.
- दी गई संख्या सूची में से गुणोत्तर श्रेणी को पहचानेंगे.
- गुणोत्तर श्रेणी का सामान्यपद (*n* वाँ पद) ज्ञात करेंगे..

2.5.1 परिचय

हम प्राकृतिक में कई प्रकार के पैटर्न देखते है जैसे कि फूल, मधुमक्खी के छत्ते के छेद, अनानस के कुंडलियाँ, उडने वाले पक्षियों के झुण्ड आदि।

निम्नलिखित चित्र पर ध्यान दीजिए :



1 वर्ग, 3 वर्ग, 5 वर्ग, ये संख्याएँ एक श्रेणी से संबंधित है।

अब निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए -

(i) अगले क्रम में 7 वर्ग होंगे. (सत्य/असत्य)

(ii) 6 वे क्रम में 11 वर्ग होंगे. (सत्य/असत्य)

(iii) 12वे क्रम में 22 वर्ग होंगे. (सत्य/असत्य)

(iv) वर्गों की संख्या सम या विषम हो सकती है। (सत्य/असत्य)

वर्गों की संख्या इस प्रकार होगी 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25…

हमारे पास कुछ संख्याएँ है उनमें से हम कुछ संख्याओं को चुनेंगे उनमें एक श्रेणी का निर्माण एक सामान्य गुण से होगा। उदाहरण 2,4,6,8,10,……सम संख्याओं की श्रेणी संख्याओं के गुणक भी एक श्रेणी बनाते है हमने देखा कि गुणन तालिका भी श्रेणी ही होते है।

उदाहरण-

$3 \times 1 = 3$ $5 \times 1 = 5$ $7 \times 3 = 21$ $8 \times 5 = 40$

$3 \times 2 = 6$ $5 \times 2 = 10$ $7 \times 4 = 28$ $8 \times 6 = 48$

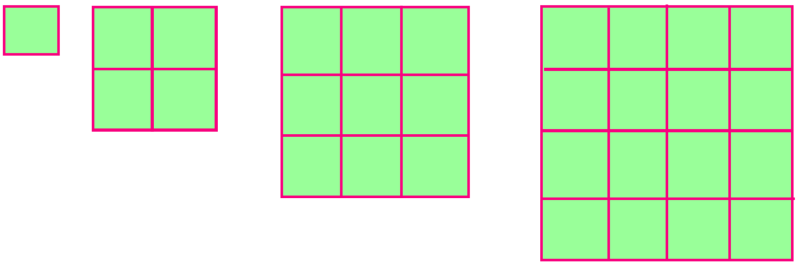
$3 \times 3 = 9$ $5 \times 3 = 15$ $7 \times 5 = 35$ $8 \times 7 = 56$

$3 \times 4 = 12$ $5 \times 4 = 20$ $7 \times 6 = 42$ $8 \times 8 = 64$

3 के गुणको से हम श्रेणी 3,6,9,12,15….. लिख सकते है उसी प्रकार

10 के गुणको से हम श्रेणी 10,20,30,40,50….लिख सकते है…

(ii) एक वर्गाकार में एक वर्ग इकाई भुजाएँ 1, 2, 3, 4, ... के साथ क्रमशः1, 4, 9, 16,...



इसमें दिए गए पैटर्न को पहचानिए? $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, ... अर्थात् ये प्राकृतिक संख्याओं के वर्ग है।

अब कुछ और संख्याओं की सूची को देखिए और पैटर्न को पहचानिए।

1, 3, 5, 7, 9 ..... (1)

1, 4, 7, 10, 13 ..... (2)

5, 3, 1, –1, –3 ..... (3)

1, 3, 9, 27, 81, ... (4)

5, 5, 5, 5, 5, ... (5)

2, 4, 8, 16 , 32, ... (6)

कभी - 2 हम इस संख्याओं की सूचि या पैटर्न कहते है। इन श्रेणियों से हम आवश्यक संख्या तथा उनके योगफल को ज्ञात कर सकते है। एक व्यक्ति हर माह एक निश्चित वेतन पाता है तो उसकी वार्षिक आय कितनी होगी? आप कैसे ज्ञात करेंगे?

यदि आप प्रतिदिन रू. 5 बचत करते है तो 100 दिनों में कितनी बचत होगी? आप कितने दिनों में रू. 575 की बचत करोगे? आप कैसे कह सकते है?

श्रेणी में छिपे तर्क को पहचानेंगे। उस तर्क की सहायता से हम कह सकते है।

चलिए अब हम संख्याओं की श्रेणी के बारे में चर्चा करेंगे जिन्हें श्रेणियाँ कहते है हम इस अध्याय में दो प्रकार की श्रेणियों के बारे में पढ़ेंगे।

(1) समांतर श्रेणी (2) गुणोत्तर श्रेणी

2.5.2 समांतर श्रेणी

इस स्थिति को देखिए,

सोनु तथा कौशिक सूर्यास्त को अपने गाँव के एक छोटे टिले से देखना चाहते है।.

एक दिन वे सिढियों की सहायता से टिले पर चढना आरंभ किया

प्रत्येक सिढी पर 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10…संख्याएँ लिखी गई है।

चर्चा करेंगे

सोनु प्रत्येक बार 2 सीढीयों को पार कर टीले पर जल्दी चढना चाहती है। इसलिए पार की गई सीढियों की संख्या 2,4,6,8,10,….और कौशिक हर 3 मिनट में 10 सीढियों को पार कर टीले पर चढना चाहता है।

10,20,30,40,50,……

सोनु के सीढियों पर चढने की विधि में

2,4,6,8,10, ………. आपने क्या देखा?

प्रत्येक पद 2 जोडने पर हम श्रेणी को समझ सकते है।

प्रत्येक पद 2 जोडने पर प्राप्त होता है।

श्रेणी में प्रत्येक पद में 2 जोडने पर हम श्रेणी को समझ सकते है।

इसलिए दसवीं बार में सोनु ने 20 वीं बार में 40 सीढियाँ पार कर लेगा।

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , **20** , 22 , 24, 26 , 28 , **30** , 32 , 34 , 36 , 38 , **40** , 42 , ….

अब हम दूसरी स्थिति की चर्चा करेंगे

कौशिक हर तीन मिनट में 10 सीढियाँ चढ़कर टीले पर पहुँचता है

10 , 20 , 30 , 40 , 50 ,…………..आपके निरीक्षण की चर्चा कीजिए

हाँ, **10, 20, 30, 40, 50, …….** एक श्रेणी ही है।

पूर्व पद में 10 को जोडने से अगला पद प्राप्त होता है?

किन्हीं भी दो क्रमागत संख्याओं का अंतर 10 होगा।

कौशिक 15मिनटों में 50 सीढियाँ पार करता है तथा 18 मिनटों में 60 सीढियाँ (50 में 10 जोडने पर 60 प्राप्त होता है।).

3 min, 6min, 9min, 12 min , 15min, 18min, 21min, 24min, 27min, 30min, 34min, …….

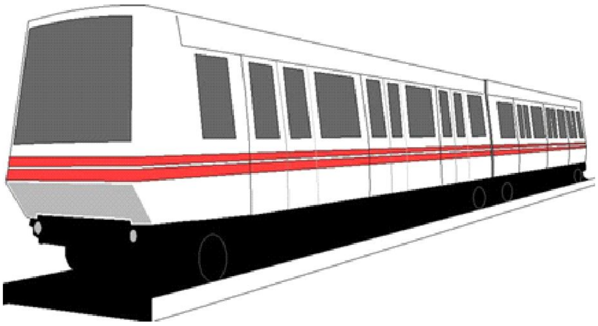
10 , 20 , 30 , 40 , 50 , **60**, 70 , **80** , 90 , **100** , 110 ,……..

उसी प्रकार कौशिक 30 मिनटों में 100 सीढियाँ पार करेगा।

इसी प्रकार की एक और स्थिति को देखेंगे। उदाहरण के लिए

1) काम काजी घंटो में एक मेट्रो रेल हर 3 मिनटों में स्टेशन पर आती है उसके पहुँचने के समय का क्रम (मीनटों में)

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 33,36, 39, 42,45, 48, 51, 54, 57, 60 कामकाजी घंटो में.



इस क्रम में प्रत्येक पद 3 जोडने पर प्राप्त होता है।

इस क्रम में क्रमागत दो पदो का अंतर 3 होगा और यह संख्या स्थिर होगी।

अब कुछ और स्थितियों के बारे में सोचिए जिसमें इस प्रकार के क्रमों का उपयोग होता है। उन्हें क्या कहते है?

इन संख्याओं को ध्यान से देखो …

(i) 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ……….

(ii) 10 ,20 , 30 , 40 , 50 ,…………..

(iii) 10, 15, 20, 25, 30, …..

(iv) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 33,36, …………

यहाँ पर हम और कुछ संख्याएँ देखेंगे।

(v) $-3, -2, -1, 0, \ldots$

(vi) 5, 5, 5, 5, 5, 5,.......

(vii) $-1.0\ , -1.5\ , -2.0\ , -2.5\ , -3.0\ , -3.5\ , \ldots\ldots$

ऊपरी सूचि में हमने देखा कि एक निश्चित संख्या को जोडने पर अगला पद प्राप्त होता है ऐसी संख्याओं की सूचि को समांतर श्रेणी (AP)कहते है।

समांतर श्रेणी संख्याओं की सूचि है जिसमें एक निश्चित संख्या जोडकर अगले पद को प्राप्त किया जा सकता है।

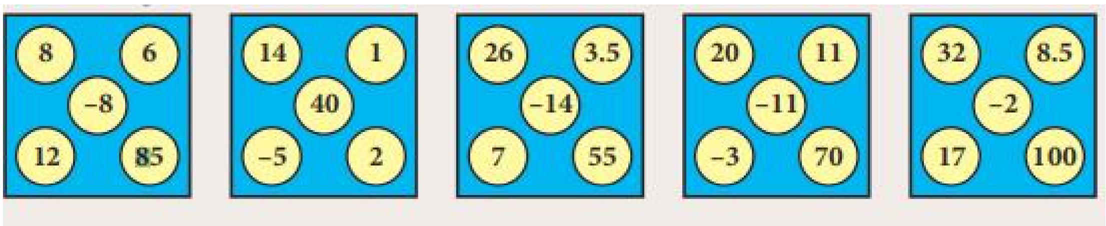
इस निश्चित संख्या को सामान्य अंतर कहते है (वह धात्मक या ऋणात्मक हो सकता है या शून्य)

यदि AP का प्रथम पद a_1 तथा द्वितीय पद a_2 .... तीसरा पद a_3 .... n^{th} पद तक $a_{n.}$ का सामान्य अंतर d होगा.

इसलिए, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = d$

क्रियाकलाप

यहाँ पाँच डिब्बे है उनमें से एक संख्या को चुनिए और पाँच समांतर श्रेणियों को बनाइए।



उदाहरण 1 : निम्नलिखित संख्याओं की सूचि में से कौनसे समांतर श्रेणियाँ है। यदि वे AP, में हो तो उसका प्रथम पद और समान अंतर ज्ञात कीजिए।

(i) 2, 7, 12, 17, 22, ...

(ii) $4, 0, -4, -8, -12 \ldots$

(iii) 3, 7, 12, 18, 25 ...

(iv) 2, 6, 18, 54, 162 ...

हल:

(i) यह एक समांतर श्रेणी है (AP).

क्योंकि $7 - 2 = 5$, $12 - 7 = 5$, $17 - 12 = 5$ तथा $22 - 17 = 5$

इसलिए, प्रथम पद के अलावा सभी पद 5 को पूर्व पद में जोडने पर प्राप्त होगा।

इसका पहला पद $a = 2$

और समान अंतर $d = 5$.

(ii) हम देखते है कि $0 - 4 = -4$, $-4 - 0 = -4$, $-8 - (-4) = -4$, $-12 - (-8) = -4$

इसलिए यह एक AP है जिसका प्रथम पद $a = 4$

तथा समान अंतर $d = -4$.

(iii) आप इस सूची में देख सकते है कि 3, 7, 12, 18, 25, ...

$7 - 3 = 4$, $12 - 7 = 5$, $18 - 12 = 6$, $25 - 18 = 7$

इसलिए दो क्रमागत पदों के बीच का अंतर समान नहीं है। इसलिए यह AP नहीं है।

(iv) इस सूची की संख्याएँ 2, 6, 18, 54, 162, ...

$6 - 2 = 4$, $18 - 6 = 12$

इसलिए दो क्रमागत पदों का अंतर समान नहीं है इसलिए यह AP नही है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

इनमें से कौनसे AP में है। यदि AP, में है तो उनका प्रथम पद तथा समान अंतर लिखिए:

1. –5, –1, 3, 7, 11, ...
2. 6, 7, 8, 9, 10, ...
3. 1, 4, 6, 7, 6, 4, ...
4. –6, – 3, 0, 3, 6, 9, ...

2.5.3 AP का सामान्य रूप

अब पहली स्थिति को याद कीजिए। जिसमें सोनु ने प्रत्येक पद में सीढियों को पार करता है।

2, 4, 6, 8, 10 …

विचार कीजिए

क्या हम इसे नियम का पालन करते हुए 2 को प्रथम पद में जोडकर क्रमागत पदों को ज्ञात कर सकते है?

$(2 + 0 \times 2), (2 + 1 \times 2), (2 + 2 \times 2), (2 + 3 \times 2), (2 + 4 \times 2), \ldots.$

$(2 + 9 \times 2) \ldots\ldots (2 + 14 \times 2) \ldots\ldots (2 + 19 \times 2) \ldots\ldots$

इस AP, में हर बार 2 को जोडकर अगला पद प्राप्त होता है।

तो हम AP के साधारण पद को कैसे ज्ञात कर सकते है?

चलिए अब देखेंगे,

पद	पदों का प्रदर्शन	पदों का मूल्य	साधारण रूप
1	a_1	$(2 + 0 \times 2) = 2$	$a = a + (0)d = a + (1 - 1)d$
2	a_2	$(2 + 1 \times 2) = 4$	$a + 1d = a + (2 - 1)d$
3	a_3	$(2 + 2 \times 2) = 6$	$a + 2d = a + (3 - 1)\, d$
4	a_4	$(2 + 3 \times 2) = 8$	$a + 3d = a+(4 - 1)\, d$
…	…..	….	
….	……	….	
….	…..	…..	
5	a_n	$[2+ (n–1)\times 2]$	$[a + (n–1)\, d]$

अब हम **AP** का साधारण रूप लिखेंगे। (**'n'** की विधि तक)

a, $(a + 1d)$, $(a + 2d)$, $(a + 3d)$, $(a + 4d)$, …. $\mathbf{(a + 9d)}$ **…....** $\mathbf{(a + 14d)}$ **…….** $\mathbf{[a + (n–1)d]}$. **AP** का **'n'** वाँ पद

AP के n वां पद :

AP के n वें पद का सूत्र:

$$a_n = a + (n - 1) \times d$$

जहाँ

a = प्रथम पद,

d = समान अंतर,

n = पदों की संख्या

a_n = n वाँ पद

हल करने का प्रयत्न करें

उपरोक्त स्थिति से, सोनु प्रत्येक कदम में दो सीढियों को पार करता है। 26 वें कदम पर वह कितनी सीढियों को पार करता है?

यह ज्ञात करने के लिए हमें क्या करना होगा? सोचिए।

चलिए अब चरण बद्ध रूप से हल करेंगे।

2, 4, 6, 8, 10, ……. AP के पद है।

हाँ, हम जानते है कि दिए गए AP का प्रथम पद 'a' है।

और समान अंतर 'd' तथा पदों की संख्या 'n' होगी।

अब, प्रश्न के अनुसार हम समझेंगे कि

हमें **AP 2, 4, 6, 8, 10, ...** का 26 वाँ पद ज्ञात करना है

अब उसका हल ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

प्रतम पद **'a'= 2**

समान अंतर 'd' = 4 – 2 = 6 – 4= 2, इसलिए **'d'=2**

पदों की संख्या **'n'=26**

AP में पद को ज्ञात करने का सूत्र

$$a_n = [a + (n - 1)\ d]$$

इसलिए, $a_{26} = 2 + (26 - 1)2$

$= 2 + (25) \times 2$

$a_{26} = 2 + 50 = 52.$

इसलिए 26 कदमों में सोनु 52 सीढियों को पार करेगा।

अब, **AP 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...** का 'n' वें पद को ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

$a_n = [a + (n - 1)\ d]$

इसलिए, $a_n = [2 + (n - 1)\ 2]$

$= 2 + 2n - 2$

$a_n = 2n$

चलिए अब कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 2 : AP 16, 11, 6, 1, – 4, – 9, ... का 15 वाँ तथा 'n' वाँ पद ज्ञात कीजिए

हल :

दिया गया AP 16, 11, 6, 1, – 4, – 9, ...

यहाँ a = 16 तथा d = 11 – 16 = – 5 , n=15

AP का 'n' वाँ पद ज्ञात करने का सूत्र

$$a_n = [a + (n - 1)\ d]$$

इसलिए, $a_{15} = a + (15 - 1)d$

$= a + 14d$

$= 16 + 14(-5)$

$= 16 - 70$

$= -54$

इसलिए 15वाँ पद

$a_{15} = -54$

अब, $a_n = a + (n-1)d$

$= 16 + (n-1) \times (-5)$

$= 16 - 5n + 5 = 21 - 5n$

इसलिए, n^{th} वाँ पद

$a_n = 21 - 5n$

उदाहरण 3 : AP का प्रथम पद – 3 तथा 12वाँ पद 41 हो तो समान अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो AP का प्रथम पद 'a' तथा समान अंतर 'd'. यहाँ $a = -3$,

$n = 12, \quad a_{12} = 41, \quad d = ?$

इसलिए,

$a_n = a + (n-1)d$

$a_{12} = (-3) + (12-1)d = 41 \; [\because \; a = -3]$

$11d = 44$

$d = 4$

$\therefore$ समान अंतर $d = 4$ होगा।

उदाहरण 4 : AP का समान अंतर 5 और 10वाँ पद 43 हो तो उसका प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

हल: हमारे पास $d = 5, \; n = 10, \; a_{10} = 43$

$a_n = a + (n-1)d$

$a_{10} = a + (10-1) \times 5 = 43$

इसलिए, $43 = a + 9 \times 5$

$43 = a + 45$

$a = -2$ इसलिए पहला पद -2 होगा।

उदाहरण 5: AP का प्रथम पद – 2, 11 पद 18 हो तो 15 पद ज्ञात कीजिए।

हल : 15वाँ पद ज्ञात करने के लिए आपको d को ज्ञात करना होगा।

$a = -2,\ a_{11} = 18,\ a_{15} = ?$

अब, $a_n = a + (n-1)d$

$a_{11} = a + (11-1)d$

इसलिए, $18 = -2 + 10d$

$10d = 20$

$d = 2$

अब, $a_{15} = ?$

$a_{15} = a + (15 - 1)d$

$a_{15} = a + 14d$

$= -2 + 14 \times 2$

$= 26$ इसलिए, $a_{15} = 26$ होगा।

उदाहरण 6: यदि AP के p वे पद का p गुण समान है q वे पद का q गुणा तो $(p+q)$ वाँ पद शून्य होगा सिद्ध कीजिए। $p \neq q$.

हल : मानलो AP का प्रथम पद 'a' तथा समान अंतर 'd' है

$$a_p = a + (p-1)d$$

$$a_q = a + (q-1)d$$

दिया गया है, $pa_p = qa_q$,

इसलिए, $p[a + (p-1)d] = q[a + (q-1)d]$

$$pa + p(p-1)d = qa + q(q-1)d$$

$pa + p(p-1)d - qa - q(q-1)d = 0$

$pa + p^2d - pd - qa - q^2d + qd = 0$

$(p-q)a + (p^2 - q^2)d - pd + qd = 0$

$(p-q)a + (p^2 - q^2)d - (p-q)d = 0$

$(p-q)a + (p-q)(p+q)d - (p-q)d = 0$

$(p-q)[a + (p+q)d - d] = 0$

$a + (p+q)d - d = 0 \quad [\because p - q \neq 0]$

$a + (p + q - 1)d = 0$

हमने देखा कि a_{p+q} पद

$\therefore a_{p+q} = 0.$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यदि AP का प्रथम पद 4 तथा समान अंतर – 3 हो तो 12वाँ पद ज्ञात कीजिए.
2. यदि AP का दूसरा तथा नौवा पद 26 हो तो समान अंतर ज्ञात कीजिए।
3. यदि AP का 12 वाँ पद – 28 तथा 18वाँ पद – 46 हो तो समान अंतर ज्ञात कीजिए।
4. AP 5, 2, –1, ... का कौनसा पद – 22 होगा?

2.5.4 समांतर श्रेणी के ‘n’पदों का योगफल

चलिए अब देखेंगे

प्रथम प्राकृतिक 100 पदों का योगफल कैसे ज्ञात करोगे?

इसके लिए श्रेष्ठ गणितज्ञ ग्वास ने उनके गणित के अध्यापक को उत्तर दिया था.

प्रथम 100 प्राकृतिक संख्याएँ

1, 2, 3, 4, ……………., 99, 100

प्रथम 100 प्राकृतिक संख्याओं का योगफल

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots 101 + 101 + 101$$

$$2S = 100 \times 101 = S = \frac{100}{2} \times 101$$

$$= 50 \times 101 = 5050.$$

प्रथम 100 प्राकृतिक संख्याओं का योगफल = 5050.

प्रथम “n” प्राकृतिक संख्याओं का योगफल

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

उपरोक्त विधि से हम योगफल का सामान्य रूप ज्ञात कर सकते है।

$$S = a + [a + d] + [a + 2d] + [a + 3d] + [a + 4d] \ldots\ldots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d]$$

बाद में, S को विलोम क्रम में लिखिए:

$$S = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a+4d] + [a+3d] + [a+2d] + [a+d] + a$$

अब दोनों के पदों को जोडिए:

$$S = a + [a + d] + \ldots\ldots\ldots + [a + (n - 2)d] + [a + (n-1)d]$$

$$S = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \ldots\ldots\ldots + [a + d] + a$$

$$2S = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \ldots\ldots\ldots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]$$

प्रत्येक पद समान है! और यह "n" पदों तक होगा...

$$2S = n \times [2a + (n - 1)d]$$

अब दोनों ओर 2 से भाग देने पर,

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d].$$

"n" पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1)d]$

उदाहरण 7: AP 1, 3, 5, 7, 9, ... के पहले **50** पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : 1, 3, 5, 7, 9, ... एक समांतर श्रेणी में है

हम लिख सकते है

$a = 1$, $d = 3 - 2 = 5 - 3 = 2$, $n = 50$.

अब हम सूत्र का उपयोग करेंगे, इसलिए

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1)d]$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} \times [2 \times 1 + (50 - 1) \times 2]$$

$$= 25 \times (2 + 49 \times 2) = 25 \times (2 + 98) = 2500.$$

उदाहरण 8 : 4 के प्रथम 30 गुणकों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: हम 4 के गुणकों को क्रम में

4 , 8 , 12 , 16 , 20 , ……..(30 गुणक)

इसमें से $a = 4$, $n = 30$, $d = 8- 4 = 12 - 8 = 4$

हम जानते,

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$$

विचार कीजिए

प्रश्न हल की प्रक्रिया से **AP** के पदों का योगफल ज्ञात करेंगे।

2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59

(हम जानते है यह एक सांत AP है)

हमें प्राप्त होता है, $S_{20} = 610 = 10 \times [61]$

$= 10 \times [4 + 57]$, यहाँ हम लिख सकते है $10 \times [4 + 57]$

$= \frac{20}{2} \times [2 + 2 + 57]$

$= \frac{20}{2} \times [2 + 59]$

अब आपने क्या देखा?

(पदों की संख्या) $n=20$, (पहला पद) $a = 2$,

(अंतिम पद) $a_n = 59$

तो सभी पदों का योगफल AP

$$S_n = \frac{n}{2} \times [\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}]$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a_n]$$

क्या हम इस प्रकार सामान्यीकरण कर सकते है?

$$S_{30} = \frac{30}{2} \times [2\ (4) + (30 - 1) \times 4]$$

$$S_{30} = 15 \times [8 + 116] = 15 \times 124$$

$$S_{30} = 1860.$$

विचार कीजिए

1. AP, में हमेशा n का मूल्य धनात्मक होना चाहिए। क्यों?
2. यदि A.P.के प्रत्येक पद को 3, से गुणा करने पर उनका समान अंतर कितना होगा _______.
3. a, b तथा c तीनों A.P. में यदि केवल _______.

उदाहरण 9: नीचे दिए गए AP के प्रथम 12 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए

(i) 11, 16, 21, 26 ....

(ii) – 151, – 148, – 145, – 142

हल:

(i) दिया गया AP 11, 16, 21, 26 ....

यहाँ, $a = 11$, $d = 16 - 11 = 5$ और $n = 12.$

आप जानते है कि AP के प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$$

इसलिए, $S_{12} = \frac{12}{2} \times [2 \times 11 + (12 - 1)5]$

$$= 6 \times [22 + (60 - 5)]$$

$$= 6 \times [22 + 55]$$

$= 6 \times 77 = 462$ इसलिए आवश्यक योगफल 462 होगा

(ii) दिया गया AP – 151, – 148, – 145, – 142

यहाँ, $a = - 151$, $d = - 148 - (-151) = 3$ तथा $n = 12.$

महम जानते है कि

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$$

यहाँ प्रथम 12 पदों का योगफल

$$S_{12} = \frac{12}{2} \times [2 \times (- 151) + (12 - 1) \times 3]$$

$$S_{12} = 6 \times [- 302 + (36 - 3)]$$

$$S_{12} = 6 \times [- 302 + 33]$$

$$S_{12} = 6 \times (- 269) = - 1614$$

आवश्यक योगफल– 1614 होगा.

उदाहरण 10: AP 2, 4, 6, 8, 10 .... में कितने पदों का योगफल 210 है?

हल: दिए गए AP, $a = 2$, $d = 4 - 2 = 6 - 4 = 2$ तथा $S_n = 210$.

हम जानते है

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [2 \times 2 + (n - 1) \times 2]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [4 + 2n - 2]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [2n + 2]$$

$$420 = n[2n + 2]$$

$$420 = 2n^2 + 2n$$

$$2n^2 + 2n - 420 = 0$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$n^2 + 15n - 14n - 210 = 0$$

$$n(n + 15) - 14(n + 15) = 0$$

$$(n + 15)(n - 14) = 0$$

$$n + 15 = 0 \text{ or } n - 14 = 0$$

$$n = -15 \text{ or } n = 14$$

यहाँ, n ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए, $n = 14$.

इसलिए, पहलो 14 पदों का योगफल 210 होगा।

उदाहरण 11: 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59 का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ 2, 5, 8, 11, ... AP में है और

$a = 2$, $d = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$ तथा $a_n = 59$.

योगफल ज्ञात करने के लिए n का मूल्य आवश्यक है।

अब, $a_n = a + (n - 1) \times d$

इसलिए, $59 = 2 + (n - 1)\,3$

$$59 = 3n - 1$$

$$60 = 3n$$

इसलिए, $n = 20$

अब, $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \times [2 \times 2 + (20 - 1) \times 3]$$

$$S_{20} = 10\times [4 + 19 \times 3]$$

$$S_{20} = 10 \times [4 + 57]$$

$$S_{20} = 10\times [4 + 57]$$

$$S_{20} = 10\times [61]$$

$$S_{20} = 610$$

AP के सभी पदों का योगफल अंतिम पद से 'l';

चलिए, अब विचार करेंगे

हम जानते है कि,

"n" पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1)\ d]$

इससे हम लिख सकते है

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a + (n - 1)\ d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + \{a + (n - 1)\ d\}]$$

$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a_n]$, क्योंकि $\{a + (n - 1)d\}$ AP, का 'n' वां पद होता है।

इसलिए, यदि 'a' पहला पद तथा अंतिम पद 'l' हो तो

AP में पदो का योगफल $S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$

उदाहरण 12 : 1 से 100 के बीच वाले 5 के गुणकों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हम 1 से 100 के बीच के 5के गुणको को इस प्रकार लिखेंगे

वे 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... 85, 90, 95

इससे

पहला पद 'a' = 5

अंतिम पद 'l' = 95

हमारे पास सूत्र है

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$$

इसमें से 'n' वाँ पद =?

हम 'n' को कैसे ज्ञात करेंगे? एक बार सोचिए? .

हाँ हमारे पास AP 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , ...85 , 90 , 95

यहाँ $a = 5$; $d = 10 - 5 = 15 - 10 = 5$

सूत्र $\boldsymbol{a_n = a + (n - 1) \times d}$

$$95 = 5 + (n - 1) \times 5$$

$$95 = 5 + 5n - 5$$

$$95 = 5n$$

$$n = 19.$$

अब $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]}$

$$= \frac{19}{2} \times [5 + 95]$$

$$= \frac{19}{2} \times [100] = 19 \times 50 = 950$$

$$S_n = 950$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्नलिखित AP के पहले 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 11, 6, 1, – 4, –9 ... (ii) 7, 12, 17, 22, 27 ...
2. AP 25, 28, 31, 34, ... के कितने पदों का योगफल 1070 होगा?
3. 1 + 4 + 7 + 10 + ... +118 का योगफल ज्ञात कीजिए।
4. 3 से विभाजित होने वाले 100 तक की संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
5. AP के किन्हीं तीन क्रमागत संख्याओं का योगफल 21 तथा योगफल 231 हो तो उन पदों को ज्ञात कीजिए।

6. l, a, n, d तथा S_n, में से जिसका मूल्य नहीं दिया गया है उसको ज्ञात कीजिए।
   (i) $a = -2, d = 5, S_n = 568.$
   (ii) $l = 8, n = 8, \ S_8 = -20$
   (iii) $a = -3030, \ \ l = -1530, n = 5$
   (iv) $d = \ 2/3 \ , l = 10, n = 20$

2.5.5 गुणोत्तर श्रेणी (G P)

चलिए अब एक क्रियाकलाप करेंगे।

क्रियाकलाप

एक आयतकार या वर्गाकार पेपर लेकर उसे आप जितनी बार मोड सके मोडिए। आपने पेपर को कितनी बार मोडा? शायद चार या पाँच बार?

अब पेपर को कई बार मोडने के बाद प्राप्त पेपर की ऊँचाई ज्ञात करेंगे?

आप कैसे ज्ञात करोगे?

क्या आप क्रम की सूचि बना सकते हो?

क्या यह AP है?

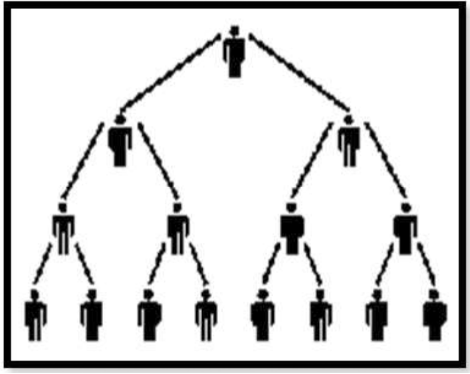
यदी नहीं, तो उसे क्या कहेंगे?

चलिए एक और उदाहरण देखेंगे :

कुछ वर्षों से कुछ संसार के लोग कुछ बिमारियों से ग्रसित है जो विषैले बैक्टीरिया तथा विषाणु से फैलते है इस स्थिति में सभी को अपने स्वस्थ्य का ध्यान रखना चाहिए।

यदि तेलंगाणा सरकार आरोग्य संबंधी सिद्धांतो को अपने राज्य के हर व्यक्ति के पास पहुँचाना चाहती है। इसके लिए उन्हें श्रृंखला पद्धति का पालन करना चाहिए। जिसमें एक व्यक्ति उन सिद्धांतो कम से कम आगे दो व्यक्तियों तक पहुँचायेगा।

चित्र में दर्शाये अनुसार यदि प्रक्रिया एक व्यक्ति से शुरू होती है और दो-दो व्यक्तियों की श्रृंखला बनाते हुए उस कडी को आगे बढाते है।



विचार कीजिए

क्या हम इस प्रक्रिया को क्रमबद्ध रूप से लिख सकते है?

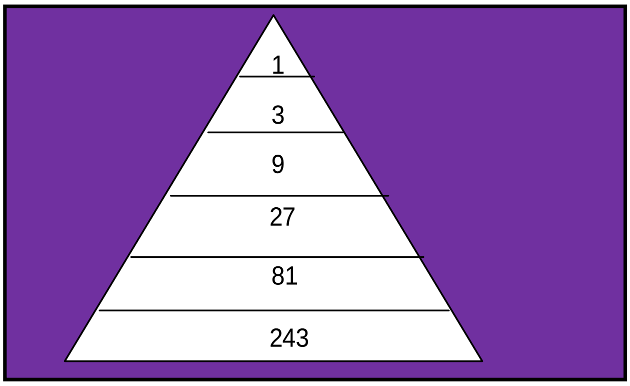
हाँ, हम इसे 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...के रूप में लिख सकते है।

इस क्रम का अमला पद एक निश्चित संख्या 2 से गुणा करने पर प्राप्त होता है। यदि आप समाज में आरोग्य संबंधि सिद्धांतो को व्यक्ति से व्यक्ति तक पहुँचायेंगे तो उस श्रेणी को हम इस प्रकार लिख सकते है

1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...

1 , 1×3 , 3×3 , 9×3 , 27×3 , 81×3...

इस श्रृंखला में हर एक अगला पद प्राप्त करने के लिए हमें पूर्व पद को 3 से गुणा करना होगा।



अब इस क्रम को देखिए।

(i) 10 , 1000 , 10000 , 100000 , 1000000........ या 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5...........

(ii) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... या 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 . ...

(iii) 5 , 25 , 125 , 625 , ... या 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, ...

इन्हें गुणोत्तर श्रेणी कहते है।

पूर्व पद को कुछ निश्चित संख्या से गुणा करने पर क्रमित पद प्राप्त होता है ऐसी श्रेणी को गुणोत्तर श्रेणी कहते है। यह निश्चित संख्या GP का सार्व अनुपात कहलाता है इसे **‘r’** से दर्शाया जाता है।

गोणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात (G.P)

चलिए अब हम सार्व अनुपात क्या है इसे ज्ञात करेंगे (GP).

एक GP लीजिए

10 , 1000 , 10000 , 100000 , 1000000........ or 10 , 10^2 , 10^3 , 10^4 ˒ 10^5..............

सार्व अनुपात ‘*r*’ = (दूसरा पद) / (पहला पद) = (तीसरा पद)/(दूसरा पद) = ...

GP, ‘*r*’ = 100/10 = 1000/100 = 10000/1000 = 10

यदि पहला पद ‘*a*’ और सार्व अनुपात ‘*r*’ हो तो GP

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots$ और सार्व अनुपात $'r' = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$.

उदाहरण 13:

दिए गए GP का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

(i) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots$ या $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots\ldots\ldots$

(ii) $1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots\ldots$ या $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^5, \ldots\ldots\ldots$

(iii) $5, 25, 125, 625, \ldots\ldots$ या $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots\ldots$

हल: (i) दिया गया GP

$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots$ या $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 \ldots\ldots\ldots$

सार्व अनुपात $'r' = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$ या $'r' = \frac{2^1}{2^0} = \frac{2^2}{2^1} = \frac{2^3}{2^1} = 2$

(ii) उसी प्रकार $'\mathbf{r}' = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \mathbf{3}$ या $'\mathbf{r}' = \frac{3^1}{3^0} = \frac{3^2}{3^1} = \frac{3^3}{3^1} = 3$

(iii) $'\mathbf{r}' = \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = \mathbf{5}$ या $'\mathbf{r}' = \frac{5^2}{5^1} = \frac{5^3}{5^2} = 5$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

दिए गए GP का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए

1. 6, 12, 24, 48, …
2. 7, 21 , 62, 186, ….
3. 8, 8, 8, 8, ……
4. $4^0, 4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5 \ldots\ldots\ldots$

GP का 'n' वाँ पद

चलिए अब हम एक GP लेंगे

4 , 16 , 64 , 256 , ………. यह एक अनंत रूप वाला GP है

इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते है

$4, 4 \times 4, 4 \times (4 \times 4), 4 \times (4 \times 4 \times 4), \ldots\ldots$

$4 \times 4^0, 4 \times 4^1, 4 \times 4^2, 4 \times 4^3, \ldots\ldots\ldots$

यदि GP का पहला पद 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' हो तो

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots$ और सार्व अनुपात $'r' = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \ldots\ldots$

$a \times r^0, \ a \times r^1, \ a \times r^2, \ a \times r^3, \ a \times r^4$ …………

'n' वाँ पद क्या होगा?

विचार कीजिए

पद	पदों का प्रदर्शन	पदों का मूल्य	सामान्य पद (पहला पद 'a' तथा सार्व अनुपात 'r')
1	a_1	$4 \times 4^0 = 4$	$a = a \times r^0 = a \times r^{1-1}$
2	a_2	$4 \times 4^{2-1} = 16$	$a \times r^1 = a \times r^{2-1}$
3	a_3	$4 \times 4^{3-1} = 64$	$a \times r^2 = a \times r^{3-1}$
4	a_4	$4 \times 4^{4-1} = 256$	$a \times r^3 = a \times r^{4-1}$
…	…..	….	
….	……	….	
….	…..	…..	
5	$\boldsymbol{a_n}$	$4 \times 4^{n-1}$	$\boldsymbol{a \times r^{n-1}}$

GP का 'n' वाँ पद

यदि GP का पहला पद 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' हो तो वह

$a \times r^0, \ a \times r^1, \ a \times r^2, \ a \times r^3, \ a \times r^4$………… $\boldsymbol{a \times r^{n-1}}$

तथा GP का 'n' वाँ पद

$a_n = a \times r^{n-1}$

विचार कीजिए

1. 64 को ऐसे तीन पदों में विभक्त कीजिए जो G.P. में हो.
2. यदि $a, b, c, \ldots$ G.P. में हो तो $2a, 2b, 2c, \ldots$. होगा ______ में
3. यदि 3, x, 6.75 G.P. में हो तो x ______ होगा।

उदाहरण 14 :

निम्न में से कौनसे गुणोत्तर श्रेणी के पद होंगे?

(i) 7, 14, 21, 28, … (ii) 1/2 , 1, 2, , 4 ...

(iii) 5, 25, 50, 75, …

हल: G.P. की जाँच करने के लिए

हमें क्रमागत पदों का अनुपात समान है या नहीं जाँच करनी होगी

(i) 7, 14, 21, 28, …

सार्व अनुपात 'r' $= \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

$$= \frac{14}{7} = 2 \text{ और } \frac{21}{14} \neq 2$$

क्योंकि दो क्रमागत पदो का सार्व अनुपात 7, 14, 21, 28, … समान नहीं है इसलिए यह गुणोत्तर श्रेणी नहीं है।

(ii) $\dfrac{1}{2}$, 1, 2, 4 …

सार्व अनुपात 'r' $= \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \text{ और } \frac{2}{1} = 2; \quad 2 \text{ और } \frac{4}{2} = 2$$

श्रेणी $\dfrac{1}{2}$, 1, 2, 4 ... का क्रमागत सार्व अनुपात समान है इसलिए यह एक गुणोत्तर श्रेणी है।

(iii) 5, 25, 50, 75, …

सार्व अनुपात 'r' $= \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$.

$$= \frac{25}{5} = 2 \text{ और } \frac{50}{25} = 2 \text{ और } \frac{75}{50} \neq 2$$

क्योंकि क्रमागत पदों का सार्वअनुपात समान नहीं है इसलिए 5, 25, 50, 75, … गुणोत्तर श्रेणी नहीं है।

उदाहरण 15: गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद a तथा सार्व अनुपात r दिया गया हो तो उस गुणोत्तर श्रेणी को और उसके 'n' वें पदों को ज्ञात कीजिए।

(i) $a = -7, \quad r = 6$ (ii) $a = 256, \quad r = 0.5$

हल :

(i) गुणोत्तर श्रेणी का सामान्य पद $a, ar, ar^2, \ldots$ होगा।

$a = -7,$

$ar = -7 \times 6 = -42,$

$ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$

निर्दिष्ट गुणोत्तर श्रेणी –7, –42, –252,.... होगा

GP का सामान्य पद $a_n = -7 \times 6^{n-1}$

(ii) गुणोत्तर श्रेणी का सामान्य पद a, ar, ar^2 ,.... होगा

$a = 256,$

$a^r = 256 \times 0.5 = 128$,

$ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$

निर्दिष्ट गुणोत्तर श्रेणी 256, 128, 64,....

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

(1) यदि GP का $a = 11$, $r = 3$ हो तो पहले चार पद और सामान्य पद ज्ञात कीजिए।

(2) यदि GP का $a = 1$ और $r = 2$ हो तो, कौनसा पद 256 होगा?

(3) $a = \frac{1}{11}$, $r = 11$ हो तो क्या 123321 इस GP का पद होगा?

(4) यदि GP $a = \frac{1}{3}$, $r = 2$ हो तो उसका सामान्य पद ज्ञात कीजिए?

अभ्यास

1. निम्न में से कौनसी श्रेणियाँ A.P. में है अपने उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए.

   (A) 1, 4, 9, 16 .....   (B) 1, 3, 9, 27

   (C) –2, 0, 2, 4, 6, ...   (D) 1, 2, 4, 8, ...

2. 3, 1, –1, –3, ... का सार्व अंतर .... होगा

   (A) –2   (B) 2   (C) –3   (D) 3

3. दो अंको वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाजित होती है?

   (A) 31   (B) 30   (C) 29   (D) 11

4. यदि A.P का प्रथम पद और सार्व अंतर क्रमशः 2 और 4 हो तो प्रथम 40 पदों का योगफल होगा:

(A) 3200 (B) 2800 (C) 1600 (D) 200

5. 3, 4, 5, 6, ...A.P. के प्रथम 10 पदों का योग

(A) 65 (B) 75 (C) 85 (D) 110

6. 7 + 12 + 17 + 22 + ... +1002. A.P. का योगफल ज्ञात कीजिए।

7. –11, –7, –3, ..., 53 A.P. का मध्य पद ज्ञात कीजिए।

8. 9, 14, 19, ... A.P. का कौनसा पद 124 होगा?

9. A.P का 7वाँ तथा 13वाँ पद क्रमशः 32 और 62 हो तो उस श्रेणी को ज्ञात कीजिए।

10. A.P. 7, 10, 13, ..., 184 का पिछे से 8 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

11. यदि A.P. का n वाँ पद $a_n = 2 - 3n$. हो तो प्रथम 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

12. यदि $2x$, $x + 10$, $3x + 2$ A.P. के पद हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

13. A.P. 3, 15, 27, 39, ... का कौनसा पद 21 वें पद से 120 अधिक होगा?

14. यदि A.P के चौथे तथा आठवें पद का योग 24 तथा 6वें तथा 10वें पद का योग 44 हो तो श्रेणी ज्ञात कीजिए।

15. –10, –7, –4, –1, ... A.P. के कितने पदों का योग 104 होगा?

16. निम्न में कौनसे पद G.P. में है?

(i) 3, 9, 27, 81,… (ii) 4, 44, 444, 4444,...

(iii) 0.5, 0.05, 0.005,… (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots..$

(v) 1, –5, 25, –125 , … (vi) 120, 60, 30, 18,…

(vii) $16, 4, \frac{11}{4}, \ldots..$

17. G.P. के तीन पद ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद तथा सार्व अनुपात दिया गया है। (i) $a = 6$, $r = 3$ (ii) a =sqrrt 2, r = sqr rt 2 (iii) $a = 1000$, r = 2 5

18. G.P. 729, 243, 81,… का a_7 पद ज्ञात कीजिए।.

सारांश

- समानांतर श्रेणी (AP) यह संख्याओं की सूची है, जिसमें प्रत्येक पद उसके पूर्व पद में निश्चित संख्या जोडने पर (प्रथम पद के अलावा) अगला पद प्राप्त होता है यह निश्चित संख्या को सार्व अंतर (d) कहते है (जो की धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है)
- यदि **AP** का पहला पद a_1 तथा दूसरा पद a_2 .... तीसरा पद a_3 .... n वाँ पद a_n तथा सार्व अंतर **(d)** हो तो.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = d$$

- **AP** का n वाँ पद :

AP के n-वें पद को ज्ञात करनथे का सूत्र : $a_n = a + (n - 1) \times d$ होगा जहाँ

a = प्रथम पद, d = सार्व अंतर, n = पदों की संख्या

$a_n = n$ वाँ पद.

- AP के प्रथम "n" पदों का योग $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- यदि **AP** का प्रथम पद 'a' तथा अंतिम पद 'l' हो तो $S_n = \dfrac{n}{2} \times [a + l]$
- गुणोत्तर श्रेणी संख्याओं की वह सूची है जिसमें प्रत्येक पद उसके पूर्व पद में कुछ निश्चित संख्या को ('r') गुणा करने पर प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या सार्व अनुपात 'r' कहलता है।
- यदि प्रथम पद 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' हो तो **GP** $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ का सार्व अनुपात 'r' $= \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$.
- यदि प्रथम पद 'a' तथा सार्व अनुपात 'r' हो तो GP का
- 'n' वाँ पद $a_n = a \times r^{n-1}$ होगा।

इकाई 3 अंकगणित

अध्याय 3.1

अनुपात तथा समानुपात

3.1.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- अनुपात की धारणा को समझेंगे
- अनुपात तथा समानुपात के बीच का संबंध पहचानेंगे
- सीधे तथा विलोम अनुपात की धारणा को समझेंगे
- अनुपात के प्रश्नों को हल करने के लिए इकाई विधि का उपयोग करेंगे
- मिश्रित समानुपात के प्रश्नों को हल करेंगे
- समय तथा कार्य पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे
- समय, दूरी तथा गति के प्रश्नों को हल करेंगे

3.1.1 परिचय

हमारे दैनिक जीवन में हम कई स्थितियों का सामना करते है। हम मात्राओं की गणना, तुलना तथा अनुमान लगाते है। हम मूल्य, ऊँचाई, भार आदि की तुलना करते रहते है।

हम हमेशा मात्राओं की तुलना अलग ढंग से करते है।

चलिए अब हम कुछ उदाहरण :

उदाहरण - 1 : एक विद्यार्थी की ऊँचाई 165 सें.मी. है और दूसरे री 163 सें.मी. हो तो कौन लंबा है?

उदाहरण - 2 : A दुकान में एक वस्तु का मूल्य रू. 120/- प्रति किलो है दुकान B में वह रू.115 प्रति किलो है। वस्तु कौनसी दुकान पर सस्ती है?

उदाहरण - 3 : हैदराबाद में पेट्रोल का दर रू. 78/- प्रति लीटर है मुंबई में रू.75/- हो तो रू. 100/- में हमें कहाँ अधिक पेट्रोल मिलेगा?

उपरोक्त सभी उदाहरण हमें तुलना तथा अंतर बताते है।

उदाहरण 1, में लंबाई 2 सें.मी. कम है (165 – 163 से.मी.)

उदाहरण 2, में दरों का अंतर 120 – 115 = रू. 5/-

उदाहरण 3, पेट्रोल के भाव में रू. 3/- प्रति लीटर का अंतर है (78–75 रूपये).

अब निम्न तुलनाओं को देखिए:

उदाहरण - 4 : एक पुस्तक का मूल्य रू. 200/- तथा एक पेन का मूल्य रू.20/- हो तो पुस्तक का मूल्य पेन के मूल्य से कितने गुना अधिक है?

उदाहरण - 5 : माता का भार 60 कि.ग्रा है जबकि बेटे का भार 20 कि.ग्रा है जबकि माता का भार बेटे के भार से कितने गुना अधिक है?

उदाहरण - 6 : एक चमडे के बैग का दर रू. 400/- है एक जूट के बैग का दर रू. 150/- है चमडे के बैग का मूल्य जूट के बैग से कितना गुना अधिक है?

इन उदाहरणों में मात्राओं की तुलना ''कितने गुना अधिक'' से की गई है। कितने गुना की तुलना ही अनुपात कहलाता है।

दो मात्राओं के अनुपात को $a : b$ से दर्शाया जाता है।

उदाहरण 1, विद्यार्थीयों के लंबाईयों का अनुपात = 165:163

उदाहरण -4, पुस्तक तथा पेन के दरों का अनुपात = 200/20 = 200:20 = 10:1

जब अनुपात के उसके संक्षिप्त रूप में लिखने के लिए दोनों पदों का म.स.भा. 1 होता है तब उसे अनुपात कहते है।

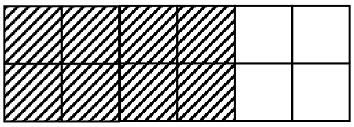
अनुपात $a : b$ में, दो पद है जिसमें 'a' को पहला पद या पूर्व पद तथा 'b' को दूसरा पद या उत्तर पद कहते है चलिए अब एक क्रियाकलाप करेंग।

क्रियाकलाप -1

तालिका में दिए गए उदाहरणों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

क्र.सं.	पहली मात्रा	दूसरी मात्रा	तुलना	भिन्न रूप	साधारण अनुपात
1	पहले टोकरी में 10 बॉल	दूसरे टोकरी में 14 बॉल	10 : 15	$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$	2:3
2	2 कि.ग्रा. चावल	500 ग्राम चावल	2कि.ग्रा:500ग्रा. = 2000 : 500	$\frac{2000}{500}$	4:1
3	5 मी. लंबी लाल रिब्बन	3 मी. लंबी काली रिब्बन			
4	पहले बॉक्स में 45 तितलियाँ	दूसरे बॉक्स में 30 तितलियाँ			

क्रियाकलाप -2



दिए गए वर्गों को देखकर उत्तर दीजिए

(i) छायांकित वर्गों की संख्या अछायांकित वर्गों से __________ गुना है।

(ii) अछायांकित वर्गों की संख्या छायांकित वर्गों से __________ गुना है।

(iii) छायांकित और अछायांकित वर्गों का अनुपात = ________

विभिन्न स्थितियों में अनुपात

व्यापार में लक्ष्मण ने रू.5000/- निवेश करता है तथा देवी रू. 10,000/- निवेश किया।

लक्ष्मण का निवेश = 5,000

देवी का निवेश = 10,000

लक्ष्मण तथा देवी के निवेश का अनुपात = 5000 : 10,000

= 1 : 2

इस स्थिति में हमने देखा कि लक्ष्मण का 1 भाग निवेश है और देवी का दो भाग कुल तीन भाग होंगे।

दिए गए अनुपात में दी गई मात्रा का विभाजन

उदाहरण : 7

यदि लाल गुलाब के फूलों का तथा गेंदे के फूलों का अनुपात 2 : 3 यदि कुल 20 फूल हो तो लाल गुलाब तथा गेंदे के फूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: अनुपात = 2 : 3

अनुपात का योग = 2 + 3 = 5

कुल भाग = 5

फूलों की कुल संख्या = 20

5 भाग = 20 फूल

प्रत्येक भाग = $\frac{20}{5}$ = 4 फूल

लाल गुलाबों का भाग = 2 फूल

लाल गुलाबों की संख्या = 2 × 4 = 8 फूल

गेंदे के फूलों का भाग = 3

गेंदे के फूलों की संख्या = 3 × 4 = 12 फूल

क्रियाकलाप -3

दी गई रेखा और उसके भागों को देखिए। निम्न अनुपातों को ज्ञात कीजिए.

(i) AB : BD = ______________

(ii) AC : CD = ______________

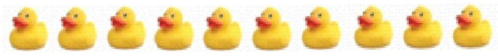
(iii) AB : AD = ______________

(iv) AB : CD = _______________

(v) AC : BD = _______________

क्रियाकलाप - 4

चित्रों पर आधारित तालिका की पूर्ति कीजिए.

क्र.सं.	प्रथम राशी	द्वितीय राशी	अनुपात
1.			
2.			
3.			

क्रियाकलाप - 5

निम्न तालिका को देखिए अनुपात को संक्षिप्त रूप में लिखिए।

क्र.सं.	राशियां	अनुपात	भिन्न रूप	साधारण अनुपात
1	15मी. पानी के पाइप से 12मी लोहे की छड	15:12	$\frac{15}{12}$	5:4
2	6 लड़कों का 10 लडकियों से			
3	1घण्टे का 40 मिनट से			
4	75 पैसे का 3 रूपयों से			
5	750 से.मी. से 2मीटर से			

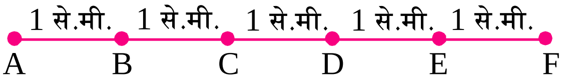
समानुपात

चलिए अब निम्न स्थितियों को देखें

यदि एक कप कॉफी के लिए एक चम्मच शक्कर की आवश्यकता हो तो 5 कप कॉफी के लिए कितने चम्मच की आवश्यकता होगी?

क्या 5 चम्मच?

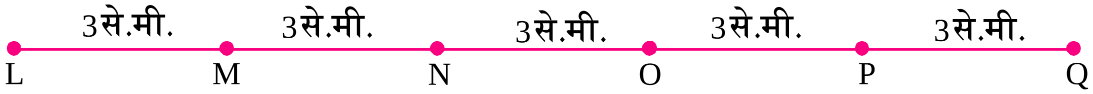
इस रेखा खण्ड को देखिए AF के बीच कुछ बिंदु दिए गए है।



AB = BC = CD = DE = EF = 1cm,

अनुपात - AD: DF = 3 : 2

इस रेखा खण्ड LQ को देखिए उनके बीच के बिंदुओं को देखिए



LM = MN = NO = OP = PQ = 3 से.मी.

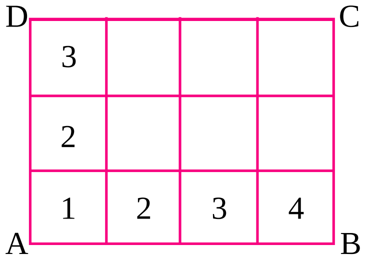
अनुपात – LO : OQ = 3 : 2

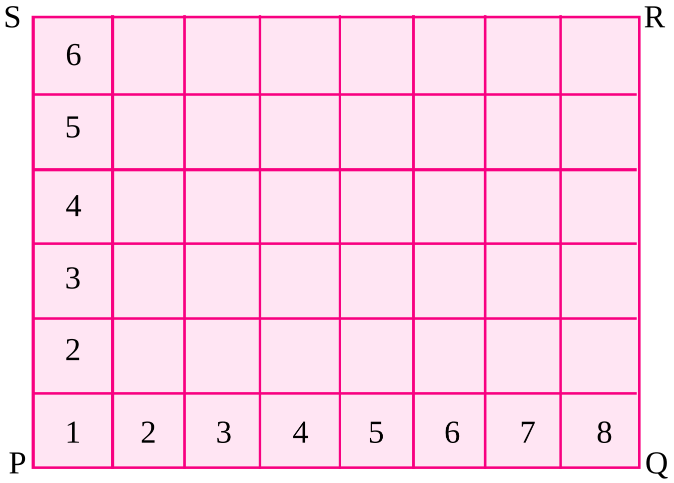
रेखा खण्ड AF में दो बिंदुओं के बीच की दूरी 1 से.ी. है जबकि रेखा खण्ड LQ में दो बिंदुओं की बीच की दूरी 3से.मी. है। लेकिन AD : EF तथा LO : OQ का अनुपात समान है। जबकि उनकी लंबाईयाँ असमान है।

जब दो अनुपात समान होते है समानुपात कहते है।

निम्न आयतों को देखिए

ABCD तथा PQRS.





आयत ABCD में AB की लंबाई = 4 इकाईयाँ, चौडाई AD = 3 इकाईयाँ

ABCD में लंबाई तथा चौडाई का अनुपात = 4 : 3

आयत PQRS, में PQ = 8 इकाईयाँ, चौडाई PS = 6 इकाईयाँ

PQRS आयत में लंबाई तथा चौडाई का अनुपात = 8 : 6 = 4 : 3

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{PQ}{PS}$$

$\therefore$ AB : AD = PQ : PS   इसलिए समानुपात में है।

एक पाठशाला में, 15 किलो ग्राम चावल 100 विद्यार्थीयों के मध्याह्न के भोजन के लिए आवश्यक है दूसरी पाठशाला में 40 विद्यार्थीयों के लिए वे 6 किलो ग्राम चावल पकाते है। इसमें आपने क्या देखा?

	चावल की आवश्यकता	विद्यार्थीयों की संख्या	चावल तथा विद्यार्थीयों का अनुपात	अनुपात में साधारण रूप
पहली पाठशाला	15	100	15:100	3:20
दूसरी पाठशाला	6	40	6:40	3:20

पहली पाठशाला में चावल तथा विद्यार्थीयों का अनुपात = 3 : 20

दूसरी पाठशाला में चावल तथा विद्यार्थीयों का अनुपात = 3 : 20

दोनों स्थितियों में अनुपात का संक्षिप्त रूप समान है

अर्थात् 15 : 100 = 6 : 40

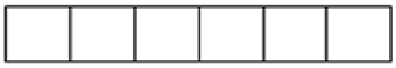
यदि दो अनुपातों का संक्षिप्त रूप **a : b** तथा **c : d** समा है तो उन्हें समानुपात कहते है।

समानुपात को **a : b :: c : d** के रूप में दर्शाया जाता है।

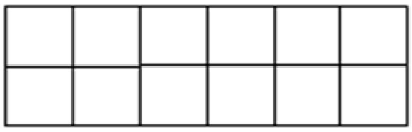
क्रियाकलाप -6

नीचे दिए गए डिब्बों को देखिए उनमें से आधे भाग को छायांकित कीजिए उसके छायांकित भाग का कुल से अनुपात ज्ञात कीजिए।

(i) छायांकित डिब्बों की संख्या = ________



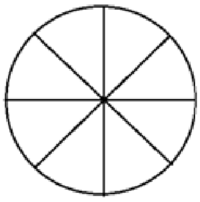
छायांकित डिब्बों का कुल भागों के साथ अनुपात =____



(ii) छायांकित डिब्बों की संख्या = ________

छायांकित डिब्बों का कुल भागों के साथ अनुपात =____

(iii) छायांकित खण्ड =___________



छायांकित खण्डों का कुल खण्डों

के साथ अनुपात = _______________

नोट : यदि दो अनुपात समान हो तो उनके बाह्य पदों का गुणनफल अंतः पदों के गुणनफल के समान होगा।

यदि $a : b :: c : d$ हो तो $a \times d = b \times c$

उदाहरण - 8 : $a : 3 :: 4 : 6$ में a का मूल्य ज्ञात कीजिए

हल: $a : 3 :: 4 : 6$ (∵ बाह्य पदों का गुणनफल = अंतः पदों का गुणन फल)

$$a \times 6 = 3 \times 4$$

$$a = \frac{3 \times 4}{6} = 2$$

$$\therefore a = 2$$

क्रियाकलाप - 7

यदि लंबाई और चौडाई समानुपात में हो तो दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

लंबाई	4	8			36	44
चौडाई	3		15	21		

क्रियाकलाप - 8

रिक्त स्थानों की पूर्ति समानुपात के उपयोग से कीजिए

क्र.सं.	समानुपात	बाह्य पदों का गुणनफल	अंतः पदों का गुणनफल
1	2:3 4:6		
2	5:4 20:16		
3	25:1 75:3		

यौगिक अनुपात: कुछ स्थितियों में हमें अनुपातों के मेल की आवश्यकता होती है जहाँ ये पूर्ण पदों का गुणनफल तथा उत्तर पदों के गुणनफल से प्राप्त होाणत है।

$$a : b,\ c : d = a \times c : b \times d$$

यदि A ने एक वर्ष के लिए रू. 10, 000/- निवेश किए है और B ने 9 महीनों के लिए रू. 15, 000/- निवेश किए हो तो उनके लाभ को किस अनुपात में बाँटोगे?

निवोशों का अनुपात = 10,000 : 15,000 = 2 : 3

समय का अनुपात = 12 महीने : 9 महीने = 4 : 3

यौगिक अनुपात = $2 : 3,\ 4 : 3 = 2 \times 4 : 3 \times 3 = 8 : 9$

उनको लाभ $8 : 9$ के अनुपात में बाँटना होगा?

सीधा समानुपात

यदि अनुपात में दोनों राशियाँ एक साथ बढती या घटती हो और उनका अनुपात स्थिर हो अर्थात् $a : b$ = स्थिर या $\frac{a}{b} = K$.

उदाहरण 7: यदि एक नल 10मिनटों में 4 बाल्टी पानी भरता है तो 6 बाल्टी पानी भरने के लिए कितना समय लगेगा?

हल: बाल्टीयों की संख्या तथा समय का अनुपात = 4: 10

सामान्य अनुपात = $2 : 5$

बाल्टीयों की संख्या = 6

आवश्यक समय = x मीनट

बाल्टीयों की संख्या तथा समय का अनुपात = $6 : x$

अनुपात सीधे समानुपात में है।

$$\therefore 2 : 5 = 6 : x$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\therefore x = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

$\therefore$ 6 बाल्टीयाँ भरने के लिए 5मीनट का समय लगेगा।

विलोम अनुपात

यदि अनुपात में एक राशी बढती है तो दूसरी राशी में कमी आती है और उन दोनों राशियों का गुणनफल स्थिर रहता है। तब उन्हें विलोमानुपाती कहते है $a \times b$ = स्थिरांक या $a \times b = k$

उदाहरण 8 : कृष्णा ने 10 पेनों को रू. 6/- प्रति पेन की दर से खरीदता है। यदि दुकानदार प्रति पेन रू. 5/- से बेचता हो तो उसे दुकानदार को कितनी रकम देनी होगी और उसे कितने पेन मिलेंगे?

हल :

पेनों की संख्या	पेनों की दर	कुल (गुणनफल)
10	6	$10 \times 6 = 60$
X	5	$X \times 5 = 60$

$$x \times 5 = 10 \times 6$$

$$x = \frac{10 \times 6}{5} = 12$$

जैसे ही पेन की दर कम होकर रू. 5/- होती है तो पेनों की संख्या बढकर 12 हो जाती है। जिससे उनका गुणनफल स्थिर रहता है।

उदाहरण 9: कार्य करने के लिए आवश्यक मजदूरों की संख्या तथा कार्य पूर्ण करने के लिए लगने वाले दिनों की संख्या विलोमानुपात में होते है।

मजदूरों की संख्या	32	16	8	4	64
दिनों की संख्या	8	16	32	64	4
	256	256	256	256	256

मिश्रित समानुपात

उदाहरण 10 : दो दर्जी 6 शर्टों को 3 दिनों में सीते है। तो 12 शर्टों को 4 दिनों में सीने के लिए कितने दर्जीयों की आवश्यकता होगी?

नोट:जब दो से अधिक राशियाँ हो तो वे सीधे या विलोम समानुपाती हो सकते है

दर्जीयों की संख्या का शर्टों की संख्या से सीधा समानुपात है → $\frac{\text{दर्जीयों की संख्या}}{\text{शर्टों की संख्या}}$

शर्टों की संख्या का शर्टों की संख्या से सीधा समानुपात है→ $\frac{\text{शर्टों की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या}}$

$$\rightarrow \frac{\text{दर्जीयों की संख्या}}{\text{शर्टों की संख्या/दिनों की संख्या}} = \frac{\text{दर्जीयों की संख्या} \times \text{दिनों की संख्या}}{\text{शर्टों की संख्या}}$$

दर्जीयों की संख्या	शर्टों की संख्या	दिनों की संख्या
2	6	3
X	12	4

$$\frac{2 \times 3}{6} = \frac{4 \times X}{12}$$

$$X = 3$$

∴ 12 शर्टों को चार दिनों में सीने के लिए 3 दर्जीयों की आवश्यकता होगी।

3.1.3 अनुपात तथा समानुपात के अनुप्रयोग

समय और कार्य

यदि 10 व्यक्ति एक हर को 24 दिनों में खोद सकते है तो कार्य को 16 दिनों में पूरा करना हो तो कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी?

व्यक्तियों तथा दिनों का विलोमानुपात है

मानलो x व्योकिेत 16 दिनों में नहर खोदेंगे

$$\therefore x \times 16 = 10 \times 24$$

$$x = \frac{10 \times 24}{16} = 15$$

$\therefore$ नहर को 16 दिनों में खोदने के लिए 15 व्यक्तियों की आवश्यकता होगी।

समय, दूरी और गति

क्या आपने ध्यान दिया कि आपके घर से खेत को जाने के लिए कितना समय लगता है? और आपके घर से खेत की दूरी कितनी होगी? क्या आप प्रतिदिन एक ही समय पर खेत में पहुँचते है यदि नहीं तो क्यों?

कभी-कभी आप जल्दी निकलने पर भी देरी से पहुँचते है, और कभी देरी से निकलने पर भी आप समय पर खेत में पहुँचते है क्यों?

यह सभी आपकी गति पर निर्भर करता है जहाँ दूरी तथा समय का खण्ड ब्युत्पन्न होता है।

$$\text{गति} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

जब गति स्थिर होती है समज का दूरी के साथ सीधा समानुपात होता है।

लक्ष्मी 120 कि.मी. दूरी को कार से 4 घण्टों में तय करती है, तो उसे 90 कि.मी. दूरी तय करने के लिए कितना समय लगेगा?

$$\text{गति स्थिर है} \;,\; \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{120}{4} = \frac{90}{t}$$

't' का मूल्य क्या होगा?

दर तथा इकाई विधि

उदाहरण 11 : एक सब्जी मार्केट में एक व्यापारी 5 कि.ग्रा. प्याज रू.40/- में बेचता है दूसरा व्यापारी 6 कि.ग्रा प्याज रू. 42/- में बेचने की बोली लगाता है। यदि रामय्या 3 कि.ग्रा प्याज खरीदना चाहता है तो वह किसके पास से खरीदेगा?

हल : पहला व्यापारी 5 कि.ग्रा. प्याज रू. 40/- में बेचता है।

$$\therefore \text{एक किलो प्याज का दर} = \frac{40}{5} = 8$$

दूसरा व्यापारी 6 कि.ग्रा. प्याज रू. 42/- में बेचता है

दूसरे व्यापारी 1 कि.ग्रा प्याज का बेचने का मूल्य $= \frac{42}{6} = 7$

पहला व्यापारी का 1कि. ग्रा. का दर 8/-

दूसरे व्यापारी का 1कि. ग्रा. का दर 7/- per kg

चूँकी $8 > 7$

रामय्या को दूसरे व्यापारी से प्याज खरीदना चाहिए

उसे $= 3 \times 7 = 21$/- देने होंगे

प्रश्न को हल करने की विधि जिसमें पहले एक इकाई का दर ज्ञात कर आवश्यक मूल्य को इकाई दर से गुणा कर प्राप्त करने को इकाई विधि कहते है।

अभ्यास

1. रानी को पाठशालों पहुँचने के लिए 20 मिनट का समय लगता है पोशा को 25 मिनट का समय लगता है दोनों के द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. निम्न अनुपातों को संक्षिप्त रूप में लिखिए।

   (i) 5 : 10 (ii) 16 : 18 (iii) 14 : 21 (iv) 8 : 24
3. एक 40 विद्यार्थीयों की कक्षा में 24 लडके हो तो,
   (i) कक्षा के लडकियों की संख्या का अनुपात लडकों की संख्या से ज्ञात कीजिए
   (ii) कक्षा के लडकियों की संख्या का अनुपात कुल विद्यार्थीयों की संख्या से ज्ञात कीजिए
4. विश्वानाथ ने एक सेब के 4 भाग किए और 3 भाग रामू को दिए तो विश्वानाथ द्वारा रामू के लिए दिए गए भाग का अनुपात कीजिए।
5. एक टोकरी में 1 डजन केले है अखिला तथा राधा को उन्हें 1:3 के अनुपात में लेता है तो प्रत्येक को कितने केले प्राप्त होंगे?
6. रू. 2400/- को श्याम तथा कल्याण को 3 : 5 के अनुपात में बाँटना है तो प्रत्येक को कितनी रकम मिलेगी?
7. एक व्यक्ति की आय तथा बचत का अनुपात 10 : 3 है। यदि उसका खर्च रू. 7000/-, हो तो बचत की रकम ज्ञात कीजिए?
8. यदि चार बिस्किट के पैकेटो का मूल्य रू. 40/- हो तो 6 पैकेट खरीदने के लिए कितनी रकम देनी होगी?
9. पल्लवी के पास नीले तथा पीले बॉल 5:3 है।
   (i) यदि पिले 9 बॉल हो तो पल्लवी के पास कितने नीले बॉल होंगे?
   (ii) 24 में से नीले और पीले बॉल होंगे?
10. हरी को स्पोर्टस की दुकान से 5 टेनिस बॉल खरीदने है। यदि एक डजन का मूल्य रू.180/- हो तो, 5 बॉलों के लिए कितनी रकम चुकानी होगी?

11. निम्न में बाह्य पदों तथा मध्य पदों को ज्ञात कर बताइए कि वे समानुपात में हे या नहीं।
    (i) 78 लीटर का 130 लीटर से तथा 12 बोतलो का 20 बोतलों से।
    (ii) 400 ग्राम का 50 ग्राम से तथा 496 रूपयों का 62 रूपयों से।

12. एक क्वीज प्रतियोगिता में मंगली तथा सांबा द्वारा दिए गए सही उत्तरों का अनुपात 10 : 11 है यदि उन्हें कुल 84 पाइंट मिलते है तो सांबा को कितने पाइंट्स मिले?

13. 180 मी लंबी चटाई को 15 औरतों ने 12 दिनों में बनाया है तो 512 मी. लंबी चटाई को 32 औरते कितने दिनों में बनाएगी।

14. एक सीमेंट फैक्ट्री में, 36 मजदूर 700 सीमेंट के थैले 12 दिनों में तैयार करते है तो 24 मजदूर 18 दिनों में कितने थैले तैयार करेंगे?

15. एक कार 16 लीटर पेट्रोल में 240 कि.मी. दूरी तय करती है। तो क्या 25 लीटर पेट्रोल में 450 कि.मी. दूरी तय कर सकती है? अपने उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

16. एक हवाई जहाज दिल्ली से 9:00 बजे सुबह उडान भरती है तो 1200 कि.मी. दूरी तय कर मुंबई 11:00 बजे पहुँचता है। तो मुंबई से 1500 कि.मी. दूरी पर कन्याकुमारी को कितने बजे पहुँचेगा यदि वह मुंबई से 12:00 दोपहर में शुरू होता है।

अभ्यास

- दो राशियों की तुलना या तो अंतर से या भाग विधि से कर सकते है।
- दो सम राशियों की तुलना को अनुपात कहते है।
- यदि दो साधारण राशियाँ समान हो तो उन्हें समानुपात कहते है।
- यदि राशियाँ समानुपात में हो तो उनके बाह्य पदों का गुणनफल समान होता है उसके मध्य पदों के गुणनफल के।
- यदि अनुपात की दोनो राशियाँ एक साथ बढती या घटती है तो अनुपात स्थिर रहता है, तथा राशियों को सीधा समानुपात कहते है।
- यदि अनुपात की एक राशी बढती है तो दूसरी राशी घटती है तो उनका गुणनफल स्थिर होता है तो उन राशियों को विलोमानुपात कहते है।
- कार्य तथा समय का संबंध सीधा या विलोमानुपात हो सकता है।
- समय, दूरी तथा गति का एक दूसरे के साथ संबंध को इस सूत्र से बता सकते है गति $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$
- वस्तु की एक मात्रा के दर को उसका मूल्य कहते है।
- एक इकाई दर से आवश्यक इकाईयों के मूल्य को ज्ञात करने की विधि को इकाई विधि कहते है।

अध्याय

3.2

प्रतिशत, लाभ तथा हानि

3.2.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य, लाभ तथा हानि और उनके प्रतिशत को समझेंगे
- प्रतिशत पर आधारित लाभ तथा हानि ज्ञात करेंगे
- कटौती तथा बाजार मूल्य के बारे में समझेंगे
- साधारण ब्याज, मूलधन, चक्रवृद्धि ब्याज के बारे में समझेंगे।

3.2.1 प्रतिशत

हम हमारी दैनिक जीवन की स्थितियों में हम प्रतिशत का उपयोग करते है। परिक्षाओं के परिणामों को प्रतिशत में दर्शाते है कटौती, लाभ और हानि, कमीशन में प्रतिशत का उपयोग करते है।

हमें प्रतिशत की क्या आवश्यकता है?

एक परीक्षा में वासुदेव को विभिन्न विषयों में प्राप्त अंक इस प्रकार है

विषय	कुल	प्राप्त अंक
तेलुगु	100	76
अंग्रेजी	50	36
गणित	75	66
विज्ञान	50	40

वासु को कौनसे विषय में अच्छे अंक प्राप्त हुए है क्या तेलुगु में? ''क्योंकि उसने 100 में से 76 अंक प्राप्त किए है क्या आप इससे सहमत है कि उसे विज्ञान से तेलुगु में अच्छे अंक प्राप्त हुए है?

यहाँ, प्रतिशत का उपयोग होता है।

इसे प्रतिशत में बदलने के लिए प्रत्येक विषय के 100 में प्राप्त अंको को ज्ञात करना होगा।

विषय	कुल अंक	प्राप्त अंक	100 में से प्राप्त अंक	
तेलुगु	100	76	$\frac{76}{100} \times 100$	76
अंग्रेजी	50	36	$\frac{36}{100} \times 100$	72
गणित	75	66	$\frac{66}{75} \times 100$	88
विज्ञान	50	40	$\frac{40}{50} \times 100$	80

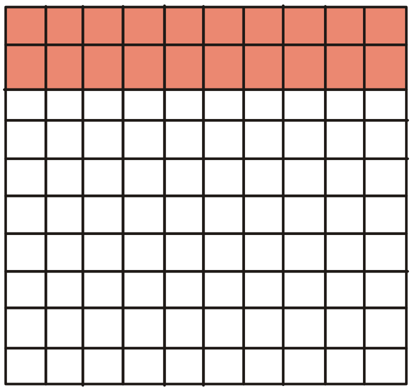
विभिन्न विषयों में प्राप्त अंको को 100 में से गणना कर हम वासु द्वारा प्राप्त अच्छे अंको को ज्ञात कर सकते है।

इसलिए 100 में से की गई गणना को प्रतिशत कहते है।

इसे कीजिए

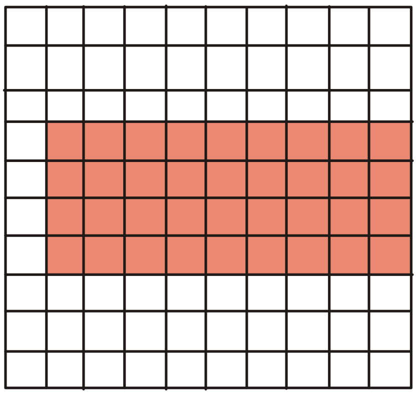
नीचे विभिन्न 100 वर्गों वाली ग्रीड दी गई है छायांकित डिब्बों का भिन्न कुल डिब्बों से लिखिए छायांकित डिब्बो का प्रतिशत ज्ञात कीजिए?

(i)



____:100

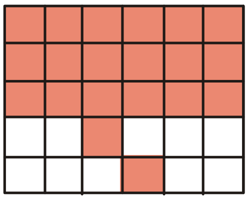
(ii)



____:100

निम्न को देखिए और छायांकित डिब्बों का कुल डिब्बो के साथ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

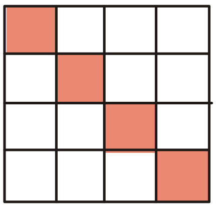
(a)



अनुपात =

प्रतिशत =

b)



अनुपात =

प्रतिशत =

भिन्नों को प्रतिशत में परिवर्तन

सभी संख्याएँ जो $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0.)$ के रूप में लिख सकते है उसे भिन्न कहते है। यहाँ p को अंश तथा q को हर कहते है।

हर में शून्य के अलावा कोई भी संख्या हो सकती है।

यदि भिन्न का हर 100 हो तो उसे सरलता से प्रतिशत में दर्शा सकते है।

उदाहरण - 1: निम्न भिन्नों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{19}{25}$

हल : (a) $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

(b) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 100 = 3 \times 25 = 75\%$

(c) $\frac{19}{25} = \frac{19}{25} \times 100 = 19 \times 4 = 76\%$

उदाहरण 2 : दशमलव को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए.

(a) 0.12 (b) 1.5

हल: (a) $0.12 = \frac{12}{100} = \frac{12}{100} \times 100 = 12\%$

(b) $1.5 = \frac{15}{10} = \frac{15}{10} \times 100 = 150\%$

उदाहरण 3 : निम्न प्रतिशतों को दशमलव में परिवर्तित कीजिए।

(a) 35% (b) 67%

हल: (a) $35\% = \frac{35}{100} = 0.35$ (b) $67\% = \frac{67}{100} = 0.67$

उदाहरण 4 : निम्न प्रतिशतों को भिन्न रूप में लिखकर अनुपात में दर्शाइए

(a) 75% (b) 66%

हल: (a) $75\% = \frac{75}{100} = \frac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{100}_{4}} = \frac{3}{4}$

Ratio = 3 : 4

(b) $66\% = \frac{66}{100} = \frac{\cancel{66}^{33}}{\cancel{100}_{50}} = \frac{33}{50}$

Ratio = 33 : 50

उदाहरण 5 : 40 का 25% ज्ञात कीजिए

हल : 40 का $25\% = \frac{25}{100} \times 40 = 10$

उदाहरण 6 : 60 का कितना प्रतिशत 12 होगा?

हल : 60 में से 12 का प्रतिशत $= \frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

उदाहरण 7 : 50 विद्यार्थीयों की कक्षा में 28 लडकियाँ तथा 22 लडके है। तो लडकों तथा लडकियों की संख्या को प्रतिशत में दर्शाइए।

हल :

	विद्यार्थीयों की संख्या	भिन्न	गणना	प्रतिशत
लडकियाँ	28	$\frac{28}{50}$	$\frac{28}{50} \times 100 = 56$	56%
लडके	22	$\frac{22}{50}$	$\frac{22}{50} \times 100 = 44$	44%
कुल	50			

क्रियाकलाप-9 : निम्न तालिका को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

क्र.सं.	पहली राशी	दूसरी राशी	भिन्न रूप	पहली राशी का दूसरी पर प्रतिशत	दशमलव रूप
1.	16	40	$\frac{16}{40}$	$\frac{16}{40} \times 100 = 40\%$	0.40
2.	33	60	-	-	-
3.	-	72	-	50%	-
4.	18	-	-	36%	-

3.2.2 लाभ और हानि

व्यापार में वस्तु के बेचने की दर को विक्रय मूल्य (वि.मू.) (SP) और खरीदने के दर को क्रय मूल्य (क्र.मू.) (CP) कहते है।

जब वस्तु को खरीदे मूल्य से अधिक बेंचे तो विक्रय मूल्य तथा क्रय मूल्य के अंतर को लाभ कहते है उसे P द्वारा दर्शाया जाता है।

जहाँ **P = SP - CP** (अर्थात् $SP > CP$)

यदि वस्तु को क्रम मूल्य से कम में बेचेंगे तो अंतर को हानि कहते है और इसे L द्वारा दर्शाया जाता है।

जहाँ $L = CP - SP$ (अर्थात् $SP < CP$)

लाभ तथा हानि को प्रतिशत में दर्शा सकते है

$$\text{लाभ प्रतिशत - } P\% = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रम मूल्य}} \times 100 = \frac{(SP - CP)}{CP} \times 100$$

$$\text{हानि प्रतिशत - } L\% = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रम मूल्य}} \times 100 = \frac{(CP - SP)}{CP} \times 100$$

उदाहरण 8 : एक दुकानदार एक ड्रेस ` 1000/- में खरीदता है और उसे ` 1500/- में बेचा क्या इसमें प्राप्त लाभ का अनुमान लगाकर लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए?

हल : ड्रेस को दुकानदार ने ` 1000/- में खरीदा = CP = ` 1000/-

ड्रेस को दुकानदार ने ` 1000/- में बेचा = SP = ` 1500/-

$SP > CP$

$\therefore$ लाभ $= SP - CP = 1500 - 1000 = 500$

$$\therefore \text{लाभ प्रतिशत} = g\% = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रम मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{500}{1000} \times 100 = 50\%$$

उदाहरण 9 : बाबू ने एक फ्रिज कंपनी से ` 20,000/- खरीदा उनकी बदली होने के कारण उसने अपने मित्र को ` 18,000/- में बेचा। उसे हानि हुई या लाभ आपको क्या लगता है?

हल : फ्रिज का क्रय मूल्य = CP = ` 20,000/-

फ्रिज का विक्रय मूल्य = SP = ` 18,000/-

$SP < CP$

$\therefore$ हानि $= CP - SP = 20,000 - 18,000 = 2000$

$$\text{हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रम मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{2000}{20000} \times 100 = 10\%$$

हानि प्रतिशत = 10%

क्रियाकलाप-10 : उदाहरण की सहायता से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

क्र.सं.	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	लाभ या हानि	लाभ या हानि का प्रतिशत
1.	` 150/-	` 162/-	लाभ = ` 12/-	$g\% = \frac{12}{150} \times 100 = 8\%$
2.	` 60/-	` 54/-	हानि = ` 6/-	$L\% = \frac{6}{60} \times 100 = 10\%$
3.	` 2000/-	` 2800/-	____	____
4.	` 10/-	` 8/-	____	
5.	` 100		लाभ = ` 10/-	g% = × ____
6.	` 30	लाभ = ` 5/-	____	g% = 20%
7.	` 500	____	____	L% = 10 %
8.	` 270	हानि = ` 30/-	____	____

उदाहरण 10 : एक फलवाला तरबूज को 10% हानि पर बेचने से उसे प्रत्येक तरबूज पर ` 5/- हानि होती है क्या विक्रय मूल्य ` 45/- होगा? औचित्य सिद्ध कीजिए।

हल : मानलो तरबूज का क्रय मूल्य = CP

हानि प्रतिशत = L% = 10%   हानि = ` 5/-

$$\text{किंतु, हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रम मूल्य}} \times 100$$

$$\therefore\ CP = \frac{\text{हानि}}{\text{हानि } \%} \times 100$$

$$= \frac{5}{10} \times 100 = \text{` } 50$$

⇒ प्रत्येक तरबूज का क्रय मूल्य = ` 50/-

हाँ, विक्रय मूल्य रू. 45/-. होगा।

उदाहरण 11 : कृष्णा ने ` 4000/- में सायकल खरीदी और उसे 25% लाभ पर बेचता है यदि आप सायकल खरीदना चाहते हो तो कृष्णा को कितनी रकम अदा करोगे?

हल : कृष्णा का क्रय मूल्य = ` 4000

लाभ प्रतिशत = g% = 25%

$$\text{क्रम मूल्य पर लाभ} = \frac{\text{लाभ}\%}{100} \times \text{क्रय मूल्य}$$

$$= \frac{25}{100} \times 4000 = \text{` } 1000$$

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

= 4000 + 1000 = ` 5000

कृष्णा के पास से सायकल खरीदने के लिए क्रय मूल्य = ` 5000/-.

32.3 कटौती तथा कटौती प्रतिशत %

कभी-कभी कुछ दुकानदार वस्तुओं पर मूल्य कम करते है इसी को कटौती कहते है। कटौती हमेशा अंकित मूल्य पर दी जाती है। वस्तुओं पर मुद्रित दर को अंकित मूल्य कहते है। उसे MRP से सूचित अंकित मूल्य से कम किए गए दर को कटौती *d* से सूचित किया जाता है।

कटौती = d = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य = MP- SP

$$\text{कटौती \%} = d\% = \frac{\text{कटौती}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{d}{MP} \times 100$$

कटौती से संबंधित प्रश्नों को हल करेंगे.

उदाहरण 12: एक दुकानदार A ने साबून पर 10% कटौती देता है अंकित मूल्य ` 30/- है और दुकानदार B ने साबून पर 12% कटौती देता है अंकित मूल्य ` 25/- है प्रत्येक स्थिति में हमें कितनी रकम देनी होगी?

हल : A - साबून का अंकित मूल्य = ` 30/-

A - साबून पर कटौती मूल्य = 10%

A - साबून का अंकित मूल्य = कटौती% × अंकित मूल्य

$$= \frac{10}{100} \times 30 = \text{` } 3/-$$

A - साबून का अंकित मूल्य = अंकित मूल्य – कटौती

= 30 – 3 = ` 27/-

B - साबून का अंकित मूल्य = ` 25/-

B - साबून का कटौती प्रतिशत = 12%

B - साबून का अंकित मूल्य $= \frac{12}{100} \times 25 =$ ` 3/-

B - का विक्रय मूल्य = 25 – 3 = ` 22/-

3.2.4 कर तथा GST (माल और सेवा कर)

कर सरकार द्वारा वसूली गई रकम जो विभिन्न सेवाओं के लिए लोगों से ली जाती है।

कोई भी निर्मित वस्तु के विक्रय मूल्य पर सरकार कुछ प्रतिशत रकम वसूल करती है उसे 'कर' कहते है यह कर सेवाओं पर भी लगाया जाता है उसे माल एवं सेवा कर (GST) कहते है जो विभिन्न वस्तुओं और सेवाओं पर भिन्न-भिन्न होता है।

आयकर : व्यक्तिगत और कंपनी द्वारा कमाई गई आय पर कर वसूल करते है। उसे आयकर कहते है।

माल व सेवा कर (GST) : वस्तु या सेवा की आपूर्ती पर यह एक एकल अप्रत्यक्ष कर है इसे जुलाई 2017 में लागू किया गया है। इसे अनेक प्रकार के करों को हटाकर जैसे बिक्री कर राज्य कर जो कि, भारत में प्रचलित है इन्हें (GST) के अंतर्गत वस्तु या सेवा के स्तर पर मूल्य वृद्धि के आधार पर लगाया जाता है। GST 3 प्रकार के होते है केंद्र GST, (CGST), राज्य GST (SGST) एकीकृत GST (IGST). केंद्र शासीत प्रदेशों पर UTGST अण्डे, शुद्ध, दूध तथा नमक आदि वस्तुओं को GST से छूट दी गई है। पेट्रोल, डीज़ल जैसी वस्तुएं भी GST से छूट दी गई है। पेट्रोल, ड़ीजल जैसी वस्तुएँ भी GST परिषद ने 1300 वस्तुओं तथा 500 सेवाओं को दरों के चार समूहों में तय किया गया है वे 5%, 12%, 18% और 28% है।

उदाहरण 13 : एक दुकान में वाटर हीटर का अंकित मूल्य ` 1000/- है उस पर GST 18% लगाया गया है तो उस वाटर हीटर का विक्रय मूल्य क्या होगा?

हल : वाटर हीटर का अंकित मूल्य = ` 1000

अंकित मूल्य पर GST = 18%

$$\text{GST} = \frac{\text{GST\%}}{100} \times \text{MP}$$

$$= \frac{18}{100} \times 1000 = \text{`}\ 180$$

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य + GST

= 1000 + 180

कुल विक्रय मूल्य = ` 1180/-

उदाहरण 14 : एक परिवार होटल में जाकर ` 350 खर्च करता है उन्होंने 5% GST अदा की है तो CGST तथा SGST को ज्ञात कीजिए. (यदि CGST तथा SGST समान है)

हल : परिवार द्वारा होटल में खर्च की गई रकम = Rs. 350

अतिरिक्त GST = 5%

नोट : GST = 50% GST + 50% SGST

$$= \frac{1}{2}\ \text{CGST} + \frac{1}{2}\ \text{SGST}$$

$$\therefore\ 5\%\ \text{GST} = 2.5\%\ \text{CGST} + 2.5\%\ \text{SGST}$$

$$\text{CGST} = \frac{2.5}{100} \times 350 = \text{`}\ 8.75/-$$

$$\text{SGST} = \frac{2.5}{100} \times 350 = \text{`}\ 8.75/-$$

अभ्यास

1. निम्न भिन्नों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए

   (i) $\frac{1}{20}$ (ii) $\frac{13}{25}$ (iii) $\frac{27}{50}$ (iv) $\frac{18}{72}$

2. निम्न प्रतिशतों को भिन्नों में परिवर्तित कीजिए

   (i) 35% (ii) 70% (iii) 125% (iv) $30\frac{1}{5}\%$

   (v) 7.2% (vi) 90%

3. 40 कि.ग्रा. के एक प्याज के थैले में से 10% खराब हो गए हो तो कितने किलो प्याज अच्छे मिलेंगे?

4. एक कंपनी साबून पर 25% अधिक देती है यदि आप 100 ग्राम का साबून खरीदेंगे तो साबून का अंतिम वजन कितना होगा?

5. एक चिकन का दुकानदार 1.2 कि.ग्रा. जीवित चिकन को छांटने के बाद 800ग्रा.म. चिकन प्राप्त होता है तो व्यर्थ का प्रतिशत कितना होगा?

6. दसवीं कक्षा में लडके तथा लडकियों का अनुपात 12:13 है तो लडको का प्रतिशत कितना होगा?

7. रंजीत की आय ₹ 7,500 है उसमें से वह 25% बचत करता है तो बचत की रकम ज्ञात कीजिए?

8. एक कक्षा में 50 विद्यार्थी की कक्षा में 14% विद्यार्थी अनुपस्थित है तो उपस्थित विद्यार्थीयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक व्यक्ति ₹120000 निवेश कर व्यापार शुरू करता है और ₹150000 प्राप्त करता है तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए?

10. ललिता ₹ 300 में एक पानी का डिब्बा खरीदते है यदि दुकानदार 20% लाभ प्राप्त करता है तो पानी के डिब्बे का क्रय मूल्य क्या होगा?

11. एक कूलड्रींक कंपनी शीत काल में सभी पेय पदार्थों पर 10% कटौती देती है। यदि एक बोतल का अंकित मूल्य ₹ 90 हो तो एक व्यक्ति को उसे खरीदने के लिए कितनी रकम देनी होगी?

12. अमर ने वायर रहित हेड फोन को ऑनलाइन पर ऑडर करता है पार्सल लेते वक्त उसने GST 18% अतिरिक्त अंकित मूल रू. 500 पर भुगतान करता है तो उसे कितनी रकम अदा करनी होगी?

सारांश

- प्रति 100 इकाईयों पर तुलनात्मक गणना को प्रतिशत कहते है।
- भिन्न जिनके हर 100 के बराबर हो तो उन्हें प्रतिशत रूप में दर्शा सकते है।
- प्रतिशत को सरलीकृत कर उन्हें भिन्न रूप में दर्शा सकते है।
- एक वस्तु को खरीदने के मूल्य को उसका क्रय मूल्य कहते है और इसे क्र.मू.(CP) से दर्शा सकते है।
- एक वस्तु को बेचने वाले मूल्य को उसका विक्रय मूल्य कहते है और इसे वि.मू (SP) से दर्शाते है।
- यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से अधिक हो तो लाभ होता है और इसे **p** से दर्शाते है।
- लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य
- यदि विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से काम हो तो हानि होती है इसे L से दर्शाते है।
- हानि = CP – SP
- $\text{लाभ}\ \% = \dfrac{\text{लाभ}}{CP} \times 100$
- $\text{हानि}\ \% = \dfrac{\text{हानि}}{CP} \times 100$
- वस्तुओं पर मुद्रित मूल्य को अंकित मूल्य कहते है इसे MP से दर्शाते है।
- वस्तु को बेचने के लिए अंकित मूल्य को कम किया जाता है। इसे कटौती कहते है।
- $\text{कटौती}\ \% = \dfrac{\text{हानि}}{\text{अंकित मूल्य}} \times 100$
- विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – कटौती
- सरकार द्वारा लोगों से माल तथा सेवाओं के बदले रकम वसूल करते है उसे कर कहते है।
- माल तथा सेवाओं पर लगाए गए कर को GST कहते है।

अध्याय

3.3

साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज

3.3.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- साधारण ब्याज की धारणा को समझेंगे।
- साधारण ब्याज की धारणा को समझेंगे।
- साधारण ब्याज पर आधारित मिश्रधन ज्ञात करेंगे।
- चक्रवृद्धि ब्याज को ज्ञात करेंगे।

3.3.1 साधारण ब्याज

साधारणतः लोग आवश्यकता अनुसार दूसरो से उधार लेते है और कुछ समय पश्चात् लौटा देते है। उस रकम को मूलधन कहते है और उस **P** द्वारा दर्शाया जाता है। लेकिन जब वापस किया जाता है कुछ अधिक राशि देनी पडती है। उस राशी को ब्याज कहते है और उसे I से दर्शाते है।

ब्याज की समय तथा मूलधन के आधार पर गणना की जाती है।

ब्याज को प्रति रू. 100/- के आधार पर कुछ समय सीमा (अर्थात् वर्ष) पर दिया जाता है उसे ब्याज दर कहते है और उसे 'R' से दर्शाते है।

मूलधन पर ब्याज कुछ समय के लिए ज्ञात किया जाता है वह भी एक निश्चित दर से उसे साधारण ब्याज कहते है और उसे 'SI' से दर्शाया जाता है।

समय अवधि = T(यह पद महीने, वर्ष, त्रैमासिक या अर्धवार्षिक दर्शाता है)

ब्याज प्रति 100/- पर दर = R

एक व्यक्ति ₹ 1000/- 3 वर्षों के लिए ₹ 5/- प्रति सेंकडे के दर से लेता है।

पहले वर्ष का ब्याज $= 1000 \times \frac{5}{100} = 50/-$

दूसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 1000 \times \frac{5}{100} = 50/-$

तीसरे वर्ष के लिए ब्याज $= 1000 \times \frac{5}{100} = 50$

तीन वर्षों का कुल ब्याज $= 50 + 50 + 50 = 3 \times 50$

$= 1000 \times 3 \times \frac{5}{100}$

जहाँ रू.1000/- मूलधन (P) , 3 वर्ष समय (T) तथा 5 ब्याज का दर (R) होता है।

साधारण ब्याज = SI = मूलधन x अवधि की संख्या x ब्याज दर प्रति सैकडा

$$SI = P \times T \times \frac{R}{100}$$

$$SI = \frac{PTR}{100}$$

कुल राशि जो मूलधन के साथ ब्याज देना होता है उसे मिश्रधन कहते है और इसे ‘A’ से दर्शाते है।

जहाँ $A = P + SI$

$$A = P + \frac{PTR}{100} \text{ या}$$

$$A = P\left[1+\frac{TR}{100}\right] = P\left[\frac{100+TR}{100}\right]$$

3.3.2 चक्रवृद्धि ब्याज

कुछ स्थितियों में ब्याज पर ब्याज लगाया जाता है। इसे चक्रवृद्धि ब्याज कहते है इसे CI से दर्शाया जाता है।

चलिए इसकी जाँच: करें यदि एक व्यक्ति 1000/- रूपये का ऋण 10% प्रति वर्ष की दर से लेता है तो

1 वर्ष के बाद लौटाई जाने वाली रकम = मूलधन + साधारण ब्याज

समय = 1 वर्ष ब्याज R= 10%

$$A_1 = 1000 + \frac{1000 \times 1 \times 10}{100}$$

$$= 1000 + 100$$

A_1 = 1100 (पहले वर्ष के अंत में अदा की जाने वाली रकम)

A_1 दूसरे वर्ष के लिए मूलधन बनता है।

समय = 1 वर्ष ब्याज दर (R) = 10%

$$A_2 = 1100 + \frac{1000 \times 1 \times 10}{100}$$

$$A_2 = 1100 + 110$$

A_2 = 1210 (दूसरे वर्ष के अंत में लगाई जाने वाली रकम)

तीसरे वर्ष के लिए मूलधन = A_2

$$A_3 = 1210 + \frac{1210 \times 1 \times 10}{100}$$

$$A_3 = 1210 + 121$$

$A_3 = 1331$(तीसरे वर्ष के अंत में अदा की जाने वाली रकम)

उपरोक्त दत्तों की जाँच करेंगे तो

$$A_1 = 1100 = 1000 \times \frac{110}{100} = 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)$$

$$= 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$A_2 = 1210 = 10 \times 121 = 10 \times 11 \times 11 = 1000 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

$$= 1000 \times \left(\frac{110}{100}\right)^2 = 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)^2 = 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$A_3 = 1331 = 11 \times 11 \times 11 = 1000 \times \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = 1000 \times \left(\frac{110}{100}\right)^3$$

$$= 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)^3 = 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

इसलिए चक्रवृद्धि ब्याज में मिश्रधन को ज्ञात करने का सूत्र

$$A = P \times \left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

नोट : मिश्रधन को अवधि की संख्याओं के आधार पर ज्ञात किया जाता है।

जहाँ 'n' = अवधियों की संख्या

यदि ब्याज को वार्षिक दर से गणना करेंगे तो 't" वर्ष, हो तो $n = t$

यदि ब्याज को अर्धवार्षिक दर से गणना करेंगे तो 't" वर्ष, हो तो $n = 2t$

यदि ब्याज को त्रैमाषिक दर से गणना करेंगे तो 't" वर्ष, हो तो $n = 4t$

यदि ब्याज को दो वर्षो दर से गणना करेंगे तो 't" वर्ष, हो तो $n = \frac{t}{2}$

$\therefore$ केवल चक्रवृद्धि ब्याज की गणाना करना हो तो

$$CI = A - P$$

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन - मूलधन

उदाहरण 1 : बद्री ने महेश को ₹ 25,000 दिए चार वर्षों के लिए 8% ब्याज दर दिए

तो महेश कितनी रकम कपस करेगै?

हल : बद्री द्वारा महेश को दी गई रकम = P = ` 25000

समय (वर्ष) = T= 4

ब्याज दर प्रति वर्ष = R% = 8%

$SI = \frac{PTR}{100} = \frac{25000\times4\times8}{100} = \frac{25000\times4\times8}{100} = 250 \times 4 \times 8 =$ ` 8000

महेश द्वारा अधा की गई रकम = A = मूलधन + SI

= 25000 +8000

A = ` 33000/-

उदाहरण 2: साधारण ब्याज की कीस दर से ` 6000 पर ब्याज दो वर्षों के लिए ` 1200/- होगा?

हल : P = ` 6000 SI = ` 1200

समय T = 2 R% = ?

$$SI = \frac{PTR}{100}$$

$$1200 = \frac{6000\times2\times R}{100}$$

$$1200 \times \frac{100}{6000\times2} = R$$

$$R = 1200 \times \frac{100}{6000\times2} = 10\%$$

∴ ब्याज दर प्रति वर्ष = 10%.

क्रियाकलाप 1 : उदाहरण में दिए अनुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

क्र.सं.	मूलधन	ब्याज दर	साधारण ब्याज 1 वर्ष के लिए	साधारण ब्याज 2 वर्षों के लिए	साधारण 3वर्षों के लिए	साधारण 4 वर्षों के लिए
1.	1000/-	5%	50/-	100/-	150/-	200/-
2.	2000/-	4%				
3.	750	10%				
4.	20000	$2\frac{1}{2}\%$				

उदाहरण 3 : यादगिरी मलय्या से ` 1,40,000/- उधार लेता है, 5 वर्षों बाद यादगिरी 7% ब्याज दर से मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल : $P = 1,40,000 \quad T = 5 \quad R = 7$

$$A = P\left[\frac{100+TR}{100}\right] = \text{`}\ 1,40,000 \times \left[\frac{100+5\times 7}{100}\right]$$

$$A = \text{`}\ 140000 \times \frac{135}{100} = 1400 \times 135 = \text{`}\ 1,89,000/-$$

यादगिरी मलय्या को ` 1,89,000/- वापस करने होंगे

क्रियाकलाप 2 : निम्न उदाहरण को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

क्र.सं.	मूलधन (P)	समय (T)	ब्याज दर (R)	S.I.	मिश्रधन (A)
1.	100/-	2	9%	18/-	118/-
2.	2500	6	7%		
3.	5000/-		10%	1500	
4.		5	6%	1200	
5.	7000	2		1120	

उदाहरण 4 : हरी एक वित्त कंपनी से 10% दर से ` 1,00,000/- ऋण लेता है वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज से 2 वर्षों के लिए 12 वर्षों बाद हरी को कंपनी को कितनी रकम अदा करनी होगी?

हल: मूलधन = P = ` 1,00,000/-

वार्षिक ब्याज दर = R = 10%

समय = 2 वर्ष,

अवधियों की संख्या = n = 2 ($\because$ वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज)

$$= A = P \times \left[\frac{100+R}{100}\right]^n = 1,00,000 \times \left[\frac{100+10}{100}\right]^2 = 1,00,000 \times \left[\frac{110}{100}\right]^2$$

$$= 1,00,000 \times \left[\frac{110}{100}\right] \times \left[\frac{110}{100}\right] = 1,00,0\cancel{00} \times \frac{11\cancel{0}}{1\cancel{00}} \times \frac{11\cancel{0}}{1\cancel{00}}$$

$$A = 1000 \times 11 \times 11 = \text{`}\ 1,21,000$$

हरी द्वारा कंपनी को दी गई रकम = ` 1,21,000/-

ज्ञात चक्रवृद्धि ब्याज = CI = A–P = 1,21,000 – 1,00,000 = ` 21,000/-

अभ्यास

1. ₹ 50,000 पर 9% दर से 2 वर्षों के लिए साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. जोसफ, किरण से ₹ 8,000 उधार 5% ब्याज दर से लेता है दो वर्षों बाद ब्याज तथा मिश्रधन को ज्ञात कीजिए।
3. रामू कुछ रकम पर 4 वर्षों के लिए 9.5% दर से साधारण ब्याज ₹ 21,280 अदा करता है तो मूलधन ज्ञात कीजिए।
4. ₹ 16,500 कितने समय में ₹ 22,935, 13% ब्याज दर से बनेंगे?
5. ₹ 48,000 ऋण के लिए फासी किस ब्याज दर से 2वर्ष 3 महीने बाद ₹55,560 बैंक को अदा करता है।
6. मूलधन 12% ब्याज दर से 3वर्षों बाद ₹ 17,000 होता है तो मूलधन ज्ञात कीजिए।
7. पद्मा ने एक व्यापारी को ₹ 40,000 दिए वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर 10% 2 वर्षों बाद पद्मा को कितनी रकम मिलेगी?
8. एक वित्त कंपनी ने 6% ब्याज दर से अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज 1 अक्टोबर 2020 को ₹ 6000 देता है आपको 1 अप्रैल 2022 को कितनी रकम मिलेगी।

सारांश

- ली गई रकम को मूलधन कहते है और इसे P से दर्शाते है।
- ली गई रकम पर कुछ अधिक रकम अदा करनी पडती है। इसे ब्याज कहते है।
- ब्याज मूलधन तथा समय अवधि पर आधारित होता है। इसे I से दर्शाते है।
- ब्याज प्रति सैकडे (100) पर वार्षिक दर से ब्याज की गणना करते है इसे R से दर्शाते है।
- समयावधि को T से दर्शाते है।
- ब्याज प्रति सैकडा प्रति वर्ष की गणना को साधरण ब्याज कहते हैं और इसे SI से दर्शाते है।
- साधारण ब्याज (S.I.) = $\frac{PTR}{100}$
- समयावधि के अंत में अदा की गई कुल रकम को मिश्रधन (मूलधन + ब्याज) कहते है इसे A से दर्शाते है।
- मिश्रधन = P + SI
- ब्याज पर ब्याज की गणना को चक्रवृद्धि ब्याज कहते है इसे CI से दर्शाते है।
- चक्रवृद्धि ब्याज के अनुसार मिश्रधन = $A = P\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$ यहाँ 'n' अवधियों को दर्शाता है।
- चक्रवृद्धि ब्याज वार्षिक, अर्धवार्षिक तथा द्विवार्षिक हो सकता है।

इकाई 4 ज्यामितीय

अध्याय 4.1 मूलभूत ज्यामितीय विचार

4.1.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

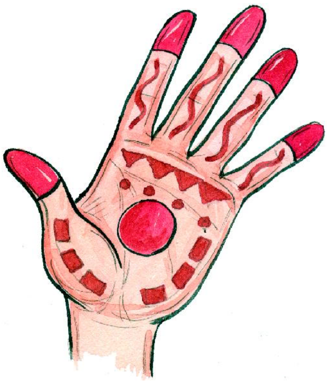
इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

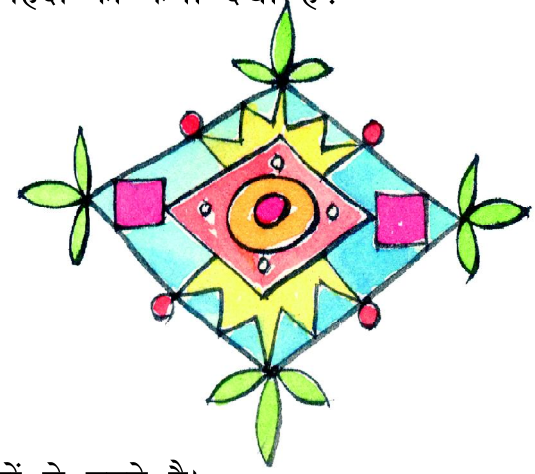
- मूलभूत ज्यामितीय धारणाएँ जैसे बिंदु, रखा, सरल रेखा, तल किरण तथा कोणों को समझायेंगे
- चारों ओर पाए जाने वाले मूलभूत ज्यामितीय आकारों के उदाहरण दे सकेंगे।
- ज्यामितीय आकारों का चित्र उतारेंगे
- कोणों की तुलना कर वर्गीकृत करेंगे
- दि गई रेखाओं को समांतर, प्रतिच्छेदित तथा लंब रेखाओं में विभाजित करेंगे
- रेखाखण्ड, रेखा तथा किरणों को वर्गीकृत करेंगे।

4.1.1 परिचय

क्या आपने कभी रंगोली के डिजाइनों को देखा है?

क्या आपने हाथों पर डाली गई मेहंदी को कभी देखा है?



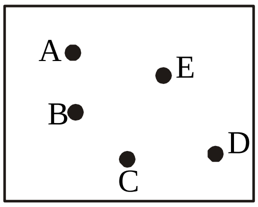


सभी के आकार ज्यामितीय आकारों से बनते है।

वस्तुएँ जो हम हमारे घर पर देखते है जैसे कि टेलीविजन, माचिस की डिबिया, पानी का गिलास, पावडर का डिब्बा.... आदि कुछ ज्यामितीय आकारों को दर्शाते है।

इस अध्याय में आप ज्यामितीय आकारों के बारे में जानेंगे।

4.1.2 मूलभूत ज्यामितीय आकार, बिंदु



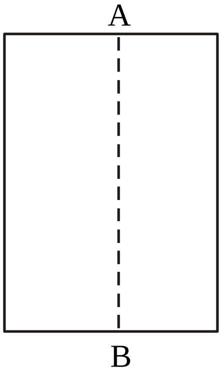
आप पेपर पर एक पेंसिल की नोक से निशान लगाइए.

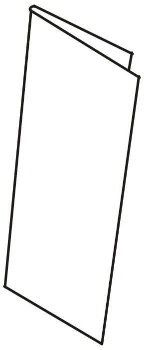
"एक बिंदु एक स्थान को निर्धारित करता है"

बिंदु को हमेशा अंग्रेजी के बडे अक्षरों से दर्शाया जाता है।

रेखा खण्ड

एक मोटा पेपर लेकर चित्र में दर्शाए अनुसार मोडिए। पेपर के मोडे गए किनारे को देखिए। यह हमें रेखा खण्ड की कल्पना देता है। इसके दो अंतिम बिंदु होते है जैसे A और B यह रेखा खण्ड ABअ और इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से दर्शाते है।





रेखा

मानलो रेखाखण्ड AB को A से तथा B से आगे बढाया गया विपरीत दिशा में निरंतर।

अब आप रेखा को प्राप्त करेंगे।

चूँकि हम अनंत दूरी तक रेखा नहीं खींच सकते इसलिए उसे तीर के चिन्ह से दर्शाते है इस रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$.लिख सकते है। इसे अंग्रेजी के छोटे अक्षरों से भी दर्शा सकते है जैसे कि l, m, n आदि।

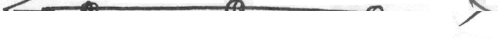
किरण

सूर्य किरणे, प्रकाश किरण तथा टार्च से निकलने वाली किरणे ज्यामिती के कुछ किरणों के उदाहरण है।

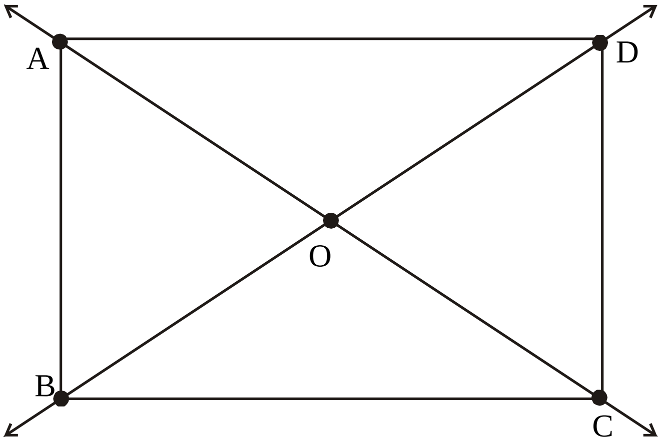
किरण रेखा का एक भाग है जो बिंदु से आरंभ होता है और दूसरी दिशा में अनंत तक फैलता है।

इसे किरण AB (या) $\overrightarrow{AB}$ कहते है।

अर्थात् किरण का एक अंतिम बिंदु होता है मानलो A रेखा पर एक बिंदु है B और C दूसरे दो बिंदु है तो $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overline{AC}$ किरणें होंगी।



क्रियाकलाप



चित्र से,

A, B, C, D और **O** विभिन्न बिंदु है

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ तथा $\overline{AD}$ रेखा खण्ड है

$\overleftrightarrow{AC}$ तथा $\overleftrightarrow{BD}$ सरल रेखाएं है

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ तथा $\overrightarrow{OD}$ किरणें है।

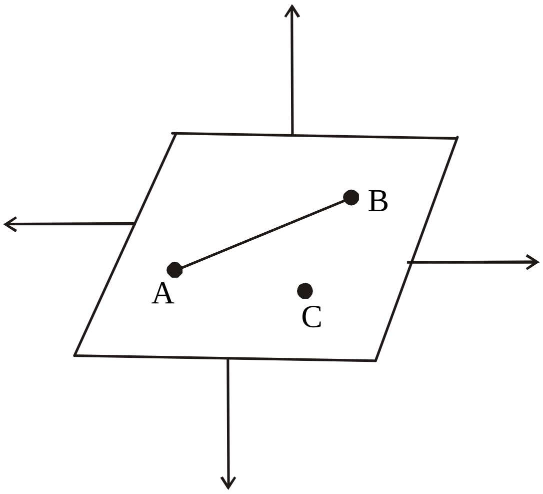
सतह

सतह एक समतल द्विआयामी तल है जो सभी दिशाओं में अनंत रूप से विस्तृत किया जाता है।

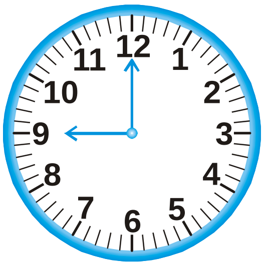
टेबल या ब्लाक बोर्ड का मुलायम तल या दीवार इसके कुछ उदाहरण है वे सीमित होते है लेकिन ज्यामितीय तल अनंत तक विस्तृत होते है।

रेखा खण्ड जो किसी भी दो बिंदुओं को जोडने वाली रेखा उसी तल पर स्थित होती है।

एक तल किसी भी तीन असंरेखीय बिंदुओं से बनता है उन्हें ग्रीक शब्द अल्फा (α), बीटा (β), गामा (γ), आदि से दिए गए चित्र में दर्शाया जाता है।



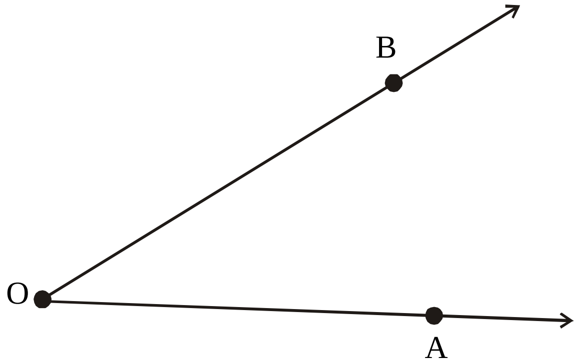
कोण



घडी के दो काँटो को देखिए दोनों के बीच कोण बनता है।

कोण क्या है?

दो किरणों का मेल बिंदु से कोण बनता है। दो किरणे जो कोण बनती है उन्हें कोण की भुजाएँ कहते है। उभयनिष्ट बिंदु को उसका शीर्ष कहते है।

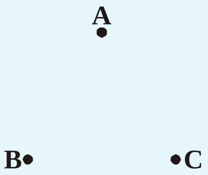


यहाँ दो किरणे $\overrightarrow{OA}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ को कोण की भुजाएं कहते है तथा O को कोण का शीर्ष बिंदु कहते है। चूँकि कोण 'O' पर बनता है इसलिए इसे कोण AOBअ या कोण BOA पढते है और इसे $\angle AOB$ या $\angle BOA$ या $\angle O$ से दर्शाते है।

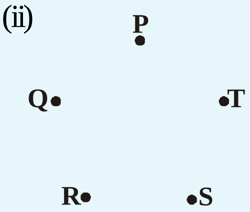
अपनी प्रगति जाँच कीजिए - 1

1. नीचे दिए गए बिंदुओं को उससे बनने वाली रेखा का नाम लिखिए.

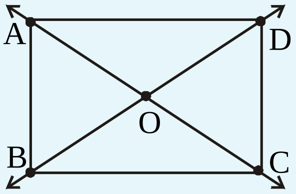
(i)



(ii)



2. चित्र में से निम्न के नाम लिखिए।



(i) कोई भी पाँच बिंदु
(ii) कोई भी पाँच रेखा खण्ड
(iii) कोई भी तीन किरणे
(iv) कोई भी दो रेखाएँ

3. दिए गए बिंदुओं से खींची जानेवाली संभावित रेखाओं की संख्या लिखिए।

(i) एक बिंदु (ii) दो विभिन्न बिंदु

4. निम्न में किसकी निश्चित लंबाई होती है?

(i) रेखा (ii) बिंदु (iii) रेखा खण्ड (iv) किरण

5. निम्न के कितने अंतिम बिंदु होते है?

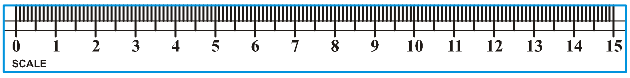
(i) रेखा खण्ड (ii) किरण (iii) रेखा

7. चित्र बनाकर नाम लिखिए।

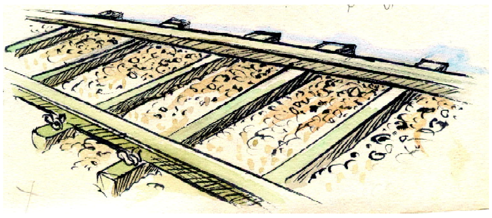
(i) बिंदु P सहित रेखा.
(ii) R से गुजरने वाली रेखा.

4.1.3 समानांतर रेखाए

चित्र देखिए:



पटरी



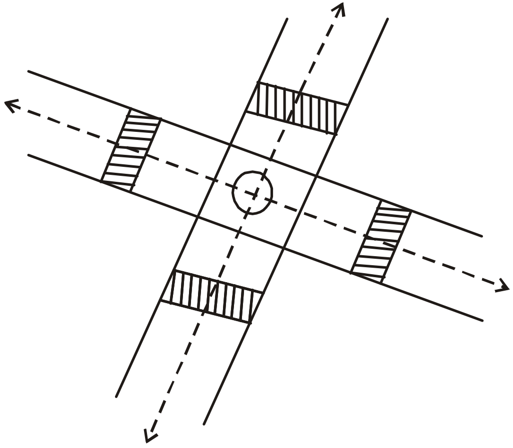
रेल की पट्टी

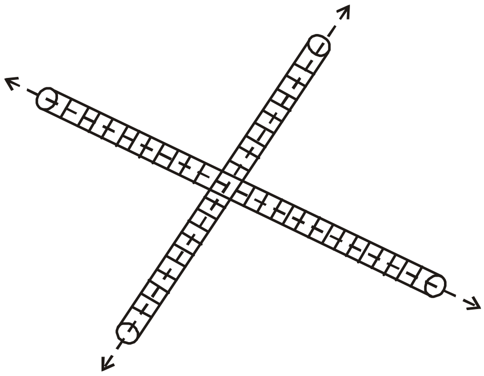
दो रेखाएँ यदि किसी भी बिंदु पर एक दूसरे से प्रतिच्छेदित न हो उन्हें समानांतर रेखाएँ कहते है।

यहाँ l तथा m से लिखा जाता है और $l \,||\, m$ समानांतर है m के पढ़ते है।

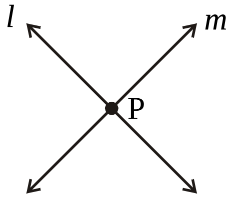
प्रतिच्छेदित रेखाएँ

निम्न चित्रों को देखिए





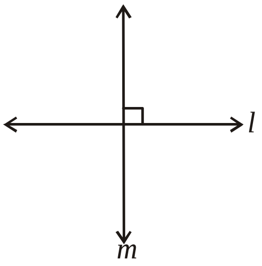
यदि दो विभिन्न रेखाएँ l और m किसी बिंदु पर एक दूसरे से मिलती है तो उन्हें प्रतिच्छेदित रेखाएँ कहते है। इनका उभयनिष्ट बिंदु होता है।



लंब रेखाएँ

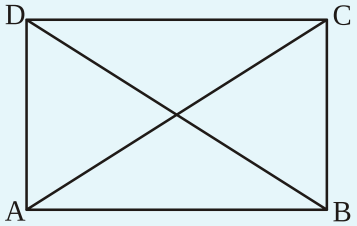
यदि दो रेखाएँ एक दूसरे से समकोण पर प्रतिच्छेदित होती हो तो उन्हें लंब रेखाएँ कहते है।

यहाँ रेखा l लंब है m पर तथा इसे $l \perp m$ पर लिखते है।



अपनी प्रगति जाँच कीजिए 2

1. समानांतर तथा प्रतिच्छेदित रेखाओं के दो दैनिक जीवन से संबंधित उदाहरण दीजिए।
2. ABCD एक आयत है तो (i) समानांतर रेखाओं की जोडी लिखिए, (ii) लंब रेखाएँ तथा (iii) प्रतिच्छेदित रेखाओं के नाम लिखिए।



4.1.4 कोणों के प्रकार

क्रियाकलाप

दो पेयजल के स्ट्रा लीजिए।

एक स्ट्रा का अंत दूसरे पर पिन की सहायता से व्यवस्थित कीजिए जिससे हमें 'L' आकार प्राप्त होगा यहाँ आपको समकोण प्राप्त होगा।

चित्र -2, में कोण समकोण से कम है इसलिए $\angle AOB$ को न्यून कोण कहते है।

चित्र -3, में कोण समकोण से बडा है इसलिए यहाँ $\angle AOC$ को अधिक कोण कहते है।

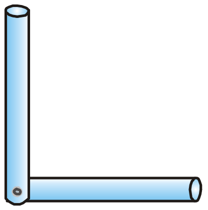


Fig. 1

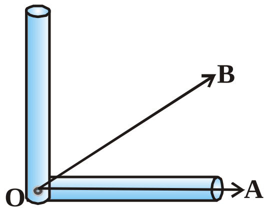


Fig. 2

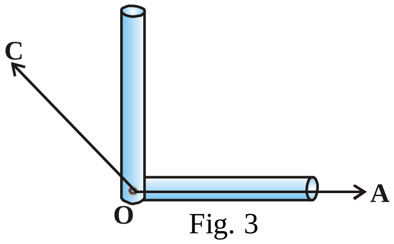


Fig. 3

कोणों के प्रकार	मापन
शून्य कोण	0^0
सम कोण	90^0
सरल कोण	180^0
संपूर्ण कोण	360^0
न्यून कोण	0^0 तथा 90^0 के बीच
अधिक कोण	90^0 तथा 180^0 के बीच
बृहत्त कोण	180^0 तथा 360^0 के बीच

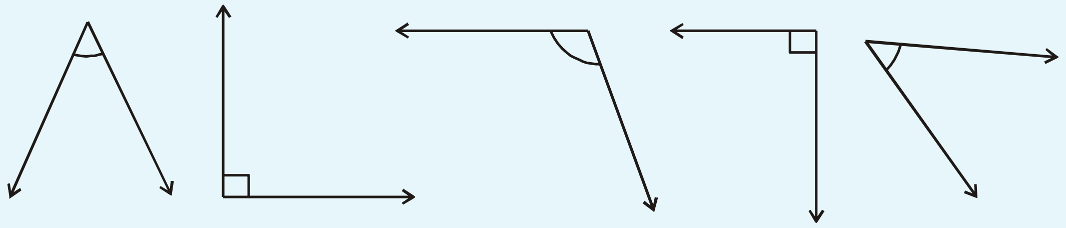
अपनी प्रगति जाँच कीजिए - 3

1. निम्न कोणों को न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण, सरल तथा बृहत्त कोणों में वर्गीकृत कीजिए।

(i) 65^0 (ii) 109^0 (iii) 90^0 (iv) 125^0

(v) 270^0 (vi) 180^0

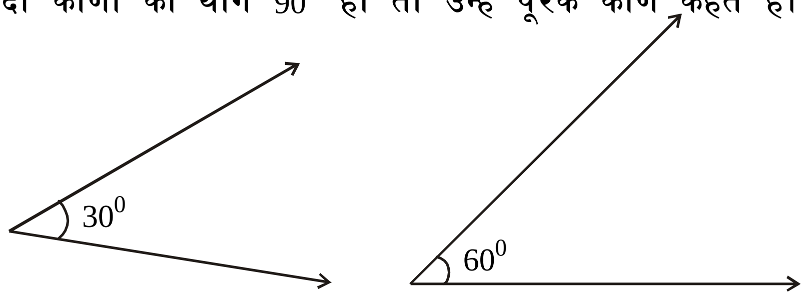
2. निम्न चित्रों को देखकर उनके कोणों के प्रकार बताइए।



4.1.5 कोणों के युग्म

पूरक कोण

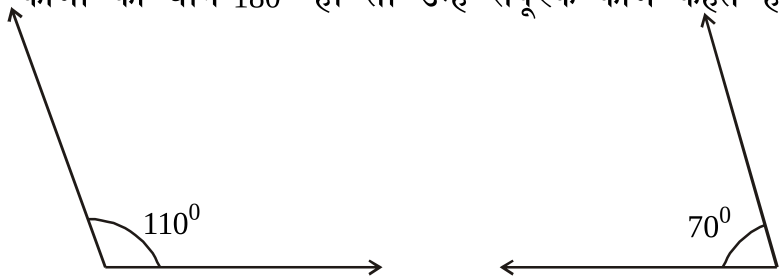
यदि दो कोणों का योग 90^0 हो तो उन्हें पूरक कोण कहते है।



ये पूरक कोण है क्योंकि इनका योग $30^0 + 60^0 = 90^0$ होता है। इसे हम 30° का पूरक कोण 60° भी कह सकते है या 60° का पूरक कोण 30° भी कह सकते है।

संपूरक कोण

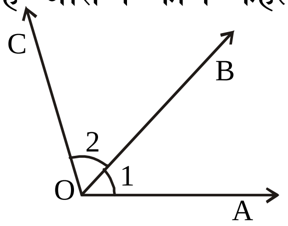
यदि दो कोणों का योग 180° हो तो उन्हें संपूरक कोण कहते है।



ये संपूरक कोण का युग्म है। क्योंकि उनका योग 110° + 70° = 180° होता है। इसे हम 110° संपूरक कोण है 70° का या 70° संपूरक कोण है 110° का कह सकते है।

आसन्न कोण

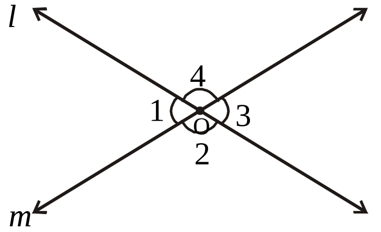
कोण जिसमें उभयनिष्ठ भुजा तथा शीर्ष होता है और दोनों ओर दो अलग भुजाएँ होती है उन्हें आसन्न कोण कहते है।



चित्र में ∠AOB तथा ∠BOC आसन्न कोण है। उसका उभयनिष्ट बिंदु 'O' और उभयनिष्ट भुजा $\overline{OB}$ अ है दूसरी भुजाएँ OA और OC उभयनिष्ट भुजा के दोनों ओर होता है।

शीर्ष के सम्मुख कोण

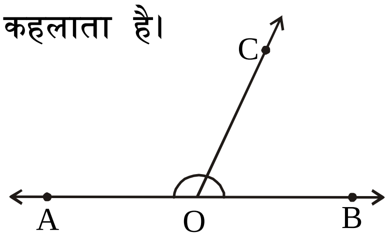
जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती है तो दोनों रेखाओं के शीर्ष पर सम्मुख कोण बनते है जिन्हें हम शीर्ष के सम्मुख कोण कहते है।



दिए गए चित्र में रेखाएँ 'l' और 'm' एक दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेदित करती है. $\angle 1$ तथा $\angle 3$ और $\angle 2$ तथा $\angle 4$ सम्मुख कोण के युग्म है इसलिए, $\angle 1$, $\angle 3$ और $\angle 2$, $\angle 4$ दो शीर्ष सम्मुख के कोण है।

रेखीय युग्म

ऐसे संलग्न कोणों का युग्म जिसका योगफल सरल कोण (180°) हो तो उन्हें रेखीय युग्म कहलाता है।



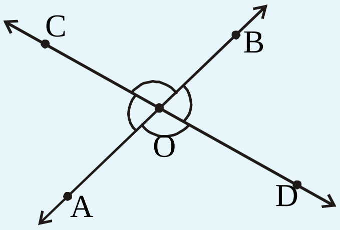
$\angle AOC$ तथा $\angle BOC$ संलग्न कोण है। उनका योग 180°. है इसलिए $\angle AOC$ तथा $\angle BOC$ संलग्न कोणों का युग्म है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए - 4

1. अनुषा कहती है "पूरक कोणों का प्रत्येक कोण न्यून कोण होता है" क्या आप उससे सहमत है यदि नहीं तो क्यों?

2. निम्न के संपूरक कोणों को ज्ञात कीजिए।

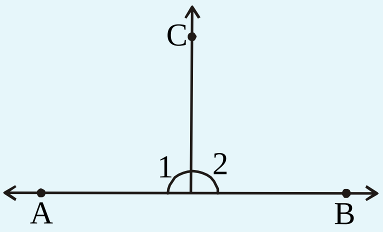
   (i) 115° (ii) 95° (iii) 10° (iv) 40°

3. 

   दिएगए चित्र में

   (i) संलग्न कोण और

   (ii) शीर्ष सम्मुख कोणों के युग्म ज्ञात कीजिए.

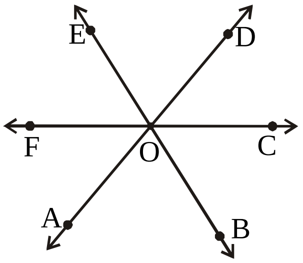
4. 

   दिए गए चित्र में रघु कहता है, $\angle 1$, $\angle 2$ संलग्न कोण है तथा संपूरक कोण है जबकि रामू कहता है। $\angle 1$, $\angle 2$ रेखीय युग्म कोण है।

   आप किससे सहमत है और क्यों?

अभ्यास - 1

1.

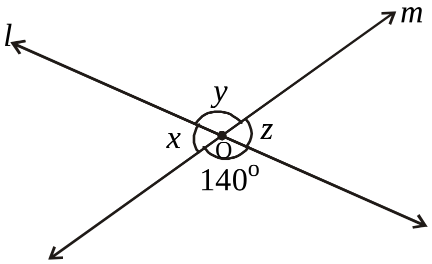


निम्न को लिखिए

(i) चार संलग्न कोणों का युग्म

(ii) तीन शीर्ष वाले सम्मुख कोणों का लिखिए

2.



दो सरल रेखाएं l तथा m, 'O' पर प्रतिच्छेदित होती है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया x, y और z को ज्ञात कीजिए.

3. घडी के दो काँटो के बीच बनने वाले कोणों के प्रकारों को लिखिए

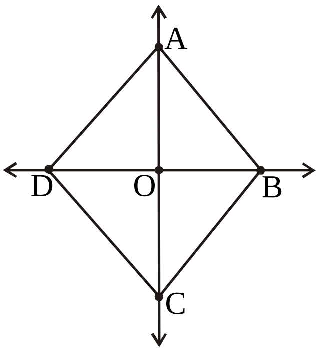
(i) सुबह के 9 बजे

(ii) 12 बजे

(iii) शाम के 6 बजे

(iv) रात के 8 बजे

4. चित्र में से निम्न के नाम लिखिए।



(i) कोई भी पाँच बिंदु

(ii) कोई भी पाँच रेखा खण्ड

(iii) कोई भी दो किरणे

(iv) कोई भी दो रेखाएँ

5. निम्न में कौनसे समानांतर रेखाएं है और कौनसे लंब रेखाएँ है?

(i) रेल की पटरियाँ

(ii) अंग्रेजी का शब्द 'T'

(iii) दरवाजे की संलग्न भुजाएँ

(iv) '+' जोड का चिन्ह

6. किन्हीं भी दो न्यून तथा अधिक कोणों के चित्र बनाइए।

7. दो कोण एक दूसरे के पूरक भी है और समान भी ज्ञात कीजिए।

8. कथन सत्य है या असत्य बताइए।

(i) किरण रेखा का एक भाग है। [ ]

(ii) रेखा खण्ड का केवल एक अंतिम बिंदु होता है। [ ]

(iii) पूर्ण कोण का माप 360° होता है। [ ]

(iv) एक बिंदु से अनंत रेखाएँ खींच सकते है। [ ]

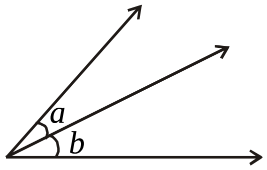
9. सरल कोण ________ [ ]

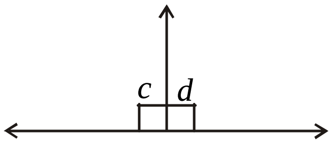
A) 90° B) 180° C) 270° D) 360°

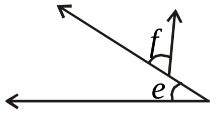
10. निम्न में कौनसे संपूरक कोण नहीं है। [ ]

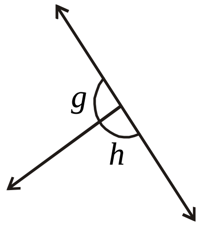
A) 110° , 70° B) 90°, 90° C) 50°, 140° D) 105°, 75°

11. निम्न में कौनसे संलग्न कोणों का युग्म नही है। [ ]

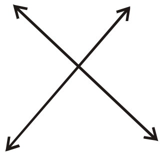
A)


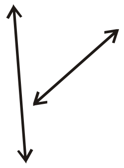
B)


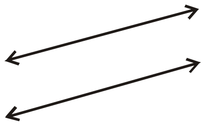
C)


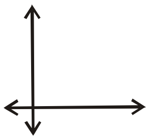
D)


12. निम्न में कौनसी लंब रेखाएँ है? [ ]

A)


B)


C)


D)


सारांश

- ज्यामिती में आकारों के गुण तथा उनके मापन के बारे में जानते है।
- सतह एक समतल है जो किसी भी दो बिंदुओं को जोडने से वे तल पर रहते है।
- यदि तल पर दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित नहीं करती है तो उन्हें समानांतर रेखाएँ कहते है।
- यदि दो रेखाओं का उभयनिष्ठ बिंदु हो तो उन्हें प्रतिच्छेदित रेखाएँ कहते है।
- दो किरणों का सम्मिलन एक कोण बनाता है।
- यदि दो कोणों का योग 90^o हो तो उन्हें पूरक कोण कहते है।
- यदि दो कोणों का योग 180° हो तो उन्हें संपूरक कोण कहते है।
- सामान्य भुजा एवं सामान्य शीर्ष के दोनों ओर निर्मित कोणों को आसन्न कोण कहते है।
- जब दो रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित होती है तो दोनों रेखाओं के आमने सामने बनने वाले कोण को सम्मुख कोण कहते है।
- आसन्न कोणों के युग्म जिसका योग (180°) (सरल कोण) हो उन्हें रेखीय युग्म कहते है।

अध्याय

4.2

समानांतर रेखाएँ

4.2.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- समानांतर रेखाओं को पहचानकर उसे समझेंगे.
- दो समानांतर रेखाओं पर तिर्यक डालने पर बनने वाले संगत कोण एकांतर कोण तथा अतः कोणों के बारे में समझायेंगे.
- समानांतर रेखाओं पर डाले गए तिर्यक से बनने वाले कोणों के गुणधर्मो की सहायता से प्रश्न हल करेंगे।

4.2.1 परिचय

आप सबने रेल की पटरी को देखा ही होगा। ये पटरियाँ समानांतर रेखाओं को दर्शाते है। आप दोनों पटरियों को जोडने वाली लकडियों को देखा ही होगा?

इतनी लकडियों को आप क्या कहेंगे?

चित्र - 1 रेल की पटरियाँ

हम अपने दैनिक जीवन में उपयोगी सीढि देखी होगा।.

आपने सीढि के चरणों को देखा होगा?

इन चरणों को आप क्या कहेंगे?

पहले चित्र में आडी लकडियों को और दूसरे चित्र में चरणों को तिर्यक कहते है।

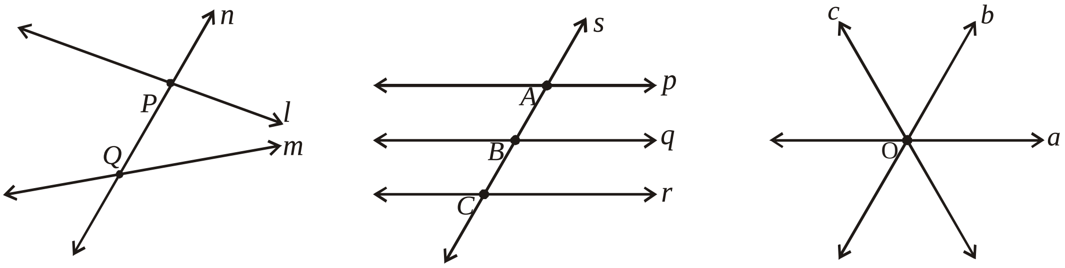
चित्र - 2

"रेखा जो विभिन्न रेखाओं को विभिन्न बिंदुओं पर काटती है तो उसे तिर्यक कहते है''।

4.2.2 समानांतर रेखाएँ

1. तिर्यक

निम्न चित्रों को देखिए।



चित्र. 1 चित्र. 2 चित्र. 3

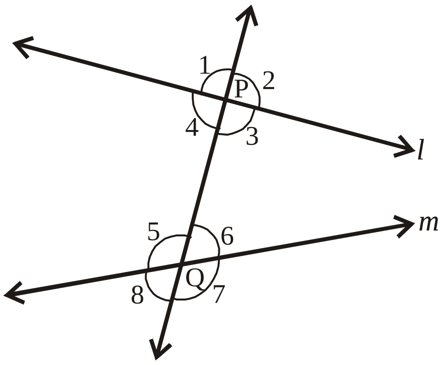
चित्र (1), में रेखा "n" दूसरी दो रेखाओं l, m को दो विभिन्न बिंदुओं पर काटती है इसलिए "n" को तिर्यक कहते है।

चित्र (2), में रेखा "s" p, q, r रेखाओं को तीन विभिन्न बिंदुओं पर काटती है। इसलिए "s" को तिर्यक कहेंगे।

चित्र (3), में रेखा a, b और c सभी एक बिंदु "O" पर काटती है इसलिए "c" को तिर्यक नही कह सकते है।

2. तिर्यक द्वारा बनने वाले कोण

यदि तिर्यक दो रेखाओं को "l", "m" को दो विभिन्न बिंदुओं पर काटने से 8 कोण बनते है प्रत्येक कटान बिंदु पर 4 कोण बनते है।



यदि हम चित्र को देखेंगे तो n रेखा "l",और"m" को दो बिंदुओं पर काटती है, तो $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ और $\angle 8$ कोण बनते है।

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ और $\angle 8$ को बाह्य कोण कहते है।
$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ और $\angle 6$ को अंतः कोण कहते है।

($\angle 1, \angle 5$), ($\angle 2, \angle 6$), ($\angle 4, \angle 8$) और ($\angle 3, \angle 7$) इन कोणों के युग्म को संगत कोण कहते है।

जब हम विभिन्न बिंदुओं पर बनने वाले कोणों को देखते है तो एक तिर्यक "n" के एक ओर या तो अंतः कोण या बाह्य कोण बनाते है। इसलिए उन्हें 'संगत कोण' कहते है।

चित्र में से, ($\angle 3, \angle 5$) और ($\angle 4, \angle 6$) एकांतर अंतः कोण है।

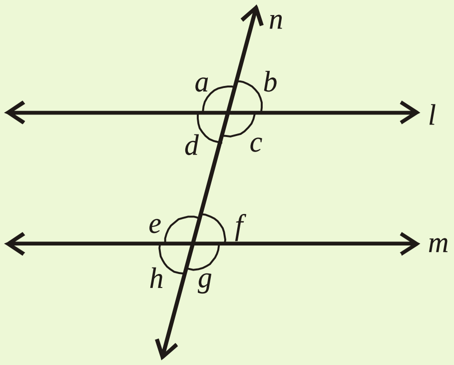
ये कोण रेखा "l" तथा "m" के भीतरी ओर एकांतर कोण' कहते है।

उसी प्रकार, ($\angle 2, \angle 8$) और ($\angle 1, \angle 7$), को बाह्य एकांतर कोण कहते है।

($\angle 4, \angle 5$) और $\angle 3, \angle 6$ को तिर्यक के एक और बनने वाले अंतः कोण है। उन्हें सह अंतः कोण कहते है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

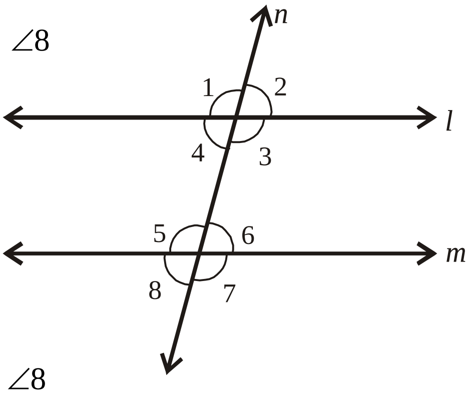
1. इस चित्र को देखिए और उसके बाह्य और अंतः कोण लिखिए।



2. चित्र में से संगत कोण, एकांतर अंतः कोण तथा एकांतर बाह्य कोणों को लिखिए।

4.2.3 समानांतर रेखाओं का तिर्यक

दिए गए चित्र में “l” तथा “m” दो समानांतर रेखाएँ तथा“n” उनका तिर्यक है जो उन्हें विभिन्न बिंदुओं पर काटती है।



संगत कोण समान होते है

$\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8$

एकांतर बाह्यो कोण समान होते है।

$\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8$

एकांतर अंतः कोण समान होते है।

$\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$

$\angle 1 = \angle 3,\ \angle 2 = \angle 4,\ \angle 5 = \angle 7$ और $\angle 6 = \angle 8$

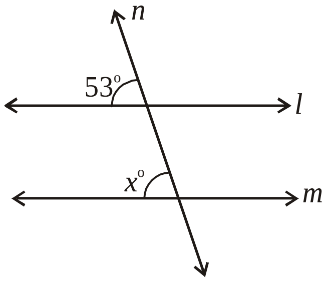
सह-अंतः कोण संपूरक होते है

$\angle 4 + \angle 5 = 180^0$ और $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

विलोमः

यदि तल पर दो रेखाएँ एक तिर्यक से प्रतिच्छेदित होती है तो संगत कोण समान होते है (या) एकांतर कोण समान होते है (या) सह एकांतर कोण समान होते है तो वे रेखाएँ समानांतर होती है।

उदाहरण - 1 :



दिए गए चित्र में,

l, m समानांतर रेखाएँ तथा

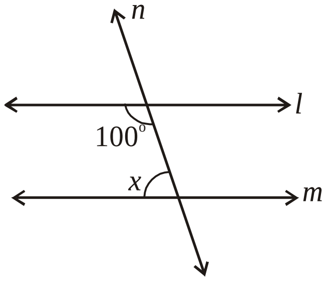
“n” उनका तिर्यक है तो

कोण “x” ज्ञात कीजिए.

हल :

$\angle S = 53^0$, चूँकि ये संगत कोण है।

उदाहरण - 2 :



दिए गए संलग्न चित्र में यदि $l \parallel m$, "n" तिर्यक हो तो "x" का मूल्य ज्ञात कीजिए.

हल :

$l \parallel m$, n तिर्यक है।

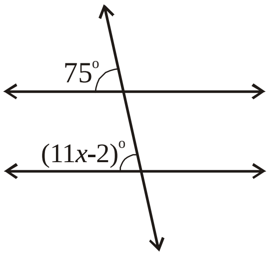
सह-अंतः कोण संपूरक होते है।

$$\therefore \quad 100^0 + x^0 = 180^0$$

$$x = 180 - 100$$

$$\boxed{x = 80^0} \quad \Rightarrow \angle x = 80^0.$$

उदाहरण 3 :



संलग्न चित्र में $l \parallel m$, तथा "n" तिर्यक हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :

$l \parallel m$, n तिर्यक हो तो संगत कोण समान होते है।

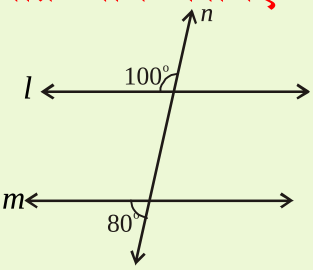
$$\therefore \quad 75 = 11x - 2$$

$$75 + 2 = 11x \quad \Rightarrow 11x = 77^o$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{77^o}{11} = 7^o.$$

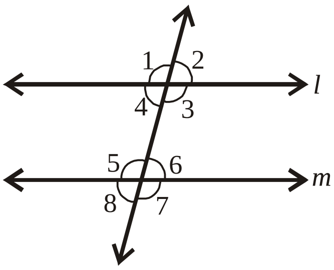
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1.



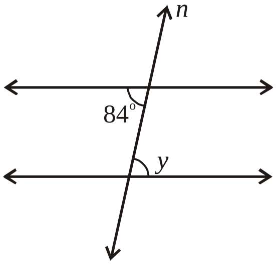
क्या l तथा m समानांतर है?

2.



दिए गए संलग्न चित्र में $l \parallel m$, "n" तिर्यक है यदि $\angle 2 = 75^0$ हो तो शेष सभी कोणों को ज्ञात कीजिए।

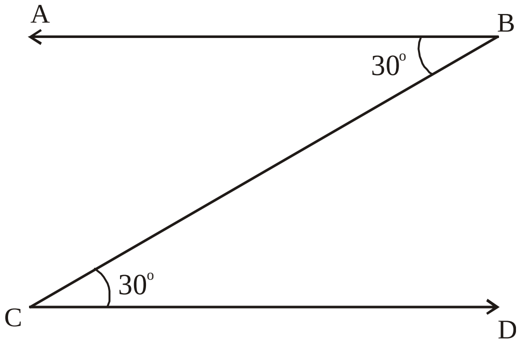
3.



यदि $l \parallel m$, "n" तिर्यक हो कोण y ज्ञात कीजिए?

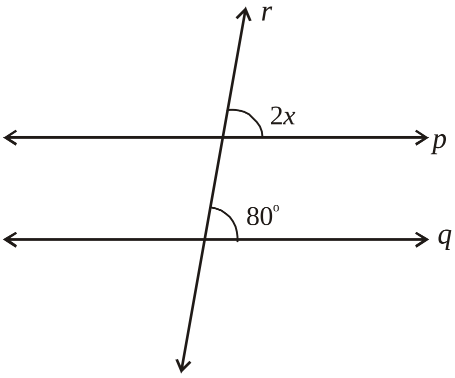
अभ्यास

1.



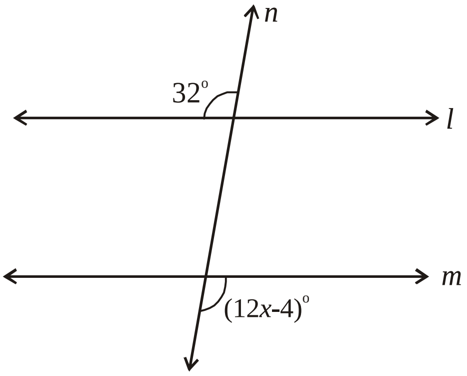
दिए गए संलग्न चित्र में , क्या AB तथा CD समानांतर है क्यों?

2.



दिए गए चित्र में $p \parallel q$, "r" तिर्यक हो तो 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

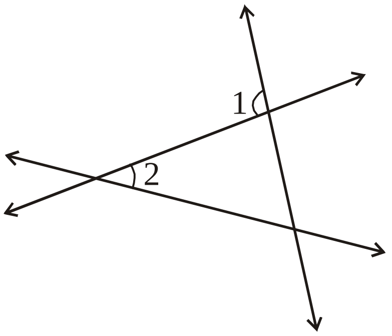
3.



दिए गए चित्र में $l \parallel m$, "n" तिर्यक हो तो 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

4. यदि एक तिर्यक रेखाओं को विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है तो कितने कोणों का निर्माण होगा? उचित चित्र उतारिए।

5.



दिए गए चित्र के कोणों के नाम लिखिए?

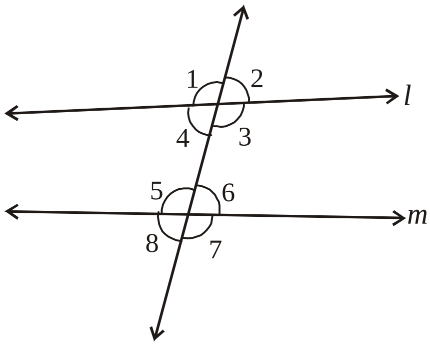
6. दिए गए चित्र पर आधारित जोडियाँ बनाइए।

(i) अंतः एकांतर कोण [ ] A)($\angle 3, \angle 6$)

(ii) संगता कोण [ ] B)($\angle 1, \angle 7$)

(iii) बाह्य एकांतर कोण [ ] C)($\angle 2, \angle 6$)

(iv) सह-अंतः कोण [ ] D)($\angle 3, \angle 5$)



सारांश

- रेखा जो विभिन्न रेखाओं पर विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती हो तो उसे तिर्यक कहते है।
- यदि दो समानांतर रेखाएँ तिर्यक द्वारा काटी जाती हो तो

- संगत कोण समान होते है
- अंतः एकांतर कोण समान होते है
- बाह्य एकांतर कोण समान होते है
- सह-बाह्य कोण संपूरक होते है

- विलोमः यदि तल पर दो रेकाएँ तिर्यक द्वारा प्रतिच्छेदित होती है तो

  संगत कोणों का युग्म समान होता है (या)

  एकांतर कोणों का युग्म समान होता है (या)

  सह अंतः (या) बाह्य कोण संपूरक होते है तो रेखाएँ समानांतर होती है।

अध्याय
4.3

त्रिभुज

4.3.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है सिद्ध करेंगे।
- त्रिभुज का बाह्य कोण सम्मुख दो अंतः कोणों के योग के बराबर होता है इसकी जाँच करेंगे।
- समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है इसकी जाँच करेंगे।
- त्रिभुज की असमानताओं की जाँच करेंगे।
- त्रिभुजों के गुणधर्मो पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे।

4.3.1 परिचय

ज्यामिती में आकारों के मापन के साथ गुणधर्मो को भी पढते है। प्राचिन काल में ज्यामिती का उपयोग भवन निर्माण में ही किया जाता था।

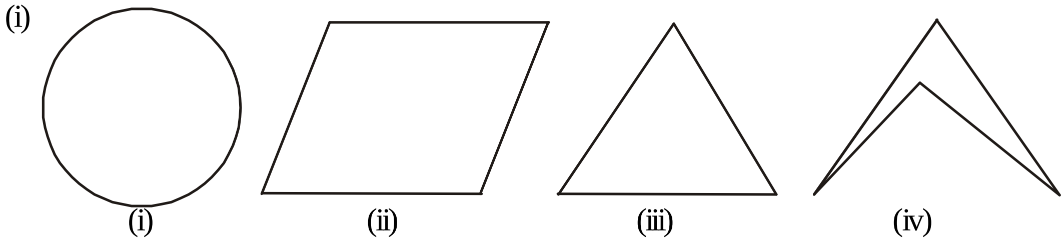
हमारे परिसर में दिखने वाली प्रत्येक वस्तु पर ज्यामिती का प्रभाव होता है। सायकल, कार, मोटर सायकल, बस, लॉरी आदि वाहनों की बनावट में ज्यामितीय आकारों का उपयोग करते है।

इस पाठ में हम ज्यामितीय आकार त्रिभुज के बारे में पढेंगे।

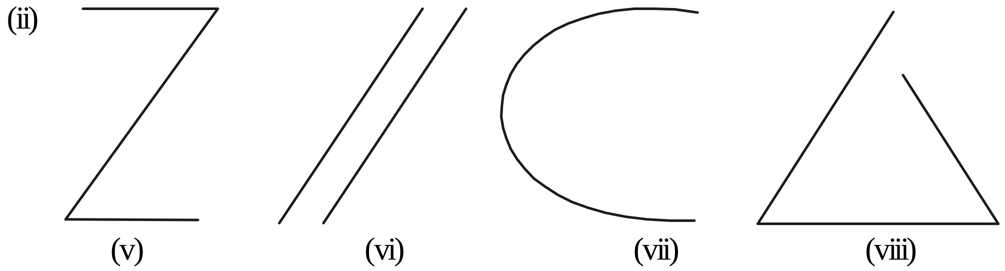
4.3.2 त्रिभुज के गुणधर्म

कोई भी ज्यामितीय आकृति सरल रेखा या वक्र रेखा से घिरा होता है। कभी-कभी दोनों भी होते है। ज्यामितीय आकृतियाँ बंद या खुली होती है।

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए



ज्यामितीय बंद आकृतियाँ



ज्यामितीय खुली आकृतियाँ

चित्र. 4.3.1

निम्न में कौनसी त्रिभुज आकृति है?

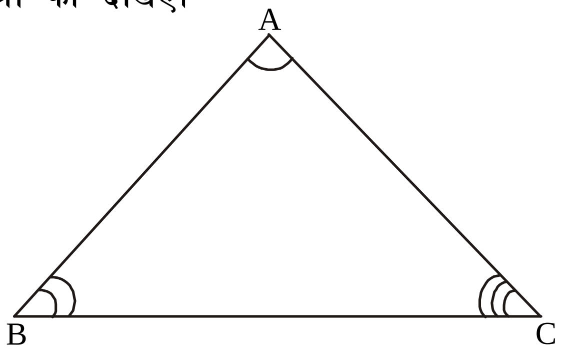
चित्र (iii) त्रिभुज है आप चित्र (iii) ही त्रिभुज क्यों कहेंगे?

हमने देखा कि इसमें तीन रेखाखण्ड से बनने वाली बंद आकृति है

त्रिभुज क्या है?

त्रिभुज तीन रेखाओं से बनने वाली बंद आकृति है।

निम्न चित्रों को देखिए।



(i) यह एक बंद आकृति है

(ii) यह तीन रेखा खण्डो से बनता है $\overline{AB}$ or $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ or $\overline{CB}$ या $\overline{AC}$ or $\overline{CA}$. उन्हें भुजाएँ कहते है।

(iii) यह $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$, से तीन कोण बनते है।

$\angle A$ or $\angle BAC$ or $\angle CAB$

$\angle B$ or $\angle ABC$ or $\angle CBA$

$\angle C$ or $\angle ACB$ or $\angle BCA$.

हम इस त्रिभुज का नाम कैसे दे सकते है। उसे ΔABC या ΔBCA या ΔCAB. से नामांकित कर सकते है।

हमने देखा कि ΔABC में

3 भुजायें : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

3 कोण : $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$ → 6 घटक

3 शिर्ष : A, B, C.

चलिए अब त्रिभुज के बारे में और जानेंगे

शीर्ष A की सम्मुख भुजा कौनसी है? शीर्ष A की सम्मुख भुजा BC है।

उसी प्रकार हम कह सकते है कि शीर्ष B तथा C के सम्मुख की भुजाएँ CA तथा AB होंगी।

क्या आप BC के सम्मुख वाला कोण बता सकेंगे?

भुजा BC का सम्मुख कोण $\angle BAC$ या $\angle A$.होगा।

उसी प्रकार हम, $\angle B$ तथा $\angle C$ के सम्मुख भुजाएँ CA तथा AB होंगी।

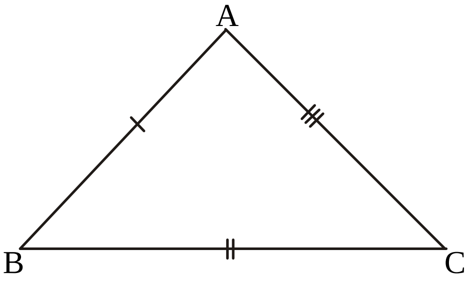
क्या हम त्रिभुजों को वर्गीकृत कर सकते है? यदि हाँ तो वह कैसे करेंगे। चलिए हम त्रिभुज के प्रकारों को पढेंगे?

4.3.3 त्रिभुजों के प्रकार

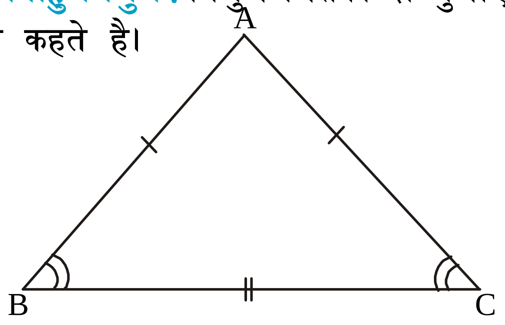
त्रिभुजों दो विधियों से वर्गीकृत कर सकते है।

I. भुजाओं के आधार पर

(i) **विषमबाहु त्रिभुज:** त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाओं की लंबाई अलग हो तो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते है।



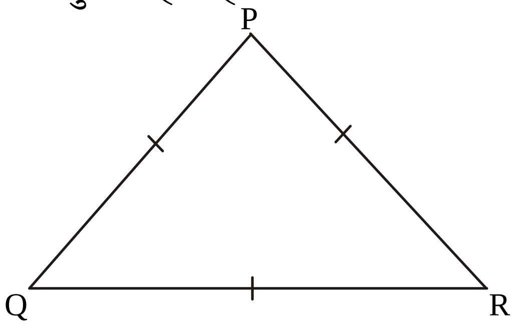
(ii) **समद्विबाहु त्रिभुज :** त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ समान हो तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते है।



- BC → आधार
- $\angle B, \angle C$ → आधार के कोण
- $\angle A$ → शीर्ष कोण

AB = AC और $\angle B = \angle C$

(iii) समबाहु त्रिभुज: त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान होती है उसे समबाहु त्रिभुज कहते है।



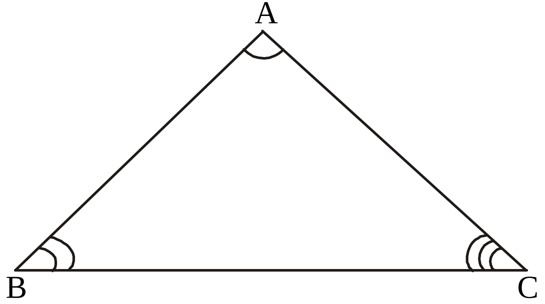
[नोटः सभी भुजाओं को एक ही प्रकार का चिन्ह होगा।].

$PQ = QR = PR$ तथा

$\angle P = \angle Q = \angle R = 60^o$

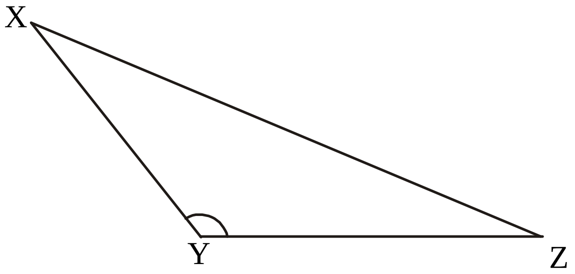
II. कोणों पर आधारित

(i) न्यून कोण त्रिभुज : त्रिभुज जिसमें तीनों कोण 90^0 से कम हो उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते है।



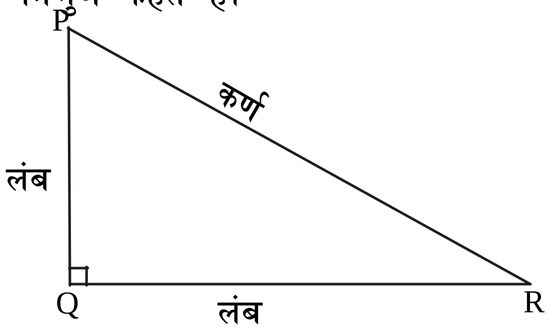
[हमने देखा कि $\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ सभी 90^0 से कम होता है].

(ii) अधिक कोण त्रिभुज : त्रिभुज जिसमें कोई भी एक कोण अधिक कोण हो तो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते है।



[हमने देखा कि $\angle Y$ 90^0 से बडा है].

(iii) समकोण त्रिभुज: त्रिभुज जिसमें एक कोण समकोण हो तो उसे समकोण त्रिभुज कहते है।



[नोट $\angle Q = 90^0$]

- समकोण के सम्मुख वाली भुजा को कर्ण कहते है.
- दूसरी दो भुजाओं को लंब भुजाएँ या पाया कहते है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

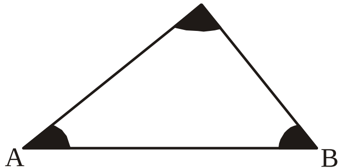
1. ∆PQR के 6 घटको (3 भुजाएँ और 3 कोणों) को लिखिए।
2. ∆ABC में शीर्ष B के सम्मुख वाली भुजा का नाम लिखिए।
3. ∆RAT में RT के सम्मुख वाले कोण का नाम लिखिए।
4. यदि त्रिभुज के भुजाओं की लंबाई 8से.मी., 5 से.मी. तथा 8 सें.मी. हो तो उसे कौनसा त्रिभुज कहेंगे?

अब त्रिभुज के कुछ प्रमुख गुणधर्मों को देखेंगे।

4.3.4 त्रिभुज के कोण-योग का गुण

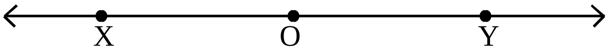
क्रियाकलाप 1 :

एक सफेद पेपर शीट पर त्रिभुज ABC उतारिए। रंगीन पेंसिल से त्रिभुज के कोण अंकित कीजिए। (जैसे चित्र) में दिखाया गया है।

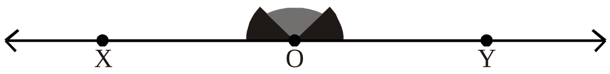


एक कैंची द्वारा तीनों कोणीय क्षेत्रों को काटिए

रेखा XY खींचकर उस पर बिंदु 'O' को अंकित कीजिए।



इन टुकडों को बिंदु 'O' पर इस प्रकार व्यवस्थित करो कि वे 'O' पर कोण बनाये। इन तीनों कोणों का योग 180° होगा।



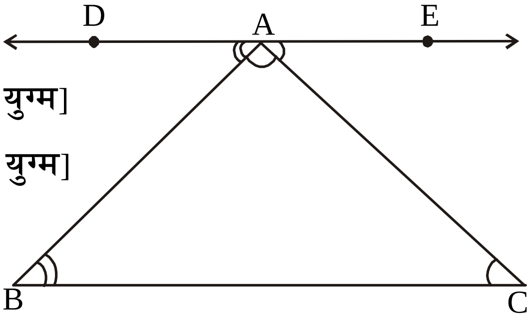
इसे हम प्रमेय द्वारा सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 : त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 होता है।

दिया गया है : त्रिभुज ABC

सिद्ध करना है : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.

रचना : ΔAB के शीर्ष A से DE एक रेखा खण्ड BC के समानांतर तथा AB की तीर्यक खीचो



$\therefore\ \angle B = \angle DAB$ [$\because$ एकांतर कोणों का युग्म]

$\angle C = \angle EAC$ [$\because$ एकांतर कोणों का युग्म]

अर्थात्, $\angle B + \angle C = \angle DAB + \angle EAC$ ...(1)

$\angle A$ को दोनों ओर जोडने पर

$\Rightarrow\ \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle DAB + \angle EAC$

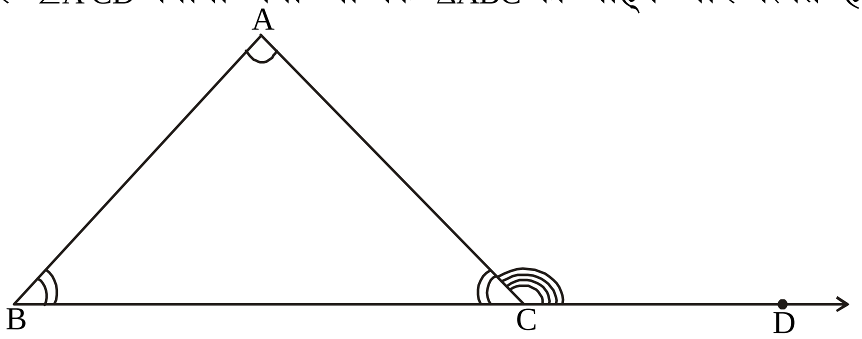
$= 180^0$ [$\because$ सरल कोण180^0]

सिद्ध किया गया है।

4.3.5 त्रिभुज का बाह्य कोण

क्रियाकलाप - 2

ΔABC का चित्र उतारो और चित्र में दिखाये अनुसार BC को D तक बढाओ शीर्ष C पर $\angle ACD$ बनाया गया जो कि ΔABC का बाह्य ओर स्थित है।



$\angle ACD$ को क्या कहेंगे? $\angle ACD$ को ΔABC का बाह्य कोण कहते है। जो शीर्ष C पर बनता है।.

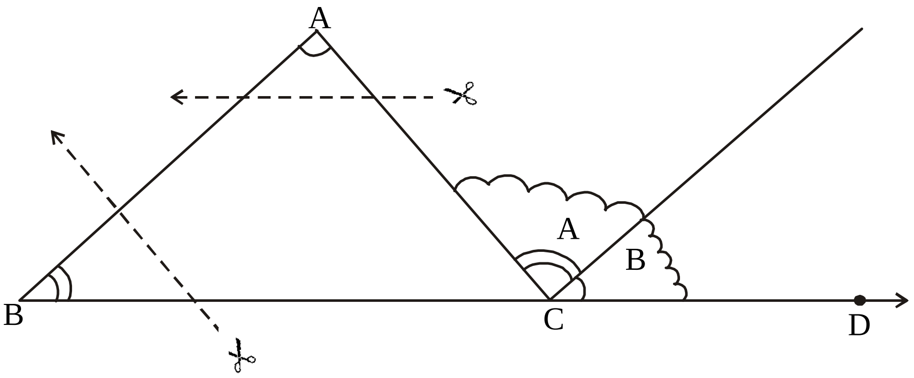
अब आप $\angle BCA$ को क्या कहेंगे? $\angle BCA$ को $\angle ACD$ का संगत कोण कहते है।

जब कि $\angle A$, $\angle B$ को दो अंतः सम्मुख कोण कहते है $\angle ACD$.

क्या आप $\angle ACD$, $\angle A$ तथा $\angle D$ के बीच संबंध स्थापित कर सकते है?

हाँ, हम $\angle ACD$, $\angle A$ तथा $\angle B$ के बीच संबंध को एक साधारण क्रियाकलाप से स्थापित कर सकते है।

अब $\angle A$ तथा $\angle B$ को काटिए और उन्हें एक दूसरे के साथ चित्र में दिखाए अनुसार रखिए



क्या वे दोनो मिलकर $\angle ACD$ को पूर्णतया ढकते है? यदि हाँ तो आप कर देखेंगे?

हमने देखा कि $\angle ACD = \angle A + \angle B$

इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

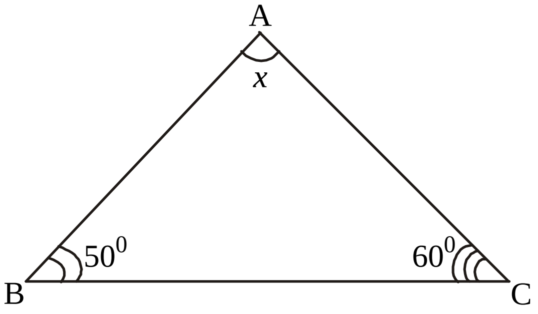
हम इससे यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि

"त्रिभुज का बाह्य कोण उसके सम्मुख एकांतर कोणों के योग के बराबर होता है।".

इसे त्रिभुज का "बाह्य कोण गुण कहते है".

हम कुछ उदाहरणों की चर्चा करेंगे।

उदाहरण 1 : निम्न चित्र में "x" का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में,

$\angle A = x, \ \angle B = 50^0, \ \angle C = 60^0$

त्रिभुज के कोणों के योग के गुण अनुसार

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$

$$\Rightarrow \quad x + 50^0 + 60^0 = 180^0$$

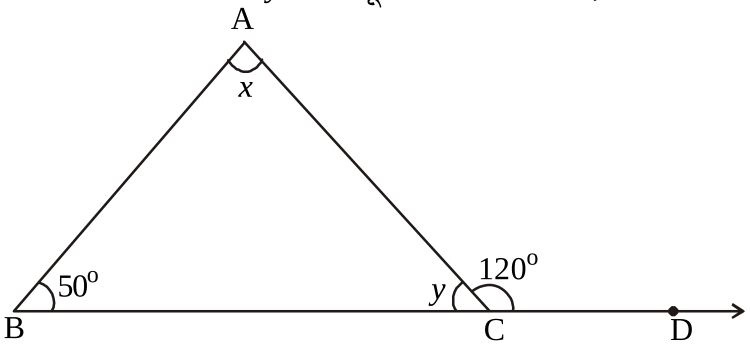
$$\Rightarrow \quad x + 110^0 = 180^0$$

$$\therefore \quad x = 180^0 - 110^0$$

$$= 70^0$$

इसलिए, $\boxed{x = 70^0}$.

उदाहरण 2 : निम्न चित्र में x तथा y का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC, में

$\angle A = x, \ \angle B = 50^0, \ \angle C = y$

$\angle ACD = 120^0$

त्रिभुज के कोमों के योग का गुण

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad x + 50^0 + y = 180^0$ [$\because$ 50^0 को LHS में भेजने पर]

$\Rightarrow \quad x + y = 180^0 - 50^0$

$x + y = 130^0 \quad ....(1)$

अब, हमारे पास $\angle C + \angle ACD = 180^0$ [$\because$ रैखिक युग्म कोण]

$\Rightarrow \quad y + 120^0 = 180^0$ [$\because$ 120^0 को LHS में भेजने पर]

$y = 180^0 - 120^0 = 60^0$

समीकरण (1) से $x = 130^0 - y$

$= 130^0 - 60^0$ [$\because$ $y = 60^0$ का मूल्य लगाने पर]

$= 70^0$

इसलिए, $x = 70^0$

$y = 60^0$.

उदाहरण 3 : त्रिभुज के दो कोण 30^0 तथा 80^0 हो तो तिसरा कोण ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में

$\angle A = 30^0$

$\angle B = 80^0$

$\angle C = x$

त्रिभुज के कोणों का योग

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$

$\Rightarrow \quad 30^0 + 80^0 + x = 180^0$ [$\because$ 110^0 को RHS में भेजने पर]

$\Rightarrow \quad 110^0 + x = 180^0$

$\Rightarrow \quad x = 180^0 - 110^0 = 70^0$

$\therefore$ तीसरा कोण = 70^0.

उदाहरण 4 : एक त्रिभुज के कोण 2 : 3 : 4. में हो तो उन कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज के कोणों का अनुपात = 2 : 3 : 4.

अनुपातों का योग

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

$\therefore$ I कोण = $\frac{2}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 40^0$

II कोण = $\frac{3}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 60^0$

III कोण = $\frac{4}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 80^0$

$\therefore$ त्रिभुज के कोण 40^0, 60^0 तथा 80^0 होंगे।

उदाहरण 5 : ΔABC का एक कोण 50^0 है तथा दूसरे दो कोण समान है तो उन कोणों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle A = 50^0$

और $\angle B = \angle C = x^0$

त्रिभुज के कोणों का योग

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow 50^0 + x^0 + x^0 = 180^0$

$\Rightarrow 50^0 + 2x^0 = 180^0$ [$\because$ 50^0 को RHS में भेजने पर]

$\Rightarrow 2x^0 = 180^0 - 50^0$

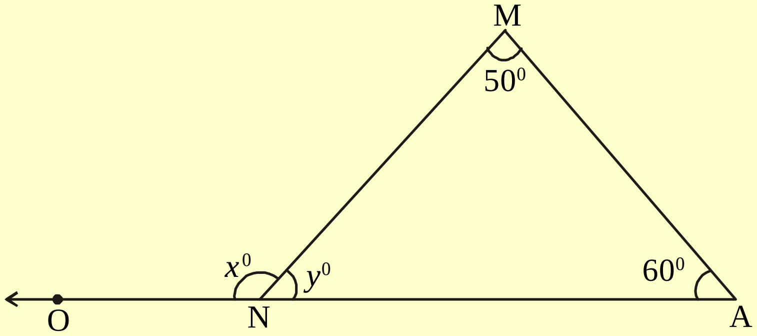
$= 130^0$

$x = \frac{130^0}{2} = 65^0$ [$\because$ दोनों ओर 2 से भाग दे कर]

$\therefore$ प्रत्येक कोण 65^0 का होगा।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यदि त्रिभुज के दो कोण 38^0 और 102^0 हो तो तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।
2. एक समकोण त्रिभुज में एक न्यून कोण 30^0 हो तो दूसरा न्यून कोण ज्ञात कीजिए।
3. यदि त्रिभुज के कोण 1 : 4 : 5, अनुपात में हो तो कोणों को ज्ञात कीजिए।
4. राजेंदर ने कहा, "एक त्रिभुज में दो समकोण होते है" क्या आप उससे सहमत है ?
5. दिए गए चित्र में "x" तथा "y" का मूल्य ज्ञात कीजिए।



कुछ और उदाहरणों को देखिए।

उदाहरण 6 : एक त्रिभुज का बाह्य कोण 70^0 का है और अंतः सम्मुख कोणों में से एक 25^0 का है तो दूसरे कोण का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया बाह्य कोण = 70^0.

एक सम्मुख अंतःकोण = 25^0

त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण अनुसार

बाह्य कोण = सम्मुख दो अंतः कोणों का योग

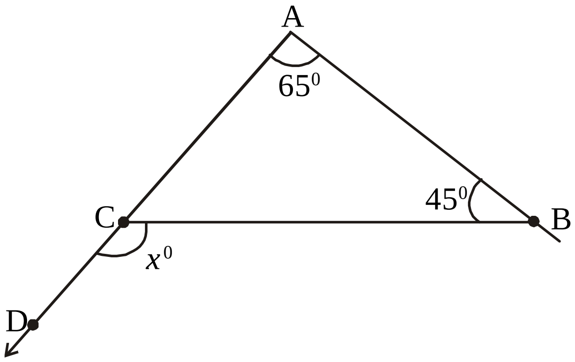
$\Rightarrow 70^0 = 25^0 + x^0$

$\Rightarrow x^0 + 25^0 = 70^0$ [$\because$ 25^0 को RHS में भेजने पर]

$\Rightarrow x^0 = 70^0 - 25^0 = 45^0$

$\therefore$ दूसरा अंतः कोण = 45^0.

उदाहरण 7 : निम्न चित्र में 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में

$\angle A = 65^0$, $\angle B = 45^0$, $\angle BCD = x$

बाह्यो कोण के गुण अनुसार

बाह्य कोण = सम्मुख के दो अंतः कोणों का योग

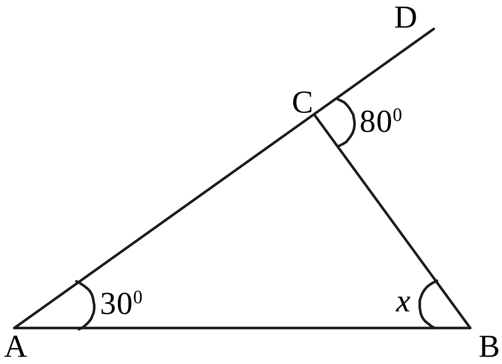
$\Rightarrow \angle BCD = \angle A + \angle B$

$\Rightarrow x^o = 65^0 + 45^0$

$= 110^0$

$\therefore \boxed{x = 110^0}$

उदाहरण 8 : दिए गए चित्र में "x" का मूल्य ज्ञात कीजिए



हल : दिए गए चित्र में एक अंतः कोण = 30^0

दूसरा अंतः कोण = x

बाह्य कोण = 80^0

बाह्य कोण के गुण अनुसार

बाह्य कोण = सम्मुख के दो अंतः कोणों का योग

$\Rightarrow 80^0 = 30^0 + x$

$\Rightarrow x + 30^0 = 80^0$ [$\because$ 30^0 को RHS में भेजने पर]

$\Rightarrow x = 80^0 - 30^0$

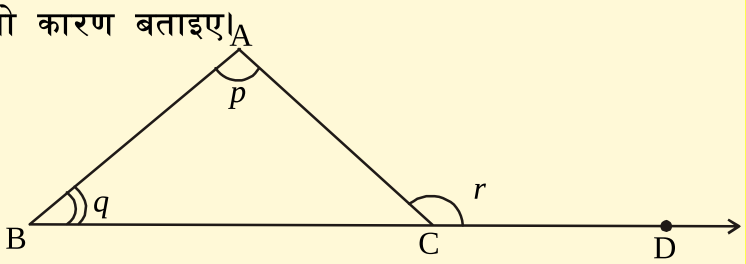
$= 50^0$

$\therefore \boxed{x = 50^0}$

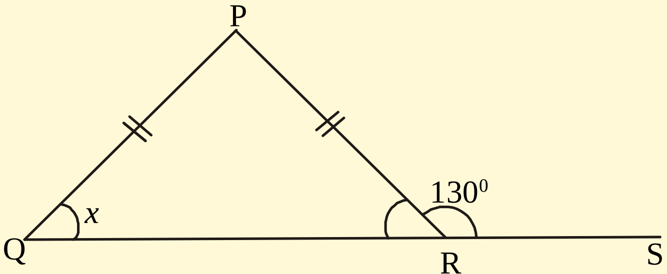
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दत्तु ने कहा, "त्रिभुज का बाह्य को सरल कोण हो सकता है।" क्या आप उससे सहमत हो यदि नहीं तो कारण बताइए।

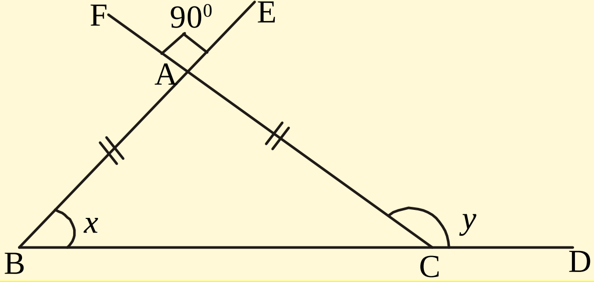
2. दिएग ए चित्र में "p", "q" तथा "r" के बीच संबंध को लिखिए।



3. दिए गए चित्र में "x" का मूल्य ज्ञात कीजिए।



4. दिए गए चित्र में "x" तथा "y" को ज्ञात कीजिए।



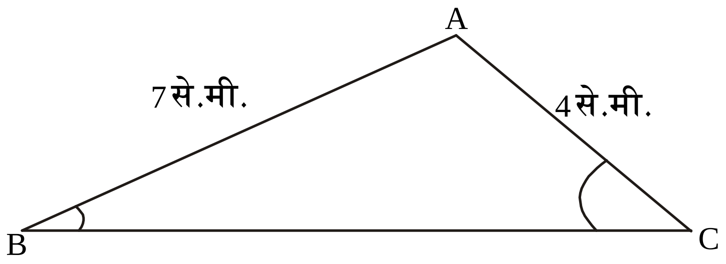
4.3.6 त्रिभुज की असमानताएँ

हमने त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के बीच का संबंध के बारे में पढा है अब हम कुछ और संबंधों के बारे में पढेंगे। जब वे समान नही होते है। इसकी चर्चा करने से पहले हम असमानता के चिन्हों के बारे में जानेंगे।

असमानता के चिन्हों को देखेंगे

चिन्ह	अर्थ	उदाहरण
>	से बडा है	$90^0 > 30^0$ को "90 डिग्री बडा है 30 डिग्री से ऐसा पढते है"
<	से कम है	$30^0 < 90^0$ को "30 डिग्री छोटा है 90 डिग्री से ऐसा पढते है"
≠	समान नहीं है	$90^0 \neq 30^0$ को "90 समान नही है 30 के "ऐसा पढते है।

दिए गए त्रिभुज को दखिए



आपने क्या देखा?

हमने देखा कि ΔABC, में AB की लंबाई AC से अधिक है। चलिए अब हम $\angle B$ तथा $\angle C$. समान नहीं है।

हमने देखा कि $\angle B$ तथा $\angle C$ समान नही है।

अर्थात् $\angle B \neq \angle C$ तथा $\angle C$ बडा $\angle B$ से

$AB > AC \Rightarrow \angle C > \angle B$

$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$

इससे हम निष्कर्ष निकाल सकते है कि ‘‘यदि त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हो तो लंबी भुजा के सम्मुख का कोण बडा होता है’’

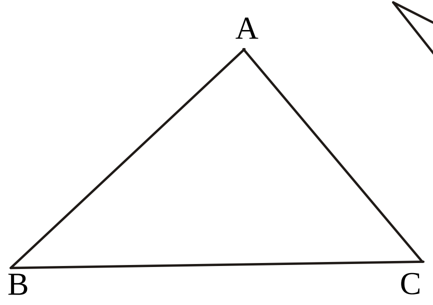
उसी प्रकार हम देखेंगे कि ‘‘त्रिभुजों के संबंध में जानेंगे।’’.

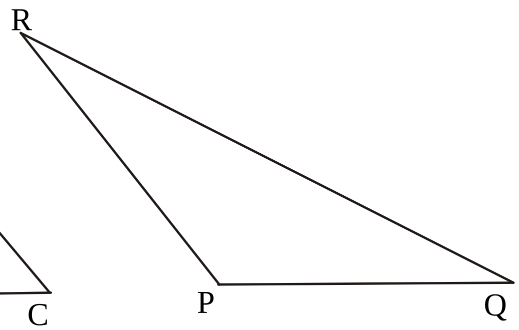
चलिए अब हम भुजाओं के संबंध में जानेंगे।

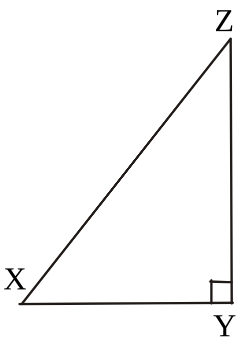
4.3.7 त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई का योग

क्रियाकलाप :

अब हम एक क्रियाकलाप करेंगे कोई भी तीन त्रिभुज ΔABC, ΔPQR और ΔXYZ को अपनी नोट बुक में उतारिए।







अब हम उनकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात कर परिणाम को नीचे तालिका में लिखेंगे।

त्रिभुज का नाम	त्रिभुज की भुजाएँ	दो भुजाओं का योग	क्या यह सही है?	हाँ/नहीं
ΔABC	$AB =$	$AB + BC =$	$AB + BC > CA$	
	$BC =$	$BC + CA =$	$BC + CA > AB$	
	$CA =$	$CA + AB =$	$CA + AB > BC$	
ΔPQR	$PQ =$	$PQ + QR =$	$PQ + QR > RP$	
	$QR =$	$QR + RP =$	$QR + RP > PQ$	
	$RP =$	$RP + PQ =$	$RP + PQ > QR$	
ΔXYZ	$XY =$	$XY + YZ =$	$XY + YZ > ZX$	
	$YZ =$	$YZ + ZX =$	$YZ + ZX > XY$	
	$ZX =$	$ZX + XY =$	$ZX + XY > YZ$	

इस तालिका में आपने क्या देखा? हमने देखा कि ''त्रिभुज में किन्हीं भी दो भुजाओं के लंबाई का योग तीसरी भुजा से बडा होता है।''

4.3.8 त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई का अंतर

क्रियाकलाप : अब हम वही त्रिभुज फिर से उतारेंगे। इस तालिका को देखो और परिणामों को लिखिए।

त्रिभुज का नाम	भुजा की लंबाई	भुजाओं की लंबाई का अंतर	क्या यह सही है?	हाँ/नहीं
ΔABC	$AB =$	$\lvert BC - CA\rvert =$	$\lvert BC - CA\rvert < AB$	
	$BC =$	$\lvert CA - AB\rvert =$	$\lvert CA - AB\rvert < BC$	
	$CA =$	$\lvert AB - BC\rvert =$	$\lvert AB - BC\rvert < CA$	
ΔPQR	$PQ =$	$\lvert QR - RP\rvert =$	$\lvert QR - RP\rvert < PQ$	
	$QR =$	$\lvert RP - PQ\rvert =$	$\lvert RP - PQ\rvert < QR$	
	$RP =$	$\lvert PQ - QR\rvert =$	$\lvert PQ - QR\rvert < RP$	
ΔXYZ	$XY =$	$\lvert YZ - ZX\rvert =$	$\lvert YZ - ZX\rvert < XY$	
	$YZ =$	$\lvert ZX - XY\rvert =$	$\lvert ZX - XY\rvert < YZ$	
	$ZX =$	$\lvert XY - YZ\rvert =$	$\lvert XY - YZ\rvert < ZX$	

नोट :

- $|6 - 5| = |5 - 6| = 1$
- $|x - y|$ हमेशा धनात्मक होता है।
- $|x - y|$ का परम मूल्य x तथा y का मूल्य होता है।

उपरोक्त निरीक्षण से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते है? हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि ''त्रिभुज में दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है।''.

त्रिभुज की असमानता से संबंधित कुछ उदाहरणों को देखेंगे।

उदाहरण 9 : अमीना कहती है कि, "एक त्रिभुज की भुजाएँ 6 से.मी., 5 से.मी. तथा 8 से.मी. हो सकती है।" क्या आप उससे सहमत हो यदि नही तो क्यों?

हल : त्रिभुज की भुजाएँ

AB = 6 सें.मी.

BC = 5 सें.मी.

CA = 8 सें.मी.

अब किसी भी दो भुजाओं का योग देखेंगे।

$\Rightarrow$ $AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$

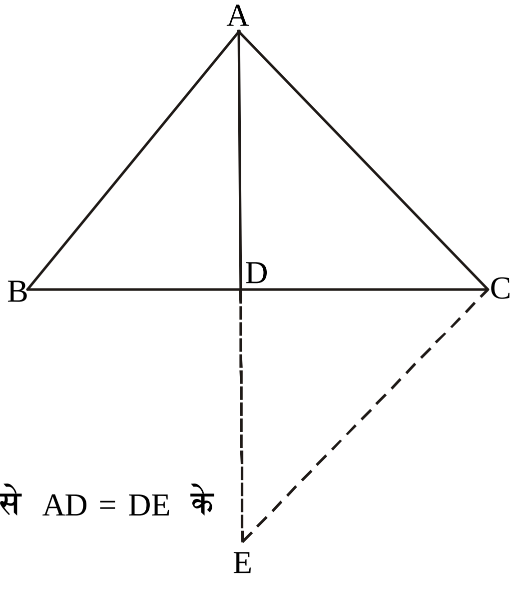
$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$

$CA + AB = 6 + 8 = 14 > 5$

चूँकि किसी भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक है। इसलिए त्रिभुज का निर्माण कर सकते है।

हाँ, मैं उससे सहमत हूँ।

उदाहरण 10 : दिए गए चित्र में, ΔABC की मध्यिका AD है तो $AB + AC > 2AD$ होता है सिद्ध कीजिए।



हल : AD को E तक बढाइए जिससे AD = DE के C से E को मिलाइए।

अब ΔABD और ΔECD को देखिए।

हमारे पास होगा

$BD = DC$

[चूँकि D, BC का मध्य बिंदु]

$\angle ADB = \angle EDC$ [∵ लंबवत सम्मुख कोण]

और $AD = DE$ (रचना से)

$\therefore \Delta ADB \cong \Delta ECD$ [SAS तथ्य अनुसार]

इसलिए $AB = EC$ [∵ समान त्रिभुजों के शेष भाग समान होते है(c.p.c.t)]

अब, In ΔACE

$EC + AC > AE$ [∵ त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।]

$\Rightarrow EC + AC > AD + DE$ |∵ $AE = AD + DE$

$\Rightarrow EC + AC > AD + AD$ | लेकिन $DE = AD$

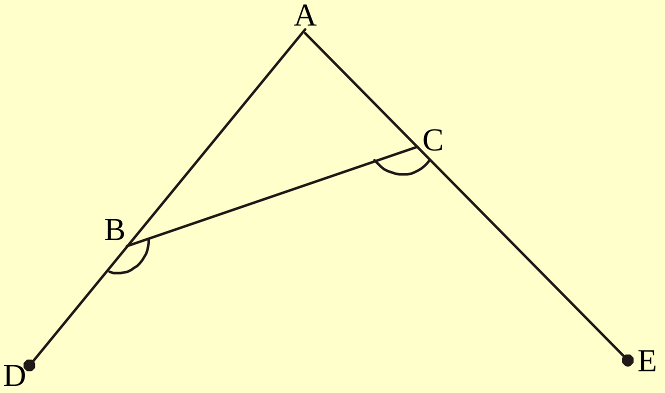
इसलिए, $EC + AC > 2AD$

$AB + AC > 2AD$ (∵ $EC = AB$)

सिद्ध किया गया।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. ΔABC, $AB = 5.7$ से.मी., $BC = 6.2$ से.मी. तथा $CA = 4.8$ से.मी.. हो सबसे बडे तथा सबसे छोटे कोणों के नाम लिखिए।
2. त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई 6 सें.मी. और 9 सें.मी. है यदि तिसरी भुजा धनात्मक हो तो उसकी संभावित लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।
3. दिए गए चित्र में यदि, $\angle CBD > \angle BCE$, हो तो $AB > AC$. को सिद्ध कीजिए।



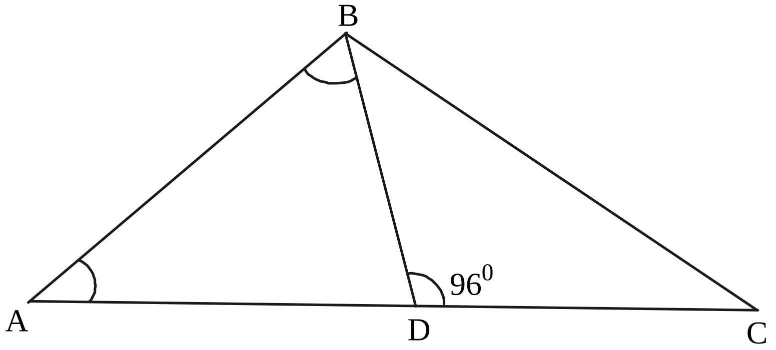
4. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की तीन भुजाओं का योग उनकी मध्यिकाओं के योग से बडा होता है।.

[सूचना: 1. रेखाखण्ड जो शीर्ष से सम्मुख वाली भुजा पर डाली जाती है उसे मध्यिका कहते है। उदा:- 10 देखिए।].

अभ्यास

1. ΔABC में, यदि $\angle A = 3\angle B$ and $\angle C = 2\angle B$. हो तो तीनों कोणो को ज्ञात कीजिए। [सूचना : मानलो $\angle B = x$, हो तो $\angle A = 3x$ और $\angle C = 2x$ तथा $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ का उपयोग कीजिए।]

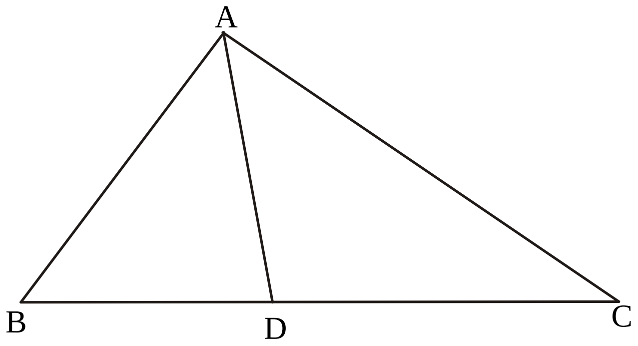
2. दिए गए चित्र में $\angle ABD = 3\angle DAB$ और $\angle BDC = 96^0$. हो तो $\angle ABD$ ज्ञात कीजिए।



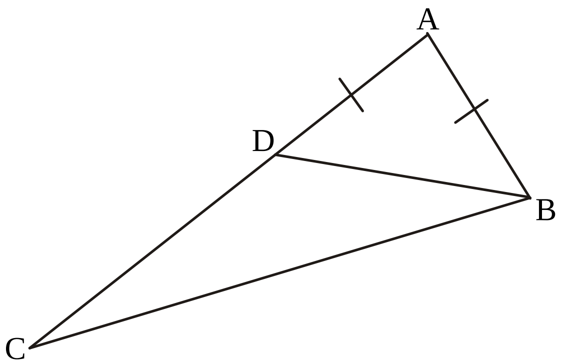
3. क्या किसी त्रिभुज में दो समकोण हो सकते है?

4. त्रिभुज का एक बाह्य कोण 125^0 है तथा अंतः कोणों का अनुपात 2 : 3 हो तो त्रिभुज के कोणों को ज्ञात कीजिए।

5. दिए गए चित्र में, D एक बिंदु BC पर डाला गया है यदि $AB > AC$ हो तो $AB > AD$ सिद्ध कीजिए।

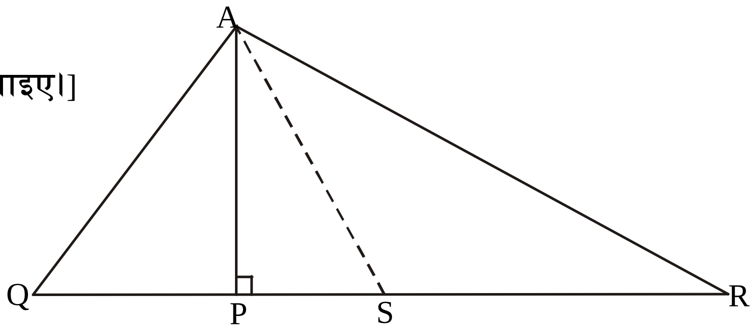


6. दिए गए चित्र में यदि $AB = AD$ हो तो सिद्ध कीजिए $BC > AD$.



7. यदि दिए गए चित्र में, $AP \perp QR$, $PR > PQ$ और $PS = PQ$. हो तो $AR > AQ$. सिद्ध कीजिए।

[सूचना: A, S को मिलाइए।]



सारांश

- त्रिभुज एक बंद आकृति है जो तीन भुजाओं से घिरी होती है।
- भुजाओं के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते है।
- तीन अलग भुजाओं वाले त्रिभुज को विषम बाहु त्रिभुज कहते है।
- त्रिभुज जिसमें कोई दो भुजाएँ समान हो तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते है।
- त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान होती है उसे समबाहु त्रिभुज कहते है।

  कोणों के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते है।
- त्रिभुज जिसमें सभी कोण न्यून कोण हो तो उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते है।.
- त्रिभुज जिसमें कोई भी एक कोण अधिक कोण हो तो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते है।
- त्रिभुज जिसमें कोई भी एक कोण समकोण हो तो उसे समकोण त्रिभुज कहते है।
- त्रिभुज के घटक में तीन भुजाएँ तथा तीन कोण होते है।
- त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।.
- त्रिभुज का एक बाह्य कोण उसके सम्मुख के दो अंतः कोणों के योग के बराबर होता है.
- यदि त्रिभुज को दो भुजायें असमान हो तो बडी भुजा का सम्मुख कोण बडा होता है।
- त्रिभुज की कोई भी दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से बडा होता है।
- त्रिभुज की कोई भी दो भुजाओं का अंतर उसकी तीसरी भुजा से छोटा होता है।

अध्याय

4.4 त्रिभुजों की सर्वसमानता

4.4.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- दो दिए गए चित्र सर्वसमान है या नहीं इसकी जाँच कर समझायेंगे।
- दो त्रिभुजों की सर्वसमानता की कसौटियों को बतायेंगे।
- सर्वसमानता की कसौटियों के उपयोग से प्रश्नों को हल करेंगे।

4.4.1 परिचय

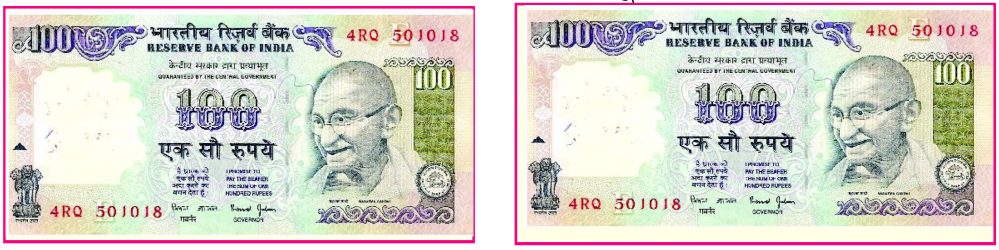
हमने कई ज्यामितीय आकृतियों को देखा जैसा कि दैनिक जीवन में दिखने वाले स्तंभ साधारणतया हम इमारतों तथा स्तंभों पर त्रिभुज दिखाई देते है। समान स्तंभ या इमारतों पर त्रिभुज एक समान दिखाई देते है।

वे आकृतियाँ जो समान आकार और परिमाण के हो वे सर्वसमान आकृतियाँ कहलाती है।

इस अध्याय में हम त्रिभुजों की सर्वसमानता और उनके गुणों को विस्तार से पढ़ेंगे।

क्रियाकलाप

एक ही अंकन वाले दो नोट लीजिए एक नोट को दूसरी पर रखिए आपने क्या होगा?



चित्र. 4.4.1

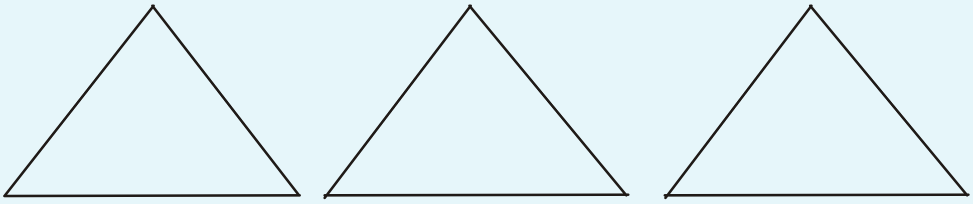
हमने देखा कि एक नोट दूसरों को पूरी तरह से ढक लेता है। इस परीक्षा से हम कह सकते है कि दो नोट समान आकार और समान परिणाम के होते है। ऐसे वस्तुओं को सर्वसमान कहते है। सर्वसमान वस्तुएँ एक दूसरे की सम प्रतिरूप होते है।

क्या आप सर्वसमान वस्तुओं या आकृतियों के कुछ और उदाहरण दीजिए।

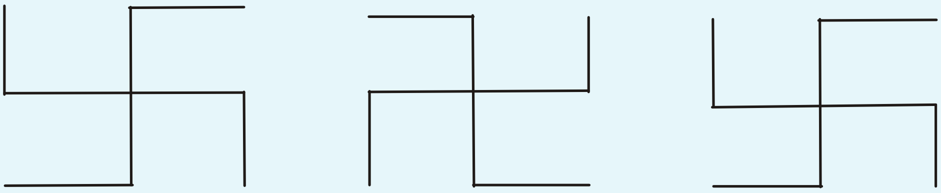
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्न आकृतियाँ सर्वसमान है या नहीं जाँच कीजिए।

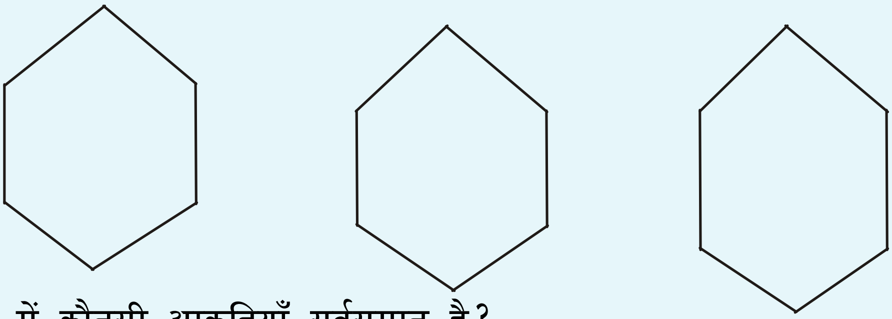
(i)



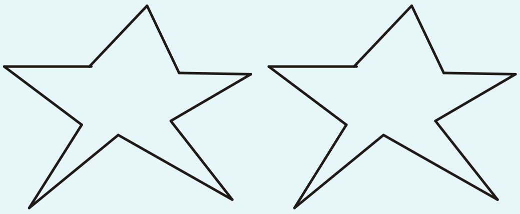
(ii)



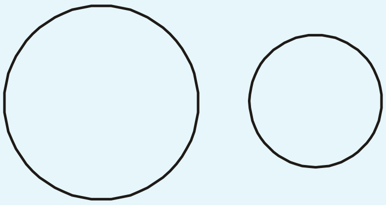
(iii)



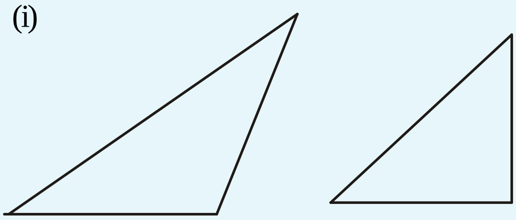
2. निम्न में कौनसी आकृतियाँ सर्वसमान है ?



(i)



(ii)



(iii)

4.4.2 रेखा खण्डों की सर्वसमानता

नीचे दिए गए दो जोडी रेखा खण्डों को देखिए।

चित्र. (1)

चित्र. (2)

यदि रेखा खण्ड AB को रेखा खण्ड CD पर लगाइए। आपने क्या देखा?

हमने देखा AB पूर्णतः CD को ढकता है। इसलिए हम कह सकते है रेखाएँ सर्वसमान है इसे हम चिन्हों से इस प्रकार लिख सकते है।

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$\cong \rightarrow$ को सर्वसमानता का चिन्ह कहते है।

उसी प्रकार यदि हम रेखा PQ को रेखा RS पर लगाने से आपने क्या देखा? क्या हम $\overline{PQ}$ तथा $\overline{RS}$ को सर्वसमान कह सकते है?

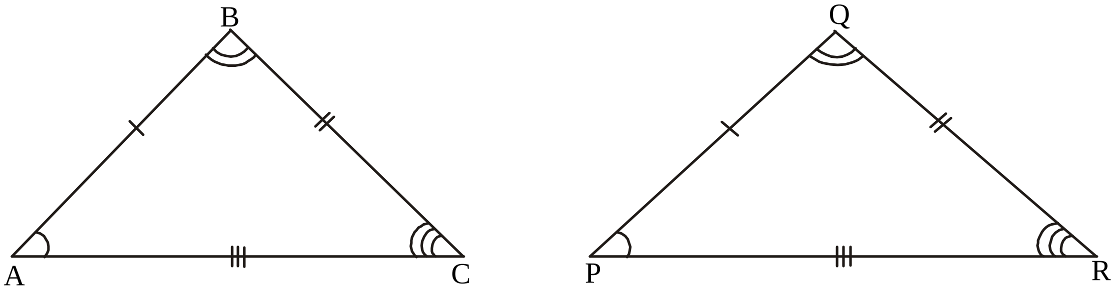
क्योंकि रेखा PQ तथा RS एक दूसरे के समान नहीं है इसलिए वे सर्वसमान नहीं है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि ''यदि दो रेखाओं की लंबाई समान हो तो उन्हें सर्वसमान रेखाएँ कहते है। विलोमः यदि दो रेखाएँ सर्वसमान हो तो उनकी लंबाईयाँ समान होती है। कभी-कभी हम कहते है कि दो रेखाएँ समान है और इसे हम AB = CD लिखते है इसका अर्थ है $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

4.4.3 त्रिभुजों की सर्वसमानता

हमने देखा की दो रेखायें सर्वसमान होती है यदि उनकी लंबाईयाँ समान है। क्या हम इस विचार को त्रिभुजों पर लागू कर सकते है? अब हम त्रिभुजों की सर्वसमान के बारे में सीखेंगे। दो त्रिभुज सर्वसमान होंगे। यदि वे एक दूसरे जैसे होंगे वे एक दूसरे को पूरी तरह ढक लेते है।

निम्न त्रिभुजों को देखिए।



आप ΔABC तथा ΔPQR के बारें में क्या कहेंगे?

चूँकि ΔABC तथा ΔPQR एक दूसरे को पूरी तरह ढक लेते है। अर्थात् वे एक समान आकार और परिमाप के होते है। हम कह सकते है कि ΔABC और ΔPQR सर्वसमान त्रिभुज है।

इसलिए इसे हम $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. लिख सकते है।

इससे हम यह देखते है कि जब हम ΔPQR को ΔABC, P पर रखते है तो A, Q , B तथा R,C पर पडता है। $\overline{PQ}$ भुजा $\overline{AB}$ पर, $\overline{QR}$ भुजा $\overline{BC}$ तथा $\overline{PR}$ भुजा $\overline{AC}$ पर पडती है।

ΔABC और ΔPQR में

$A \rightarrow P,\ B \rightarrow Q,\ C \rightarrow R$ (संगत शीर्ष)

$\angle A = \angle P,\ \angle B = \angle Q,\ \angle C = \angle R$ (संगत कोण)

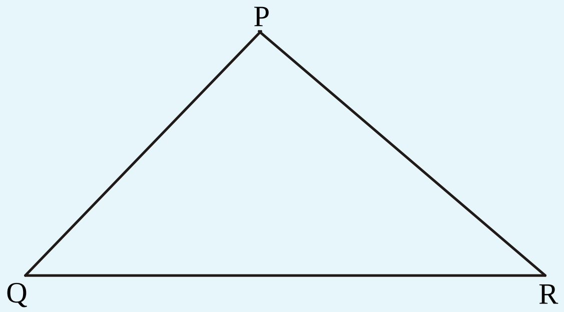
$\overline{AB} \cong \overline{PQ},\ \overline{BC} \cong \overline{QR},\ \overline{AC} \cong \overline{PR}$ (संगत भुजाएँ)

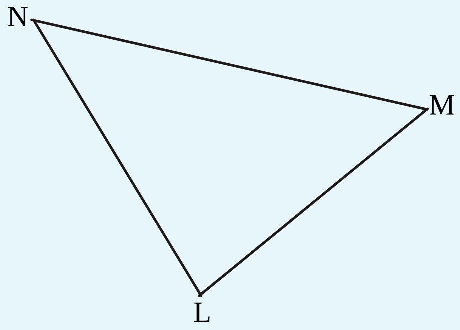
then we say that $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.

सर्वसमान त्रिभुजों के शेष भाग भी समान होते है इसे c.p.c.t लिखते है और ''सर्वसमान त्रिभुजों के संगत भाग'' समान होते है ऐसा पढ़ा जाता है।

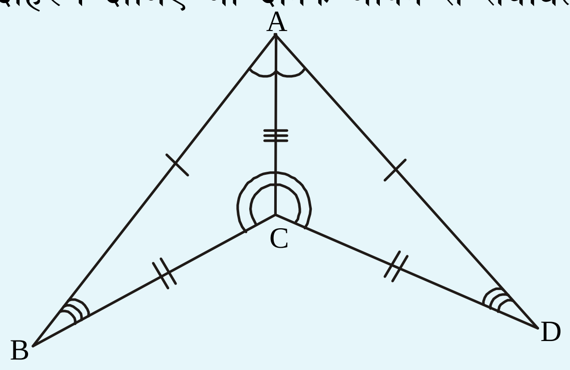
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दिए गए चित्र में $\Delta PQR \cong \Delta LMN$. हो तो उनके संगत शीर्ष, कोण और भुजाओं के नाम लिखिए।





2. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, हो तो सर्वसमान त्रिभुजों के संगत भागों के नाम लिखिए।
3. सर्वसमान आकृतियों के दो उदाहरण दीजिए जो दैनिक जीवन से संबंधित है।
4. दिए गए चित्र में सर्वसमान त्रिभुजों के नाम लिखकर उन्हें " $\cong$ " द्वारा दर्शाइए।

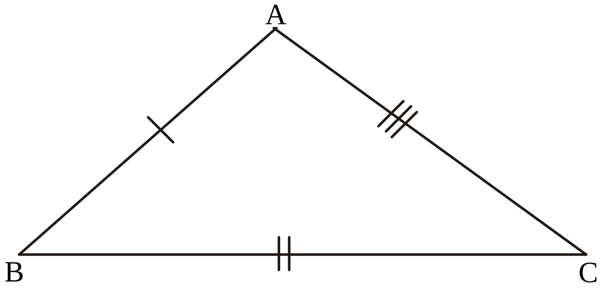


4.4.4 सर्वसमान त्रिभुजों की कसौटियाँ

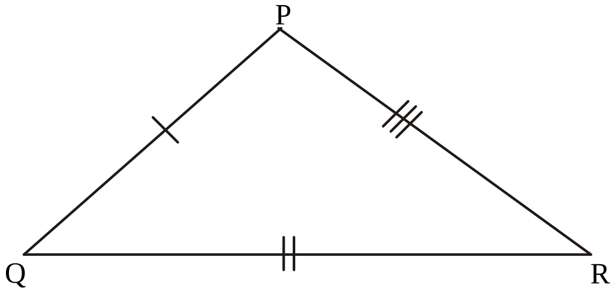
यदि आपको दो त्रिभुज दिए गए हो तो आप उनकी सर्वसमानता को कैसे जाँचेगें? साधारणतया हम एक त्रिभुज को दूसरे पर रखकर जाँच करते है। लेकिन हमेशा ऐसा करना संभव नहीं होगा। हम न्यूनतम मापों की जाँच कर त्रिभुजों की सर्वसमानता की जाँच कर सकते है। त्रिभुजों की सर्वसमानता की सहायता से कुछ प्रश्नों को हल करेंगे।

क्रियाकलाप

चित्र में दर्शाये अनुसार ΔABC को देखिए।



अब दूसरा ΔPQR का निर्माम कीजिए जिससे $PQ = AB$, $QR = BC$ और $PR = AC$ (चित्र देखिए।)



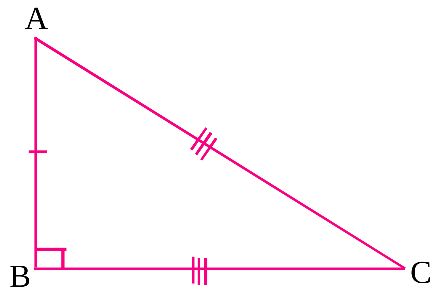
यदि हम ΔABC को ΔPQR पर रखिए, आपने क्या देखा?

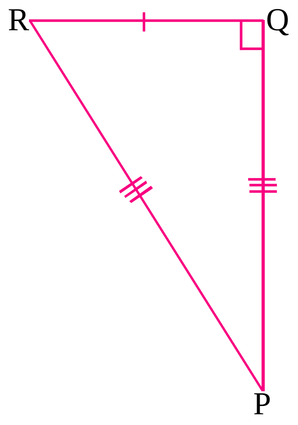
हमने देखा कि एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज पर पूर्ण रूप से ढका गया है। इसलिए हम कह सकते है कि वे सर्वसमान है। और हमने देखा कि सभी संगत भाग समान है।

यह देखा कि ΔPQR तथा ΔABC, सर्व समान है। हम तीन भागों को जैसे $PQ = AB$, $QR = BC$ और $PR = AC$ को लेंगे।

इसका अर्थ है यह होगा कि सर्वसमान त्रिभुजों को संगत भाग समान होते है। साधारणतया हम कह सकते है भुजा - भुजा - भुजा (SSS) सर्वसमानता की कसौटी का उपयोग किया गया है। ''यदि त्रिभुज की तीन भुजाएँ समान होती है दूसरे त्रिभुज के तीनों भुजाओं के समान होतो उन्हें सर्वसमान त्रिभुज कहते है।''

उदाहरण 1 : दिए गए चित्र में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ की जाँच कीजिए ?





हल : दिए गए चित्र से ΔABC और ΔPQR में

$AB = PQ$

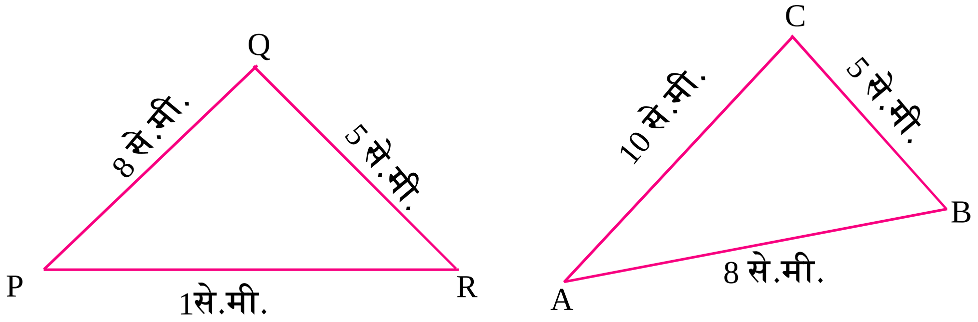
$BC = QR$

$AC = PR$

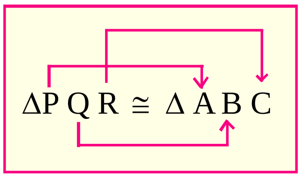
इसलिए SSS सर्वसमानता की कसौटी से

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

उदाहरण 2 : क्या $\Delta PQR \cong \Delta ABC$? दोनों त्रिभुजों के संगत कोणों को लिखिए।



हल: दिए गए चित्र अनुसार ΔPQR तथा ΔABC, से हमें प्राप्त होता है



$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

$PQ = AB = 8$ से.मी.

$QR = BC = 5$ से.मी.

$PR = AC = 10$ से.मी.

SSS सर्वसमानता के अनुसार

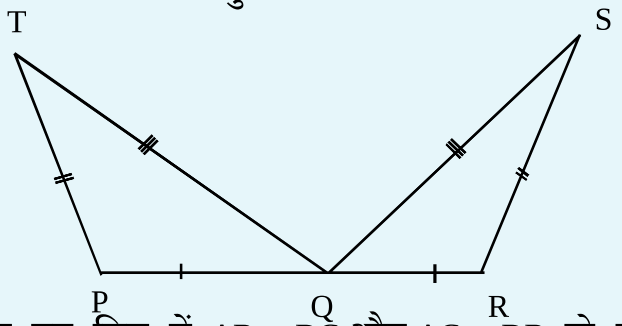
$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

जैसे कि हमने देखा कि P संगत शीर्ष A, Q का संगत शीर्ष B तथा R का संगत शीर्ष C होगा।

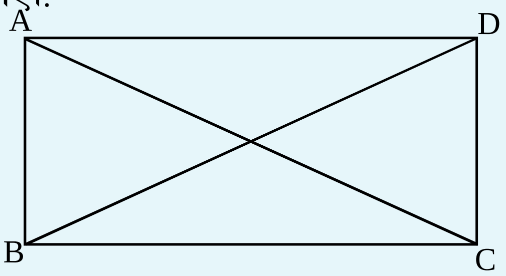
इसलिए, $\angle P \ \angle A$; $\angle Q \ \angle B$; $\angle R \ \angle C$ संगत कोणों की जोडियाँ है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

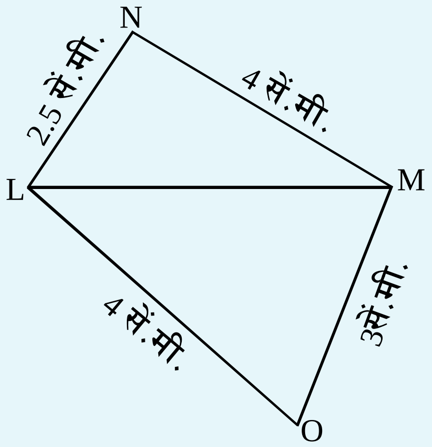
1. दिए गए सर्वसमानता त्रिभुजों में संगत कोणों के नाम लिखिए।



2. नीचे दिए गए चित्र में, AB = DC और AC = DB. हो तो $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ को सिद्ध कीजिए।.

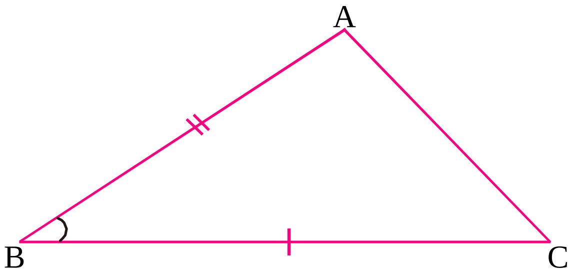


3. निम्नलिखित चित्र में SSS सर्वसमानता जाँच कीजिए औचित्य सिद्ध कीजिए।

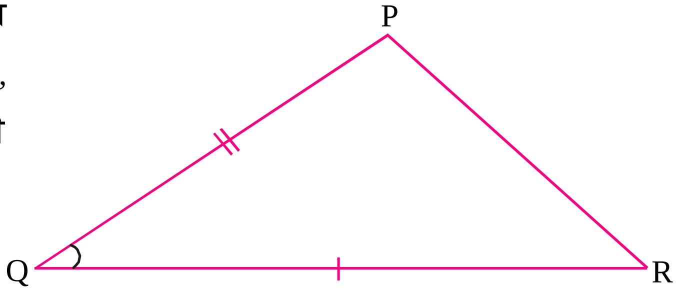


क्रियाकलाप 2

दिए गए चित्र में ΔABC को देखिए।



दूसरा त्रिभुज ΔPQR का निर्माण कीजीए जिससे $QR = BC$, $\angle Q = \angle B$ और $PQ = AB$ को सिद्ध कीजिए।



चलिए अब हम ΔABC को काटकर ΔPQR पर रखकर देखिए?

हमने देखा कि एक त्रिभुज दूसरे पर पूर्ण ढकलेता है। इसलिए हम कह सकते है वे सर्वसमान त्रिभुज है।

दूसरे शेष भागों को भी देखिए।

$$AC = PR, \quad \angle A = \angle P; \angle C = \angle R$$

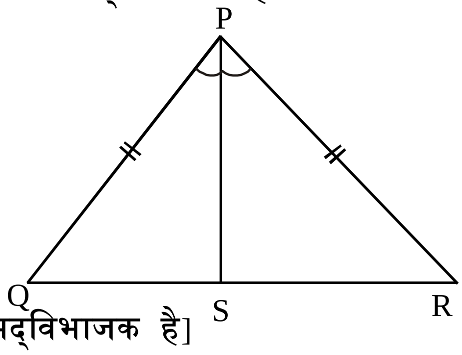
इसलिए हम निष्कर्ष निकालते $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है।

इस क्रिया के उपयोग से जब हम ΔPQR सर्वसमान ΔABC का निर्माण कीजिए। इस क्रिया के उपयोग से जब हम $PQ = AB$, $QR = BC$ और उनका संलग्न कोण अर्थात् $\angle Q = \angle B$ होगा है।

इसका अर्थ यह है इन तीन भागों की समानता का परिणाम से सर्वसमान त्रिभुज प्राप्त होंगे।

''दो त्रिभुज अनुरूप होते है यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर होता है।

उदाहरण 3 : ΔPQR में, $PQ = PR$ तथा PS, $\angle P$ का समद्विभाजक हो तो सिद्ध कीजिए $\Delta PQS \cong \Delta PRS$.



हल : ΔPQS और ΔPRS में

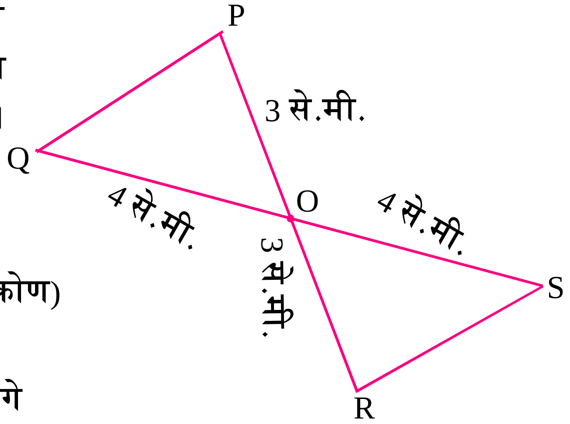
$PQ = PR$ (दिया गया है)

$PS = PS$ (उभयनिष्ठ भुजा)

हमारे पास, $\angle QPS = \angle RPS$ [$\because$ PS कोण का समद्विभाजक है]

SAS कसौटी के उपयोग से त्रिभुज सर्वसमान है।

$\Delta PQS \cong \Delta PRS$ सिद्ध किया गया।



उदाहरण 4 : दिए गए त्रिभुजों की जोडी को देखिए। क्या वे सर्वसमान है? यदि वे सर्वसमान हो तो उनके संगत भागों के नाम लिखिए।

हल : ΔOQP तथा ΔOSR में

$OQ = OS = 4$ से.मी..

$\angle QOP = \angle ROS$ (लंब सम्मुख कोण)

$OP = OR = 3$से.मी..

SAS कसौटी से त्रिभुज सर्वसमान होंगे

$\Delta OQP \cong \Delta OSR$

हाँ, चित्र में दिए गए त्रिभुज सर्वसमान है।

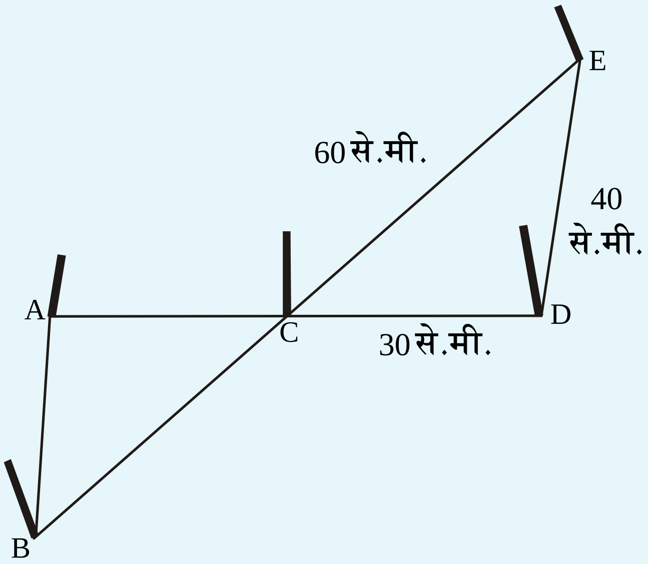
$PQ = SR$

$\angle P = \angle R$

$\angle Q = \angle S$

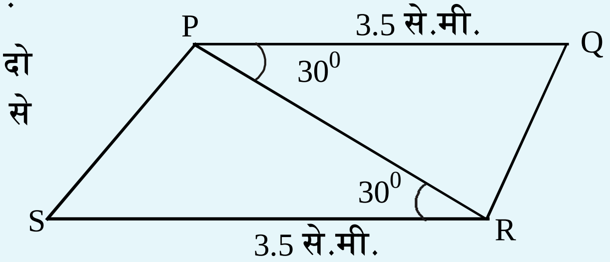
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. नीचे दिए गए मानचित्र में 5विभिन्न खंभे है स्तंभ C दो स्तंभ A तथा D के एकदम मध्य में है। तथा B और E के भी मध्य में है तो स्तंभ A तथा B के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।. (सूचना: $\Delta BAC \cong \Delta EDC$ की जाँच कीजिए।)



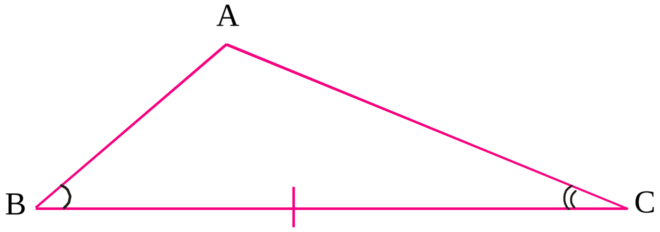
2. SAS सर्वसमानता नियम से आप $\Delta PQR \cong \Delta FED$ को स्थापित कीजिए दिया गया $PQ = FE$ तता $RP = DF$ सर्वसमानता सिद्ध करने के लिए और कौनसी जानकारी की आवश्यकता होगी?

3. SAS सर्वसमानता नियम द्वारा दो सर्वसमान त्रिभुजों को चिन्ह से लिखिए।

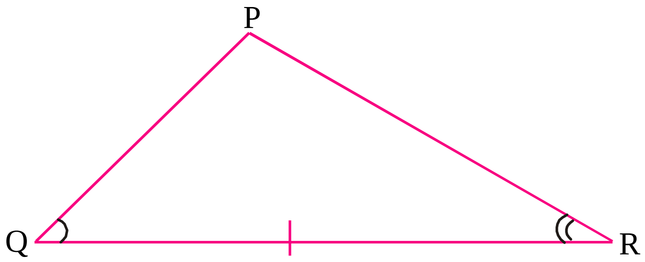


क्रियाकलाप 3

चित्र में दिखाए गए ΔABC को देखिए।



दूसरा ΔPQR का निर्माण कीजिए, जिससे, $QR = BC$, $\angle Q = \angle B$ तथा $\angle R = \angle C$.

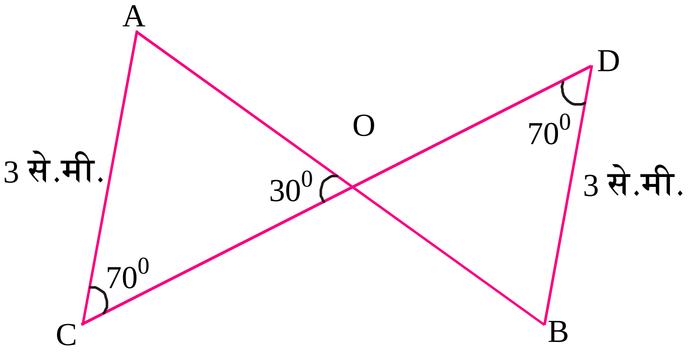


ΔABC को काटकर ΔPQR पर रखिए। आपने क्या देखा? हमने देखा कि एक-दूसरे को पूर्णतया ढकता है। इसलिए हम कह सकते है वे दोनों सर्वसमान है। हमने देखा कि $\angle P = \angle A$, $PQ = AB$ तथा $PR = AC$ जो कि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, का संबंध स्थापित कर सकते है जिसका अर्थ तीन संगत भाग समान है। (दो कोण तथा संलग्न भुज) इसलिए दोनों त्रिभुज सर्वसमान त्रिभुज है।

इसे हम इस प्रकार लिख सकते है।

कोण-भुजा-कोण **(ASA)** कसौटी के अनुसार त्रिभुज सर्वसमान होंगे यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वसमान होंगे।

उदाहरण 5 : दिए गए चित्र में, $\Delta AOC \cong \Delta BOD$. को सिद्ध कीजिए।



हल : ΔAOC तथा ΔBOD में हमें प्राप्त है

$\angle C = \angle D = 70^0$

$\angle AOC = \angle BOD = 30^0$ [$\because$ लंब सम्मुख कोण]

ΔAOC में हमारे पास है

$\angle A + \angle C + \angle AOC = 180^0$ [$\because$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है]

$\Rightarrow \angle A + 70^0 + 30^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle A + 100^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle A = 180^0 - 100^0 = 80^0$ ...(1)

ΔBOD में हमारे पास है,

$\angle B + \angle D + \angle BOD = 180^0$ [$\because$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है]

$\Rightarrow \angle B + 70^0 + 30^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle B + 100^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle B = 180^0 - 100^0 = 80^0$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

$\angle A = \angle B$

इसलिए हमारे पास $\angle AOC = \angle BOD$, $AC = BD$ $\angle C = \angle D$ होगा।

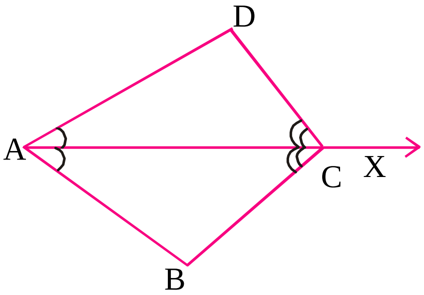
ASA कसौटी के उपयोग से त्रिभुज सर्वसमान होंगे।

$\therefore \quad \Delta AOC \cong \Delta BOD$

सिद्ध किया गया है।

उदाहरण 6 : दिए गए चित्र में किरण AX कोण $\angle DAB$ को समद्विभाजित कर $\angle DCB$ को भी समद्विभाजित करता है।

$\Delta BAC \cong \Delta DAC$ सिद्ध कीजिए।



हल: उपरोक्त चित्र से किरण AX दो कोण $\angle DAB$ तथा $\angle DCB$, यको समद्विभाजित करता है।

$\angle DAC = \angle BAC$ तथा $\angle DCA = \angle BCA$

ΔBAC तथा ΔDAC, को देखिए।

$\angle DAC = \angle BAC$ (दिया गया है)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle BCA = \angle DCA$ (दिया गया है)

ASA कसौटी की सहायता से $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ सिद्ध किया गया है

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. आपको $\Delta DEF \cong \Delta XYZ$, को ASA सर्वसमानता नियम के अनुसार सिद्ध करना है आपको $\angle D = \angle X$ तथा $\angle F = \angle Z$. दिया गया है। आपको सर्वसमानता सिद्ध करने के लिए किस जानकारी की आवश्यकता होगी। [सूचना: रफ चित्र उतारिए].
2. नीचे दो त्रिभुजों के कुछ मापों को दिया गया है दोनो त्रिभुज सर्वसमान है या नहीं जाँच कीजिए, इसमें ASA सर्वसमानता नियम का उपयोग कीजिए यदि वे सर्वसमान हो तो चिन्हों द्वारा दर्शाइए

	ΔABC	ΔDEF
(i)	$\angle Q = 60^0$, $\angle R = 80^0$, $QR = 5$ से.मी.	$\angle D = 60^0$, $\angle F = 80^0$, $DF = 5$से.मी.
(ii)	$\angle A = 80^0$, $PQ = 5$ से.मी.	$\angle R = 30^0$, $\angle E = 80^0$, $\angle F = 30^0$, $EF = 5$से.मी.

3. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ और $\angle A = 30^0$, हो तो $\angle E + \angle F$. का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उसी प्रकार हम एक और कसौटी को स्थापित कर सकते है जो दो समकोण त्रिभुजों पर लागू होता है। इसे हम इस प्रकार लिख सकते है।

यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण और भुजा, क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज अनुरूप होते है।

RHS अर्थात् समकोण, कर्ण, भुजा को दर्शाता है। इस कसौटी के आधार पर हम त्रिभुजों की सर्वसमानता इस प्रकार दर्शा सकते है।

(i) समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है।

(ii) विलोमः समान कोणों के सम्मुख वाली भुजाएँ समान होती है।

उदाहरण 7 : दो त्रिभुजो के कुछ मापों को दिया गया है त्रिभुज सर्वसमान है या नहीं जाँच कीजिए इसमें RHS कसौटी का उपयोग कर यदि वे सर्वसमान हो तो उन्हें सर्वसमानता के चिन्ह द्वारा दर्शाइए।

	ΔABC	ΔDEF
(i)	$\angle B = 90^0$, $AC = 8cm$, $AB = 3cm$	$\angle P = 90^0$, $PR = 3cm$, $QR = 8cm$
(ii)	$\angle A = 90^0$, $AC = 5cm$ $BC = 9cm$,	$\angle Q = 90^0$, $PR = 8cm$, $PQ = 5cm$

हल :

(i) यहाँ हमारे पास

$\angle B = \angle P = 90^0$

AC = QR = 8 से.मी. (कर्ण)

AB = PR = 3 से.मी.

RHS सर्वसमानता नियम द्वारा

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(ii) हमें दिया गया है

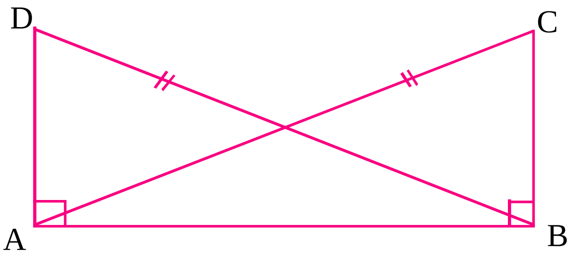
$\angle A = \angle Q = 90^0$

AC = PQ = 5से.मी.

लेकिन, $BC \neq PR$ [$\because$ BC = 5से.मी., PR = 8से.मी.]

इसलिए त्रिभुज सर्वसमान नहीं है।

उदाहरण 8 : दिए गए चित्र में, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ तथा AC = BD, है तो $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ सिद्ध कीजिए।



हल : ΔABC तथा ΔBAD से,

$\lfloor ABC = \lfloor BAD = 90^0$

AC = BD (दिया गया)

AB = BA (उभयनिष्ठ भुजा)

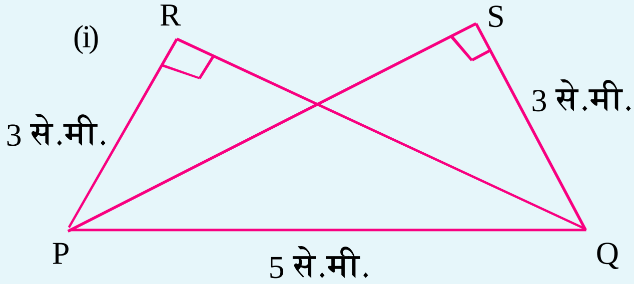
RHS सर्वसमानता नियम से

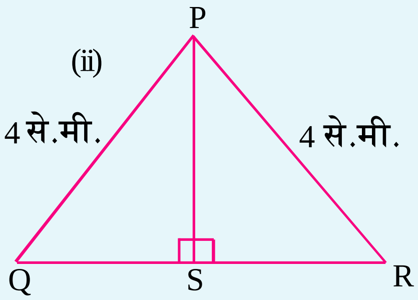
इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

सिद्ध किया गया।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

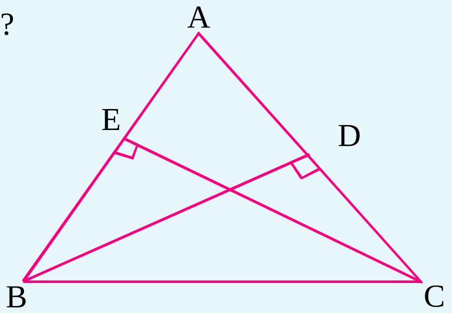
1. दिए गए चित्र में त्रिभुज के कुछ भाग दिए गए है RHS की सहायता से त्रिभुजों की सर्वसमानता को लिखिए यदि वे सर्वसमान होतो उन्हें चिन्हों की सहायता से लिखिए।





2. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ को RHS नियम अनुसार उसको सर्वसमानता सिद्ध करने के लिए $\angle B = \angle P = 90^0$ और $AB = RP$ दी गई जानकारी के अलावा और कौनसी जानकारी की आवश्यकता होगी?

3. दिए गए चित्र में, BD और CE ΔABC के लंब हो तो $BD = CE$. $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ को सिद्ध कीजिए।

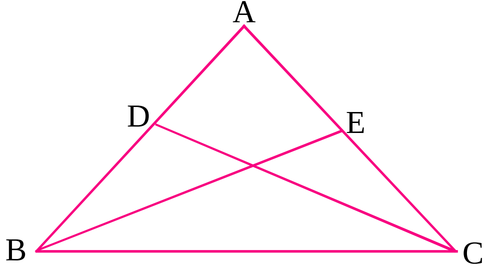


अभ्यास

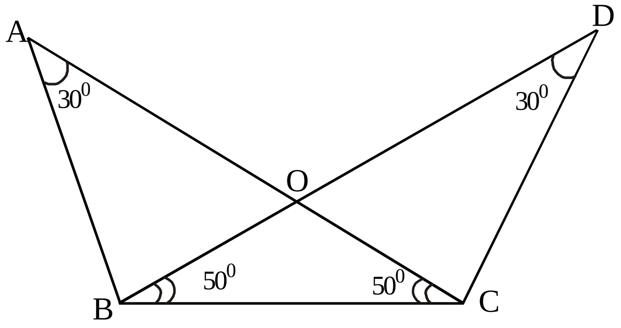
1. ΔABC, में मध्यिका AD लंब है BC पर तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होगा। [सूचना : RHS सर्वसमानता का उपयोग कीजिए]

2. यदि समद्विबाहु त्रिभुज की मध्यिका समान भुजाओं को समद्विभाजित करती है तो मध्यिकाएँ समान होती है सिद्ध कीजिए।

   [सूचना : $\Delta DBC \cong \Delta ECB$ को सिद्ध कीजिए।]

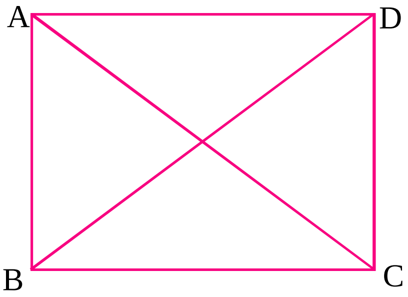


3. दिए चित्र में सिद्ध कीजिए। $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.

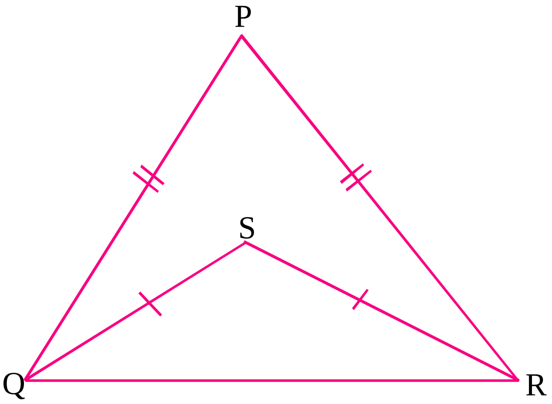


4. वर्ग ABCD में सिद्ध कीजिए।

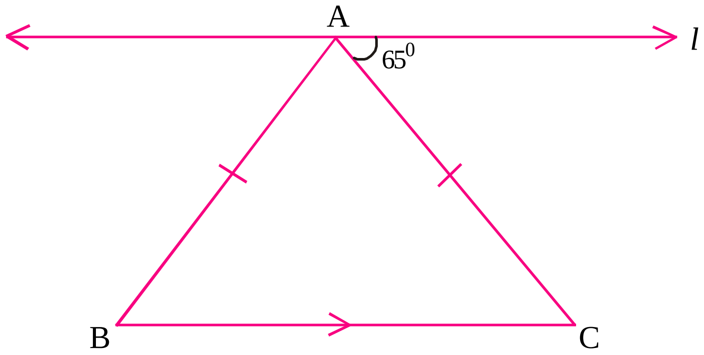
$\Delta ABC \cong \Delta BCD$



5. दिए गए चित्र में, $PQ = PR$ तथा $SQ = SR$ हो तो सिद्ध कीजिए। $\angle PQS = \angle PRS$.

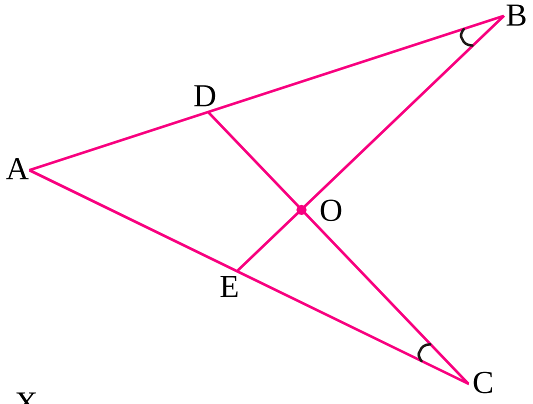


6. नीचे दिए गए चित्र में l समांतर है BC को ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज हो तो त्रिभुजों के कोणों को ज्ञात कीजिए।

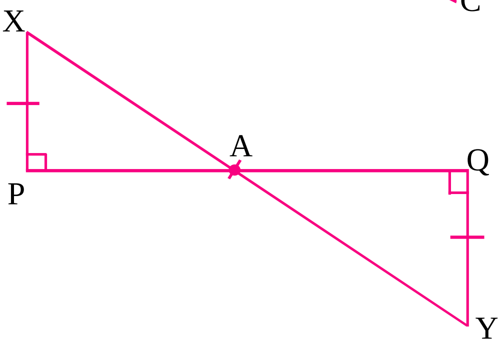


7. ΔABCमें, $AB = AC$. Pत्रिभुज का आंतरिक बिंदु इस प्रकार है $\angle ABP = \angle ACP$. तो सिद्ध कीजिए AP कोण $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

8. दिए गए चित्र में, $\angle B = \angle C$ तथा $AB = AC$. होतो सिद्ध कीजिए। $\Delta ABE \cong \Delta ACD$.



9. दिए गए चित्र में PX तथा QY लंब है PQ पर $PX = QY$. हो तो $AX = AY$ सिद्ध कीजिए।



सारांश

- आकृतियाँ जिनके आकार और परिमाप समान होते है उन्हें सर्वसमान आकृतियाँ कहते है।
- जब दो सर्वसमान आकृतियों को एक-दूसरे पर रखते है तो वे एक-दूसरे को पूर्णतया ढक लेते है। एक आकृति के सभी भाग दूसरी आकृति के सभी भागों के समान होते है।
- दो रेखा खण्ड $\overline{AB}$ तथा $\overline{CD}$, सर्व समान होंगे तो यदि उनकी लंबाईयाँ समान हो। उन्हें हम $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ के रूप में लिख सकते है। साधारणतया इसे $AB = CD$ दर्शाता है।.
- दो त्रिभुजों को सर्वसमान दर्शाने के लिए उसके तीन भागों का समान होना आवश्यक है ये संगत भाग निम्न में से एक को संतृप्त करते है।

(i) SSS (ii) SAS (iii) ASA (iv) RHS

अध्याय
4.5
चतुर्भुज

4.5.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों को जैसे कि समलंब चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, आयत, सम चतुर्भुज और वर्ग को परिभाषित करेंगे।
- विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणों की जाँच करेंगे।
- त्रिभुज के मध्य बिंदु प्रमेय की जाँच करेंगे।
* सम अवरोधन प्रमेय की जाँच करेंगे।
- कर्ण समांतर चतुर्भुज को सम क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- चतुर्भुज से संबंधित प्रश्नों को हल करेंगे।

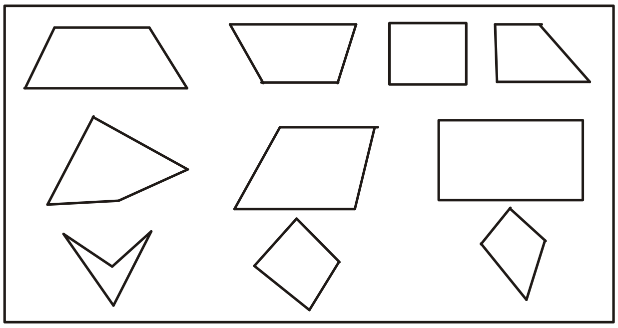
4.5.1 परिचय

हम हमारे चारो ओर चार रेखाओं से घिरी कई वस्तुओं को देखते है। किसी भी श्याम-पट का तल, दरवाजे, ब्रेड के टुकडे, कमरे की फर्श ये सभी चार रेखाओं से घिरी वस्तुओं के उदाहरण है। ऐसे चित्रों को चतुर्भुज कहते है।

हम इस अध्याय में चतुर्भुज के बारे में पढ़ेंगे।

4.5.2 चतुर्भुज

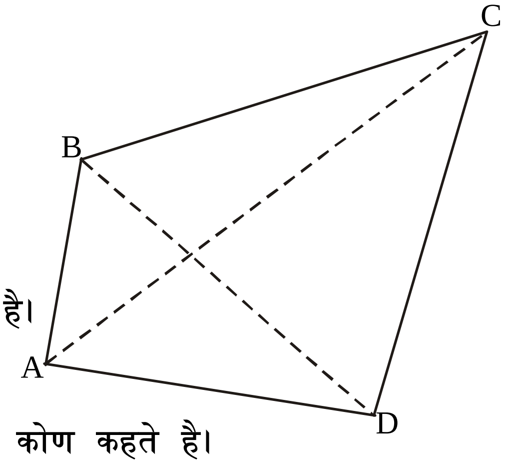
इन आकृतियों का निरीक्षण कीजिए उनकी भुजाओं, शीर्षों और कोणों को गिनिए।



चित्र. 4.5.1

उपरोक्त चित्र में आपने क्या देखा?

हमने देखा कि सभी आकृतियों की भुजायें, कोण और शीर्ष समान है और हमने देखा कि वे सभी बंद आकृतियाँ है इससे हम यह कह सकते है



"चतुर्भुज एक समतल में चार रेकाओं द्वारा परिबद्ध सरल बंद आकृति है".

हम संलग्न चित्र को चतुर्भुज ABCD या ⊔ ABCD इस चित्र की सहायता से हम इसे चतुर्भुज ABCD. में

(i) AB, BC, CD और DA को भुजाएँ कहते है।

(ii) A, B, C, D को शीर्ष कहते है।

(iii) $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ तथा $\angle DAC$ को कोण कहते है।

(iv) चतुर्भुज के असंगत शीर्षो को जोडने वाली रेखा को कर्ण कहते है। अर्थात् AC और BD कर्ण है।

(v) चतुर्भुज के दो भुजाएँ जिसका उभयनिष्ठ शीर्ष हो तो उन्हें "आसन्न भुजाएँ" कहते है। AB और BC आसन्न भुजायें है चतुर्भुज में चार जोडी आसन्न भुजाएँ होती है शेष आसन्न भुजाओं के नाम लिखिए।

(vi) चतुर्भुज के कोण के उभयनिष्ठ भुजा हो तो उसे ''आसन्न कोण'' कहते है। अर्थात् $\angle ABC$ और $\angle BCD$ एक आसन्न कोण की जोडी है। शेष आसन्न कोणों के नाम लिखिए।

(vii) चतुर्भुज के दो भुजायें जिनका उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं होता है उन्हें सम्मुख भुजायें कहते है। अर्थात् AB, CD और AD, BC दो सम्मुख भुजाओं की दो जोडियाँ है।

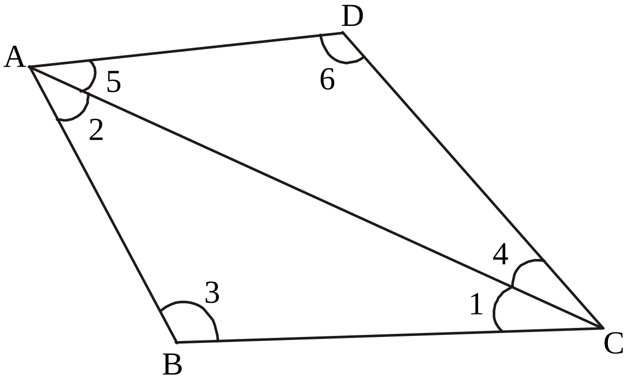
(viii) चतुर्भुज के दो कोण जिनके उभयनिष्ठ भुजा न हो तो उसे सम्मुख कोण कहते है, अर्थात् $\angle BAD$, $\angle DCB$ तथा $\angle ADC$, $\angle CBA$ चतुर्भुज के दो सम्मुख कोणों की जोडी है।

4.5.3 चतुर्भुज के कोणों का योग गुण

चलिए अब त्रिभुज के कोणों के योग के बारे में याद कीजिए। अर्थात् त्रिभुज के कोणों का योग 180^0 होता है क्या हम चतुर्भुज के चार कोणों का योग ज्ञात कर सकते है ?

आइए हम चतुर्भुज के चार कोणों का योग ज्ञात करें।

क्रियाकलाप



चित्र में दर्शाये अनुसार चतुर्भुज ABCD को देखिए।

हम जानते है AC एक कर्ण है हमने देखा कि AC ने चित्र को दो त्रिभुजों में बाँटता है। हमे कितने कओण प्राप्त होंगे। छः कोण होंगे $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$ जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।

अब त्रिभुज ΔABC के कोणों का योग गुण का उपयोग करेंगे।

हमें प्राप्त होगा $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ ...(1)

उसी प्रकार, ΔACD में त्रिभुज के कोणों का योग $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^0$ ...(2)

समीकरण (1) और (2), को जोडने पर आपको क्या प्राप्त होगा?

हमें प्राप्त होगा $(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180^0 + 180^0$

पदों को व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$(\angle 2 + \angle 5) + \angle 3 + (\angle 1 + \angle 4) + \angle 6 = 360^0$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0 \quad \left| \begin{array}{l} \because \angle 1 + \angle 4 = \angle C \\ \because \angle 2 + \angle 5 = \angle A \end{array} \right.$$

हमें निष्कर्ष प्राप्त होगा $A + B + C + D = 360^0$.

अर्थात् चतुर्भुज के चारों कोणों का 360^0 योग होगा।.

इस चतुर्बुज के कोणों के योग गुण के उपयोग से कुछ उदाहरण को हल करेंगे।

उदाहरण 1 : एक चतुर्भुज के कोण 55^0, 65^0 तथा 105^0 हो तो चौथे कोण का माप ज्ञात कीजिए।

हल : 55^0, 65^0 तथा 105^0 दिए गए कोण.

$A = 55^0$, $B = 65^0$ $C = 105^0$, $D = ?$

चतुर्भुज के कोणों का योग गुण ABCD

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$.

$\Rightarrow \quad 55^0 + 65^0 + 105^0 + \angle D = 360^0$

$\Rightarrow \quad 225^0 + \angle D = 360^0$

$\Rightarrow \quad \angle D = 360^0 - 225^0 = 135^0$

$\therefore$ चौथा कोण होगा $= 135^0$.

उदाहरण 2 : एक चतुर्भुज के कोण x^0, $(x-10)^0$, $(x+30)^0$ और $2x^0$. तो कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle A = x^0$, $\angle B = (x-10)^0$ $\angle C = (x+30)^0$ तथा $\angle D = 2x^0$.

चतुर्भुज ABCD के कोणों का योग गुण

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0.$$

$$\Rightarrow \quad x + (x-10) + (x+30) + 2x = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 5x + 20^0 = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 5x = 360^0 - 20^0$$

$$= 340^0$$

$$x = \frac{340}{5} = 68$$

इसलिए हमें प्राप्त होगा $\angle A = x = 68^0$

$$\angle B = (x-10)^0 = 58^0$$

$$\angle C = (x+30)^0 = 98^0$$

$$\angle D = (2x)^0 = 136^0.$$

उदाहरण 3 : एक चतुर्भुज के कोणों का अनुपात 3 : 4 : 5 : 6. हो तो कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो $\angle A = 3x$, $\angle B = 4x$, $\angle C = 5x$ तथा $\angle D = 6x$

चतुर्भुज ABCD के कोणों का योग गुण

$$\Rightarrow \quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 4x + 5x + 6x = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 18x = 360$$

$$x = \frac{\overset{20}{\cancel{360}}}{\cancel{18}_1} = 20^0$$

इसलिए कोण होंगे

$$\angle A = 3 \times 20 = 60^0$$

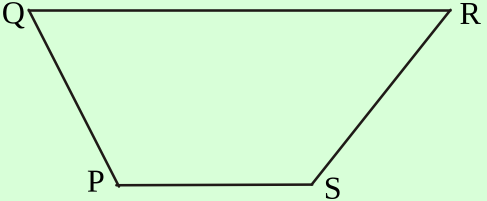
$$\angle B = 4 \times 20 = 80^0$$

$$\angle C = 5 \times 20 = 100^0$$

$$\angle D = 6 \times 20 = 120^0 \ .$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दिए गए चतुर्भुज PQRS में
   - (i) भुजा, कोण, शीर्ष तथा कर्णों के नाम लिखिए।
   - (ii) आसन्न भुजाएँ, आसन्न कोण सम्मुख भुजाएँ तथा समुख कोणों के नाम लिखिए।

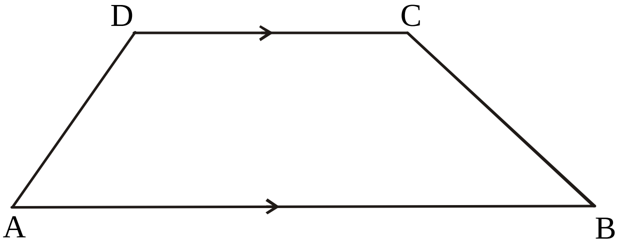


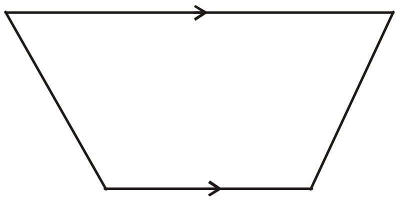
2. यदि चतुर्भुज के तीन कोण 60^0, 80^0 और 120^0, हो तो शेष कोणों को ज्ञात कीजिए।
3. एक चतुर्भुज के कोण x^0, $(x + 10)^0$, $(x + 20)^0$, $(x + 30)^0$. हो तो कोणों को ज्ञात कीजिए।
4. साई कहता है कि ''चतुर्भुज के कोणों का अनुपात 1 : 2 : 3 : 6'' है क्या आप उससे सहमत है? आपके उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

4.5.4 चतुर्भुज के प्रकार

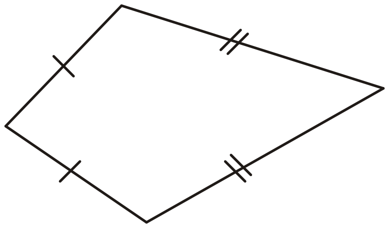
हम चतुर्भुज के विभिन्न आकारों से परिचित है। हमने उसके कोणों के योग के बारे में पढा है। अब हम उसके विभिन्न प्रकार के बारे में जानेंगे।

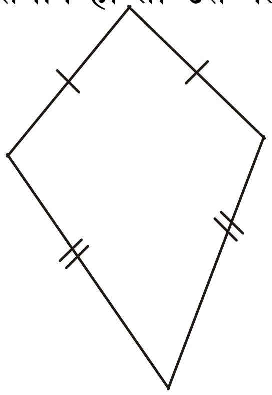
1. **समलंब चतुर्भुज :** एक चतुर्भुज में यदि एक जोडी सम्मुख भुजाएँ समानांतर हो तो उसे समलंब चतुर्भुज कहते है।



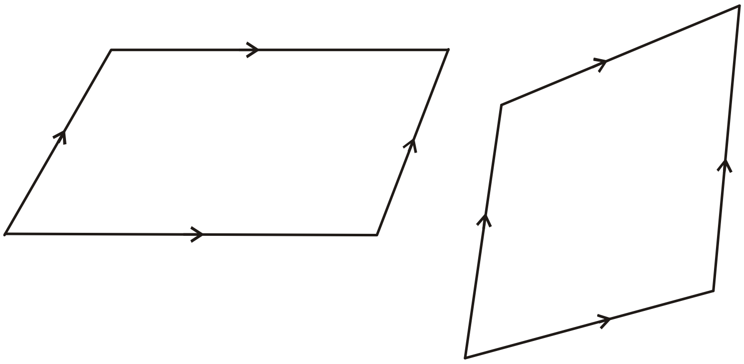


2. **पतंग :** एक चतुर्भुज में यदि दो संलग्न भुजाएँ समान हो तो उसे पतंगाकार कहते है।

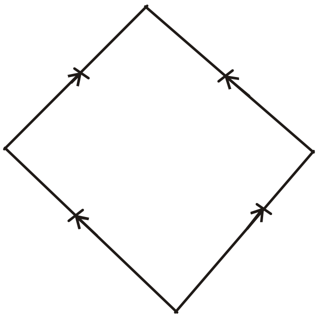




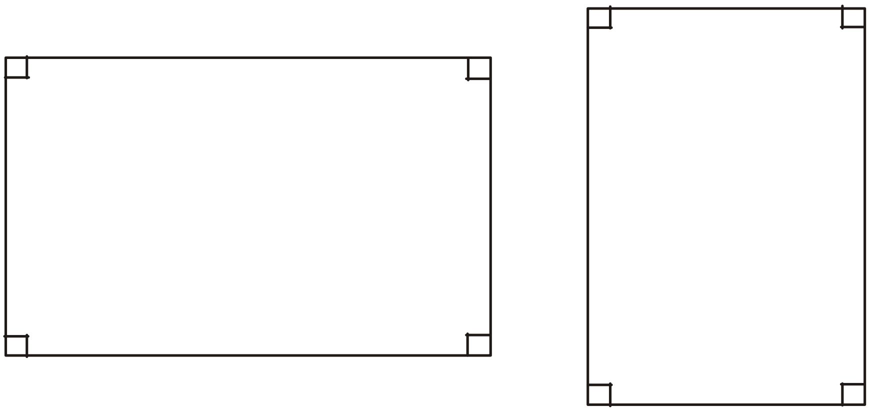
3. **समानांतर चतुर्भुज:** एक चतुर्भुज में यदि दो जोडी सम्मुख भुजाएँ समानांतर हो तो उसे ''समानांतर चतुर्भुज'' कहते है।



4. **समचतुर्भुज :** यदि चतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान हो तो उसे समचतुर्भुज कहते है।



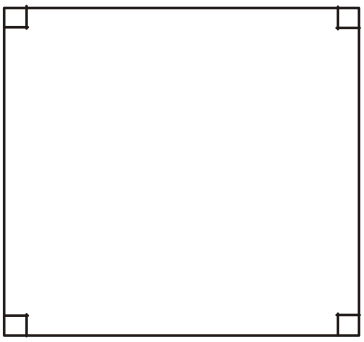
5. **आयात :** यदि चतुर्भुज में सभी कोण समान हो तो उसे आयत कहते है।



6. **वर्ग :** वर्ग एक आयत है जिसकी संलग्न भुजाएँ समान हो तो उसे वर्ग कहते है।

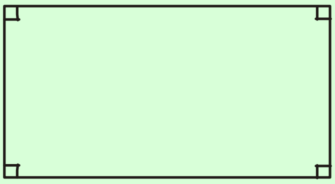
(या)

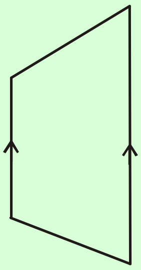
एक समानांतर चतुर्भुज जिसकी सभी भुजाएँ समान हो तथा प्रत्येक कोण 90^0 का हो उसे वर्ग कहते है।

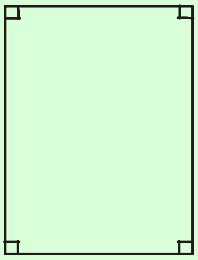


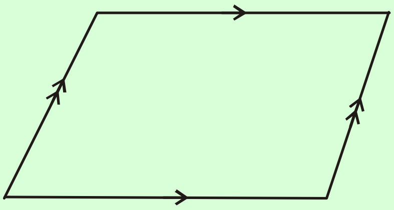
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

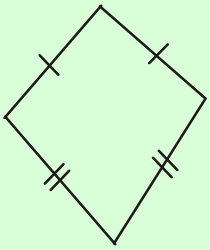
1. प्रत्येक चतुर्भुज का नाम लिखिए।

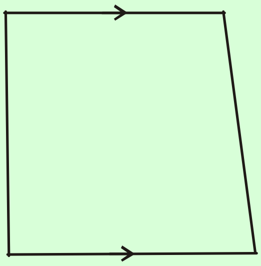

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


(v)


(vi)

2. दिया गया प्रत्येक कथन सत्य है या असत्य जाँच कीजिए।

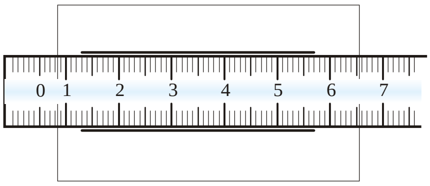
(i) सभी आयत वर्ग होते है (ii) आयत एक समानांतर चतुर्भुज होता है
(iii) वर्ग एक समचतुर्भुज होता है (iv) समचतुर्भुज एक समानांतर चतुर्भुज होता है
(v) वर्ग एक समानांतर चतुर्भुज होता है (vi) एक समानांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।
(vii) एक समलंब चतुर्भुज समानांतर चतुर्भुज होता है।
(viii) एक समलंब चतुर्भुज आयत होता है।
(ix) एक समानांतर चतुर्भुज समलंब चतुर्भुज होता है।

4.5.5 विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुण

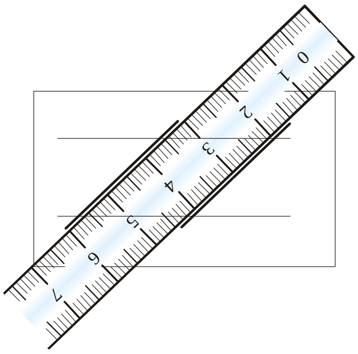
हमने विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के बारे में पढा है। अब हम चतुर्भुजों के भुजाओं, कोणों तथा कर्णों के बीच संबंध को स्थापित करेंगे जैसे कि समानांतर चतुर्भुज, आयत, समचतुर्भुज तथा वर्ग।

4.5.5(a) समनांतर चतुर्भुज के गुण

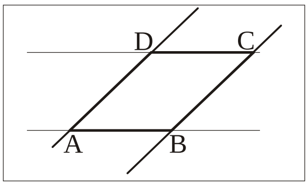
क्रियाकलाप : एक पटरी को पेपर पर रखकर दोनों ओर रेखा खींचिए। (1). फिर पटरी को चित्र (2) में दिखाए अनुसार आडा रखिए और दो रेखाएँ खींचिए।



चित्र. 1



चित्र. 2



चित्र. 3

आपने चित्र (3) में क्या देखा?

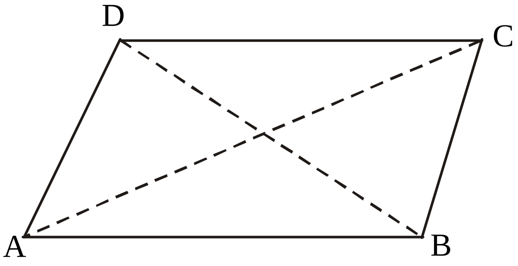
हमने देखा कि ABCD एक समानांतर चतुर्भुज है जिसमें सम्मुख ''भुजाएँ समानांतर अर्थात्, AB || CD और AD || BC. आपने क्या निष्कर्ष निकाला?

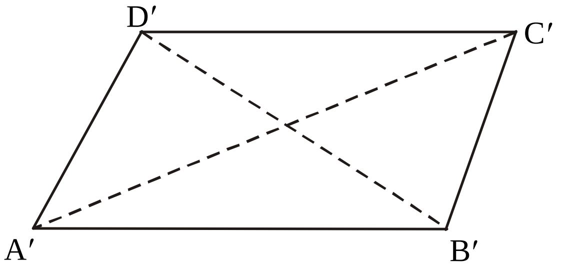
हमने निष्कर्ष पाया कि ''समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ समानांतर होती है".

अब हम एक क्रिया करेंगे:

क्रियाकलाप:

दो एक जैसे समानांतर चतुर्भुज लेंगे मानलो ABCD तथा $A'B'C'D'$ होगा।

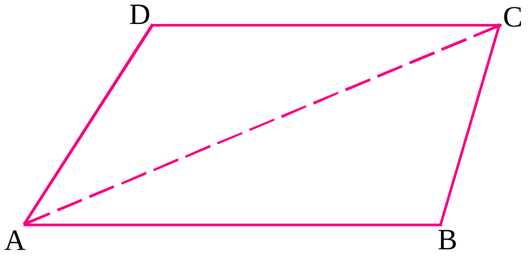




इन चित्रों में आपने क्या देखा?

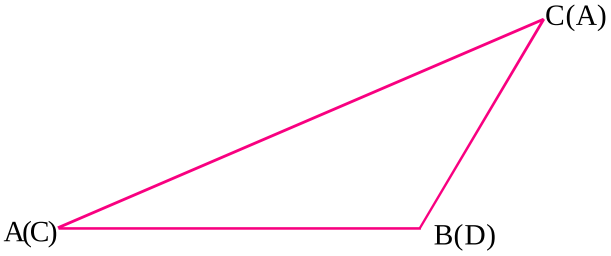
यहाँ $\overline{AB}$ समान है $A'B'$ के। उसी प्रकार दूसरे संगत भुजाएँ समान है। चलिए अब हम $\overline{A'B'}$ को $\overline{DC}$ पर लगाइए क्या वे एक जैसे ही है क्या $\overline{A'B'}$ और $\overline{DC}$ की लंबाई समान है? हमने देखा कि उनकी लंबाई समान होगी। उसी प्रकार $\overline{AD}$ तथा $\overline{B'C'}$ की लंबाई को देखो? क्या वे समान है। हम निष्कर्ष निकाल सकते है कि सम्मुख भुजाएँ समान है इसलिए समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती है।

एक कार्ड बोर्ड लीजिए कोई भी एक समांतर चतुर्भुज ABCD उस पर उतारिए। उसका कर्ण AC चित्र में दर्शाए अनुसार खींचिए।



अब उस समांतर चतुर्भुज को AC पर काटिए। आपने क्या देखा? हमने देखा कि समांतर चतुर्भुज दो भागों में विभाजित होंगे प्रत्येक भाग एक त्रिभुज होगा।

इसलिए हमें दो त्रिभुज ΔABC और ΔADC प्राप्त होंगे। अब ΔADC को ΔABC पर इस प्रकार रखिए कि शीर्ष D को B पर तथा CD भुजा AB पर नीचे चित्र में दर्शाये अनुसार रखिए।



हमने देखा कि $\Delta CDA, \Delta ABC$ के साथ होंगे हम कह सकते है। $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

इसलिए, $AB = CD$

$BC = DA$ और $\angle B = \angle D$

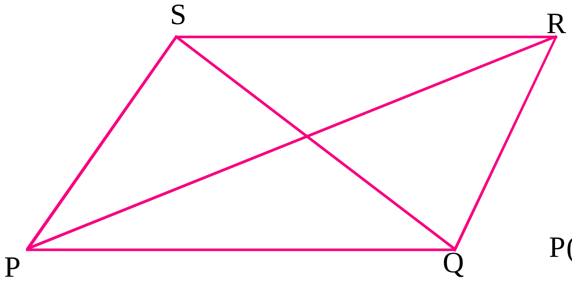
हम इस प्रकार बता सकते है।

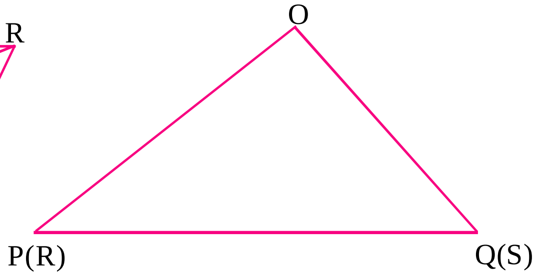
* समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती है।

* समांतर चतुर्भुज की सम्मुख कोण समान होती है।

चलिए अब हम दूसरी क्रिया कर समांतर चतुर्भुज के कर्णों के गुणों की जाँच करेंगे।

क्रियाकलाप : अब दूसरा कार्डबोर्ड लीजिए उस पर एक समांतर चतुर्भुज PQRS को खींचिए। उसके कर्ण PR तथा QS को चित्र में दर्शाये अनुसार O पर काटते हुए खींचिए।





ΔPOQ तथा ΔROS को काटिए।

अब ΔROS और ΔPOQ को इस प्रकार रखिए जिससे शीर्ष R शीर्ष P के साथ हो और RO साथ हो PO के।

हम देखेंगे कि $\Delta ROS \cong \Delta POQ$.

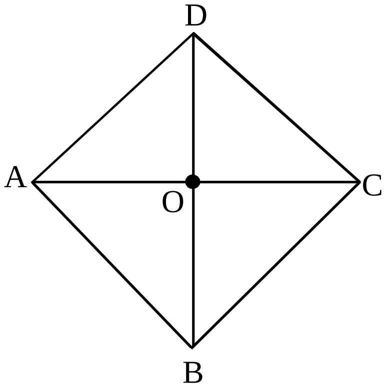
इसलिए, $RO = PO$ और $OS = OQ$.

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि कर्ण एक दूसरे को द्वि-भाजित करते है। हम निम्न गुणों की जाँच कीजिए जो समांतर चतुर्भुज के गुणों के विलोम है।

- एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा यदि उसकी दो जोडी सम्मुख भुजाएँ समान होंगी।
- एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा यदि उसके दो जोडी सम्मुख कोण समान होंगे।
- एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा यदि उसके कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

4.5.5 (b) समचतुर्भुज के गुण

हम जानते है कि समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें आसन्न भुजाएँ समान होती है जैसा कि चित्र में ABCD एक समचतुर्भुज है।



इसलिए, ABCD एक समांतर चतुर्भुज जिसमें $AB = BC$. चूँकि प्रत्येक समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है इसलिए समांतर चतुर्भुज के सभी गुण समचतुर्भुज के गुण होते है। समचतुर्भुज के गुण होंगे।

(i) सम्मुख भुजाएँ समान होते है अर्थात् $AB = DC$ और $AD = BC$.

(ii) सम्मुख कोण समान होते है अर्थात् $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$.

(iii) कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है

अर्थात् $AO = OC$ और $DO = OB$

चूँकि समचतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ समान होती है और समांतर चतुर्भुज के गुण ''सम्मुख भुजाएँ समान होती है'' के अनुसार

इसलिए, $AB = BC = CD = DA$.

अर्थात् समचतुर्भुज की चारों भुजाएँ समान होती है। $\angle AOD$ और $\angle BOC$ को मापिए।

आप इनके बारे $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$? क्या कह सकते है?

हमने देखा कि प्रत्येक कोण 90^0 का है।

अर्थात् $\angle AOD = \angle BOC = 90^0$.

और $\angle AOB = \angle COD$ (प्रत्येक जोडी सम्मुख कोणों की जोडी है)

और $\angle BOC = \angle DOA$.

$\therefore \quad \angle AOB = \angle COD = \angle BOC = \angle DOA = 90^0$.

आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते है?

हम कह सकते है कि समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को 90^0 पर काटते है।

इसलिए समचतुर्भुज के गुण इस प्रकार होंगे।

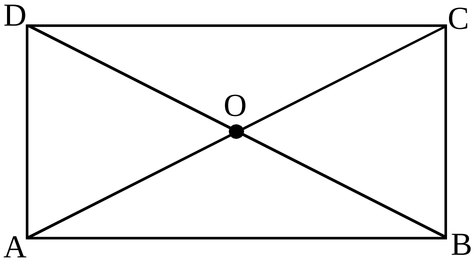
- समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान होती है।
- समचतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते है।
- समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समकोण पर द्वि-भाजित करते है।

4.5.5(c) आयत के गुण

हम जानते है कि आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें उसका कोण समकोण है। समांतर चतुर्भुज के सभी गुण आयत को लागू होते है अब हम आयत के कुछ और गुणों के बारे में जानेंगे।

क्रियाकलाप :

एक समांतर चतुर्भुज ABCD को खींचिए और $\angle B = 90^0$. को देखिए कर्ण AC तथा BC को मिलाइए जैसे चित्र में दर्शाया गया है।



कोण $\angle BAD$, $\angle BCD$ और $\angle ADC$ को मापिए। आपने क्या देखा? आप कोण $\angle BAD$, $\angle BCD$ और $\angle ADC$ के बारे में क्या कहेंगे?

$\angle BAD = \angle A$
$\angle BCD = \angle C$
$\angle ADC = \angle D$
$\angle ABC = \angle B$

हमने देखा कि प्रत्येक 90^0, का है
इसलिए हम कह सकते है

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

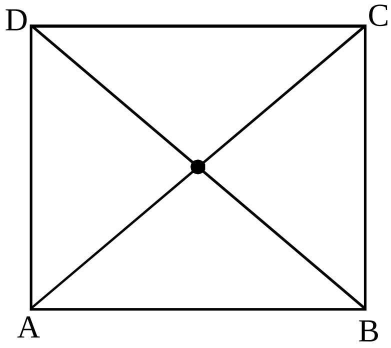
अब हम कर्ण AC तथा BD को मापेंगे। आप उनके बारे में क्या कह सकते है।

हमने देखा कि कर्णAC तथा BD समान है। अर्थात् AC = BD अब हमAO, OC, BO और OD को मापेंगे। हम देखेंगे कि AO = OC और BO = OD और हम कहसकते है आयत के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है। हमने देखा कि OA = OB = OC = OD. अर्थात् हमारे पास आयत के निम्न गुण होंगे।

- आयत की सम्मुख भुजाएँ समान होती है.
- आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है.
- आयते कर्ण समान होते है.
- आयत के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

4.5.5(d) वर्ग के गुण

हम जानते है कि वर्ग एक आयत होता है जिसमें आसन्न भुजाएँ समान होती है। अब हम वर्ग पर आयत से यह कह सकते है कि वर्ग पर आयत के सभी गुण लागू होते है अब हम वर्ग के कुछ और गुणों की चर्चा करेंगे। चित्र में दर्शाये अनुसार वर्गABCD खींचिए।



चूँकि ABCD एक आयत है।

(i) AB = CD, AD = BC

(ii) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

(iii) AC = BD, AO = OC = OD = OB.

लेकिन वर्ग में AB = AD; होता है। (गुण (i) के अनुसार),

इसे हम इस प्रकार AB =AD = BC = CD. दर्शा सकते है।

चूँकि वर्ग एक समचतुर्भुज भी है।

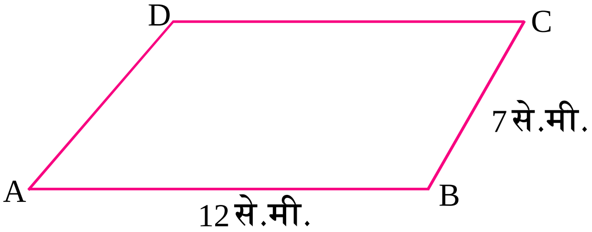
इसलिए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि कर्ण AC और BD एक दूसरे को समकोण पर काटते है।

इसलिए हमारे पास वर्ग के निम्न गुण होंगे।

- सभी भुजाएँ समान होती है.
- सभी कोण समान तथा 90^0 के होते है.
- कर्ण समान होते है.
- कर्ण एक दूसरे के लंब समद्विभाजक होते है।
- कर्ण कोणिय द्विभाजक होते है।

अब, हम समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत तथा वर्ग के गुणों पर आधारित उदाहरणों को देखेंगे।

उदाहरण 4 : समांतर चतुर्भुज ABCD की परिमिती ज्ञात कीजिए।



हल : समांतर चतुर्भुज ABCD में

AB = 12 से.मी.

BC = 7 से.मी.

DC = AB = 12से.मी. [$\because$ समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती है।]

AD = BC = 7 से.मी.

$\therefore$ परिमिति = AB + BC + CD + DA

= 12 + 7 + 12 + 7

= 38 से.मी..

उदाहरण 5 : समांतर चतुर्भुज PQRS, में यदि $\angle Q = 70^0$, हो तो दूसरे कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज PQRS में $\angle Q = 70^0$.

हमारे पास $\angle S = \angle Q$ [$\because$ समांतर कोण समान होते है।]

$= 70^0$

चूँकि $\angle Q$, $\angle R$ संपूरक कोण है।

हमारे पास, $\angle Q + \angle R = 180^0$ | $\because \angle Q = 70^0$

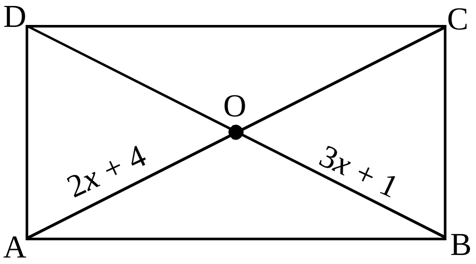
$\Rightarrow \quad 70^0 + \angle R = 180^0$

$\angle R = 180^0 - 70^0 = 110^0$

हमारे पास है, $\angle P = \angle R$ [$\because$ समांतर चतुर्भुज]

$= 110^0$

इसलिए, $\angle P = \angle R = 110^0$ और $\angle Q = \angle S = 70^0$.



उदाहरण 6 : दिए गए आयत ABCD में उनके कर्ण प्रतिच्छेदित “O” पर होते है x, को ज्ञात कीजिए।यदि OA = $2x + 4$ और OB = $3x + 1$.

हल : आयत ABCD

$OA = 2x + 4$

$OB = 3x + 1$

चूँकि आयत के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है

हमारे पास होंगे $AC = 2OA = 2(2x+4)$ और

$BD = 2OB = 2(3x+1)$

चूँकि आयत के वर्ण समान होते है अर्थात् $AC = BD$

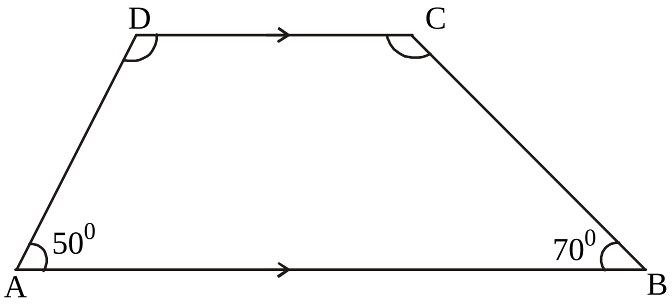
हमारे पास है, $2(2x+4) = 2(3x+1)$

$\Rightarrow \quad 2x + 4 = 3x + 1$

$\Rightarrow \quad 3x + 1 = 2x + 4$ [$\because$ पदों को स्थानांतरित करने पर]

$3x - 2x = 4 - 1$

इसलिए, $\boxed{x = 3}$



उदाहरण 7 : समलंब चतुर्भुज ABCD में AB समांतर है CD के यदि $\angle A = 50^0$, $\angle B = 70^0$. हो तो $\angle C$ तथा $\angle D$ को ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब चतुर्भुज ABCD में

$\angle A = 50^0$ तथा $\angle B = 70^0$

चूँकि AB समांतर है CD के

हमारे पास है $\angle A + \angle D = 180^0$ [$\because$ सह - अंतः कोण]

$\Rightarrow \quad 50^0 + \angle D = 180^0$

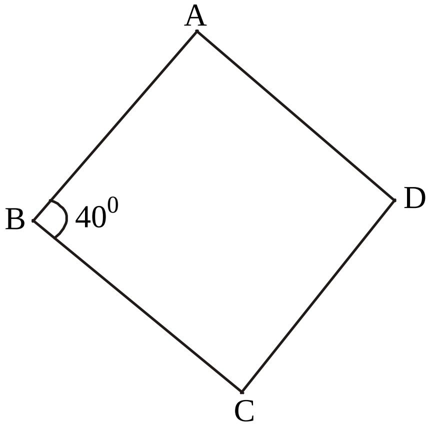
$\Rightarrow \quad \angle D = 180^0 - 50^0 = 130^0$

अर्थात् हमारे पास है $\angle B + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad 70^0 + \angle C = 180^0$

$\Rightarrow \quad \angle C = 180^0 - 70^0 = 110^0$

$\angle C = 110^0$ तथा $\angle D = 130^0$.



उदाहरण 8 : समचतुर्भुज में ABCD, $\angle B = 40^0$. हो तो दूसरे कोणों को ज्ञात कीजिए।

हल : समचतुर्भुज ABCD में $\angle B = 40^0$.

समचतुर्भुज मे सम्मुख कोण समान होते है

$\Rightarrow \quad \angle D = \angle B = 40^0$

हमारे पास, $\angle B + \angle C = 180^0$ [$\because$ तिर्यक के एक ओर वाले अंतः कोण]

$\Rightarrow \quad 40^0 + \angle C = 180^0$

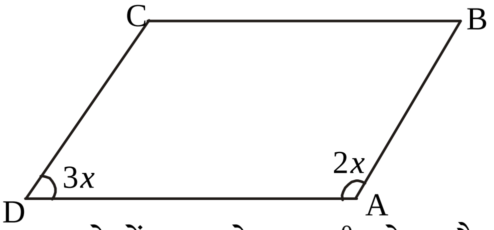
$\Rightarrow \quad \angle C = 180^0 - 40^0 = 140^0$

इसलिए, $\angle A = \angle C$ [$\because$ समचतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते है]

$= 140^0$

इसलिए, $\angle A = 140^0$, $\angle C = 140^0$ और $\angle D = 40^0$.

उदाहरण 9 : समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न कोणों का अनुपात 3 : 2 हो तो कोणों को ज्ञात कीजिए।



हल : समांतर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का माप 3:2. में है।

मानलो आसन्न कोण $\angle A = 3x$ और $\angle D = 2x$

हमारे पास, $\angle A + \angle D = 180^0$ [$\because$ आसन्न कोणों का योग 180^0 होता है।]

$\Rightarrow \quad 3x + 2x = 180^0$

$\Rightarrow \quad 5x = 180^0$

$$x = \frac{\overset{36}{\cancel{180}}^{0}}{\cancel{5}_1} = 36^0$$

$$\angle A = 3x = 3 \times 36^0 = 108^0$$

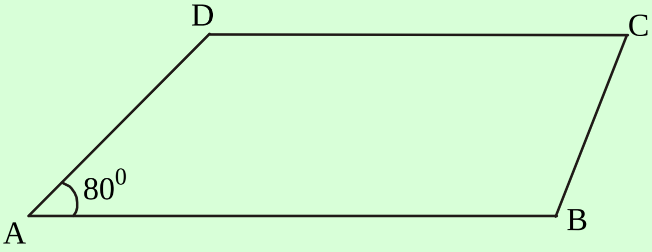
$$\angle D = 2x = 2 \times 36^0 = 72^0$$

और हमारे पास है $\angle C = \angle A = 108^0$ [$\because$ सम्मुख कोण समान होते है]

$\angle B = \angle D = 72^0$

इसलिए, $\angle A = 108^0$, $\angle B = 72^0$, $\angle C = 108^0$ तथा $\angle D = 72^0$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए



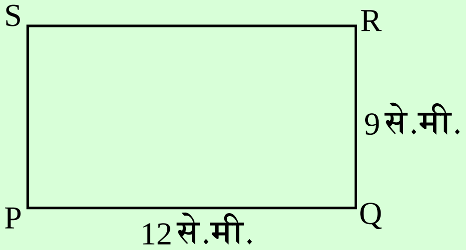
1. दिए गए चित्र में ABCD एक समानांतर चतुर्भुज है यदि $\angle A = 80^0$, हो तो शेष कोणों को ज्ञात कीजिए।

2. ABCD एक समचतुर्भुज है जिसमें $\angle B = 58^0$ हो तो $\angle C$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. यदि ABCD वर्ग का AC एक कर्ण हो तो $\angle CAB$ को ज्ञात कीजिए।.
   [सूचना : कर्ण कोणिय द्विभाजक होते है]

4. दिए गए समांतर चतुर्भुज में x^0 तथा $(2x+30)^0$ आसन्न कोण हो तो सभी कोणों को ज्ञात कीजिए।

5. दिए गए चित्र में PQRS एक आयत है उसकी परिमिती ज्ञात कीजिए।

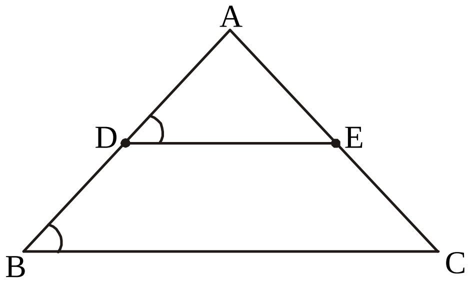


4.5.6 मध्य बिंदु प्रमेय

हमने समांतर चतुर्भुज के गुणों के बारे में पढा है अब हम त्रिभुज से संबंधित कुछ और गुणों की जानकारी प्राप्त करेंगे। अब इस क्रिया को करेंगे।

क्रियाकलाप :

एक त्रिभुज ABC खींचो AB तथा AC के मध्य बिंदु D तथा E को चिन्हित करो चित्र में दर्शाये अनुसार।



क्या BC तथा DE के मध्य कोई संबंध पाते है? BC तथा DE को मापे। आप देखेंगे कि $DE = \frac{1}{2}BC$. होगा। $\angle ADE$ तथा $\angle ABC$ को मापो, क्या हम कह सकते है कि $\angle ADE$ तथा $\angle ABC$ समान है? हाँ, हमने जाँच करने पर पाया की $\angle ADE = \angle ABC$। हम जानते हैं कि ये कोण संगत कोणों की जोडी है जैसा कि यह बताया गया है कि यदि संगत कोण समान होते है तो रेखाएँ समानांतर होती है।

इसलिए, $DE \parallel BC$.

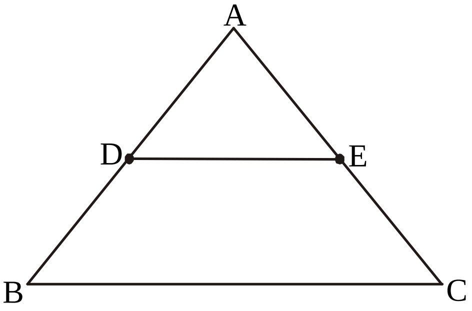
अब हम इस प्रयोग को दूसरे दो या तीन त्रिभुजों पर उनके नाम ABC तथा मध्य बिंदु D तथा E जो कि AB और AC के क्रमशः मध्य बिंदु होंगे। इन सभी संदर्भो में हमने देखा कि $DE \parallel BC$ तथा $DE = \frac{1}{2}BC$.इसलिए, हम कह सकते है ''त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को जोडने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर तथा उसकी आधी होती है।''

हम इसके विलोम की भी जाँच कर सकते है। अब हम मध्य बिंदु प्रमेय का विलोम इस प्रकार लेंगे।

“रेखा जो त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिंदु से गुजरती है और दूसरी भुजा के समांतर हो तो वह तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।”.

चलिए हम मध्यबिंदु प्रमेय और इसके विलोम पर कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 10 : ΔABC में $DE \parallel BC$ और AC = 12 से.मी. है और AB का मध्य बिंदु D हो तो AE को ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABCमें AC = 12 से.मी.

$DE \parallel BC$ तथा D मध्य बिंदु है AB का

$\therefore$ E भी मध्य बिंदु होगा AC (मध्य बिंदु प्रमेय के विलोम द्वारा)

अर्थात्, $AE = \frac{1}{2}AC$

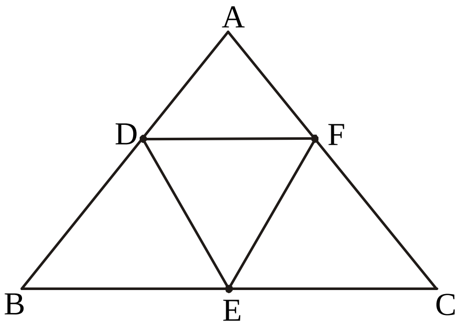
$= \frac{1}{2}\times 12$

= 6 से.मी.

इसलिए, AE = 6से.मी.

उदाहरण11 : ΔABC, में यदि D, E, F भुजा AB, BC तथा CA के मध्य बिंदु है।. तथा AB = 8से.मी., BC = 7से.मी., CA = 6से.मी., ΔDEF की भुजाओं को ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में D, E, F मध्य बिंदु है AB, BC और CA के



AB = 8से.मी.

BC = 7से.मी.

CA = 6 से.मी.

D मध्यबिंदु है AB का तथा F मध्य बिंदु AC का

इसलिए, $DF = \frac{1}{2}BC$ [∵ मध्य बिंदु प्रमेय द्वारा]

$= \frac{1}{2}\times 7 = 3.5$ से.मी.

D मध्य बिंदु है AB का तथा E मध्य बिंदु है BC का

$\Rightarrow \quad DE = \frac{1}{2}AC$ [∵ मध्य बिंदु प्रमेय द्वारा]

$= \frac{1}{2}\times 6$

= 30 से.मी..

उसी प्रकार,

$\Rightarrow \quad EF = \frac{1}{2}AB$ [∵ मध्य बिंदु प्रमेय द्वारा]

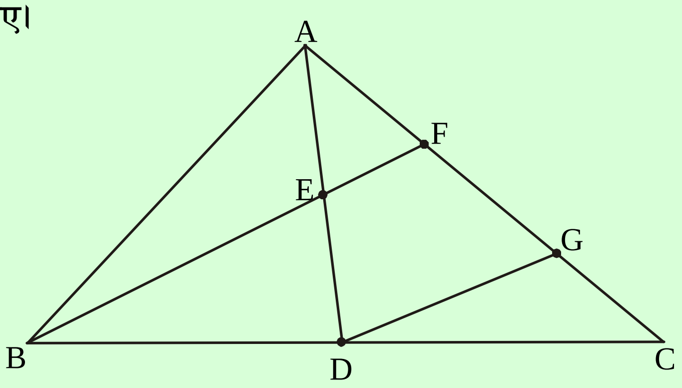
$= \frac{1}{2}\times 8$

= 4 से.मी..

इसलिए, ΔDEF की भुजाएँ DE = 3से.मी., EF = 4से.मी. तथा DF = 3.5 से.मी..

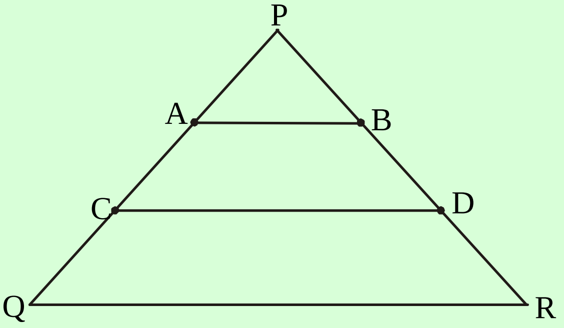
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. ΔABC में यदि D तथा E मध्य बिंदु है AB तथा AC के और BC = 10 से.मी. हो तो DE को ज्ञात कीजिए।
2. दिए गए चित्र में ΔABC, AD उसकी मध्यिका तथा E बिंदु है AD का और BE को आगे बढाकर F पर AC से मिलाया गया है और DG ∥ EF. यदि AC = 9 से.मी. हो तो AF को ज्ञात कीजिए।.

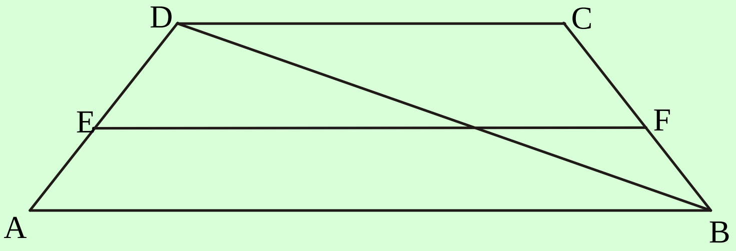


[सूचना : ΔADG तथा ΔCBF को देखिए।]

3. दिए गए चित्र में ΔPQR, A तथा C PQ भुजा को तीन समान भागों में बाँटता है और, $AB \parallel CD \parallel QR$. हो तो सिद्ध कीजिए कि B तथा D भी भुजा PR को तीन समान भागों में बाँटती है।

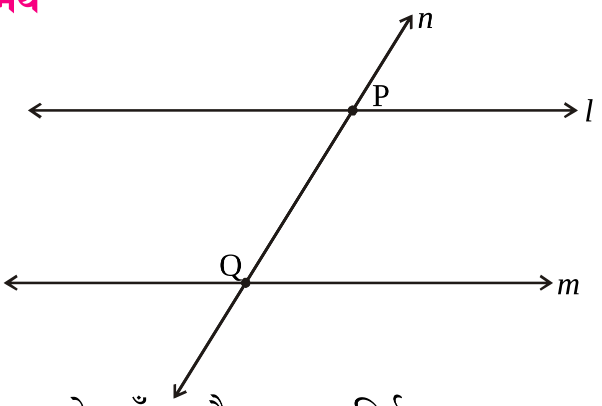


4. दिए गए चित्र में ABCD समलंब चतुर्भुज है जिसमें AD तथा BC दो असमांतर भुजाएँ है E मध्य बिंदु है AD का और $EF \parallel AB$. हो तो सिद्ध कीजिए F मध्य बिंदु होगा BC का।.



4.5.7 समान अंतःखण्डो का प्रमेय

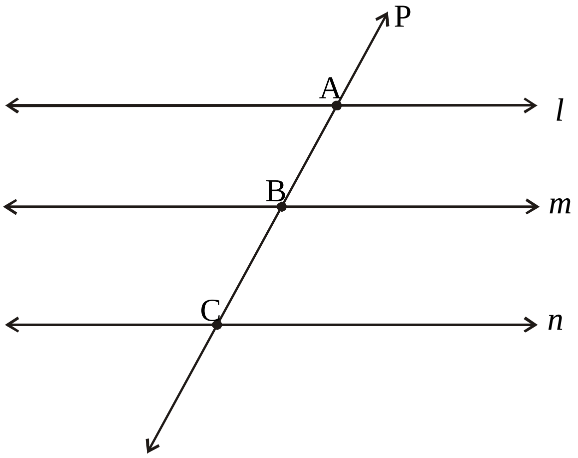
अब हम उस रेखा को याद करेंगे जो दो या दो से अधिक रेखाओं को काटती है तो उसे तिर्यक कहते है रेखायें जो तिर्यक से कटती है उसे अंतः खण्ड कहते है।



नोट : ऊपरी चित्र में, PQ को अंतः खण्ड रेखाएँ l और m पर तिर्यक n द्वारा बनते है।

यदि तीन समांतर रेखाओं के तिर्यक से बनने वाला अंतः खण्ड के विशेष गुणों को जानेंगे।

यदि तीन समांतर रेखाएँ हो तो तिर्यक द्वारा प्रतिच्छेदित होती है तो उनसे कितने अंतःखण्ड बनेंगे? इस चित्र को देखिए।

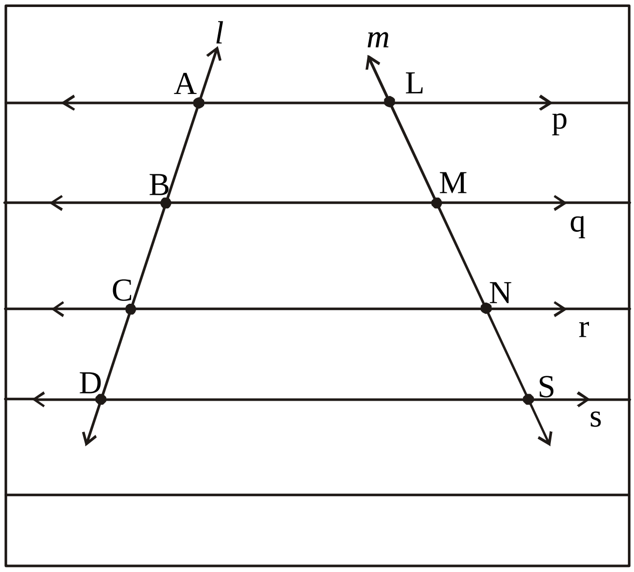


हम देखेंगे कि दिए गए चित्र में दो अंतः खण्ड AB और BC द्वारा समांतर रेखाएँ l, m और n पर तिर्यक "p"से बनते है। अब हम इसके बारे में जानेंगे।

क्रियाकलाप :

एक रेखीय पेपर पर दो तिर्यक l और m प्रतिच्छेदित करती है समांतर रेखाएँ p, q, r और s को जैसा चित्र में दर्शाया गया है।

हमने देखा कि अंतः खण्ड AB, BC और CD को मापिए। जाँच कीजिए वे समान है या नहीं LM, MN और NS को मापिए? वे सभी समान लंबाई वाले है।.



इस क्रिया को दूसरे दो रेखाओं पर दोहराइए और अंतः खण्डो को मापिये उनकी लंबाईयों की जाँच कीजिए वे समान है या नहीं। हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में बनने वाले अंतः खण्ड समान होते है।

अर्थात् हम समान अंतःखण्ड समान होते है। ''यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ तिर्यक से यदि अंतः खण्ड बनते है तो वे समान होते है।''

उदाहरण को देखिए।

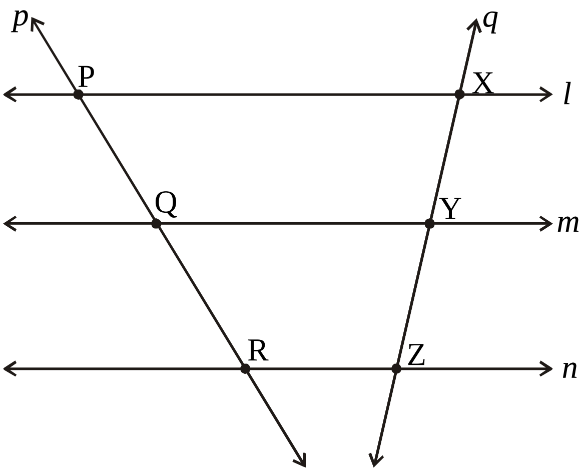
उदाहरण 12 : दिए गए चित्र में, $l \parallel m \parallel n$ तथा PQ = QR, हो और XZ = 20 से.मी. YZ. को ज्ञात कीजिए।

हल : हमारे पास PQ = QR तो XZ = 20 से.मी.

$\therefore$ अंतः खण्ड प्रमेय से

XY = YZ $\quad |\because$ PQ = QR

हमारे पास होगा XZ= XY + YZ



$$= YZ + YZ$$

$$= 2YZ$$

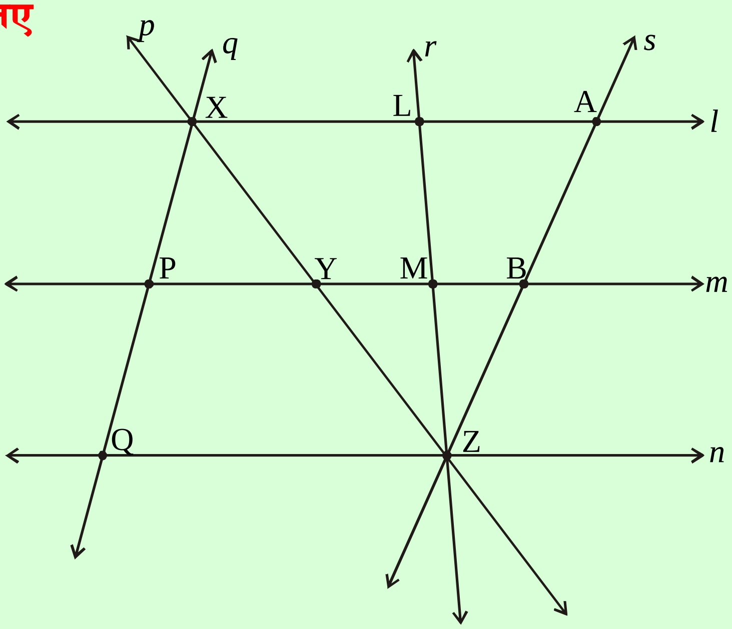
$$\Rightarrow \quad 20 = 2YZ$$

$$\therefore \quad YZ = \frac{20}{2} = 10 \text{ से.मी.}$$

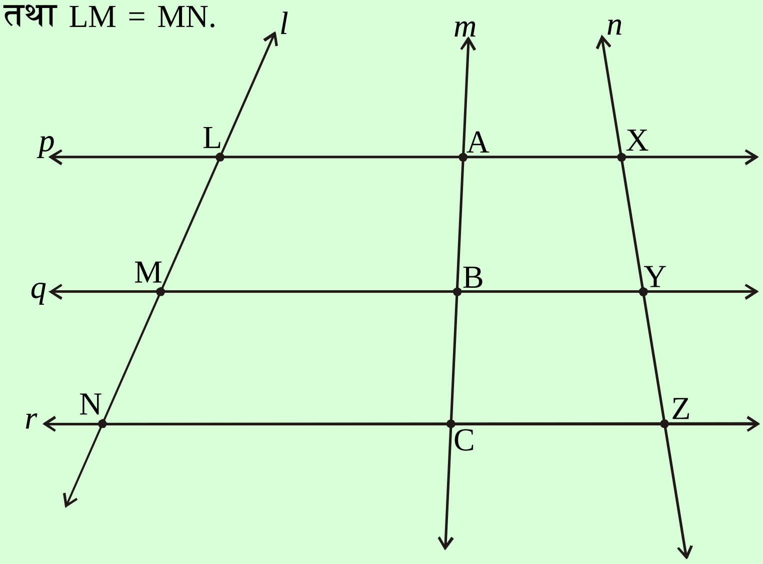
इसलिए, YZ = 10 से.मी..

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यदि दिए गए चित्र में, $l \parallel m \parallel n$, PQ = 3.2 से.मी., AB = 3.5 से.मी., YZ = 3.4 से.मी., LM = MZ = 3से.मी., XY, XP तथा BZ को ज्ञात कीजिए।



2. दिए गए चित्र में, $p \parallel q \parallel r$. तिर्यक l, m और n उन्हें पर L, M, N; काटती है A, B, C तथा X, Y, Z पर जिससे XY = YZ. हो तो सिद्ध कीजिए AB = BC तथा LM = MN.



4.5.8 समान समांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुर्भुज तथा त्रिभुज

अब हम त्रिभुज तथा समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के संबंध के बारे में जानेंगे जिसमें वे दोनों एक ही आधार तथा समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित होंगे त्रिभुजों की समानता को समझने में इसका महत्वपूर्ण योगदान होगा।

एक समतलीय क्षेत्र, परिमेय और आंतरिक क्षेत्र से बनने वाले को क्षेत्रफल कहते है।

इन क्षेत्रों के नाप का परिमाप हमेशा वास्तविक धन संख्या (क्षेत्रफल का कोई मात्रक) में व्यक्त करते है जैसे 10से.मी.^{2}, 215से.मी.^{2}, 2कि.मी.^{2}, 3 से.मीहेक्टर्स आदि।

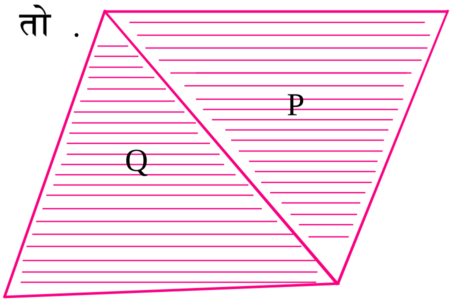
नोट : इसलिए किसी आकृति का क्षेत्रफल यह संख्या है तो आकृति द्वारा घिरे समतल के साथ संबंध रखती है। चित्र (A) के क्षेत्रफल को हम क्षेत्र (A) ऐसा लिख सकते है।

(i) दो समान आकृतियो के क्षेत्रफल समान होती है।

यदि A तथा B दो आकृतियाँ हो तो क्षे(A) = क्षे(B) होगा।

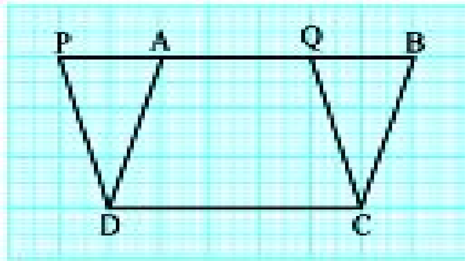
(ii) आकृति का क्षेत्रफल उसके सभी भागों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है। यह आकृति P और Q द्वारा बना है। तो .

क्षे (A) = क्षे (P) + क्षे (Q).



अब हम दो समांतर चतुर्भुज जो एक ही आधार पर और समानंतर रेखाओं के बीच में है उनके बीच के संबंध को जानने के लिएक्रियाकलाप करेंगे।

क्रियाकलाप



एक आरेख कागज कीजिए और आकृति में दर्शाये जैसे दो समांतर चतुर्भुज ABCD और PQCD उस पर खींचिए।

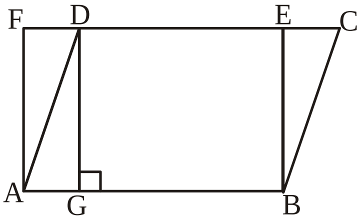
समांतर चतुर्भुज एक ही आधार DC समान समानांतर रेखाओं के बीच में है स्पष्टतः दोनों समानांतर चतुर्भुज में भाग PB तथा DC उभयनिष्ठ है यदि हम बता सकते है कि ΔDAP और ΔCBQ का क्षेत्रफल समान है तो हम यह कह सकते है कि क्षेत्र PQCD = क्षेत्र (ABCD).

उदाहरण 13 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज तथा ABEF एक आयत और DG लंब है AB पर

(i) क्षेत्र(ABCD) = क्षेत्र(ABEF)

(ii) क्षेत्र(ABCD) = AB × DG को सिद्ध कीजिए।

हल :



(i) चूँकि आयत एक समांतर चतुर्भुज है क्षे (ABCD) = क्षे(ABEF)

[∵ समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर और समान समानांतर रेखाओं के बीच स्थित]

(ii) हमें प्राप्त क्षे(ABCD) = क्षे(ABEF)

= AB × BE [∵ आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$]

= AB × DG (∵ DG ⊥ AB और DG = BE)

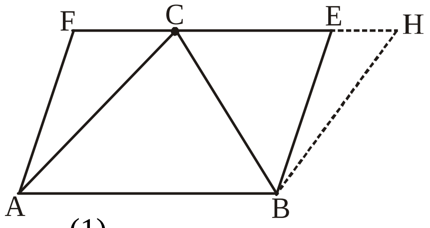
इसलिए क्षेत्रफल(ABCD) = AB × DG (DG को लंब कहेंगे।).

उपरोक्त उदाहरण से हम यह निष्कर्ष निकालते है। "समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी भुजा का गुणनफल और उस पर डाला गया लंब होगा।".

उदाहरण 14 : ΔABC तथा ⊔ ABEF एक ही आधार समान समानांतर रेखाओं के बीच AB तथा EF है तो सिद्ध कीजिए कि क्षे.(ΔABC) = $\frac{1}{2}$ ar(□ ABEF).

⊔ ABEF या || gm ABEF = समांतर चतुर्भुज ABEF

हल : B से BH || AE खींचिए जो FE को H पर मिलती है।.



∴ ABHC एक समांतर चतुर्भुज होगा जिसमें कर्ण BC, ABHC को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

इसलिए, क्षे(ΔABC) = क्षे(BCH)

= $\frac{1}{2}$ ar(□ ABHC) ..... (1)

लेकिन ⊔ ABHC तथा ⊔ ABEF एक ही आधार AB तथा समान समानांतर रेखाएँ AB तथा EF के मध्य स्थित है।

∴ क्षे(⊔ ABHC) = क्षे(⊔ ABEF) ..... (2)

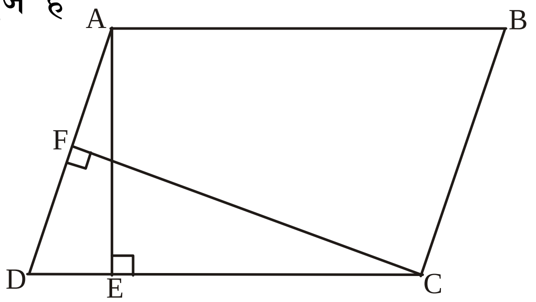
क्षे(ΔABC) = $\frac{1}{2}$ ar(□ ABHC) [(1) से]

= $\frac{1}{2}$ ar(□ ABEF) [∵ (2) से]

उपरोक्त उदाहरण में आपने क्या देखा? उसमें यह निष्कर्ष निकलता है कि ''एक ही आधार पर और समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

उदाहरण 15 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है. AE को DC तथा CF को AD पर लंब डाला गया है यदि AB = 10से.मी., AE = 8से.मी. तथा CF = 12 से.मी. AD ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है



AE $\perp$ DC और CF $\perp$ AD

AB = 10 से.मी., AE = 8से.मी.

तथा CF = 12 से.मी..

हमारे पास, ar (|| gm ABCD)

= DC $\times$ AE | $\because$ DC = AB (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें।

= AB $\times$ AE

= 10 $\times$ 8 = 80 से.मी.^{2} ...(1)

और क्षे(|| gm ABCD)

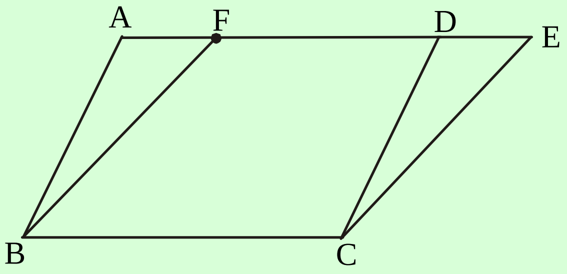
= AD $\times$ CF

$\Rightarrow$ 80 = AD $\times$ 12

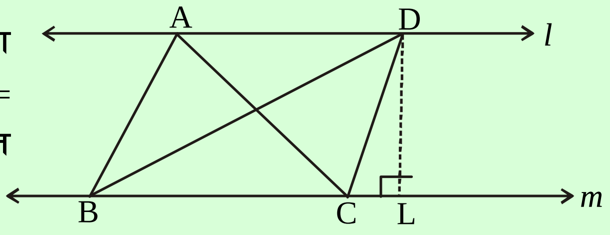
AD = $\dfrac{\cancel{80}^{20}}{\cancel{12}_{3}} = \dfrac{20}{3}$ से.मी.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दिए गए चित्र में समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 40से.मी.^{2} है यदि BC = 8से.मी., हो तो समांतर चतुर्भुज BCEF का लंब ज्ञात कीजिए।.



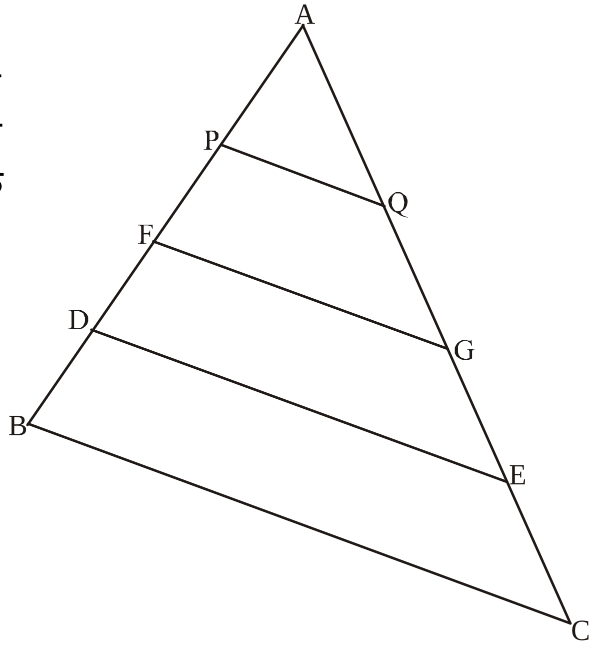
2. दिए गए चित्र में $l \parallel m$, ΔABC का क्षेत्रफल 18से.मी.^{2} है यदि DL = 4.5 से.मी. हो तो ΔBCD का संगत आधार ज्ञात कीजिए।



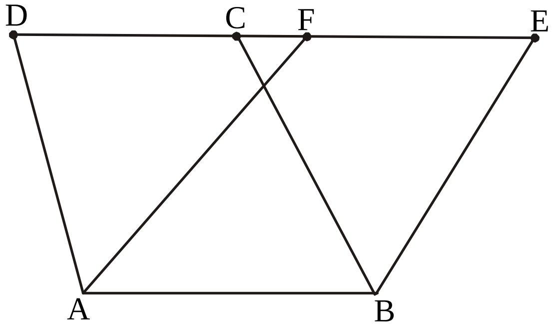
3. यदि ΔABC जो समांतर चतुर्भुज ABCD के कर्ण द्वारा बनता है उसका क्षेत्रफल 16से.मी.^{2} हो तो ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अभ्यास

1. एक चतुर्भुज के कोण $(x - 20)^0$, $(x + 20)^0$, $(x - 15)^0$ तथा $(x + 15)^0$ हो तो कोणों के मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. समांतर चतुर्भुज के दो आसन्न भुजाओं का अनुपात $5 : 3$ है और उसकी परिमिति 48 से.मी. हो तो उसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. लक्ष्मी कहती है कि, ''यदि चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे परलंब हो तो वह समचतुर्भुज होगा।'' क्या आप उसके कथन से सहमत है यदि हाँ तो औचित्य सिद्ध कीजिए।
4. ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ तथा $\angle A = \angle B = 30^0$ हो तो दूसरे दो कोणों को ज्ञात कीजिए।
5. दिए गए चित्र में , $PQ \parallel FE \parallel DE \parallel BC$. हो तो चित्र में दर्शाये गए सभी समलंब चतुर्भुजों के नाम लिखिए।

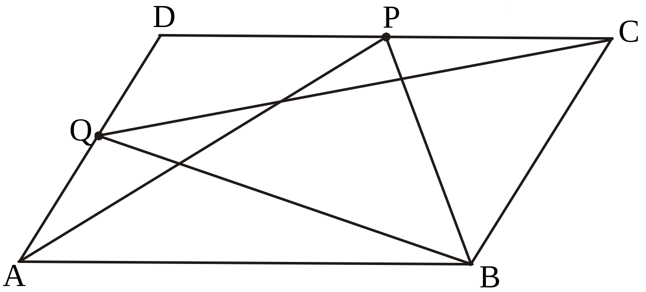


6. दिए गए चित्र में समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 36 से.मी.^{2} हो तो समांतर चतुर्भुज ABEF का लंब ज्ञात कीजिए यदि AB = 4.2 से.मी. है।



7. P तथा Q भुजा DC तथा AD भुजाओं के मध्य बिंदु है तो सिद्ध कीजिए।

क्षे(ΔAPB) = क्षे(ΔBQC).



8. यदि बिंदु E, F, G तथा H भुजाएँ AB, BC, CD तथा AD की मध्य बिंदुएँ है तो सिद्ध कीजिए क्षे(EFGH) = $\frac{1}{2}$ क्षे(ABCD).

सारांश

- एक चतुर्भुज, किसी समतल पर चार रेखाओं द्वारा बनी हुई सरल बंद आकृति है।
- चतुर्भुज में चारों कोणों का योग 360^0 होता है।
- दो समांतर चतुर्भुज जो एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित होते है उनके क्षेत्रफल समान होते है।
- दो त्रिभुज जो एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के मध्य स्थित हो तो उनके क्षेत्रफल समान होते है।

अध्याय
4.6
त्रिभुजों की समानता

4.6.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- समान चित्रों को पहचानकर उसे समझेंगे.
- समान त्रिभुजों के गुणधर्मों को समझकर प्रश्नों को हल करेंगे।
- मूल अनुपातिकता प्रमेय और इसके विलोम को सिद्ध कीजिए।
- पायथोगोरस प्रमेय को सिद्ध कर उसका अनुप्रयोग करेंगे।
- इन परिणामों के अनुप्रयोग से समान त्रिभुजों के प्रश्नों को हल करेंगे।

4.6.1 परिचय

ज्यामिती से संबंधित ज्ञात हमारे चारों ओर पाये जाने वाले विभिन्न प्रकार के आकारों तथा बनावटों के गुणधर्म के बारे में जानेंगे। ग्रीक गणितज्ञ ने समानता की धारणा से पृथ्वी का व्यास ज्ञात करने में उपयोगकिया। इसके उपयोग से सूर्य तथा चाँद की दूरी ज्ञात की। समानता का उपयोग कर नदी की चौडाई, वृक्षों की ऊँचाई तथा पर्वतो की ऊँचाई ज्ञात करने में होता है।

इस पाठ में हम समानता की धारणा, पायथोगरस प्रमेय तथा उनसे संबंधित विभिन्न परिणामों के बारे में जानेंगे।

समानता

निम्न चित्रों को देखिए इसके बारे में आप क्या जानते है उनके लंबाई तथा चौडाई के अनुपात को जानेंगे?

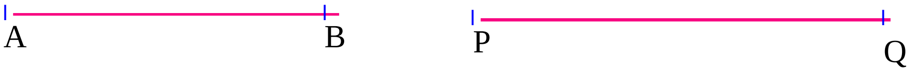
आपने देखा कि दोनों चित्र एक जैसे ही है लेकिन उनका आकार अलग है। आप अपने दैनिक जीवन में ऐसे कई आकारों को देखेंगे।

गणितज्ञ की भाषा में इसे क्या कहेंगे? गणित के अनुसार हम कह सकते है कि दो वस्तुएँ समान है। इसे हम कह सकते है।

"ऐसे वस्तुएँ जो समान दिखते है लेकिन विभिन्न आकार के होते है" उन्हें समरूप वस्तुएँ कहते है।

निम्न चित्रों द्वारा समानता की जाँच करेंगे।

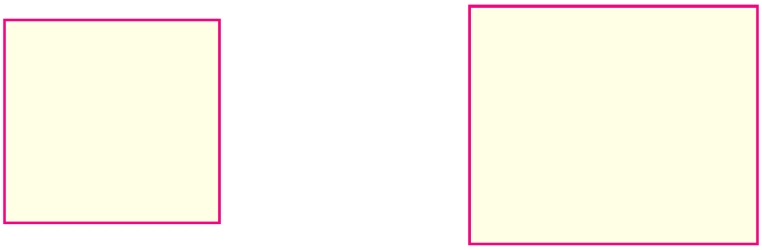
(i)



(ii)

(iii)

(iv)



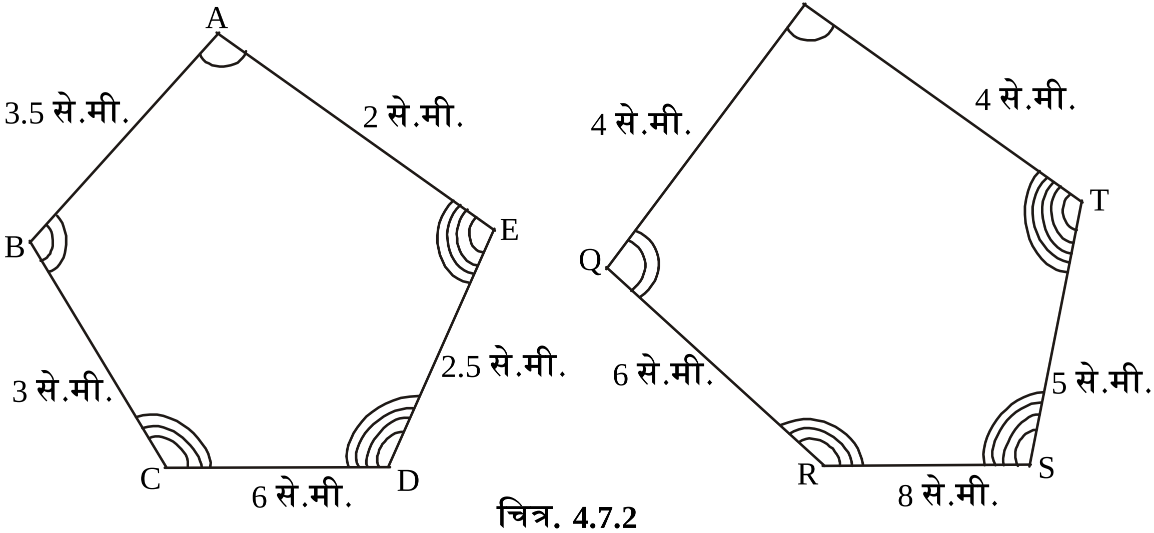
ऊपरोक्त चित्रों के बारे में आप क्या कहेंगे?

रेखा खण्ड, समबाहू त्रिभुज, वर्ग हमेशा समान होते है।

इसलिए समान चित्र हमेशा समरूप होते है लेकिन समरूप चित्र हमेशा समान होना जरूरी नही है।

समान समतल चित्र

चलिए अब हम साधारण पंचभुजी की भुजाओं तथा कोणों को भापेंगे आपके निरीक्षण लिखिए।



चित्र. 4.7.2

इसमें, $\angle A = \angle P, \quad \angle B = \angle Q, \quad \angle C = \angle R, \quad \angle D = \angle S$

तथा $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{TP}{EA} = \frac{1}{2}$

इसलिए दोनों पंचभुजी समरूपि है

अब, हम यह निष्कर्ष निकालेंगे।

> कोई भी दो बहुभुजी जिनकी संगत कोण तथा संगत भुजाएँ समानुपात में हो तो उन्हें समरूपी कहते है।

दो बहुभुजियों की समरूपी कह सकते है यदि वे निम्न शर्तों पर खरे उतरते है।.

(i) संगत कोण समान होने चाहिए

(ii) संगत भुजायें समानुपात में होने चाहिए

उसी प्रकार हम कह सकते है दो त्रिभुज समरूपी होंगे यदि उनके

(i) संगत कोण समान हो

(ii) संगत भुजाएँ समानुपात में हो

मानलो, ΔABC और ΔPQR समरूपी होंगे तो उन्हें

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (चिन्ह “~” को ‘‘से समरूप’’ है ऐसा पढते है).

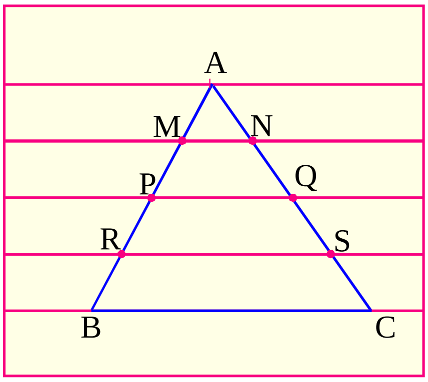
यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण समान होतो वे समकोणीय त्रिभुज कहते है दो संगत भुजाओं का अनुपात तथा समानकोण वाले त्रिभुज हमेशा समान होते है। इसे सिद्ध करेंगे।

मौलिक समानुपात प्रमेय को समझेंगे। हम क्रियाकलाप करेंगे।.

क्रियाकलाप1 :

एक रूपदार कागज लेकर उस पर कोई एक रेखा को आधार मान कर एक त्रिभुज खींचिए। ABC को कई रेखायें काटेगी।

उनमें से एक रेखा को चुनकर वह भुजा है वहाँ P और Q अंकित कीजिए।.



$\frac{AP}{PB}$ और $\frac{AQ}{QC}$ का अनुपात ज्ञात कीजिए आप क्या निरीक्षण करेंगे?

अनुपात समान है या नहीं इसकी जाँच कीजिए विभिन्न समानांतर रेखाएँ जैसे MN और RS पर प्रयत्न कीजिए।

अब अनुपात $\frac{AM}{MB}$, $\frac{AN}{NC}$ और $\frac{AR}{RB}$, $\frac{AS}{SC}$ को ज्ञात कीजिए।

जाँच कीजिए क्या ये समान है? आप क्या निष्कर्ष निकालेंगे? इसका निष्कर्ष ज्यामिती के प्रमेय की हम नीचे चर्चा करेंगे।

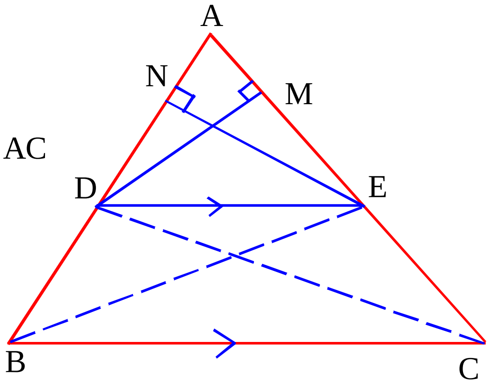
4.6.2 मौलिक समानुपात प्रमेय (थेल्स प्रमेय)

प्रमेय : 4.6.2 : त्रिभुज के एक भुजा के समांतर यदि रेखा खींची जाय जो अन्य दो भुजाओं के विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है तो वे दो भुजायें समान अनुपात में विभाजित होंगे।

दिया गया है: ΔABC में, $DE \parallel BC$ है जो भुजा AB और AC को D और E पर प्रतिच्छेद करती है।

दिया गया है: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना : B, E और C, D को मिलाकर $DM \perp AC$ और $EN \perp AB$.



उपपत्ति: ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AD \text{ x } EN$

$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$

इसलिए, $$\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ADE}{\text{क्षेत्रफल } \Delta BDE} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN}$$

$$= \frac{AD}{BD} \qquad \ldots (1)$$

फिर भी

$$\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AE \times DM$$

$$\Delta CDE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times EC \times DM$$

$$\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ADE}{\text{क्षेत्रफल } \Delta CDE} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM}$$

$$= \frac{AE}{EC} \qquad \ldots (2)$$

ध्यान दीजिए की ΔBDE और ΔCDE एक ही आधार DE और BC मध्य है।

इसलिए क्षेत्र ΔBDE = क्षेत्रΔCDE ...(3)

(1), (2) और (3) से हम प्राप्त करेंगे।

$$\Rightarrow \frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ADE}{\text{क्षेत्रफल } \Delta BDE} = \frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ADE}{\text{क्षेत्रफल } \Delta CDE}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

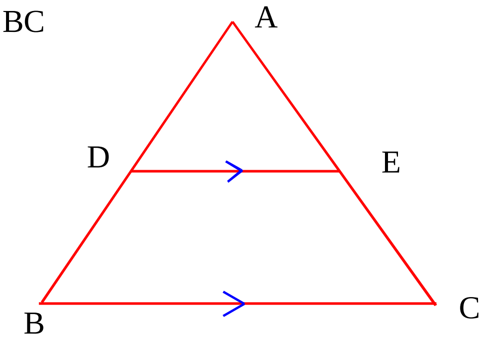
इस तरह सिद्ध किया गया।

परिणामी प्रमेय

यदि ΔABC में यदि रेखा DE समांतर है BC के तब वह AB को D पर तथा AC को E पर काटती हो तो

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

दिया गया है : ΔABC में एक रेखा $DE \| BC$



जिसमें, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

सिद्ध करना है ΔABC में

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (मौलिक अनुपात सिद्धांत द्वारा)

(i) देखिए, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

गुणन विलोम लेने पर

हमें प्राप्त होगा, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

दोनों ओर 1 जोडने पर

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{AE}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} AD + DB = AB \\ AE + EC = AC \end{array}}$$

इसलिए, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

(ii) फिर से देखिए $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

दोनों ओर 1 जोडने पर

हमें प्राप्त होगा, $\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

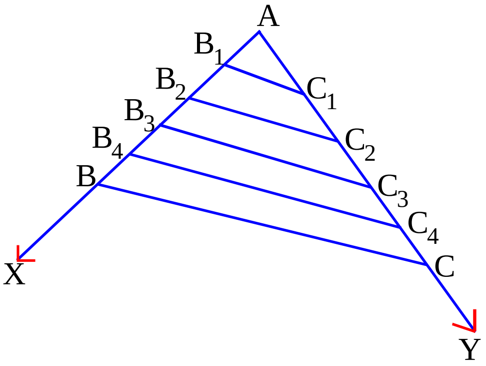
$$\frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC}$$

इसलिए, $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

क्या मौलिक अनुपात प्रमेय का विलोम सत्य होता है? इसकी जाँच करने के लिए हम एक क्रियाकलाप करेंगे।

क्रियाकलाप - 2

आपकी कापी में एक कोण खींचिए और किरण AX पर B_1, B_2, B_3, B_4 और B बिंदु अंकित कीजिए। जो समान दूरी पर है जिससे $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ से.मी. (लगभग)



इसी तरह किरण AY पर C_1, C_2, C_3, C_4 और C अंकित कीजिए जिससे $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2$ से.मी. (लगभग) B_1, C_1 और B, C को मिलाइए।

निरीक्षण कीजिए कि $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$. चाँद से मापिए

$\angle AB_1C_1$ = ________ $\angle AC_1B_1$ = ________

$\angle ABC$ = ________ $\angle ACB$ = ________

आपने देखा कि $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$

$\therefore B_1C_1 \| BC$ (संगत कोण समान है)

उसी प्रकार B_2C_2, B_3C_3 तथा B_4C_4. को जोडने पर

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ और $B_2C_2 \| BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ और $B_3C_3 \| BC$

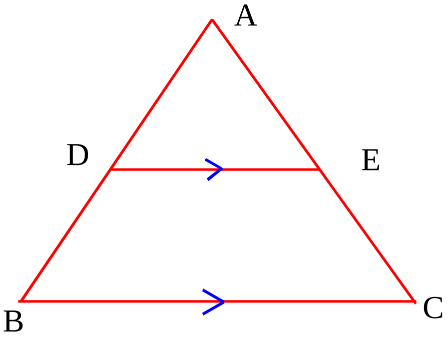
$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ और $B_4C_4 \| BC$

इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि यदि रेखा त्रिभुज के दो भुजाओं को समान अनुपात में काटती है तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है इसे मौलिक अनुपात प्रमेय का विलोम कहा जाता है।

ΔABC में यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, तो $DE \| BC$.

मौलिक अनुपात प्रमेय तथा उसके विलोम की सहायता से कुछ प्रश्नों को हल करेंगे।.

उदाहरण 1 : ΔABC में $DE \parallel BC$ और $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ तथा $AC = 8$ से.मी. हो तो, AE को ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में

$DE \parallel BC$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (थेल्स प्रमेय से)

लेकिन, $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$

इसलिए, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

$\because AE + EC = AC$

$\Rightarrow EC = AC - AE$

$\Rightarrow \frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$

$\because AC = 8$ से.मी. (दिया गया है)

$\Rightarrow \frac{AE}{8 - AE} = \frac{3}{5}$ (तिरछा गुणा से)

$5AE = 24 - 3AE$

$5AE + 3AE = 24$

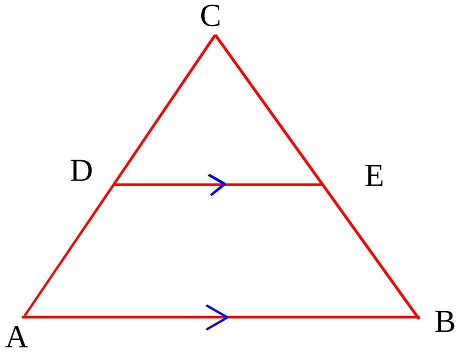
$8AE = 24$

$AE = \frac{24}{8} = 3$से.मी..

उदाहरण 2 : ΔABC में, $DE \parallel AB$, $AD = 8x + 9$, $CD = x + 3$

$BE = 3x + 4$, $CE = x$ हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में, $DE \parallel AB$



$AD = 8x + 9$

$CD = x + 3$

$BE = 3x + 4$

$CE = x$

मौलिक अनुपात प्रमेय से

हमें प्राप्त है, $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x+9}{x+3} = \frac{3x+4}{x}$$

$\Rightarrow x(8x + 9) = (x + 3)\ (3x + 4)$

$\Rightarrow 8x^2 + 9x = 3x^2 + 4x + 9x + 12$

$\Rightarrow 8x^2 - 3x^2 = 4x + 12$

$\Rightarrow 5x^2 = 4x + 12$

$\Rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow 5x(x - 2) + 6(x - 2) = 0$

$(x - 2)\ (5x + 6) = 0$

$$-12 \times 5 = -60$$
$$-60 = \boxed{-10} \times \boxed{6}$$
$$-4 = \boxed{-10} + \boxed{6}$$

$$\begin{array}{c|c} x-2=0 & 5x+6=0 \\ x=2 & 5x=-6 \\ & x=-\frac{6}{5} \end{array}$$

चूँकि x धनात्मक होना चाहिए

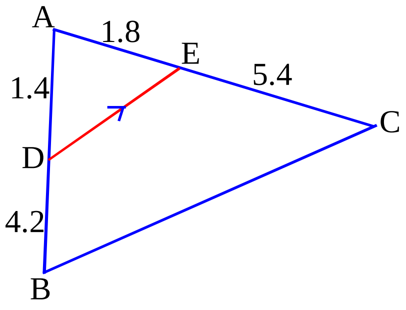
$\therefore \quad \boxed{x=2}$

उदाहरण 3 : यदि ΔABC में D और E भुजा AB और AC पर दो बिंदु इस प्रकार डाले गये है कि AB = 5.6 से.मी., AD = 1.4 से.मी., AC = 7.2 से.मी. तथा AE = 1.8 से.मी. हो तो क्या DE || BC के?

हल: दिया गया है

AB = 5.6 से.मी., AD = 1.4 से.मी.

AC = 7.2 से.मी., AE = 1.8 से.मी.



हमें ज्ञात है, DB = AB − AD

= 5.6 − 1.4 = 4.2 से.मी.

तथा EC = AC − AE

= 7.2 − 1.8 = 5.4 से.मी..

अब, $$\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3} \qquad ...(1)$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \qquad ...(2)$$

(1) और (2) से

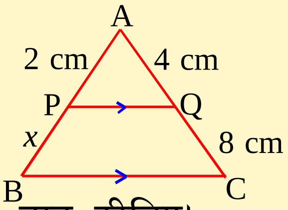
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

इसलिए मौलिक अनुपात प्रमेय के विलोम द्वारा हम सिद्ध कर सकते है DE समांतर है BC के अर्थात् DE || BC.

सिद्ध किया गया है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. ΔABC, यदि DE || BC, AD = x. DB = $x - 2$, AE = $x + 2$ और EC = $x - 1$ हो तो भुजा AB और AC की लंबाई ज्ञात कीजिए। (उत्तर: AB = 6 इकाई, AC = 9 इकाई)



2. चित्र में PQ || BC हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. ABCD चतुर्भुज में कर्ण एक दूसरे को “O” पर काटते है जिससे $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ हो तो ABCD एक समलंब चतुर्भुज है।

4.6.3 त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ

हम जानते है कि दो त्रिभुज समरूप होते है यदि उनके संगत कोण समान हो और संगत भुजायें समानुपात में हो।

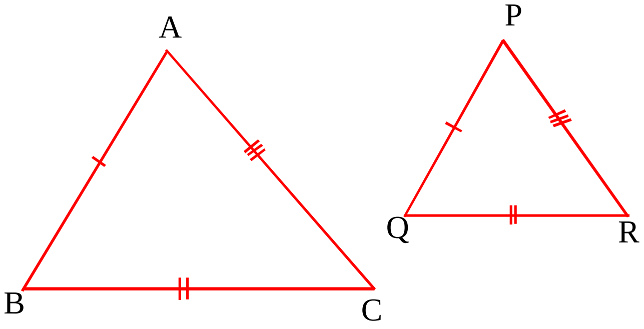
हम दिए गए त्रिभुज समरूप है या नहीं इसकी जाँच कैसे करेंगे?

इसलिए हमें त्रिभुज की समरूपता के कुछ नियमों को जानना होगा। आइए हम अब प्रयास करें कि दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी पर खरें उतरें।

निम्न कसौटियाँ त्रिभुज की समरूपता को दर्शाने के लिए काफी होंगे।

(i) AAA (कोण - कोण- कोण) या AA (कोण - कोण) .

यदि एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के समान हो तो वे दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।



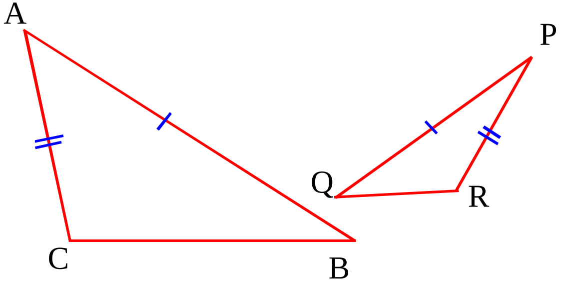
दिए गए चित्र में, $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$

इसलिए, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

(ii) SAS (भुजा - कौण - भुजा) समरूपता

यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं के समानुपात हो तथा उनका संगत कोण समान हो तो उन्हें समरूप त्रिभुज कहते है।

दिए गए चित्र में



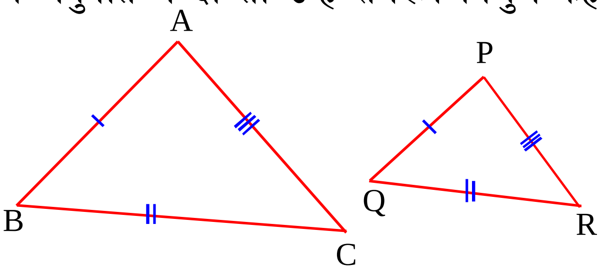
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$$

और $\angle A = \angle P$

इसलिए, $\Delta ABC \sim \Delta PQR.$

(iii) SSS (भुजा-भुजा-भुजा) समरूपता

दो त्रिभुजों की संगत भुजायें समान अनुपात में दो तो उन्हें समरूप त्रिभुज कहते है। दिए गए चित्र में



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$$

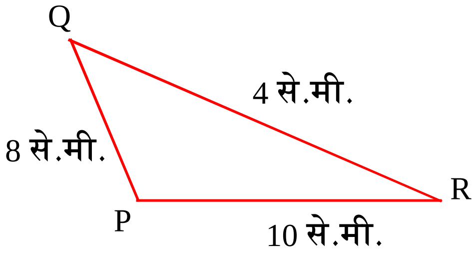
इसलिए, $\Delta ABC \sim \Delta PQR.$

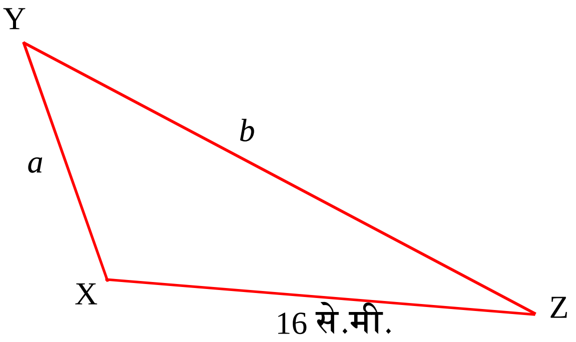
नोट : यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, के संगत भुजाएँ AB, BC तथा AC समानुपात होंगे PQ, QR तथा PR के संगत कोण A, B और C समान होंगे P, Q और R के क्या आप कह सकेंगे $\Delta BAC \sim \Delta PQR$? के? इस पर टिप्पणी कीजिए।

जैसा कि हम जानते है कि संगत शीर्ष एक सहीं क्रम में नहीं है।

कुछ और उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण 4: दिए गए चित्र में यदि $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$, हो तो a और b का मूल्य ज्ञात कीजिए।





हल : दिया गया है

$$\Delta PQR \sim \Delta XYZ$$

हमें ज्ञात है $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$ [$\because$ संगत भुजाएँ समानुपात में है]

$$\Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{4}{b} = \frac{10}{16}$$

PQ = 8 cm
QR = 14 cm
PR = 10 cm
XZ = 16 cm

हमारे पास है, $\frac{8}{a} = \frac{10}{16}$

आढा गुणा से

हमें प्राप्त होगा, $10a = 16 \times 8$

$$\therefore a = \frac{16 \times 8}{10} = \frac{128}{10} = 12.8 \text{ cm}$$

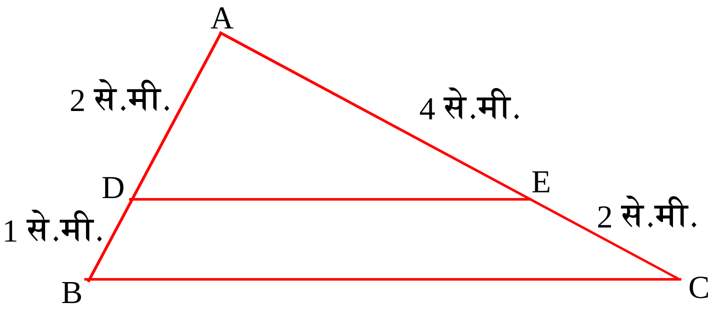
और $\frac{4}{b} = \frac{10}{16}$

आढे गुणनफल से

हमें प्राप्त होगा, $10b = 16 \times 4$

$$\therefore b = \frac{16 \times 4}{10} = \frac{64}{10} = 6.4 \text{ cm}$$

उदाहरण 5: दिए गए चित्र में सिद्ध कीजिए, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



हल : ΔADE और ΔABC में

हमें प्राप्त होगा, $\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+AB} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ ...(1)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE+EC} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad ...(2)$$

(1) और (2) से

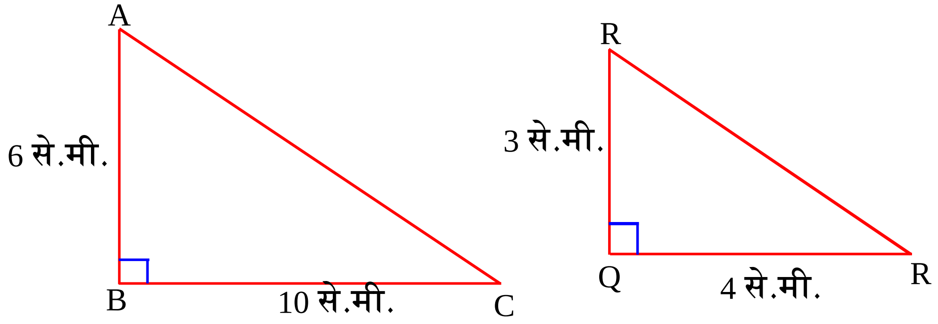
$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ और देखिए कि

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

SAS सर्वसमानता से

$\Delta ADE \sim \Delta ABC.$

उदाहरण 6: दिए गए चित्र में $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है या नहीं जाँच कीजिए।



हल: ΔABC तथा ΔPQR में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{6}{3} = 2 \qquad ...(1)$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \qquad ...(2)$$

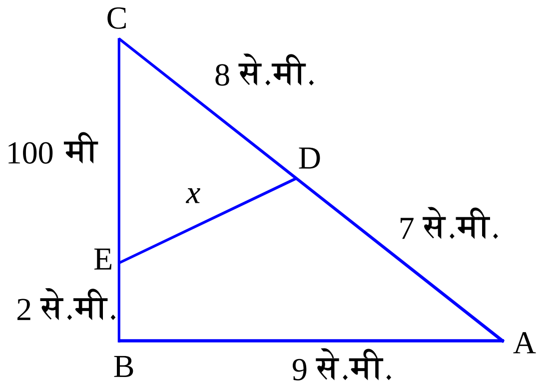
समीकरण (1) और (2) से

$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} \neq \frac{BC}{QR}$ $\left[\text{चूँकि} \quad 2 \neq \frac{5}{2}\right]$

हमने देखा कि संगत भुजाएँ समानुपात में नहीं है.

इसलिए, ΔABC तथा ΔPQR समान नहीं है।

उदाहरण 7 : दिए गए चित्र में, $\angle A = \angle CED$, हो तो $\Delta CAB \sim \Delta CED$. को सिद्ध कर x का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल : ΔCAB और ΔCED में

हमारे पास $\angle C$ उभयनिष्ठ कोण, $\angle A = \angle CED$

इसलिए, $\Delta CAB \sim \Delta CED$ (AA समानता अनुसार)

x का मूल्य ज्ञात करने के लिए :

हमें, $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$ | $\because$ चित्र से

$\Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{10+2}{8}$ | $\because CB = CE + EB$
$= 10 + 2 = 12$

$\Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{12}{8}$

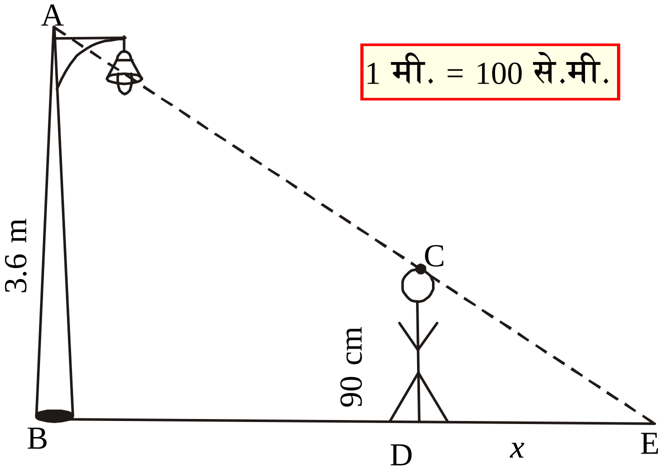
आढे गुणनफल से

हमें प्राप्त होगा, $12x = 9 \times 8$

$$x = \frac{9\times 8}{12} = \frac{72}{12} = 6 \text{ cm}$$

$$\therefore \boxed{x = 6 \text{ cm}}$$

उदाहरण 8: 90 से.मी. लंबाई वाला लडका एक बिजली के खंभे से दूसरी ओर 1.2 मी/से. से चलता है यदि बिजली के खंभे की लंबाई 3.6 मी हो तो 4 सेकेण्ड बाद परछाई की लंबाई ज्ञात कीजिए।



1 मी. = 100 से.मी.

हल : दिया गया है,

बिजली के खंभे की लंबाई

= AB = 3.6 मी.

= 3.6 × 100

= 360 से.मी.

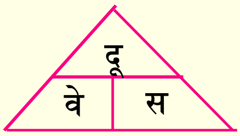
लडके की लंबाई

= CD = 90 से.मी.

वेग = 1.2 मी./ से.

= 120 से.मी./से.

$\because$ 1.2 m = 1.2 × 100



दूरी = वेग × समय

समय = 4 सेकेण्ड

लडके द्वारा तय की गई

4सेकेण्ड में = BD = 120 × 4

= 480 से.मी..

मानलो x परछाई की लंबाई है

अर्थात्, DE = x

x का मूल्य ज्ञात करने के लिए

चूँकि $\Delta ABE \sim \Delta CDE$

हमारे पास होगा, $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$ [संगत भुजाएँ समानुपाती होती है]

$\Rightarrow \frac{360}{90} = \frac{480 + x}{x}$

$\because$ BE = BD + DE

= 480 + x

$\Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{480 + x}{x}$ आढे गुणनफल द्वारा

$\Rightarrow 4x = 480 + x$ $\Rightarrow 4x - x = 480$

$$\Rightarrow 3x = 480$$

$$x = \frac{480}{3} = 160 \text{ से.मी.}$$

$$\boxed{1\text{ cm} = \frac{1}{100}\text{ m}}$$

$$= 160 \times \frac{1}{100} = \frac{16}{10}$$

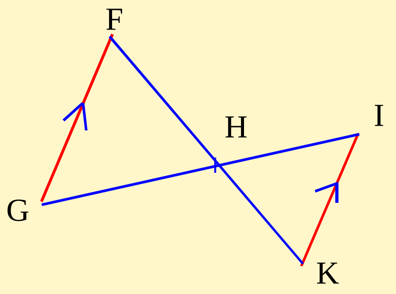
= 1.6 मी.

इसलिए उसके परछाई की लंबाई DE = 1.6 मी.

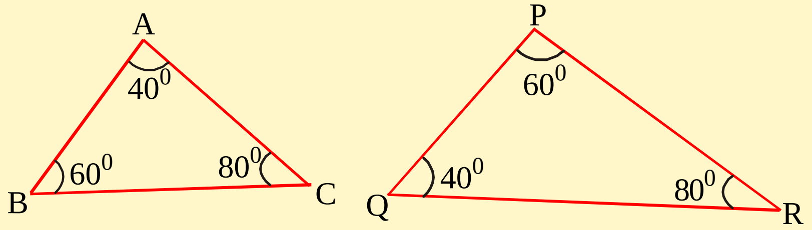
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. प्रत्येक चित्र में दिए गए त्रिभुज क्या समान है? यदि हाँ तो समानता की कसौटियों के नाम बता कर समानता को चिन्ह द्वारा दर्शाइए।

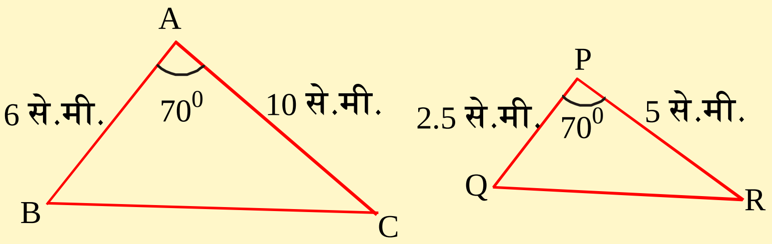
(i)



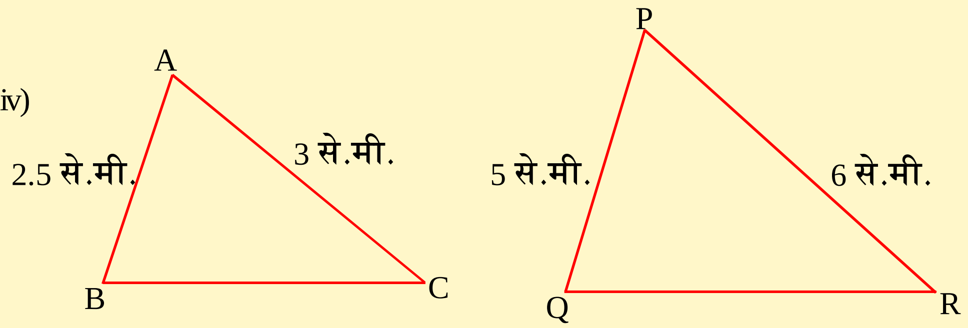
(ii)



(iii)

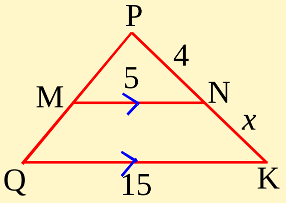


(iv)

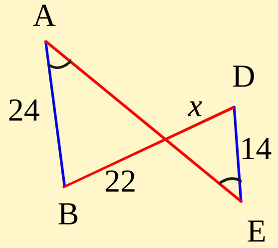


2. यदि त्रिभुज की जोडियाँ समान हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

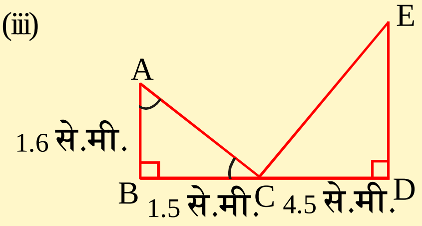
(i)



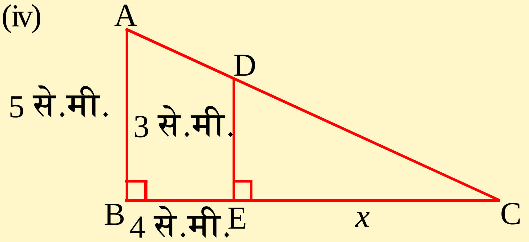
(ii)



(iii)



(iv)

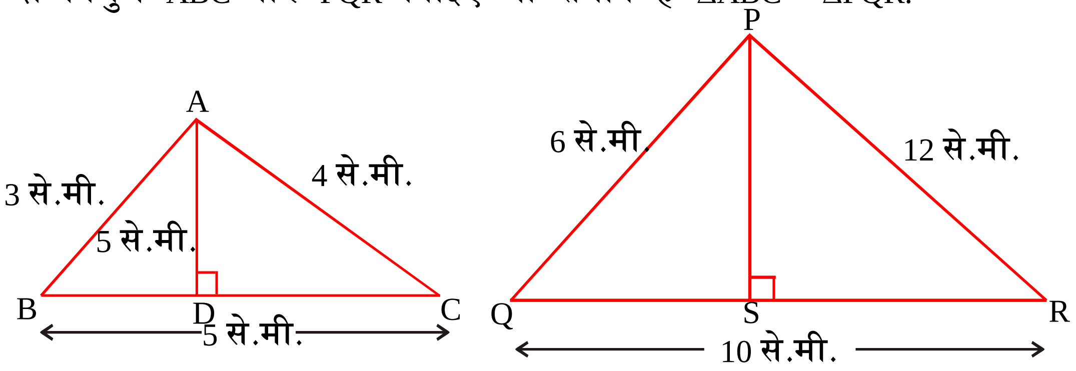


4.6.3 सर्वसमान त्रिभुजों के क्षेत्रफल

दो सर्वसमान त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते है। क्या आप अनुपात तथा क्षेत्रफल के मध्य कोई संबंध पाते है। अब हम सर्वसमान त्रिभुजों के क्षेत्रफल को समझने के लिए क्रियाकलाप करेंगे।

क्रियाकलाप 3

दो त्रिभुज ABC और PQR बनाइए जो समान है $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



AD तथा PS की लंबाईयों को मापिए

AD × BC तथा PS × QR का मूल्य ज्ञात कीजिए आपने देखा कि

$AD \times BC = BC^2$

$PS \times QR = QR^2$

तथा $AD \times BC = 2 \times \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$PS \times QR = 2 \times \Delta PQR$ का क्षेत्रफल

देखिए $\dfrac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta PQR} \quad \dfrac{\frac{1}{2} \times AD \times BC}{\frac{1}{2} \times PS \times QR}$

$$= \frac{AD \times BC}{PS \times QR}$$

$$= \frac{BC^2}{QR^2} \qquad \ldots(1)$$

चूँकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

हमारे पास $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$

(1) से

$$\therefore \quad \frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta PQR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

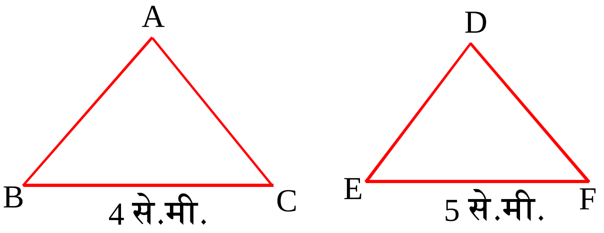
इसे हम इस प्रकार बता सकते है। "दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात, उनके संगत - भुजाओं के वर्गों के अनुपात समान होते है"।

स्वयंतथ्य

1. दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के अनुपात उनके संगत लंबो के वर्गों के अनुपात होता है.
2. दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत मध्यिका के वर्गों के अनुपात होता है।
3. दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत द्विखण्डों के वर्गों के अनुपात में होता है।
4. दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनके संगत परिमितों के वर्गों के अनुपात में होता है।

इन सभी को हम उदाहरणों द्वारा समझायेंगे।

उदाहरण 9 : ABC तथा DEF दो समरूपी त्रिभुज है जिससे BC = 4 से.मी., EF = 5से.मी. और ΔABC = 64 से.मी.^{2}. क्षेत्रफल हो तो ΔDEF का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : दिया गया

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

BC = 4 से.मी., EF = 5से.मी..

ΔABC का क्षेत्रफल= 64 से.मी.^{2}

हमारे पास है, $\dfrac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta DEF}$

$= \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$ [∵ दो समरूपी त्रिभुजों का क्षेत्रफल उसके संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के समान होता है।]

$$\Rightarrow \frac{64}{\text{क्षेत्रफल } \Delta DEF} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64}{\text{क्षेत्रफल } \Delta DEF} = \frac{16}{25} \qquad \Big| \because \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$$

(आढे गुणनफल से)

$$\Rightarrow \Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\cancel{64}^4 \times 25}{\cancel{16}_1}$$

$$= 4 \times 25$$

$$= 100 \text{ से.मी.}^2.$$

$\therefore$ ΔDEF का क्षेत्रफल = 100 से.मी.^{2}.

उदाहरण 10 : दो समरूपी त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्रमशः 121से.मी.^{2} तथा 64 से.मी.^{2} है। यदि पहले त्रिभुज की मध्यिका 12.1 से.मी. हो तो दूसरे त्रिभुज की संगत मध्यिका को ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ΔABC का क्षेत्रफल = 121 से.मी.^{2}

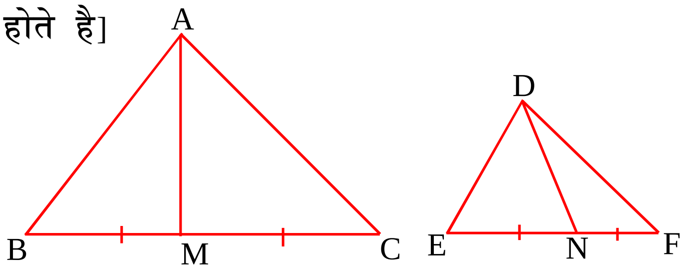
ΔDEF का क्षेत्रफल = 64 से.मी.^{2}

मध्यिका = AM = 12.1 से.मी.

मध्यिका = DN = ?

$$\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta DEF} = \left(\frac{AM}{DN}\right)^2$$

[दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात उनके संगत माध्यिकाओं के वर्गों के अनुपात के समानुपात समान होते है]



$$\Rightarrow \quad \frac{121}{64} = \left(\frac{12.1}{DN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \left(\frac{12.1}{DN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{11}{8} = \frac{12.1}{DN}$$

[आढे गुणनफल से]

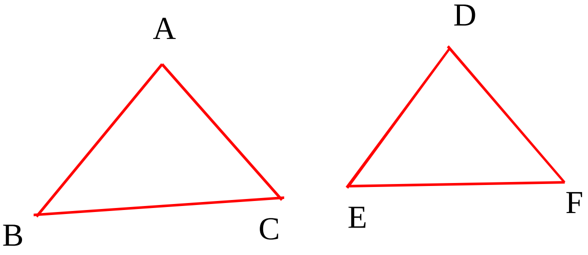
$$\Rightarrow \quad DN = \frac{\overset{1.1}{\cancel{12.1}} \times 8}{\cancel{11}_1}$$

= 8.8 से.मी..

$\therefore$ दूसरे मध्यिका की लंबाई = 8.8 से.मी.

उदाहरण 11: यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हो तो वे सर्वसमान होंगे सिद्ध कीजिए।

हल : दिया गया



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ हो तो

ΔABC का क्षेत्रफल

$= \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

चूँकि दो समरूपी त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान होंगे तो उनके संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात समान होगा।.

$$\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC}{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$= \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

चूँकि ΔABC का क्षेत्रफल

$= \Delta DEF$ का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = 1 \qquad \boxed{\Delta ABC \sim \Delta DEF}$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = DE^2, \; BC^2 = EF^2, \; AC^2 = DF^2$$

$$\Rightarrow \quad AB = DE, \; BC = EF, \; AC = DF \qquad \boxed{\begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ \Rightarrow \quad x = y; \; x, y > 0 \end{array}}$$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta DEF$ [भु.भु.भु (SSS) सर्वसमानता अनुसार]

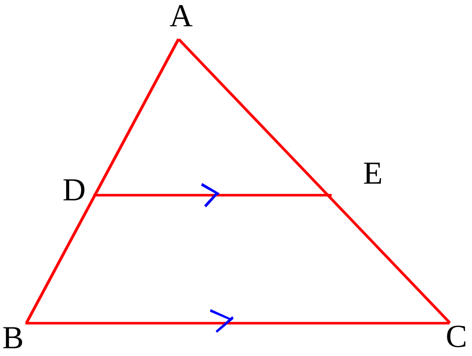
उदाहरण 12 : Δ ABC में, DE || BC और AB और AC को D तथा E पर क्रमशः प्रतिच्छेदित करता है यदि AD : DB = 2 : 3, हो तो ΔADE और ΔABC. के क्षेत्रफलों के अनुपात को ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया

ΔABC में, DE || BC

AD : DB = 2 : 3

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \qquad \text{...(1)}$$



मौलिक अनुपात प्रमेय के अनुसार

हमें प्राप्त है $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

(1) से

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

उनका गुणन विलोम से

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} = \frac{3}{2}$$

[$\because$ दोनों तरफ 1 पद मिलाने से]

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1 = \frac{3}{2} + 1$$

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE} = \frac{3+2}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{3+2}{2}$$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$ [∵ गुणन विलोम से]

∴ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ [∵ SAS नियम के अनुसार]

अब, $\frac{\text{क्षेत्रफल } \Delta ADE}{\text{क्षेत्रफल } \Delta ABC} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

∴ ΔADE का क्षेत्रफल : ΔABC का क्षेत्रफल.

= 4 : 25.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यदि दो समरूप त्रिभुज ABC और PQR की परिमितियाँ क्रमशः 36 से.मी^{2} तथा 24 से.मी. हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. यदि ΔABC, $XY \parallel AC$ तथा XY त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफलों में विभाजित करता है। तो $\frac{AX}{XB}$ को ज्ञात कीजिए।
3. एक समलंब चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel DC$ कर्ण एक दूसरे को “O” पर प्रतिच्छेदित करते है। यदि AB = 2CD, हो तो त्रिभुज AOB तथा COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. ΔABC की भुजाएँ BC, CA तथा AB के मध्य बिंदु क्रमशः D, E, F हो तो ΔDEF तथा ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. यदि ΔABC समरूप है ΔDEF के जिसमें BC = 3से.मी., EF = 4 से.मी. ΔABC = 54 से.मी.^{2}. हो तो ΔDEF. का क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।

4.6.4 पायथोगोरस प्रमेय

पायथोगोरस प्रमेय को प्राचीन ग्रीक गणितज्ञ पायथोगोरस के नाम पर रखा गया है। BC 570-495.

तीन संख्याएँ (a, b, c) को पायथोगोरस केत्रिक कहते है। यदि वे समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हो तो वे पायथोगोरस के त्रिक होंगे यदि केवल $c^2 = a^2 + b^2$.

चलिए अब हम एक क्रियाकला कर पायथोगोरस के त्रिक के बारे में जानेंगे।

क्रियाकलाप - 4

(i) कोई भी दो क्रमागत विषम संख्याएँ लो।

(ii) उनके गुणक विलोम को लिखकर जोडिए आप को संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में मिलेगी।

(iii) 2 को $\frac{p}{q}$ के हर में जोडिए जिससे $q + 2$. प्राप्त होगा।

(iv) अब संख्याओं को देखिए $p, q, q + 2$ क्या आप इनके बीच कोई संबंध स्थापित कर सकते है?

कोई भी तीन क्रमागत विषम संख्याओं को लेकर आपके उत्तर का निष्कर्ष निकालिए

नोट - 1, 3 ; 3, 5; 5, 7 ; 7, 9 क्रमागत विषम संख्याओं के उदाहरण है।

अब हम पायथोगोरस प्रमेय के बारे में और जानकारी प्राप्त करेंगे।

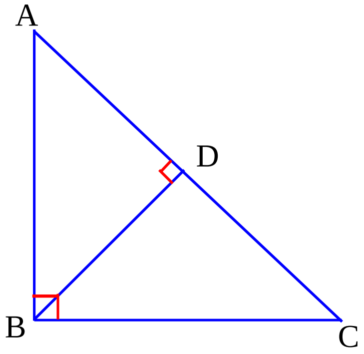
प्रमेय 4.6.3 : एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग उसकी लंबवत भुजाओं के वर्गों के योग के समान होता है।

दिया गया : एक समकोण त्रिभुज ABC है जिसका समकोण $\angle B = 90^0$.

सिद्ध करना है: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : $BD \perp AC$ खींचिए

चित्र में दिखाया गया



उपपत्ती : ΔABC तथा ΔADB से

$\angle A$ उभयनिष्ठ है

$\angle ABC = \angle BDA = 90^0$ | $\because BD \perp AC$

इसलिए, $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ | $\because$ AA स्वयंतथ्य अनुसार

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ | $\because$ आढे गुणनफल द्वारा

$\Rightarrow AB^2 = AC \times AD$ ... (1)

ΔABC और ΔBDC में

$\angle C$ उभयनिष्ठ है।

$\angle BDC = \angle ABC = 90^0$ [$\because$ BD $\perp$ AC]

इसलिए, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ | $\because$ AA स्वयंतथ्य से

$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$ |$\because$ आढे गुणनफल द्वारा

$\Rightarrow BC^2 = AC \times CD$ ... (2)

(1) और (2) को जोडने पर

$AB^2 + BC^2$

$= AC \times CD + AC \times AD$

$= AC\ (CD + AC)$ |$\because$ AC + CD = AC

$= AC \times AC$

$= AC^2$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

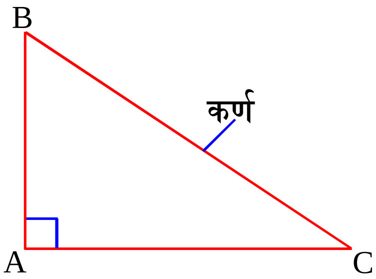
सिद्ध किया गया है।

पायथोगोरस प्रमेय को बौधायान नामक भारतीय गणितज्ञ ने पहले प्रस्तुत किया था।

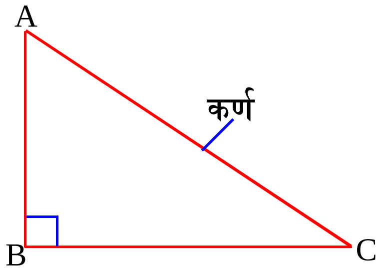
उपरोक्त प्रमेय का विलोम क्या होगा?

इसे हम ऐसे दर्शाया जा सकता है ''एक त्रिभुज में यदि उसकी एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के समान हो, तो उसके पहले वाली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होगा और वह त्रिभुज एक समकोण-त्रिभुज होगा।

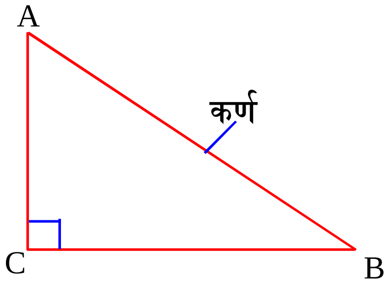
नोट 1 : ΔABC में यदि $AB^2 + CA^2 = BC^2$, हो तो $\angle A = 90^0$.



2. ΔABC में यदि $AB^2 + BC^2 = AC^2$, हो तो $\angle B = 90^0$.



3. ΔABC में यदि, if $AC^2 + BC^2 = AB^2$, हो तो $\angle C = 90^0$.



अब हम पायथोगोरस प्रमेय तथा उसके विलोम पर आधारित कुछ उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण 13 : एक 25 मी. लंबी सीढि एक इमारत के 20 मी. ऊँचे खीडकी को स्पर्श करता है तो सीढि इमारत की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया

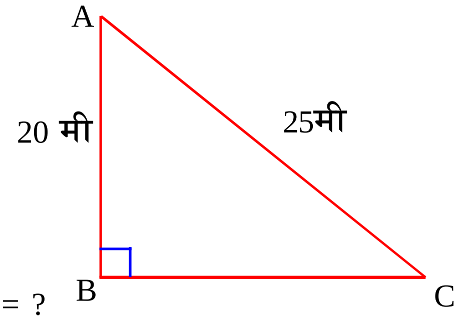
सीढि की लंबाई

= AC = 25 मी

खीडकी की ऊँचाई

= AB = 20 मी.

सीढि की से इमारत की दूरी = BC = ?



ΔABC में, $\angle B = 90^0$

पायथोगोरस प्रमेय द्वारा

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{a^2} &= \sqrt{a\times a}\\ &= a\ ;\ a>0\end{aligned}}$$

$\Rightarrow (25)^2 = (20)^2 + BC^2$

$\Rightarrow 625 = 400 + BC^2$

$\Rightarrow BC^2 = 625 - 400$

$= 225$

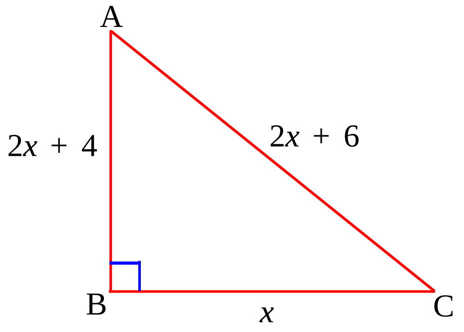
$BC = \sqrt{225} = \sqrt{15\times 15}$

= 15 मी.

इसलिए सीढि से इमारत की दूरी = 15 मी.

उदाहरण 14 : एक समकोण त्रिभुज का कर्ण उसकी छोटी भुजा के दुगुने से 6मी. अधिक है। यदि तीसरी भुजा कर्ण से 2मी. छोटी है तो त्रिभुज की भुजायें ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो सबसे छोटी भुजा



$BC = x$

हमारे पास कर्ण

$= AC = 2x + 6$

तीसरी भुजा $= AB = 2x + 6 - 2$

$= 2x + 4$

पायथोगोरस प्रमेय द्वारा

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (2x + 6)^2 = (2x + 4)^2 + (x)^2$ $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$\Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(6) + (6)^2$

$\Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(4) + (4)^2 + x^2$

$\Rightarrow 4x^2 + 24x + 36 = 4x^2 + 16x + 16 + x^2$

$\Rightarrow x^2 + 16x + 16 = 24x + 36$

$\Rightarrow x^2 + 16x - 24x + 16 - 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 2x + 20 = 0$ $\quad -20 = \boxed{-10} \times \boxed{2}$

$\Rightarrow x(x - 10) + 2(x - 10) = 0$ $- 8 = \boxed{-10} \times \boxed{2}$

$\Rightarrow (x - 10) + (x + 2) = 0$

$x - 10 = 0 \quad x + 2 = 0$

$\boxed{x = 10} \quad \boxed{x = -2}$

x का मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता

$\therefore \boxed{x = 10}$

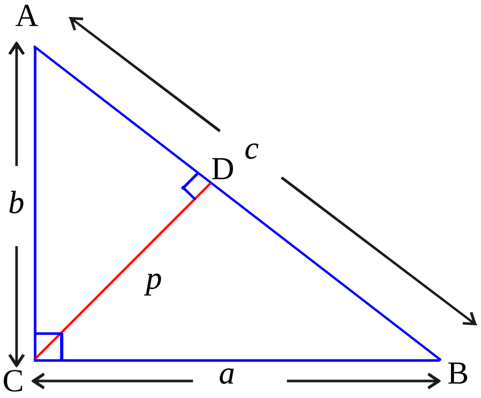
अब भुजाएँ $x,\ 2x + 4,\ 2x + 6$

$\Rightarrow 10,\ 20 + 4,\ 20 + 6$

$\Rightarrow 10,\ 24,\ 26.$

उदाहरण 15 : C पर समकोण बनाते हुए ABC एक समकोण त्रिभुज है मान लीजिएBC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ और मान लीजिए p, C से AB पर के लंब की लंबाई है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

हल :



CD $\perp$ AC पर खींचिए

और CD $= p$

ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$= \frac{1}{2} \times c \times p$$

$$= \frac{1}{2} c\,p \qquad \text{.... (1)}$$

ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2} ab \qquad \text{... (2)}$$

(1) और (2) से

$$\Rightarrow \frac{1}{2} cp = \frac{1}{2} ab$$

$$cp = ab \qquad \text{... (1)}$$

पायथोगोरस प्रमेय द्वारा

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$\because$ (1) समीकरण से

$$c^2 = b^2 + a^2$$

$$c = \frac{ab}{p}$$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2$$

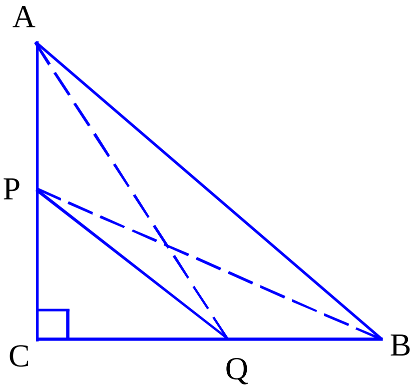
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2}$$

$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ सिद्ध किया गया है।

उदाहरण 16 : ΔABC में P तथा Q भुजाएँ CA तथा CB के मध्य बिंदु है। जिसमें C पर समकोण बनता है सिद्ध कीजिए $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$.

हल : ΔAQC में समकोण C पर है.

$\Rightarrow AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ...(1)



ΔBPC में समकोण C पर

$\Rightarrow BP^2 = BC^2 + CP^2$ ...(2)

ΔABC में समकोण त्रिभुज C पर है

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ ...(3)

(1) और (2) को जोडने पर

$AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

दोनों ओर 4 से गुणा करने पर

$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$

$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$ | $\because$ P, Q मध्य बिंदु है

$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2$ | $\because 2QC = BC$

$= 5AC^2 + 5BC^2$ | $\because 2CP = AC$

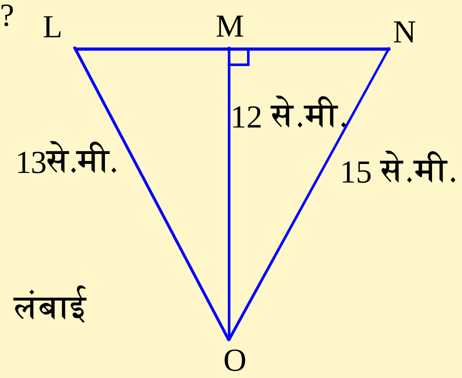
$= 5(AC^2 + BC^2)$ | $\because$ समीकरण (3) से

$= 5AB^2$;

सिद्ध किया गया है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

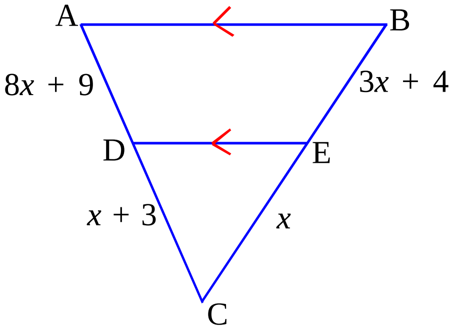
1. क्या किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 5से.मी., 12 से.मी. 13 से.मी. हो सकती है?
2. एक 20 फीट लंबी सीढि एक दिवार को 16 फीट की ऊँचाई पर स्पर्श करती है तो सीढि से दीवार की दूरी कितनी होगी?
3. दिए गए चित्र में LM, MN तथा LN को ज्ञात कीजिए।



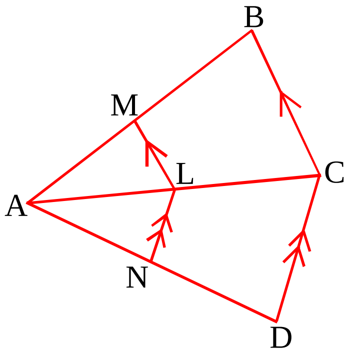
4. “a” इकाई वाली भुजा के वर्ग के कर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए।
5. PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज में $\angle Q = 90^0$, हो तो $PR^2 = 2PQ^2$.सिद्ध कीजिए।

अभ्यास

1. साई ने कहा ‘‘विभिन्न त्रिज्याओं वाले वृत्त समरूप होते है’’ क्या आप उससे सहमत है? आपके उत्तर के औचित्य को सिद्ध कीजिए।
2. दिए गए चित्र में x को कौनसे मूल्य $DE \parallel AB$ बनाते है।



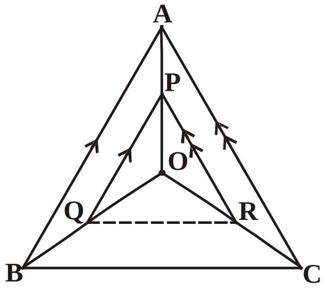
3. दिए गए चित्र में $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD}$.



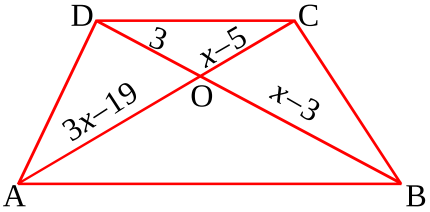
4. समलंब चतुर्भुज ABCD में AB || DC और उसके कर्ण एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते है बताइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

5. ΔPQR में E और F, PQ तथा PR के मध्य बिंदु है PE = 3.9 से.मी., EQ = 3से.मी. PF = 3.6 से.मी. और FR = 2.4 से.मी. हो तो बताइए EF || QR है या नहीं।

6. दिए गए चित्र में A, B और C बिंदुएँ OP, OQ और OR पर क्रमशः है जिसमें AB || PQ और AC || PR, हो तो बताइए BC || QR. होगा।

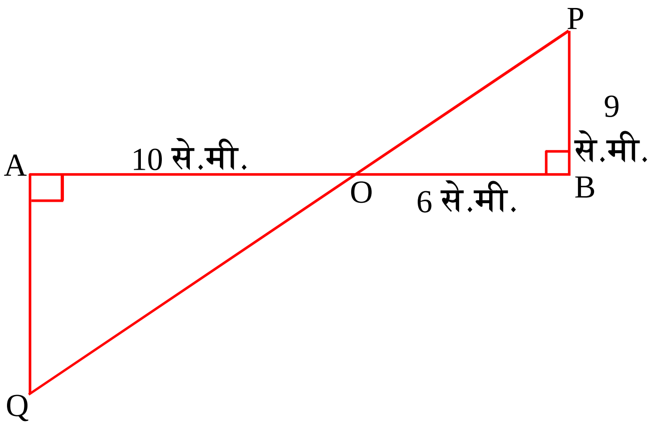


7. दिए गए चित्र में AB || DC हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।.

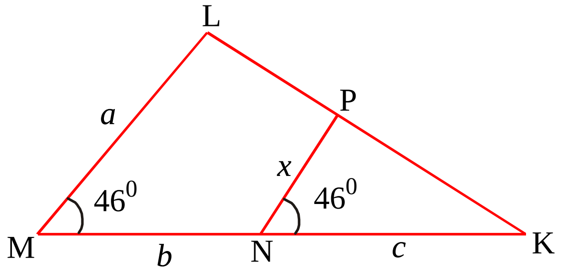


8. दो स्तंभों की ऊँचाई “a” मीटर तथा ”b”मीटर दोनो की शिखरों को जोडने वाली रेखा हो तो उनके नीचे की दूरी $\frac{ab}{a+b}$ मीटर होगी।

9. दिए गए चित्र में QA और PB लंब है AB पर यदि यदि AO = 10 से.मी., BO = 6 से.मी. और PB = 9 से.मी. हो तो AQ का मूल्य ज्ञात कीजिए।



10. दिए गए चित्र में "x" को a, b और c के पदों में दर्शाइए।.



11. सिद्ध कीजिए कि वर्ग एक भुजा पर डाले गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके कर्ण पर डाले गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

12. एक 13 मी लंबी सीढि 12 मी. ऊँचाई पर खिडकी को स्पर्श करती है सड़क की दूसरी ओर से खिडकी को 5मी. की ऊँचाई पर स्पर्श करता हो तो सडक की चौडाई ज्ञात कीजिए।

13. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज में $AC = BC$, हो और यदि $AB^2 = 2AC^2$, हो तो सिद्ध कीजिए कि वह समकोण त्रिभुज है।

14. यदि ΔABC में यदि AD एक मध्यिका हो तो सिद्ध कीजिए $(AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

15. एक समबाहु त्रिभुज ABC, में एक बिंदु BC पर इस प्रकार डाला गया कि $BD = \frac{1}{3} BC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$.

सारांश

- दो चित्र जिसकी आकृति समान है लेकिन परिमाण समान नहीं है, वे समरूपी कहलाते है।
- दो बहुभुज जिसकी भुजाओं की संख्या समान है समरूप होते है, यदि उनके संगत कोण समान हो और उनके संगत की भुजाएँ समान अनुपात में हो।
- दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि

  (i) उनके संगत कोण समान हो

  (ii) उनके संगत की भुजाएँ समान अनुपात में हो

- त्रिभुज की एक भुजा की समांतर रेखा खींचेगे तो वह दूसरी दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
- यदि एक रेखा त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समानांतर होगी।
- दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात, उनकी संगत भुजाओं के वर्ग के अनुपात के समान होता है।
- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के समान होता है।
- एक त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के समान है तब पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है। (पायथोगोरस प्रमेय का विलोम).

अध्याय 4.7

वृत्त

4.7.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

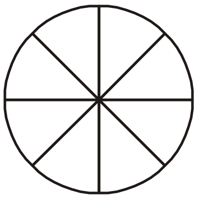
इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- वृत्त की परिभाषा देंगे.
- वृत्त से संबंधित सभी पदों की उदाहरणें देंगे
- एक केंद्रीय वृत्त तथा सर्वसमान वृत्त की परिभाषा देकर समझायेंगे
- वृत्त से संबंधित पद जैसे ज्या, चाप, खण्ड आदि को पहचान कर समझायेंगे
- वृत्त की ज्या को प्रयोगात्मक विधि से जाँच करेंगे।
- प्रश्नों को हल करने के लिए प्रमेयों का उपयोग करेंगे।

4.7.1 परिचय

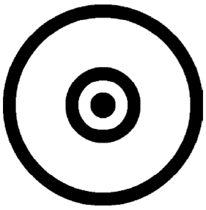
हम हमारे दैनिक जीवन में बहुत सी गोल आकार की वस्तुएँ जैसे सिक्के, चूडियाँ, घडीयाँ, पहिए, काम्पाक्ट डिस्क (CD), अक्षर ‘O’ सभी आकार में वृत्ताकार है। घडी के काँटे द्वारा तय किया गया पथ वृत्थ कहलाता है।

रूपया



पहिया

चूडी

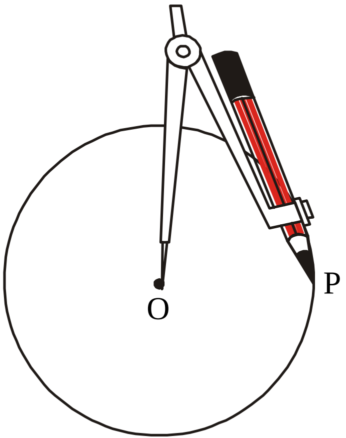


CD

4.7.2 वृत्त से संबंधित पद

एक परकार लेकर उसके पेंसिल होल्डर में पेंसिल लगाइए और स्क्रू या पेंच कसिए। आरेख-कागज पर बिंदु ‘O’ चिन्हित कीजिए। ‘O’ पर परकार का नुकीला बिंदु दृढ़ कीजिए। परकार को बिंदुपर दृढता से घुमाइए जिससे वृत्त प्राप्त होगा। (चित्र- 1) को देखिए। आपने एक निश्चित बिंदु ‘O’से समान दूरी वाले सभी बिंदुओं को खींचिए। यह आपको निम्न परिभाषा प्रदान करेगा।

एक तल पर सभी बिंदुओं का समूह जो एक बिंदु से निश्चित दूरी पर स्थित होते है उन्हें वृत्त कहते है।



चित्र. - 1

उस निश्चित बिंदु को वृत्त का केंद्र कहते है। तथा निश्चित दूरी को ''त्रिज्या'' कहते है जिसे "r" से दर्शाया जाता है।

चित्र - 1 में 'O' को वृत्त का केंद्र तथा OP को वृत्त की त्रिज्या कहते है।

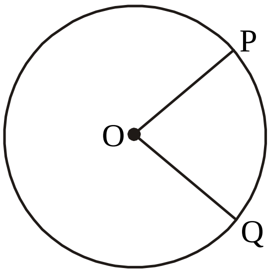
$\therefore$ त्रिज्या $r = OP$

नोट : वृत्त के केंद्र से वृत्त पर किसी भी बिंदु की दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते है। त्रिज्या को दो दृष्टियों से उपयोग में लाया जाता है एक दृष्टि से रेखा खण्ड तथा दूसरी दृष्टि से लंबाई।

क्रियाकलाप - 1

एक वृत्त (चित्र. 2) को किसी एक त्रिज्या से उतारिए जो OP तथा OQ जो समान है।

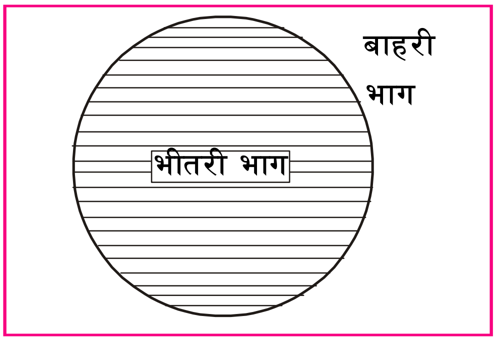
$OP = OQ = r$



चित्र. - 2

। वृत्त की सभी त्रिज्यायें समान होती है।

एक बंद ज्यामितीय आकृति तल को तीन भागों में विभाजित करता है। चित्र के भीतर, चित्र का बाहरी भाग तथा चित्र 1, चित्र 3 में छायांकित भाग वृत्त का भीतरी भाग, वृत्त की परिसीमा, वृत्त का अछायांकित भाग जो वृत्त का बाहरी भाग है।



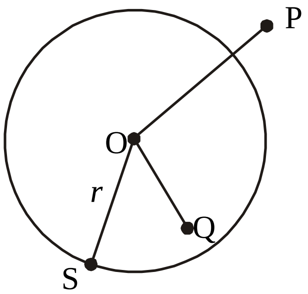
चित्र. 3

क्रियाकलाप - 2

1. चित्र-4 में वृत्त के भीतरी भाग में बिंदु Q को लीजिए OQ तथा को मापिए देखिए $OQ < r$. वृत्त के भीतरी भागों को ''वृत्त का भीतरी भाग'' कहते है।

2. अब बिंदु p लिजीए जो वृत्त के बाहरी भाग में (चित्र 3.6.4). OP को मापिए और $OP > r$ को ज्ञात कीजिए। वृत्त का बाहरी भाग को ''वृत्त का बाह्य भाग'' कहते है।

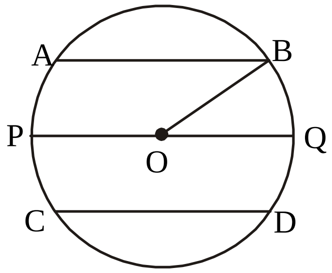
3. बिंदु 'S' वृत्त पर स्थित है($OS = r$)



चित्र. - 4

ज्या (Chord)

एक रेखा खण्ड जो वृत्त पर दो बिंदुओं को जोडती हो उसे ज्या कहती है चित्र 5 में AB, PQ और CD तीन ज्यायें वृत्त के केंद्र 'O' तथा त्रिज्या 'r' है। ज्या PQ केंद्र बिंदु 'O' सो गजिरता है। ऐसी ज्या को ''व्यास'' कहते है इसे साधारणतया'd' से दर्शाया जाता है।.



चित्र - 5

क्रियाकलाप - 3

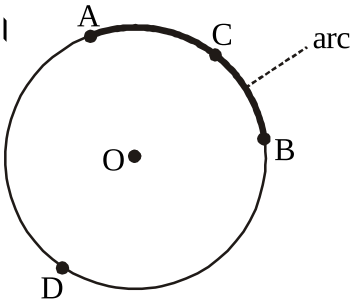
चित्र -5 में AB, PQ, CD, OB की लंबाईयों को मापिए देखिए PQ की लंबाई 2OB. के समान होगी। $d = 2r$

और $PQ > CD$ और $PQ > AB$

अर्थात् ''व्यास'' वृत्त की सबसे बडी ज्या होती है।

चाप (Arc)

वृत्त की परिधि के भाग को चाप कहते है चित्र 6 में ACB चाप है जिसे $\overset{\frown}{ACB}$ से दर्शाया जाता है।



चित्र - 6

चित्र – 6 में ACB को लघुचाप तथा ADB को गुरू चाप कहते है।

अर्धवृत्त

चित्र -7 में बिंदु P और Q व्यास के दो अंतिम बिंदु है जो वृत्त को समान दो चापों में विभाजित करता है जिसे ''अर्धवृत्त'' कहते है।

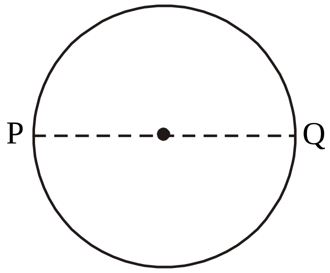
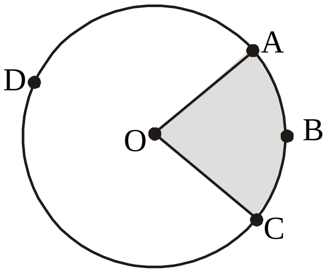


Fig. 7

वृत्त क्षेत्र (Sector)

क्षेत्र जो वृत्त की चाप तथा दो त्रिज्याओं से घिरा होता है उसे वृत्त क्षेत्र कहते है। चित्र 8 में छायांकित भाग जो ABC से बनता है और अछायांकित भाग जो ADC से वृत्त क्षेत्र बनता है।.

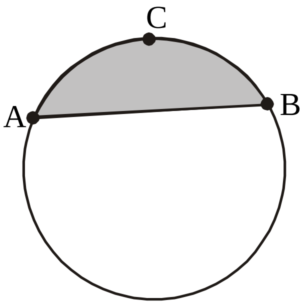


चित्र - 8

चित्र - 8 में ∠AOC को "वृत्त क्षेत्र का कोण" कहते है।

वृत्त खण्ड (Segment)

वृत्त खण्ड वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है उसे खण्ड कहते है क्षेत्र जो ज्या तथा लघु चाप द्वारा बनने वाले भाग को लघु वृत्तखण्ड तथा ज्या तथा गुरू चाप द्वारा बनने वाले भाग को गुरू वृत्तखण्ड कहते है। चित्र- 9 में छायांकित भाग ACB को लघु वृत्त खण्ड तथा ADB को गुरू वृत्त खण्ड कहते है।

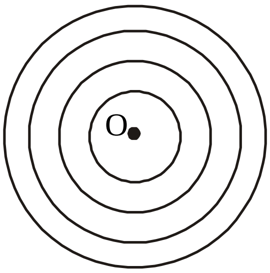


चित्र - 9

वृत्त की पूर्ण लंबाई को उसकी "परिधी" कहते है।

संकेंद्री वृत्त (Concentric Circles)

वृत्त जिनके केंद्र एक और विभिन्न त्रिज्यायें हो उन्हें "संकेन्द्री वृत्त" कहते है। (चित्र. 10)



चित्र - 10

सर्व समान वृत्त

सभी वृत्त जीनकी त्रिज्यायें समान होते है वे एक दूसरे के सर्वसमान वृत्त कहते है।

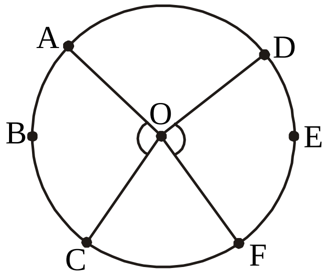
अर्थात् सभी सर्वसमान वृत्त के परिमाप समान होते है और वे एक दूसरे को पूर्णतया ढकते है।

4.7.3 वृत्त की दो चाप तभी सर्वसमान होते है जब उनके द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण समान होता है

क्रियाकलाप - 4

1. केंद्र “O” पर वृत्त खींचिए।
2. चित्र -11 में यदि चाप ABC = चाप DEF हो तो ∠AOC = ∠DOF

   अर्थात्



चित्र. - 11

* वृत्त के दो चाप सर्वसमान होंगे यदि उनके द्वारा केंद्र पर बनने वाले कोण समान होंगे।

4.7.4 वृत्त के दो चाप सर्वसमान होंगे यदि उनके संगत ज्यायें समान होंगी

क्रियाकलाप - 5

1. केंद्र “O” से एक वृत्त खींचिए
2. चित्र - 12 में दर्शायेनुसार समान ज्यायें खींचिए

   AB = CD

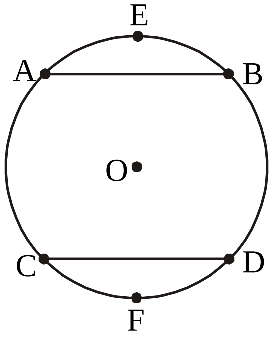
   हो तो

   चाप AEB = चाप CFD

   और उसका विलोम

   यदि चाप AEB = चाप CFD

   फिर AB = CD



चित्र. - 12

* वृत्त के दो चाप सर्वसमान होंगे यदि उनके संगत ज्यायें समान होती है।

4.7.5 वृत्त की समान ज्याएँ केंद्र पर समान कोण बनाते है इसका विलोम यदि वृत्त के केंद्र पर उनके ज्याओं द्वारा बने हुए कोण बराबर हो तब ज्यायें बराबर होती है।

क्रियाकलाप - 6

1. केंद्र “O” से एक वृत्त खींचिए।

2. चित्र - 13 में दर्शाए अनुसार दो समान ज्यायें AB, CD खींचिए।

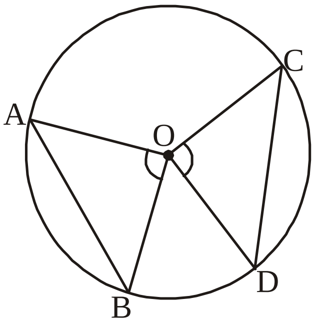
3. OA, OB, OC तथा OD को मिलाइए।

4. $\angle AOB$ तथा $\angle COD$ को मापिए।

हम देखेंगे कि $\angle AOB = \angle COD$

विलोम यदि $\angle AOB = \angle COD$

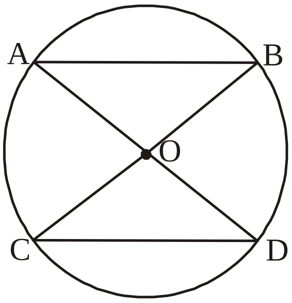
$AB = CD$ होगा।



चित्र - 13

* वृत्त की समान ज्यायें केंद्र पर समान कोण बनाते है विलोम यदि वृत्त के केंद्र पर उनकी ज्याओं द्वारा बनाए गए कोण समान हो तब ज्याएँ समान होंगी।

उदाहरण. 1 : यदि चित्र- 14 में $AB = CD$ हो तो सिद्ध कीजिए $AC = BD$



चित्र. - 14

हल : चित्र 3.6.14 में समान चाप है जो समान ज्याओं AB तथा CD से बनते है।

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}.$

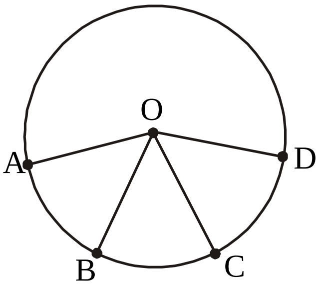
$\therefore \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$

$\therefore \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DBC}$

$\therefore$ ज्या AC = ज्या BD ($\because$ चाप सर्वसमान, समान ज्यायें)

सिद्ध किया गया है।

उदाहरण 2 : चित्र- 15 में, चाप AB = चाप BC तथा $\angle AOB = 50^0$ $\angle COD = 40^0$ हो तो $\angle AOD$. ज्ञात कीजिए।



चित्र - 15

हल : चाप AB = चाप BC

$\therefore \angle AOB = \angle BOC$ ($\because$ 4.7.3)

$\therefore \angle BOC = 50^0$

$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$

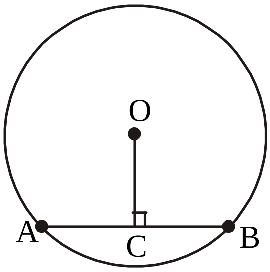
$= 50^0 + 50^0 + 40^0$

$= 140^0$

$\therefore \angle AOD = 140^0$.

4.7.6 यदि किसी वृत्त के केंद्र से ज्या पर लंब डाला गया तो वह ज्या को समद्विभाजित करता है।

क्रियाकलाप - 7



चित्र. - 16

1. केंद्र 'O' से एक वृत्त खींचिए (चित्र- 16 देखिए)
2. ज्या AB खींचिए.
3. O से AB पर लंब डालिए अर्थात् $OC \perp AB$.
4. AC तथा CB को मापो आप देखेंगे कि

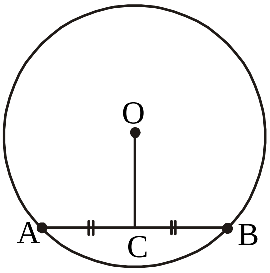
   AC = CB.

इसलिए

* किसी वृत्त के केंद्र से ज्या पर लंब डाला गया तो वह ज्या को समद्विभाजित करता है।

4.7.7 वृत्त की ज्या के मध्यबिंदु से वृत्त के केंद्र को मिलाने वाली सरल रेखा ज्या पर लंब होती है

क्रियाकलाप - 8



चित्र - 17

1. केंद्र 'O' से वृत्त खींचिए (चित्र. 17 देखिए)
2. AB एक ज्या खींचिए.
3. AB का मध्य बिंदु C को ज्ञात कीजिए।
4. O तथा C को मिलाइए।
5. $\angle OCA$, $\angle OCB$ को मापो

   हम देखेंगे कि $\angle OCA = \angle OCB = 90^0$.

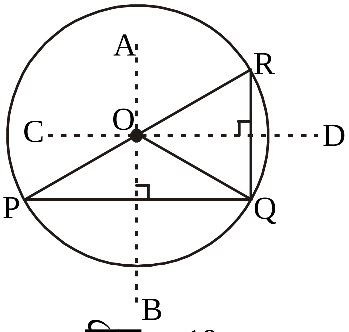
   इसलिए

   वृत्त की ज्या के मध्यबिंदु से वृत्त के केंद्र को मिलाने वाली सरल रेखा ज्या पर लंब होती है

4.7.8 तीन अ - संरेखी बिंदुओं केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है

क्रियाकलाप - 9

1. तीन अ - संरेखी बिंदु P, Q और R लीजिए।
2. AB तथा CD का लंब समद्विभाजक PQ तथा QR खींचिए।



चित्र. - 18

चूँकि P, Q, R तीन अ-संरेखी होने के कारण AB तथा CD समानांतर नहीं होंगे वे केवल एक बिंदु ‘O’ पर प्रतिच्छेदित होते है OP, OQ तथा OR को मिलाकर, मापिए

OP = OQ = OR

अब ‘O’ को केंद्र लेकर OP ज्या से वृत्त P, Q तथा R से गुजरने वाला वृत्त खींचिए।

इस प्रक्रिया को दूसरे तीन बिंदु लेकर दोहराइए। आप देखेंगे कि तीन अ-संरेखीय बिंदुओं से गुजरने केवल एक ही वृत्त खींच सकते है।

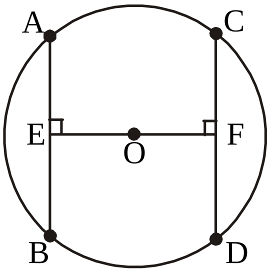
* तीन अ-संरेखी बिंदुओं सिर्फ और सिर्फ एक ही वृत्त खींच सकता है।

4.7.9 वृत्त की सर्वसमान ज्यायें केंद्र से समदूरी पर होते है

क्रियाकलाप - 10

1. केंद्र ‘O’ से वृत्त खींचिए (चित्र. 19 देखिए)
2. दो समान ज्यायें AB तथा CD को खींचिए।
3. OE ⊥ AB तथा OF ⊥ CD पर खींचिए।
4. OE तथा OF को मापिए आप देखेंगे कि OE = OF

इसलिए

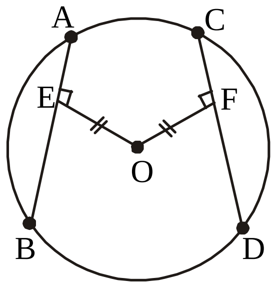


चित्र. - 19

वृत्त की समान ज्यायें केंद्र से समान दूरी पर होती है।

4.7.10 वृत्त के केंद्र से सम दूरी पर डाले गए ज्याएँ समान होती है

क्रियाकलाप - 11



चित्र - 20

1. केंद्र ‘O’ से वृत्त खींचिए (चित्र. 20 देखिए)
2. केंद्र से OE = OF को खींचिए
3. AB ज्या को OE पर लंब E से खींचिए और CD लंब है OF पर F से
4. AB तथा CD को मापो आप देखेंगे कि AB = CD होगा

इसलिए

वृत्त के केंद्र से समदूरी पर डाले गए ज्याएँ समान होती है।

उदाहरण 3 : यदि एक पंचभुजी को वृत्त में परिगत डाला गया हो तो प्रत्येक भुजा द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनने वाले कोण कितना होगा?

हल : एक पंचभुजी में पाँच समान भुजाएँ होती है

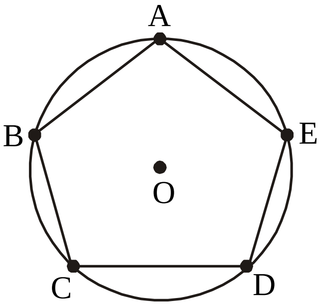
$\therefore$ प्रत्येक भुजा द्वारा केंद्र पर बनने वाला कोण भी समान होगा

मानलो केंद्र पर बनने वाला कोण x है

$$5x = 360^0$$

$$x = \frac{360}{5}$$

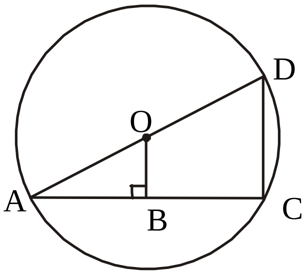
$$x = 72^0$$



चित्र - 21

इसलिए पंचभुजी के प्रत्येक भुजा से केंद्र पर बनने वाला कोण 72^0 होगा।

उदाहरण 4 : चित्र - 22 में OB लंब है ज्या AC पर तथा AD वृत्त का व्यास हो तो सिद्ध कीजिए DC = 2 OB.



चित्र - 22

Solution : OB $\perp$ AC (दिया गया)

'B' मध्यबिंदु AC पर (∵ केंद्र से डाले गए लंब ज्या को समद्विभाजित करता है (4.7.7))

'O' मध्यबिंदु AD पर (∵ AD वृत्त का व्यास)

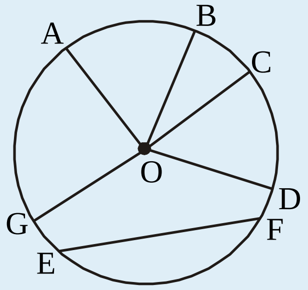
ΔADC में O तथा B भुजा AD तथा AC के मध्य बिंदु है। चूँकि त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्यबिंदु को जोडने वाली रेखा तीसरी भुजा का समानांतर तथा उसका आधा होता है।

$$\therefore \ OB = \frac{1}{2} DC$$

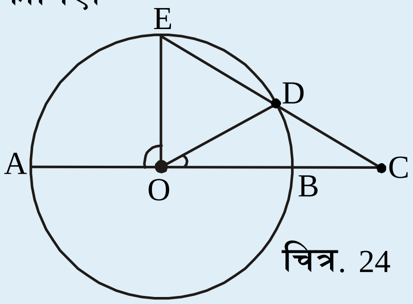
$$DC = 2OB.$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दिए गए चित्र से वृत्त के विभिन्न भागों के नाम लिखिए।



2. एक सप्तभुजी को वृत्त में परिगत डाला गया तो उसकी प्रत्येक भुजा द्वारा केंद्र पर बनने वाला कोण कितना होगा?
3. संकेन्द्री वृत्त तथा सर्वसमान वृत्तों के बीच अंतर को लिखिए।
4. क्या दो क्षेत्रों को मिलाकर एक वृत्त डाला जा सकता है? अपने उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।
5. चित्र - 24 में AB वृत्त का व्या है यदि $\angle BOD = 20^0$, $\angle EOA = 75^0$ हो तो $\angle ECA$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

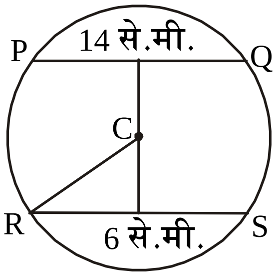


चित्र. 24

अभ्यास

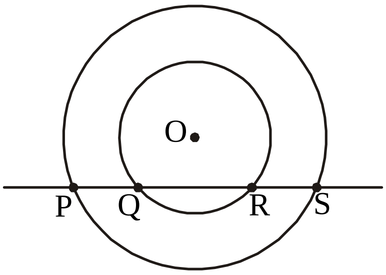
1. विभिन्न वृत्तों की जोडि उतारिए। प्रत्येक जोडी में कितने उभयनिष्ठ बिंदु होंगे? अधिकतम कितने उभयनिष्ठ बिंदु होंगे?
2. दिए गए वृत्त का केंद्र ज्ञात करने की प्रक्रिया क्या होगी?
3. यदि एक षट्भुज को वृत्त में डाला गया तो उसके प्रत्येक भुजा से वृत्त के केंद्र पर बनने वाला कोण कितना होगा?
4. चित्र 25 में PQ = 14 से.मी. RS = 6से.मी. दोनों समानांतर ज्यायें हो और त्रिज्या $r = 9$ से.मी. है।

   PQ तथा RS के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।



चित्र. - 25

5. एक वृत्त के ज्या की लंबाई 8 से.मी है और केंद्र से ज्या की दूरी 3 से.मी. हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
6. चित्र 26 में एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तो को प्रतिच्छेदित करती है P, Q, R, S पर क्या PQ = RS? कारण बताइए।



चित्र - 26

सारांश

- वृत्त की सबसे लंबी ज्या को व्या कहते है।
- एक वृत्त समतल को तीन भागों में विभाजित करता है।
- वृत्त की दो चाप सर्वसमान होते है यदि केवल यदि उनकी संगत ज्याएँ समान होती है।
- वृत्त की दो चाप सर्वसमान होते है यदि केवल यदि उनके द्वारा केंद्र पर बनने वाले कोण समान होते है।
- वृत्त के समान ज्यायें केंद्र पर समान कोण बनाते है।
- वृत्त की ज्या पर केंद्र से डाला गया लंबउसे समद्विभाजित करता है।
- वृत्त के केंद्र से ज्या के मध्य बिंदु को जोडने वाली रेका ज्या पर लंब होती है।
- तीन अ-संरेखीय बिंदुओं से केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है।
- वृत्त की समान ज्यायें केंद्र से समदूरस्थ होती है, विलोमतः वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ ज्याओं की लंबाई समान होती है।

अध्याय

4.8 वृत्त की स्पर्श तथा छेदन रेखाएँ और उनके गुणधर्म

4.8.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

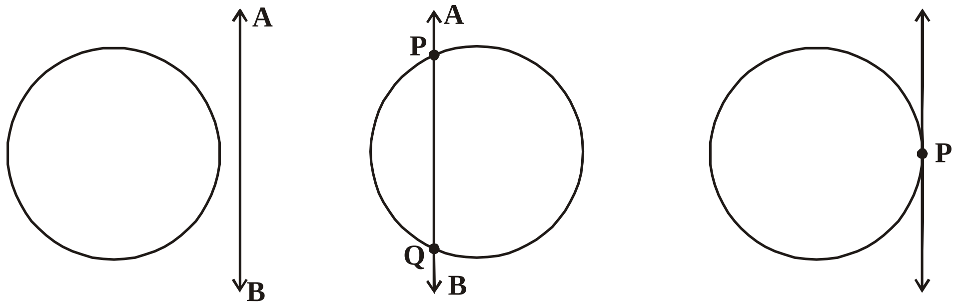
- पद जैसे स्पर्श रेखाएँ, छेदन रेखाएँ तथा स्पर्श बिंदु के बारे में लिखकर समझायेंगे।
- वृत्त के किसी बिंदु पर त्रिज्या से डाला गया लंब उसकी स्पर्श रेखा होगी इसकी जाँच करेंगे।
- उपरोक्त प्रमेय पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे।
- बाह्य बिंदु से वृत्त पर डाले गए स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान होती है इसकी जाँच करेंगे।
- इस प्रमेय पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे।

4.8.1 परिचय

आपने रेल को देखा होगा। क्या आपने रेल की पटरी तथा पहियों की स्थितियों को देखा? यदि हाँ तो रेल की पटरी सरल रेखा है तो पहिया उस पर चलती है। पहिया हमेशा पटरी के संपर्क में होता है।

यहाँ हम कह सकते है कि पटरी स्पर्श रेखा है जो रेल के पहिये से जुडा होता है।

क्या आप स्पर्श रेखा के बारे में जानना चाहते है? अब हम वृत्त तथा रेखा के बीच संबंध को समझायेंगे।



(i) (ii) (iii)

चित्र - (i) में वृत्त तथा रेखा के कितने उभयनिष्ठ बिंदु है? उनका कोई भी उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है। इसलिए रेखा को वृत्त से अ-प्रतिच्छेदित रेखा कहेंगे।

चित्र (ii) में वृत्त तथा रेखा की कितनी उभयनिष्ठ बिंदु है? इसमें दो उभयनिष्ठ बिंदु P और Q जो कि रेखा AB और वृत्त के है।

इसलिए यहाँ AB को वृत्त की छेदन रेखा कहते है।

चित्र (iii) में वृत्त तथा रेखा की कितनी उभयनिष्ठ बिंदु है? यहाँ केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु 'P' है। इस रेखा को वृत्त की स्पर्श रेखा कहते है। स्पर्श रेखा वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करता है।

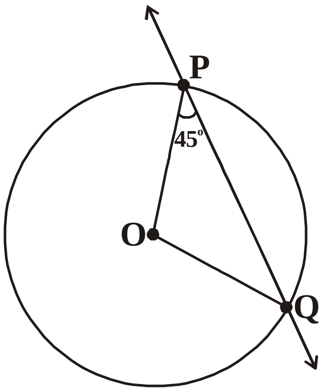
इस अध्याय में हम छेदन रेखाएँ, स्पर्श रेखाएँ तथा उनके गुणों के बारे में जानेंगे।

4.8.2 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ

प्रस्तावना में आपने देखा कि स्पर्श रेखा वह जो वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है।.

स्पर्श रेखा के अस्तित्व को समझने के लिए एक क्रियाकलाप करेंगे।

क्रियाकलाप - 1



केंद्र 'O' से एक वृत्त खींचिए।

मानलो 'P' वृत्त पर एक बिंदु है।

'P' पर 40^0 का कोण मापिए और एक रेखा खींचिए। यह रेखा 'P' से गुजरते हुए वृत्त को Q पर प्रतिच्छेदित करता है। O तथा Q को मिलाइए।

इसी प्रकार के कुछ और चित्र उतारिए जिसमें P पर कोण बढ़ाते हुए 50^0, 60^0 और इसी प्रकार आपने क्या देखा?

जैसे - जैसे P पर कोण बढता है बिंदु 'Q', P के समीप आता है। तथा ΔPOQ पतला होता जाता है।

यदि P का कोण 90^0 हो तो क्या होगा?

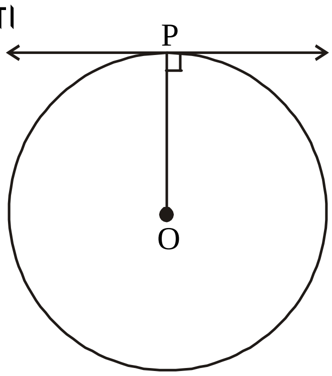
क्या यह रेखा वृत्त पर किसी और बिंदु पर स्पर्श करता है?

इस रेखा का वृत्त का दूसरा स्पर्श बिंदु नहीं होगा।

इसलिए इसे वृत्त की स्पर्श रेखा कहेंगे।

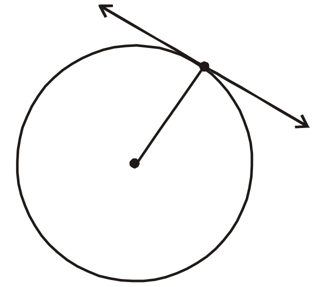
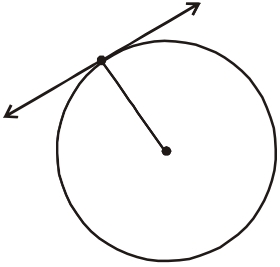
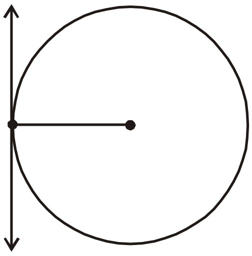
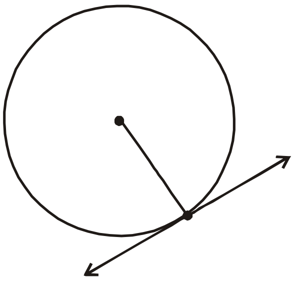
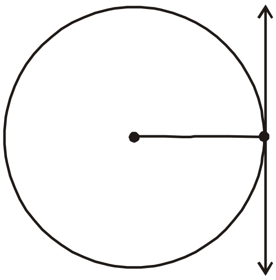
इससे हम साधारण सिद्धांत प्राप्त करेंगे।

> वृत्त पर किसी भी बिंदु से डाली गई रेखा, त्रिज्या पर लंब होती है वह वृत्त का स्पर्श बिंदु तथा उस रेखा को स्पर्श रेखा कहते है।



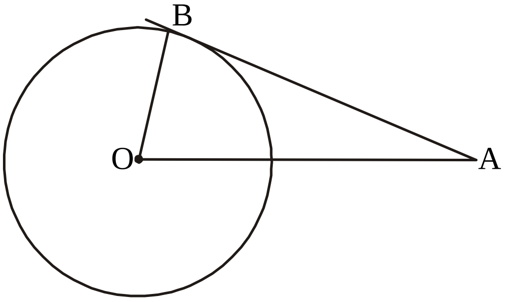
क्रियाकलाप - 2

त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा के मध्य का कोण चाँदे की सहायता से मापकर लिखिए।

चित्र	त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा के बीच का कोण
	
	
	
	
	

उपरोक्त निरीक्षण के आधार पर हम कह सकते है

“एक वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से गुजरने वाली त्रिज्या पर लंब.”

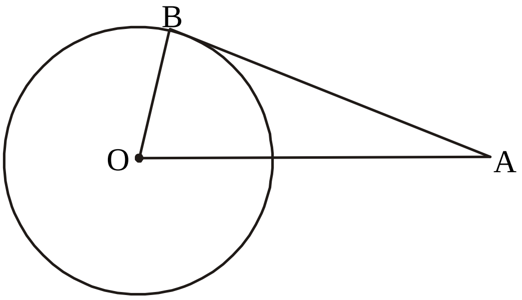


उदाहरण 1 : ΔOAB एक समद्विबाहु त्रिभुज है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है तो $\angle OAB$ को ज्ञात कीजिए।

हल : हमेशा त्रिज्या वृत्त की स्पर्श रेखा पर स्पर्श बिंदु पर लंब होता है।

$\therefore \angle OBA = 90^0$

($\because$ OB त्रिज्या है तथा AB स्पर्श रेखा है।)



OB = AB ($\because$ ΔOAB एक समद्विबाहु त्रिभुज है और OA उसका कर्ण है)

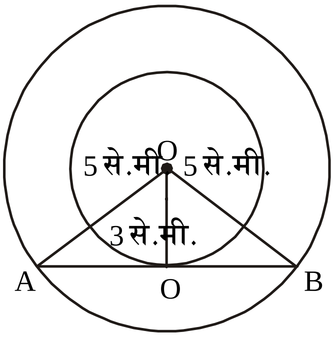
$\angle OAB = \angle OBA$ (समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजा के सम्मुख कोण समान होते है।)

ΔOAB में, $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^0$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$$90^0 + 2\angle OAB = 180^0$$

$$2\angle OAB = 90^0$$

$$\angle OAB = \frac{90^0}{2} = 45^0$$



उदाहरण 2 : दो संकेंद्री वृत्त त्रिज्या 5 से.मी. तथा 3से.मी. है। बड़े वृत्त की ज्या की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है।

हल : $OP \perp AB$ (हमेशा त्रिज्या लंब होती है स्पर्श रेखा पर)

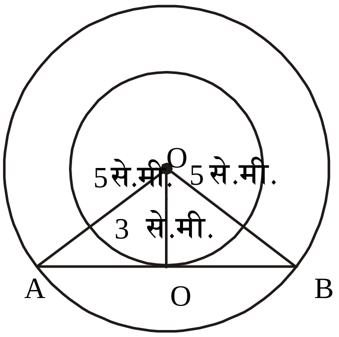
पायथोगोरस प्रमेय अनुसार ΔOPA में हमें

$$(OP)^2 + (AP)^2 = (OA)^2$$

$$(3)^2 + (AP)^2 = (5)^2$$

$$(AP)^2 = 25 - 9 = 16$$

$$AP = \sqrt{16} = 4 \text{ से.मी.}$$

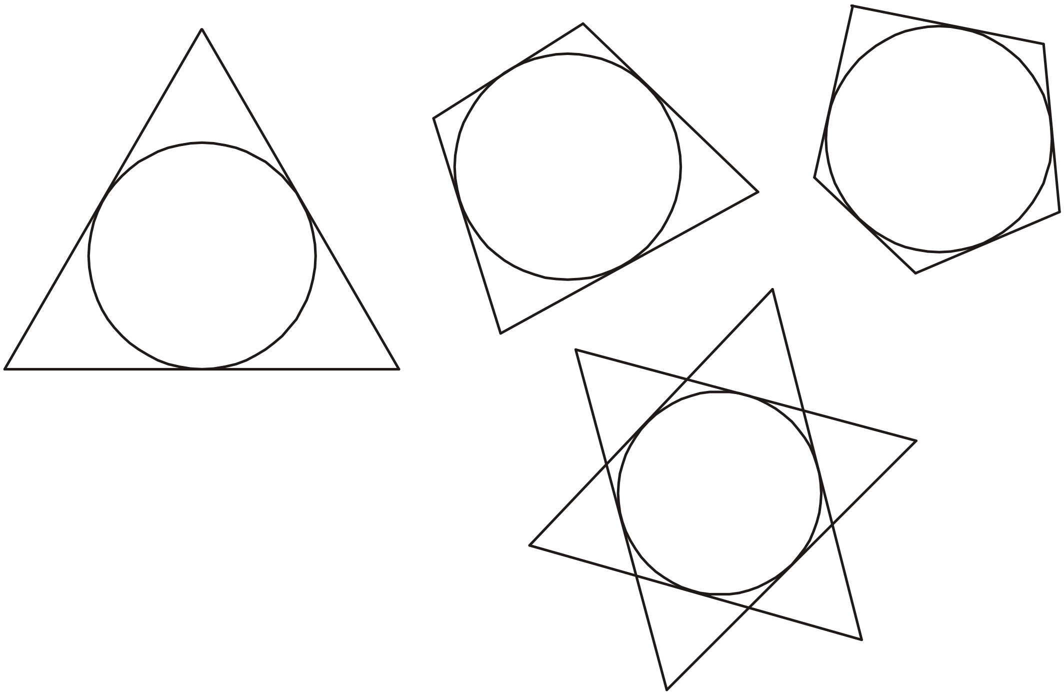


लेकिन AP = PB ($\because$ वृत्त के केंद्र से डाला गया लंब ज्या को समद्विभाजित करता है)

$$\therefore \quad AB = AP + PB = 2AP$$

$$= 2 \times 4 = 8 \text{ से.मी.}$$

क्रियाकलाप 3 : स्व अन्वेषण



उपरोक्त चित्र में वृत्त पर डाले गए रेखाओं के बारे में आप क्या कह सकते है?

एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ डाल सकते है?

हम जानते है कि वृत्त पर एक बिंदु से केवल एक स्पर्श रेखा खींच सकते है क्योंकि वृत्त पर अनंत बिंदु होते है हम वृत्त की अनंत स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती है?
2. एक तल पर वृत्त तथा रेखा के कितने उभयनिष्ठ न्यूनतम और अधिकतम बिंदु होंगे?
3. वृत्त तथा रेखा की तीन उभयनिष्ठ बिंदु क्यों नहीं हो सकते?
4. छेदन रेखा तथा वृत्त की कितनी उभयनिष्ठ बिंदु हो सकते है?
5. स्पर्श रेखा तथा वृत्त की कितनी उभयनिष्ठ बिंदु हो सकते है?

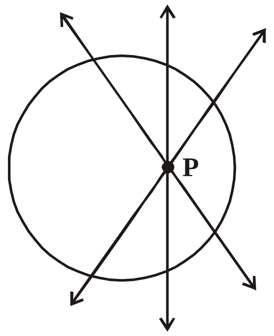
निम्न पदों को चित्रों द्वारा समझाइए।

पदों का विवरण	चित्र
स्पर्श रेखा	
छेदन रेखा	
स्पर्श बिंदु	

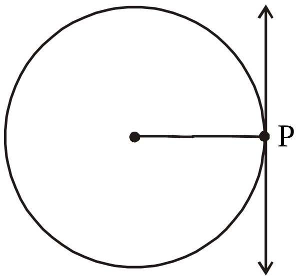
4.8.3 एक बिंदु से वृत्त अनेक स्पर्श रेखाएँ

एक बिंदु से कई स्पर्श रेखाओं को समझने के लिए निम्न क्रियाकलाप करेंगे।

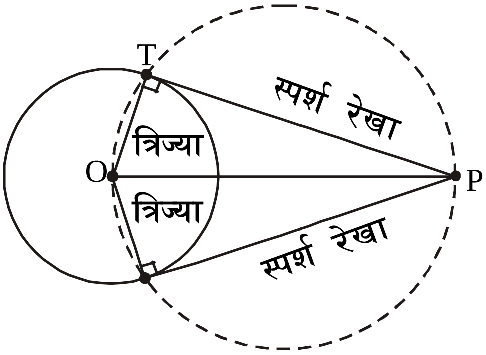
(i) एक वृत्त खींचकर उसमें एक बिंदु P डालिए क्या आप इस बिंदु से स्पर्श P रेखा खींच सकते है? आप देखेंगे कि इस बिंदु से खींची गई सभी रेखाएँ वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती है। इसलिए वृत्त के भीतर वाले बिंदु से कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींच सकते।



(ii) अब बिंदु 'P' को वृत्त पर डालिए और उससे एक स्पर्श रेखा खींचिए। हमने पहले ही देखा कि एक बिंदु से केवल एक ही स्पर्श रेखा खींच सकते है।



(iii) बिंदु ‘P’ को वृत्त के बाहर डालिए। OP को मिलाइए। OT उसकी त्रिज्या होगी। हम जानते है स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब होती है। हमें T पर समकोण प्राप्त होना चाहिए। और हम जानते है कि अर्ध-वृत्त पर बनने वाला कोण समकोण होता है। OP व्यास से एक अर्ध वृत्त खींचिए। वह वास्तविक वृत्त को T पर काटती है। TPको मिलाइए। जो कि स्पर्श रेखा होगी।

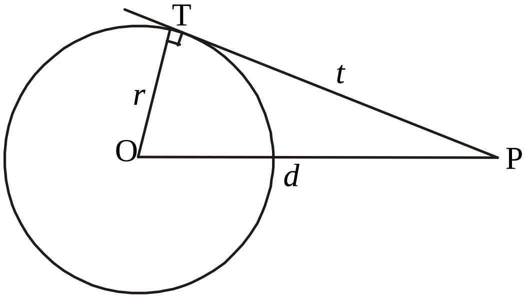


दूसरी ओर भी एक और अर्धवृत्त खींचिए।

अर्थात् P से हम दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है।

यहाँ स्पर्श रेखा की लंबाई उस स्पर्श खण्ड की लंबाई होगी जो बाहरी बिंदु से स्पर्श बिंदु तक होगा।

हम स्पर्श रेखा की लंबाई को कैसे ज्ञात कर सकते है?



केंद्र ‘O’से बनने वृत्त की त्रिज्या ‘r’ होगी बाह्य बिंदु ‘P’ से स्पर्श रेखा खींचिए जो दूरी ‘d’ इकाई तक होगी।

चूँकि $\underline{|OTP} = 90^0$, यह समकोण त्रिभुज होगा।

पायथोगोरस प्रमेय के अनुसार

$$OT^2 + PT^2 = OP^2$$

$$t^2 + r^2 = d^2$$

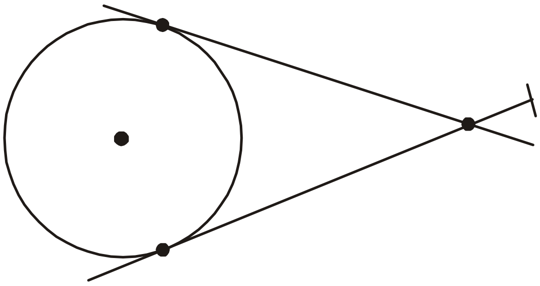
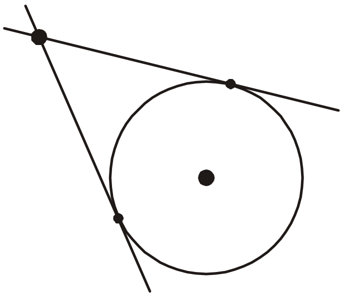
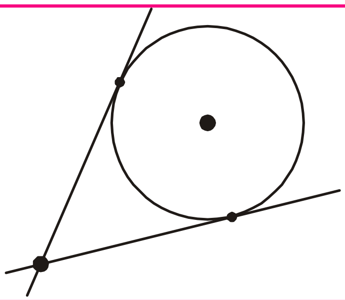
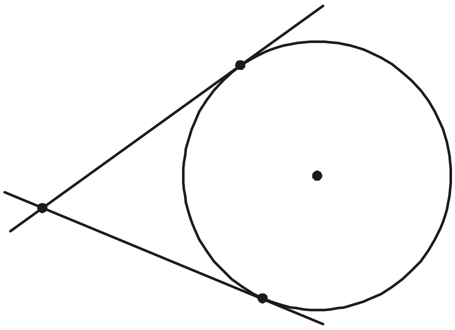
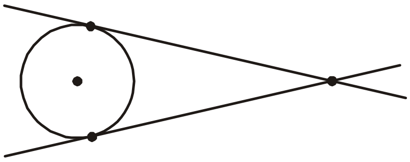
$$t = \sqrt{d^2 - r^2}$$

$\therefore$ स्पर्श रेखा की लंबाई $= \sqrt{d^2 - r^2}$

हमने पहले ही देखा कि बाह्य बिंदु से दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते है। आप दो स्पर्श रेखा की लंबाई के बारे में क्या कहेंगे?

क्रियाकलाप:

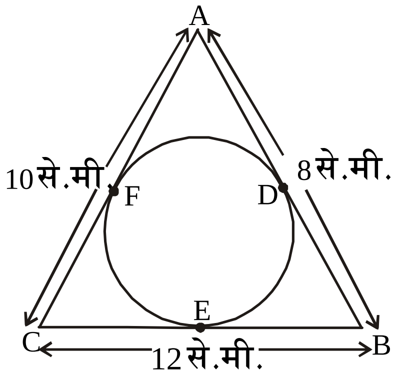
दिए गए प्रत्येक चित्र में दिए गए स्पर्श रेखा को पटरी से मापिए।

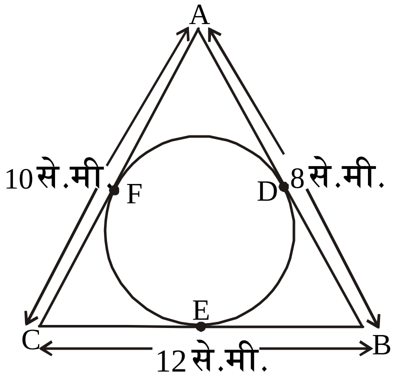
चित्र	**स्पर्श रेखाओं की लंबाई के माप**
	पहली स्पर्श रेखा की लंबाई = दूसरी स्पर्श रेखा की लंबाई =
	पहली स्पर्श रेखा की लंबाई = दूसरी स्पर्श रेखा की लंबाई =
	पहली स्पर्श रेखा की लंबाई = दूसरी स्पर्श रेखा की लंबाई =
	पहली स्पर्श रेखा की लंबाई = दूसरी स्पर्श रेखा की लंबाई =
	पहली स्पर्श रेखा की लंबाई = दूसरी स्पर्श रेखा की लंबाई =

आपने निरीक्षण से आप कह सकते है।

बाह्य बिंदु से डाले गए स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान हे।

उदाहरण 3 : ΔABC के अंदर एक वृत्त डाला गया है। जिसकी भुजाएँ 8 से.मी., 10 से.मी. तथा 12 से.मी. है तो AD, BE तथा CF ज्ञात कीजिए।





हल : बाह्य बिंदु से डाले गए स्पर्श रेखाएँ समान होती है।

$AD = AF = x$

$BD = BE = y$

$CE = CF = z$

$x + y = 12$ ... (1)

$y + x = 8$ ... (2)

$x + z = 10$ ... (3)

जोडने पर $2(x + y + z) = 30$

$$x + y + z = \frac{30}{2} = 15 \quad ...(4)$$

(4) - (1) हमें $y = 5$ से.मी. देता है

(4) - (2) हमें $z = 3$से.मी. देता है

(4) - (3) हमें $x = 7$ से.मी. देता है

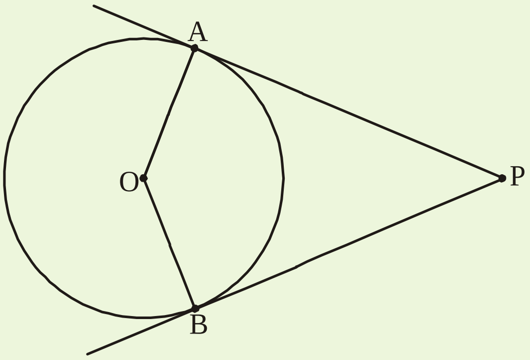
$\therefore$ AD = 7 से.मी.

BE = 5 से.मी.

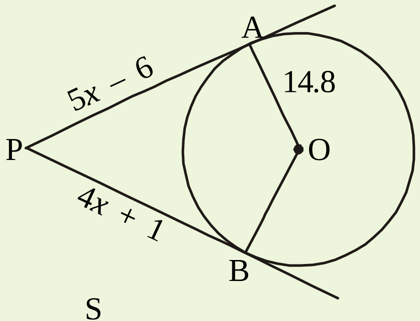
CF = 3 से.मी..

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

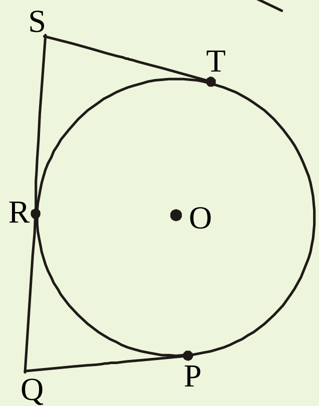
1. दिए गए चित्र में, PA तथा PB दो स्पर्श रेखाएँ हैं यदि PA = 10 से.मी. तथा OA = 5से.मी. हो तो PAOB चतुर्भुज की परिमित ज्ञात कीजिए।



2. दिए गए चित्र में, $PA = 5x - 6$ तथा $PB = 4x + 1$ हो तो 'x' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

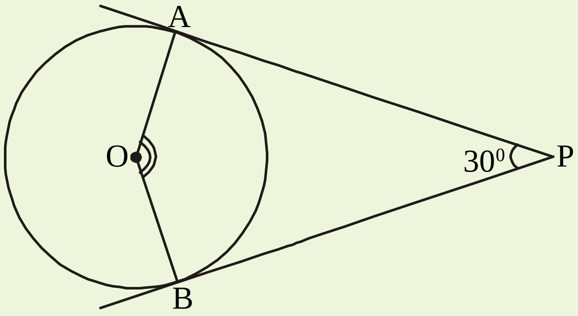


3. दिए गए चित्र में ST, QP तथा SQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ है यदि ST = 5 से.मी. और QP = 2 से.मी. हो तो SQ ज्ञात कीजिए।



4. केंद्र 'O' वाले वृत्त जिसकी त्रिज्या 3 से.मी. है 5 से.मी. दूरी पर बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखा खींचि गई तो उस स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

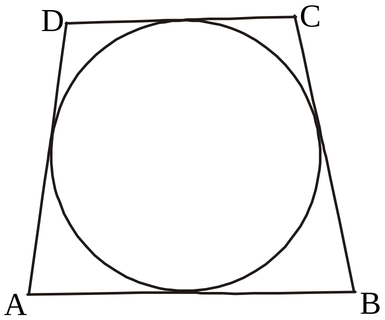
5. दिए गए चित्र में, PA और PB वृत्त की स्पर्श रेकाएँ है। यदि $\underline{|APB} = 30^0$ हो तो $\underline{|AOB}$ को ज्ञात कीजिए।



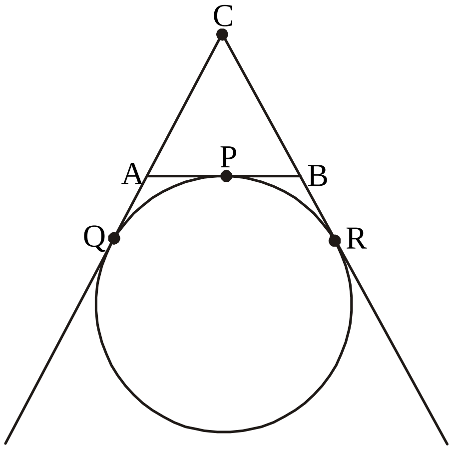
अभ्यास

1. बिंदु "A" से 35 से.मी. की दूरी से स्पर्श रेखा खींची गई जिसकी केंद्र से 28 से.मी.. दूरी पर हो तो वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2. दिए गए चित्र में वृत्त चतुर्भुज ABCD चारों भुजाओं को स्पर्श करता है जो AB = 6 से.मी., BC = 7 से.मी., CD = 4 से.मी. हो तो AD की लंबाई ज्ञात कीजिए।

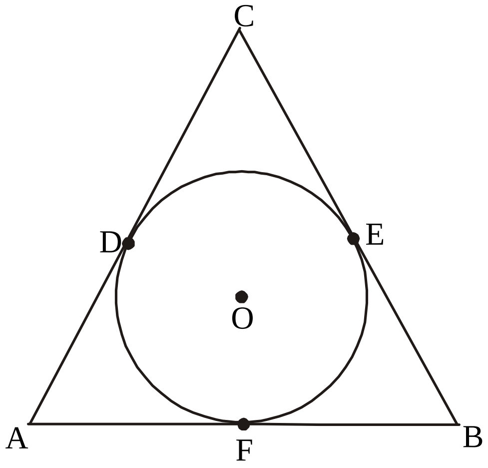


3. दिए गए चित्र में वृत्त ΔABC की भुजा BC को बिंदु P पर स्पर्श करता है और AB तथा AC को आगे बढाने पर बिंदु Q तथा R पर स्पर्श करता है। यदि AQ = 5 से.मी. हो तो ΔABC की परिमिति ज्ञात कीजिए।



4. वृत्त की व्यास के अंतिम बिंदुओं पर डाले गए स्पर्श रेखाएँ समानांतर होती है सिद्ध कीजिए।

5. दिए गए चित्र में केंद्र ‘O’ वाला वृत्त ΔABC के अंदर डाला गया जिसमें AB, BC तथा AC वृत्त की स्पर्श करती है। यदि AF = FB = 5 से.मी. और DC = 7 से.मी., हो तो ΔABC की परिमिती ज्ञात कीजिए।



6. वृत्त के बाह्य बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींचि जाती है।
7. वृत्त की दो त्रिज्याओं की अंतिम बिंदुओं से खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच अंतिम बिंदुओं से खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच झुकाव का कोण 45^0 हो तो स्पर्श रेखाओं का मध्य कोण कितना होगा?
8. बिंदु Q से 24 से.मी. लंबी स्पर्श रेखा वृत्त पर डाली गई केंद्र से ‘Q’ की दूरी 25 से.मी. हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

सारांश

- एक रेखा जो वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करता है तो उसे छेदन रेखा कहते है।
- एक रेखा जो वृत्त को केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती है तो उसे स्पर्श रेखा कहते है बिंदु जिस पर वह स्पर्श करता है उसे स्पर्श बिंदु कहते है।

- वृत्त के कीसी भी बिंदु से त्रिज्या पर डाला गया लंब उस वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।
- वृत्त की त्रिज्या हमेशा स्पर्श रेखा पर स्पर्श बिंदु पर लंब होता है।
- वृत्त के बाह्य बिंदु से वृत्त को मिलाने वाली रेखा उसकी स्पर्श रेखा होती है।

  स्पर्श की लंबाई $= \sqrt{d^2 - r^2}$
- बाह्य बिंदु से डाले गए स्पर्श रेखाएँ समान होती है।

अध्याय 4.9

रचनाएँ

4.9.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- चित्र कौशल को उन्नत करेंगे
- विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के कोण तथा भुजाओं को मापेंगे
- ज्यामितीय उपकरणों की सहायता से विभिन्न रचनाएँ बनायेंगे.
- रचनाओं की स्थिति का विश्लेषण कर ज्यामितीय आकृतियों के गुणों के आधार पर आवश्यक मापों को ज्ञात करेंगे।

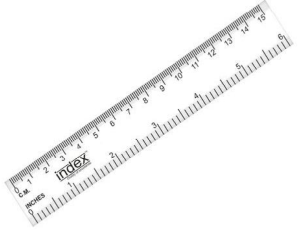
4.9.0 परिचय

ज्यामितीय रचनाओं का अर्थ आकृति, कोण या रेखा को सही माप से उतारना। लेकिन इन रचनाओं का विकास क्यों हुआ? रचनाएँ ज्यामितीय धारणा की अंतदृष्टि प्रदान करते है। जब सही माप नहीं हो तो हम कुछ उपकरणों की सहायता से रचनाएँ बनाएँगे। उदाहरण के लिए 5 को 2 से भाग देने पर 2.5 प्राप्त होगा। 2.5 एक पूर्ण संख्या नहीं है। युक्लिद तथा दूसरे ग्रीक गणितज्ञों ने इस समस्या को ग्राफ द्वारा हल किया। उन दिनों उन्होंने प्रकार और पटरी का उपयोग किया था। ये ज्यामितीय रचनाएँ शुद्ध है जिसमें संख्याओं का उपयोग नहीं होता और उन्हें सरल किनारा और प्रकार की रचनाएँ कहते है।

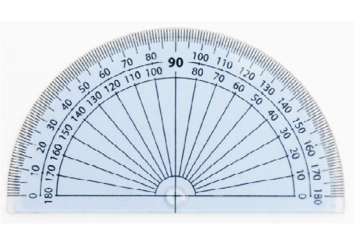
हम ज्यामितीय रचनाओं के लिए विभिन्न उपकरणों का उपयोग करते है। अब हम ज्यामितीय बॉक्स में प्राप्त विभिन्न उपकरणों तथा उनके उपयोग के बारे में जानेंगे? ज्यामितीय बॉक्स में पटरी, चाँदा, विभाजक तथा समकोणक पाये जाते है।

पटरी: पटरी को रेखा की लंबाई मापने तथा सरल रेखा खींचने में उपयोग करते है।

प्रकार : प्रकार का उपयोग चाप और वृत्त खींचने में करते है।

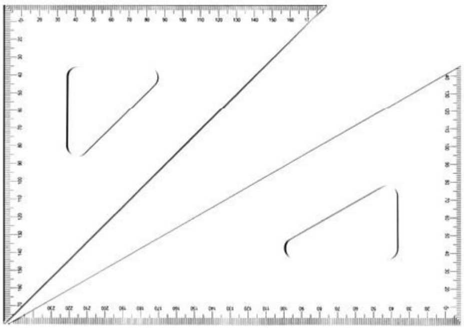


चाँदा: कोणों को मापने तथा उतारने के लिए चाँदे का उपयोग करते है।



विभाजक : वक्र रेखाओं की लंबाई ज्ञात करने में और रेखा की लंबाई को बिना मापे दुबारा से डालना और समान लंबाई वाली रेखा खींचने में उपयोग करते है।

समकोणक : दो समकोणक त्रिभुजाकार एक 30^0 - 60^0 - 90^0 के कोण होते है दूसरे में 45^0 - 45^0- 90^0 के कोण होते है इन्हें समानांतर तथा लंब रेखाओं को खींचने में उपयोग करते है।



4.9.2 मौलिक रचनाओं की समीक्षा

अब हम तीन मौलिक रचनाओं को सीखेंगे जो अन्य रचनाओं में उपयोगी होते है।

I. लंब समद्विभाजक की रचना

रचना क्रम :

(a) AB रेखा खण्ड खींचो.

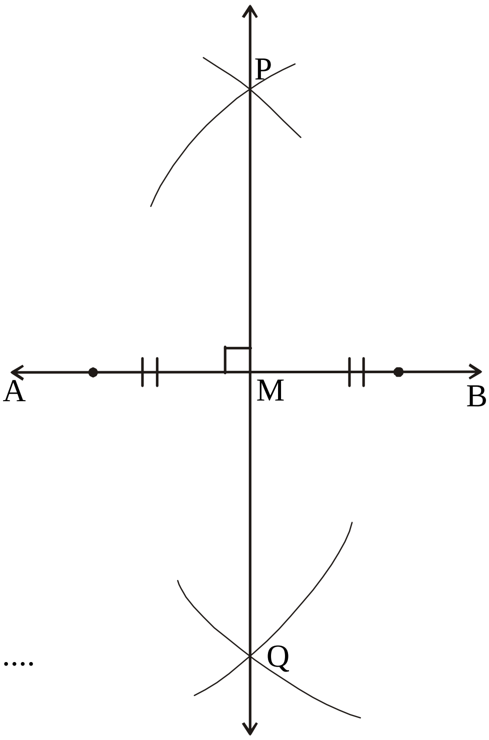
(b) ‘A’ को केंद्र मानकर AB के आधे से ज्यादा त्रिज्या वाली दो चाप AB के दोनों ओर खींचो।

(c) ‘B’ को केंद्र माननक उसी माप का चाप पहले चाप को P तथा Q पर काटते हुए डालिए।

(d) रेखा PQ को खींचो जो लंब समद्विभाजक होगा।

जाँच: चाँदे से मापिए

$\angle AMP$ = ... $\angle BMP$ = ...



पटरी से मापिए

AM = ... से.मी.

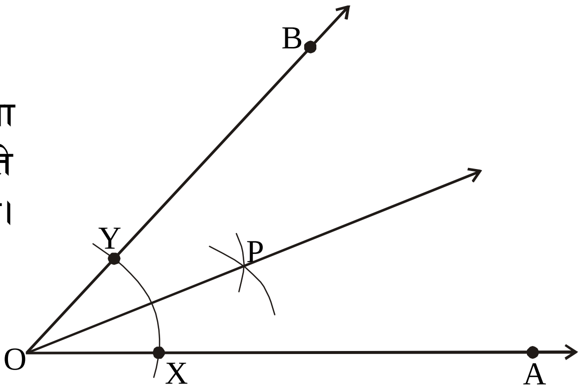
BM = ... से.मी.

निरीक्षण : $\underline{|AMP} = \underline{|BMP} = 90^0$

$AM = BM$.

II. दिए गए कोण के समद्विभाजक की रचना

रचना क्रम:



(a) कोण AOB खींचिए

(b) 'O'को केंद्र मानकर किसी भी एक त्रिज्या से दो चाप दोनों भुजाओं को काटते हुए डालिए जो X तथा Y पर काटेंगे।

(c) X को केंद्र मानकर XY का आधे से ज्यादा की त्रिज्या लेकर चाप खींचिए। Y को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से दूसरा चाप पहले वाले चाप को P पर काटते हुए डालिए।

(d) किरण OP को खींचो जो कोण का समद्विभाजक होगा।

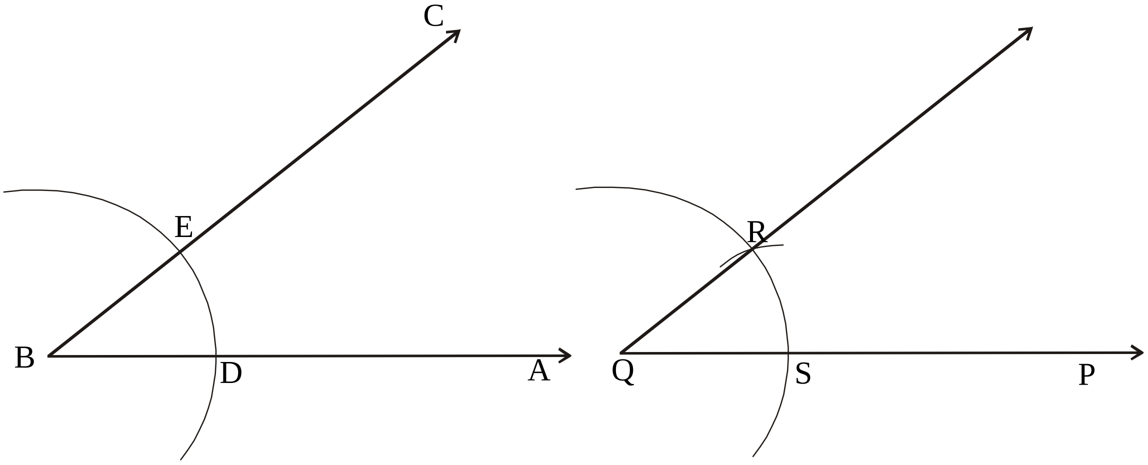
जाँच: चाँदे से मापिए

$\angle BOP$ = ... $\angle AOP$ =

$\angle AOB$ = ...

निरीक्षण : $\angle BOP = \angle AOP = \frac{1}{2} \angle AOB$.

III. समान कोण की दूसरे बिंदु पर रचना



रचना क्रम :

(a) कोण ABC को खींचो, किरण QP को खींचो

(b) ‘B’ को केंद्र मानकर इच्छानुसार त्रिज्या लेकर AB तथा AC को क्रमशः D तथा E पर काटते हुए डालिए

(c) Q को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से QP को S पर काटता हुआ चाप डालिए।

(d) ‘S’ को केंद्र मानकर DE के माप वाले त्रिज्या से पहले चाप को R पर काटते एक और चाप खींचिए.

(e) किरण QR को खींचिए, $\angle PQR$ हमारा आवश्यक कोण Q पर होगा।

जाँच : $\angle ABC$ = ... $\angle PQR$ = ...

निरीक्षण : $\angle ABC = \angle PQR$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

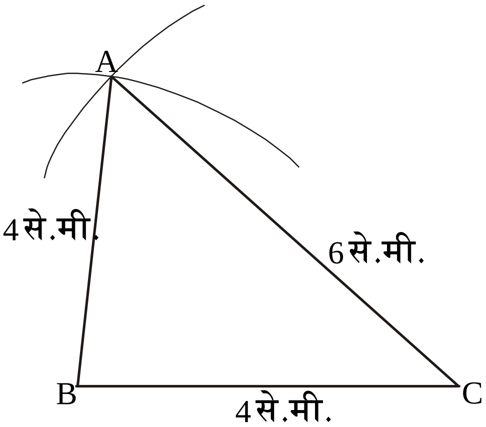
1. दिए गए रेखाओं के लंब समद्विभाजक खींचो।
   (a) 5 से.मी. (b) 6.4 से.मी.
2. दिए गए कोणों के समद्विभाजक खींचो।
   (a) 60^0 (b) 90^0 (c) 80^0
3. दिए गएक कोणों को चाँदे से उतारकर दूसरे बिंदु पर वैसे ही कोणों को उतारिए।
   (a) 30^0 (b) 45^0 (c) 70^0

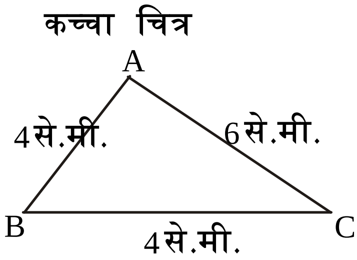
4.9.3 त्रिभुजों की रचनाएँ

अब हम दिए गए मापों से त्रिभुजों की रचना को सीखेंगे। (1) तीन भुजाएँ(SSS) (2) दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण (SAS) (3) दो कोण और उनके बीच की भुजा (SAA).

I. त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाओं का मापन दिया गया हो

उदा: ΔABC की रचना कीजिए इसमें AB = 4 से.मी., BC = 5 से.मी. तथा AC = 6 से.मी..



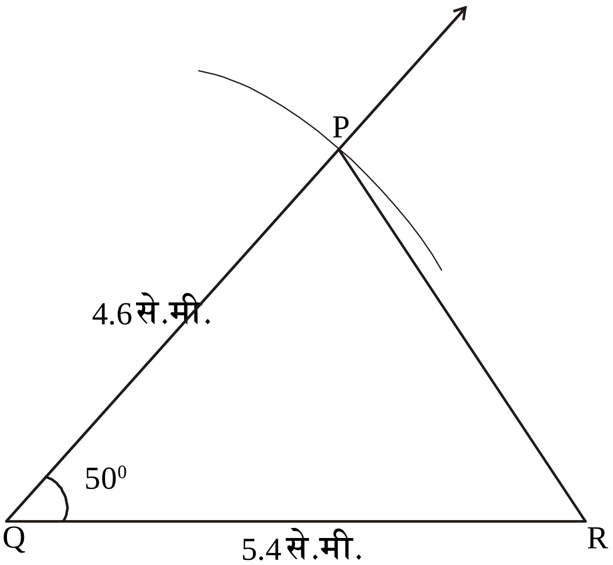


रचना क्रम

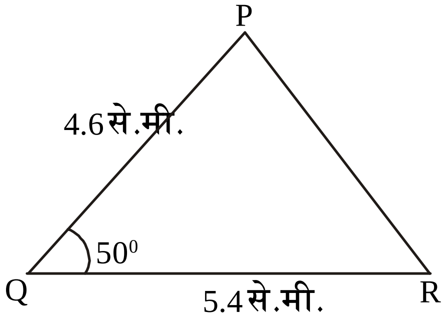
1. 5से.मी. वाली रेखा BC खींचिए
2. ‘B’ को केंद्र मानकर 4 से.मी. त्रिज्या वाला चाप खींचिए
3. ‘C’ को केंद्र मानकर 6 से.मी. त्रिज्या वाला दूसरा चाप पहले वाले को A पर काटते हुए डालिए
4. AB और AC को मिलाइए
5. ΔABC हमारा आवश्यक त्रिभुज होगा

II. त्रिभुज की रचना जब दो भुजाएँ और एक कोण दिया गया हो (SAS).

उदाहरण : ΔPQR की रचना कीजिए PQ = 4.6 से.मी. QR = 5.4 से.मी. और $\angle Q = 50^0$.



कच्चा चित्र



रचना क्रमः

a) रेखा QR = 5.4 से.मी. खींचिए

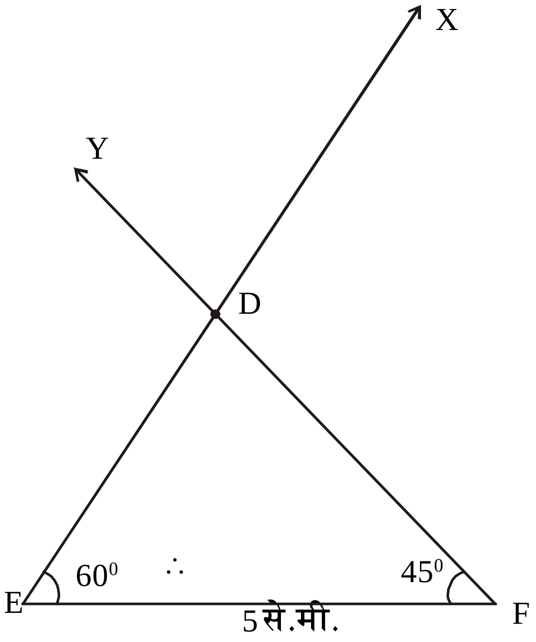
b) Q से एक किरण QX कोण 50^0 का बनाते हुए चाँदे की सहायता से खींचिए।

c) Q को केंद्र मानकर 4.6 से.मी. त्रिज्या वाले चाप को किरण QX को P पर काटते हुए डालिए।

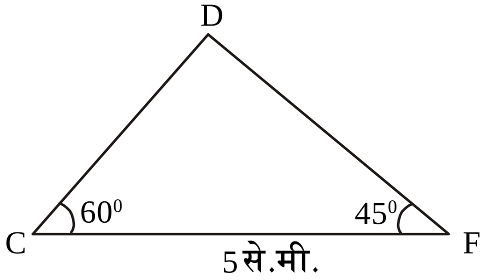
d) P, R को मिलाइए, ΔPQR हमारा आवश्यक त्रिभुज होगा।

III. त्रिभुज की रचना जब दो कोण और उनके मध्य की भुज दी गई हो

उदाहरण : ΔDEF की रचना कीजिए जिसमें EF = 5 से.मी. $\angle E = 60^0$ और $\angle F = 45^0$है।



कच्चा चित्र



रचना क्रम:

a) 5 से.मी. वाली रेखा EF खींचो

b) E, से 60^0 का कोण बनाती हुई किरण EX चाँदे की सहायता से खींचो

c) F से 45^0 का कोण बनाती हुई किरण FY रेखा FE चाँदे की सहायता से खींचो

d) EX तथा FY को तब आगे बढाओ कि वे D पर एक दूसरे से मिले।

e) ΔDEF अभीष्ट त्रिभुज होगा।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. निम्न त्रिभुज का रचना कीजिए।

1. एक समबाहु त्रिभुज XYZ की रचना करो जिसकी भुजा 5 से.मी. हो (सूचना: XY = YZ = ZX = 5से.मी.).
2. ΔABC जिसमें BC = 4.8 से.मी. $\angle B = \angle C = 45^0$ हो की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना की जिए जिसमें PQ = 5.1 से.मी. QR = 4.7 से.मी. तथा $\angle Q = 50^0$ हो.
4. ΔLMN की रचना कीजिए जिसमें LM = 6से.मी., MN = NL = 5से.मी. हो.
5. ΔIJK की रचना कीजिए JK = 4.9 से.मी. $\angle J = 90^0$ तथा $\angle K = 30^0$ हो.
6. Δ ABC की रचना कीजिए BC = 3.7 से.मी.AB = 4.1 से.मी. तथा $\angle C = 60^0$ हो.

4.9.4 चतुर्भुजों की रचनाएँ

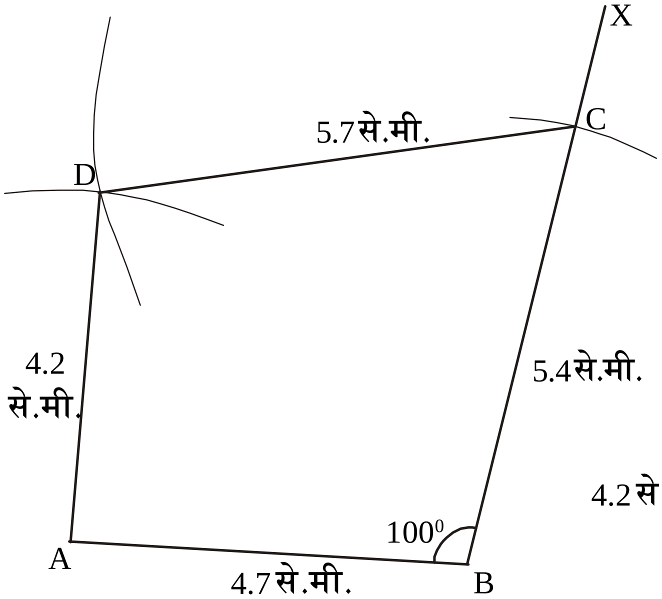
अब हम दिए गए मापों से चतुर्भुजों की रचना को सीखेंगे

1. जब चार भुजाएँ और एक कोण दिया गया हो (SSSSA)
2. जब चार भुजाएँ और एक कर्ण दिया गया हो (SSSSD)
3. जब तीन भुजाएँ और दो कर्ण दिया गया हा (SSSDD)

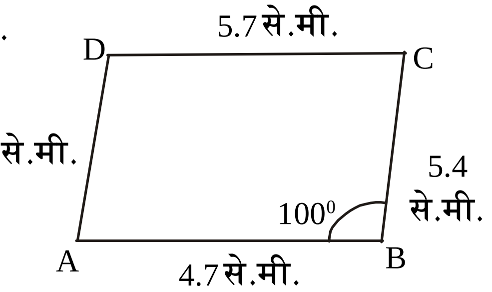
I. चतुर्भुज की रचना जब चार भुजाएँ और एक कोण दिया गया हो

उदाहरण : चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें

AB = 4.7 से.मी., BC = 5.4 से.मी. CD = 5.7 से.मी., AD = 4.2 से.मी. तथा $\angle ABC = 100^0$.



कच्चा चित्र



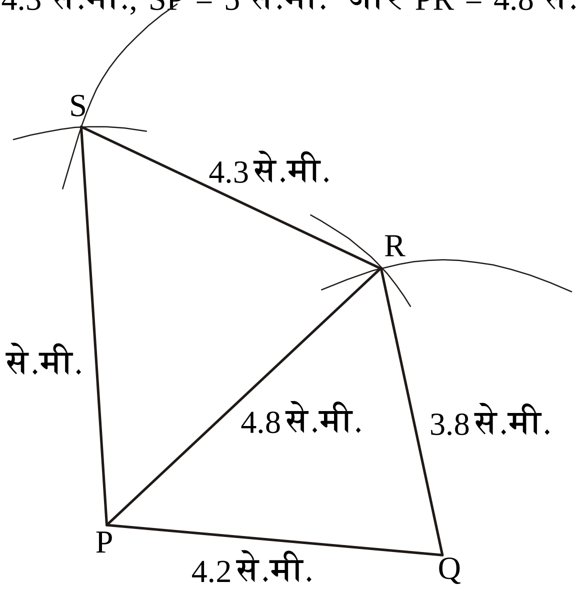
रचना क्रम:

पहले हम ΔABC की रचना SAS नियम के आधार पर करेंगे

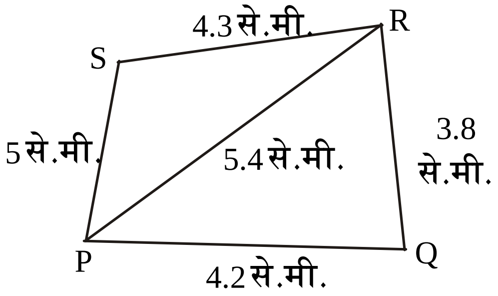
1. रेखा AB = 4.7 से.मी. को खींचो।
2. B से कोण 100^0 का चाँदा से किरण BX खींचो
3. 'B' को केंद्र मानकर 5.4 से.मी. का चाप BX पर बिंदु C पर काटता हुआ खींचो.
4. 'C' को केंद्र मानकर 5.7 से.मी. का चाप खींचो
5. 'A' को केंद्र मानकर 4.2 से.मी. त्रिज्या वाला चाप पहले चाप को D काटते हुए खींचो।.
6. CD और AC को मिलाओ. ABCD एक अभिष्ट चतुर्भुज होगा।

II. चार भुजाओं तथा कर्ण से चतुर्भुज की रचना.

उदाहरण : चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए PQ = 4.2 से.मी., QR = 3.8 से.मी., RS = 4.3 से.मी., SP = 5 से.मी. और PR = 4.8 से.मी.



कच्चा चित्र



रचना क्रम:

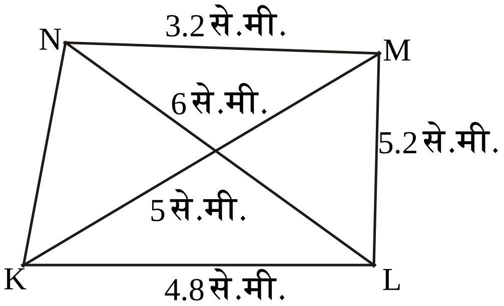
पहले हम ΔPQR (या) ΔPSR की रचना SSS नियम द्वारा करेंगे.

1. रेखा PQ = 4.2 से.मी. खींचो
2. 'Q' को केंद्र मानकर 3.8 से.मी. त्रिज्या वाला चाप खींचो।
3. 'P' को केंद्र मानकर 4.8 से.मी. त्रिज्या वाला चाप पहले चाप को 'R'पर काटता हुआ खींचो और PR तथा QR को मिलाइए।
4. फिर 'R' को केंद्र मानकर 4.3 से.मी. त्रिज्या वाला चाप खींचो
5. 'P' को केंद्र मानकर पहले चाप को S पर काटता हुआ 5 से.मी. त्रिज्या वाला चाप खींचो
6. PS तथा RS को मिलाओ। PQRS एक अभीष्ट चतुर्भुज होगा।

III. चतुर्भुज की रचना जब तीन भुजाएँ और दो कर्ण दिए गए हो

उदाहरण : चतुर्भुज KLMN की रचना कीजिए। जिसमें KL = 4.8 से.मी. LM = 5.2 से.मी., KM = 5 से.मी., MN = 3.2 से.मी. तथा LN = 6 से.मी. हो।

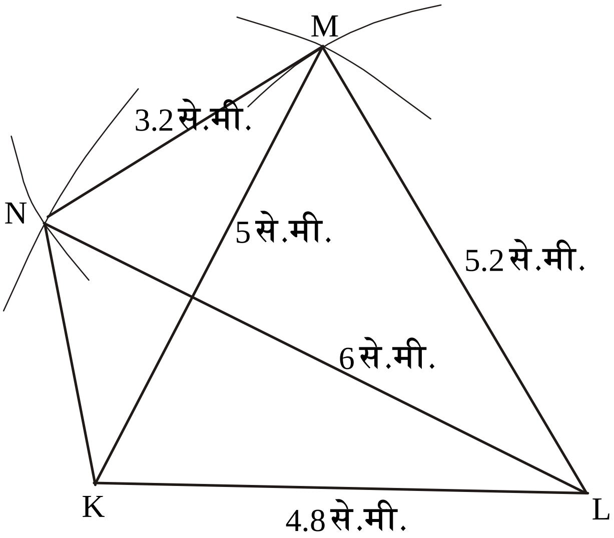
कच्चा चित्र



रचना क्रम:

पहले हम ΔKLM की रचना SSS नियम द्वारा करेंगे

1. 4.8 से.मी. वाली रेखा KL खींचो।
2. 'L' को केंद्र मानकर, 5.2 से.मी. त्रिज्या वाला चाप खींचो।
3. 'K'को केंद्र मानकर 5 से.मी. त्रिज्या वाला चाप पहले चाप को M पर काटते हुए खींचो।
4. फिर से 'M' को केंद्र मानकर 3.2 से.मी. त्रिज्या वाला चाप खींचो।
5. 'L' को केंद्र मानकर 6 से.मी. त्रिज्या वाला चाप पहले चाप को N पर काटते हुए खींचो।



6. LN, MN तथा KN. को मिलाओ। KLMN एक अभीष्ट चतुर्भुज होगा।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

I. नीचे दिए गए मापों से चतुर्भुज की रचना कीजिए।

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 5.5 से.मी., BC = 3.5 से.मी., CD = 4 से.मी., AD = 5से.मी. तथा $\angle A = 50^0$हो.
2. समानांतर चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 4.5 से.मी., QR = 3 से.मी. तथा $\angle PQR = 60^0$हो।

   (सूचना : PQ = SR तथा QR= PS)
3. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें PQ = 3.5 से.मी., QR = 4 से.मी., RS = 5से.मी., PS = 4.5 से.मी. तथा QS = 6.5 से.मी. हो।
4. समचतुर्भुज KLMN की रचना कीजिए जिसमें KL = 4 से.मी. तथा LN = 5.6 से.मी. हो। (सूचना: KL = LM = MN = KN)
5. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4. 2 से.मी., BC = 3 से.मी., AD = 2.8 cसे.मी., AC = 4.5 से.मी. तथा BD = 5 से.मी. हो.

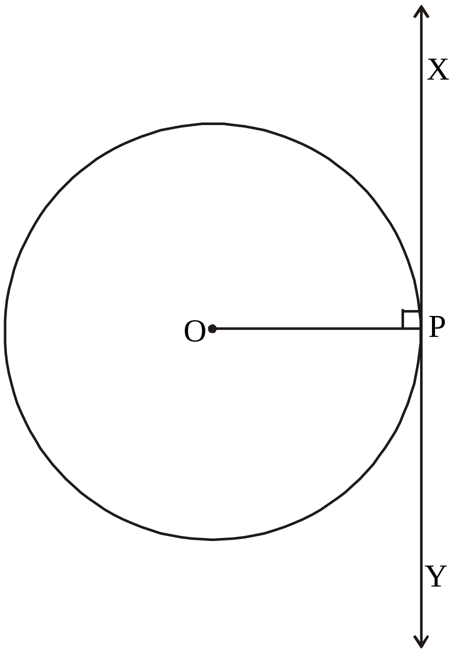
4.9.5 वृत्त के स्पर्श रेखा की रचना

जब हम वृत्त का केंद्र ज्ञात होता है उससे स्पर्श बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचना सीखा था।

I. वृत्त के स्पर्श बिंदु पर स्पर्श रेखा की रचना (जहाँ वृत्त का केंद्र ज्ञात हो)

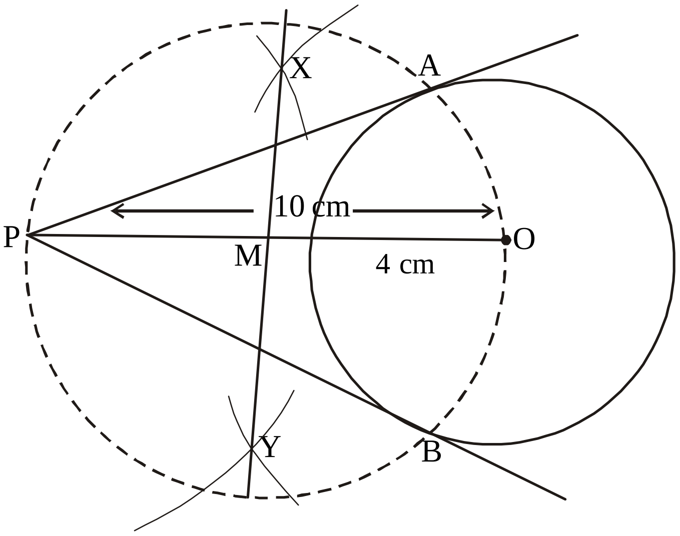
रचना क्रम:

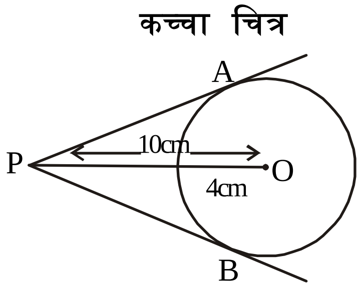
1. केंद्र 'O' से दी गई त्रिज्या से एक वृत्त खींचिए।
2. उस पर एक बिंदु 'P' अंकित कीजिए। OP को मिलाइए.
3. बिंदु 'P' से OP पर लंब खींचिए तथा उसको XY नाम दीजिए
4. बिंदु P पर XPY एक अभीष्ट स्पर्श रेखा होगी।



II. वृत्त के बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाओं की रचना (जहाँ वृत्त का केंद्र ज्ञात हो)

उदाहरण. 4 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त खींचकर, वृत्त के बाह्य बिंदु 'P' जो केंद्र से 10 से.मी. की दूरी पर है उससे स्पर्श रेखाएँ खींचिए।





रचना क्रम:

1. केंद्र ‘O’ से 4 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त खींचिए। केंद्र ‘O’ से 10से.मी. दूरी पर बिंदु ‘P’ को दर्शाइए। OP को मिलाइए।
2. OP का लंब समद्विभाजक XY खींचिए जो OP को M पर काटती है।.
3. ‘M’ को केंद्र मानकर MP या MO त्रिज्या से वृत्त खींचिए जो पहले वृत्त को A तथा B पर काटता है।
4. PA तथा PB को मिलाइए जो अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ होंगी।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

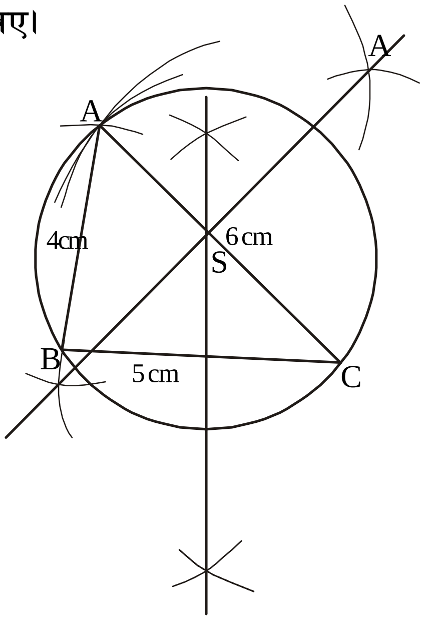
1. 3.5 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त खींचकर उस पर बिंदु ‘P’अंकित कीजिए। बिंदु ’P’ से वृत्त की स्पर्श रेखा खींचिए।
2. 2.8 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त पर बिंदु P से स्पर्श रेखा खींचिए।
3. 2.8 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त खींचकर केंद्र से 5 से.मी. दूरी पर बिंदु ‘P’ अंकित कर बिंदु ‘P’ से दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए।.
4. 2.5 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त खींचकर, केंद्र 6.8 से.मी. दूरी पर डाले गए बिंदु से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

4.9.6 त्रिभुज के परिगत तथा अंतःवृत्त की रचनाएँ

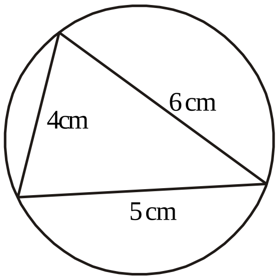
अब हम त्रिभुज के परिगत तथा अंतः वृत्त की रचना को सीखेंगे।

I. त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना

उदाहरण: त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 5 से.मी., 6 से.मी. तथा 4 से.मी. हो तो उसका परिगत वृत्त खींचिए।



कच्चा चित्र

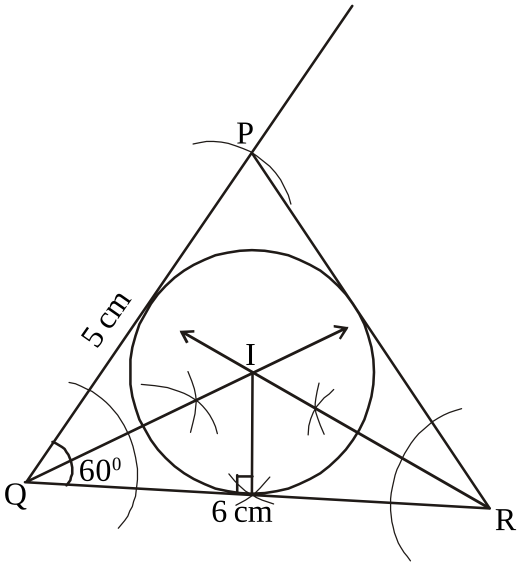


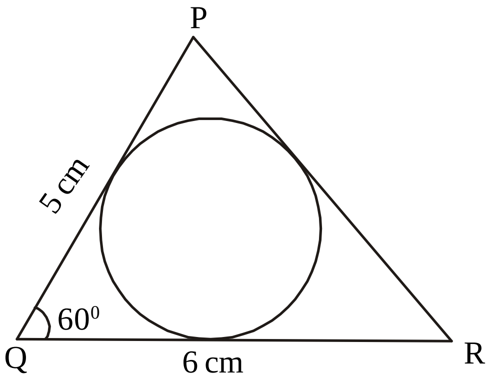
रचना क्रम :

1. ΔABC की रचना कीजिए (SSS या SAS या SAA नियम की सहायता से)
2. BC तथा AC का लंब समद्विभाजक खींचो जो S पर प्रतिच्छेदित करते है।
3. 'S' को केंद्र मानकर SA या SB या SC त्रिज्या से वृत्त खींचिए जो शीर्ष A, B तथा C, से गुजरता है यह अभीष्ट परिगत वृत्त होगा।

III. त्रिभुज के अंतः वृत्त की रचना

उदाहरण: त्रिभुज जिसकी भुजाएँ PQ = 5 से.मी, QR = 6 से.मी. और $\angle Q = 60^0$ के अंतः वृत्त की रचना कीजिए।





रचना क्रम :

1. ΔPQR की रचना दिए गए मापों से कीजिए। (SSS या SAS या SAA नियम की सहायता से)
2. $\angle Q$ तथा $\angle R$ का कोण समद्विभाजक खींचो जो I पर प्रतिच्छेदित होते है। QR का लंब समद्विभाजक IX खींचिए।
3. 'I' को केंद्र मानकर IX त्रिज्या से वृत्त खींचिए जो त्रिभुज की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है।
4. ΔPQR का यह अभीष्ट अंतःवृत्त होगा।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. ΔABC की रचना करो जिसमें $BC = 6$ से.मी., $\angle B = 60^0$ तथा $AB = 4.8$ से.मी. है उस त्रिभुज का परिगत वृत्त खींचिए।

2. ΔABC जिसमें $BC = 6.3$ से.मी., $\angle B = 60^0$ तथा $\angle C = 50^0$. हो तो उसका अंतः वृत्त खींचिए।

अभ्यास

1. ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4$से.मी., $BC = 6$ से.मी. and $\angle B = 90^0$हो.
2. ΔPQR की रचना कीजिए जिसमें $PQ = 8$ से.मी. $QR = 6$ से.मी. तथा $RS = 5$से.मी.हो.
3. ΔXYZ की रचना कीजिए जिसमें $YZ = 6.2$ से.मी., $\angle Y = 65^0$ और $\angle Z = 55^0$है.
4. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 2.9$ से.मी., $BC = 3.2$ से.मी., $CD = 2.7$ से.मी., $AD = 3.4$ से.मी. तथा $\angle A = 75^0$हो.
5. समचतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें $PQ = 4$ से.मी., $\angle PQR = 120^0$.
6. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4.5$ से.मी., $BC = 5.5$ से.मी., $CD = 4$ से.मी., $AD = 6$ से.मी. तथा $AC = 7$ से.मी.हो.
7. ABCD समानांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB = 6$ से.मी., $CD = 4.5$ से.मी. तथा $BD = 7.5$ से.मी. हो
8. चतुर्भुज KLMN की रचना कीजिए जिसमें $LM = 7.5$ से.मी. $KM = 6$से.मी., $MN = 5$से.मी., $KN = 5.5$ से.मी. तथा $LN = 10$ से.मी. हो.
9. त्रिज्या 3.2 से.मी. वाला वृत्त खींचकर उसपर बिंदु ‘P’ अंकित कीजिए तथा P से स्पर्श रेखा खींचिए।
10. 4.4 से.मी. त्रिज्या वाला वृत्त खींचकर, केंद्र से 9 से.मी. की दूरी पर स्थित बिंदु से दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए।
11. एक समबाहु त्रिभुज भुजा 4.5 से.मी. का बनाकर उसका परिगत वृत्त खींचिए।
12. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें $BC = 5$ से.मी., $AB = AC = 4.4$ से.मी. है उसका अंतःवृत्त खींचिए।

सारांश

- मौलिक रचनाओं की समीक्षा - लंब समद्विभाजक, कोण समद्विभाजक तथा दिए गए कोण जैसे दूसरे कोण की रचना।
- त्रिभुजों की रचना जहाँ
  - (a) तीन भुजाएँ दी गई है (SSS)
  - (b) दो भुजाएँ तथा संलग्न कोण दिया गया है (SAS)
  - (c) दो कोण और उनकी संलग्न भुजा दी गई है (SAA)
- चतुर्भुज की रचना जब
  - (a) चार भुजाएँ तथा एक कोण दिया गया हो (SSSA)
  - (b) चार भुजाएँ तथा एक कर्ण दिया गया हो (SSSSD)
  - (c) तीन भुजाएँ तथा दो कोण दिया गया हो (SSSDD)
- वृत्त की स्पर्श रेखाओं की रचना।
  - (a) वृत्त पर दिए गए बिंदु से
  - (b) बाह्य बिंदु से वृत्त से
- परिगत तथा अंतःवृत्त की रचना।

अध्याय 4.10

निर्देशांक ज्यामिती

4.10.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- कार्तीय निर्देशांक में बिंदुओं को अंकित करेंगे
- निर्देशांक तल में दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करेंगे।
- निर्देशांक बिंदुओं को ज्ञात करना जो दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के अंतर्गत $m_1 : m_2$ के अनुपा में विभक्त करती है।
- मध्य बिंदु के सूत्र की सहायता से रेखा खण्ड का मध्य बिंदु ज्ञात करेंगे।
- गुरुत्व केंद्र के सूत्र की सहायता से गुरूत्व केंद्र को ज्ञात करेंगे।

4.10.1 परिचय

वस्तु की स्थिति को कैसे ज्ञात करोगे?

उदाहरण के लिए मानलो एक हॉल में कुछ कुर्सीयाँ व्यवस्थित की गई है। आप अपने मित्र आदित्य से कहिए कि लाल रंग की कुर्सी पर बैठे आप उस कुर्सी के स्थान को कैसे बताएँगे?

रानी ने कहा "आदित्य पाँचवी पंक्ति, दूसरे स्तंभ में है।"

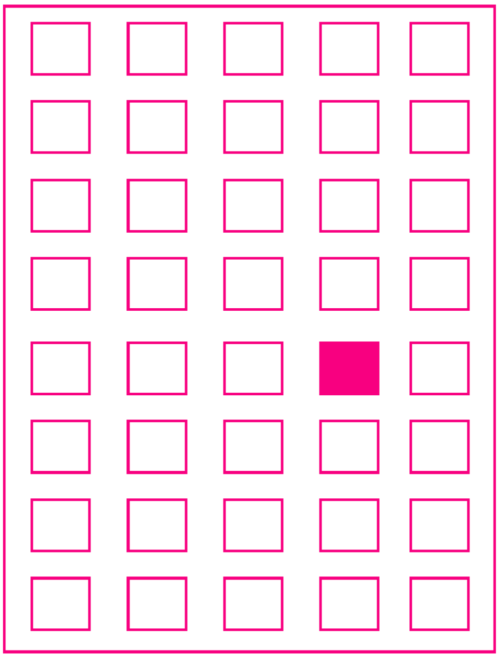
रमा ने कहा "वह दूसरी पंक्ति, पाँचवी स्तंभ में बैठा है"

राजू ने कहा "वह चौथे पंक्ति, पाँचवे स्तंभ में बैठा है"

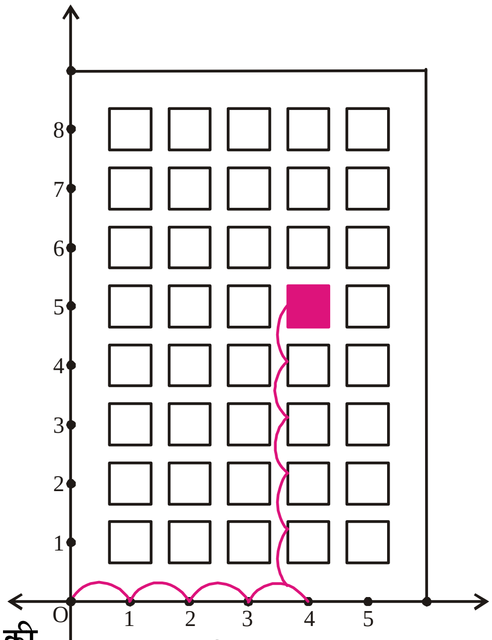
इनमें से किसने सही उत्तर दिया है?

क्या आप उसकी स्थिति को अंकित कर सकतो हो?

कौनसे बिंदु से हम पंक्ति तथा स्तंभों की गिनती करेंगे?



चित्र- 1



चित्र - 2

अब हॉल के किनारों को देखिए चित्र में दर्शाये अनुसार स्तंभ तथा पंक्तियों को देखिए पंक्ति तथा स्तंभ का प्रतिच्छेदन बिंदु "O" लीजिए। यदि हम "O" से हम पंक्ति तथा स्तंभों को गिनेंगे जैसे चित्र में दिखाया गया है।

हम "O" से लाल कुर्सी की स्थिति को देखेंगे तो वह चौथे स्तंभ तथा पाँचवें पंक्ति में है।

मानलो लाल कुर्सी की स्थिति बिंदु "P"है अर्थात् $p(x, y) = (4, 5)$.

इसलिए पहला निर्देशांक x- निर्देशांक 4, है तथा उसी प्रकार दूसरा निर्देशांक या y- निर्देशांक 5 है।

बिंदु को दो निर्देशांको से दर्शाने पर गणित की एक नई शाखा का जन्म हुआ जिसे निर्देशांक ज्यामिती कहते है।

रेने डेसकारटस (1596-1650), एक फ्रांसीसी गणितज्ञ तथा दार्शनिक ने निर्देशांक ज्यामिती के ज्ञान को विकसीत किया है।

रेने – डेसकारटस (1596-1650)

4.10.2 निर्देशांक पद्धति

हम दो संख्या रेखाएँ लेंगे जो एक दूसरे पर लंब होगी क्षैतिज रेखा XX′ को X-अक्ष तथा खडी संख्या रेखा YY′ को Y-अक्ष कहते है।

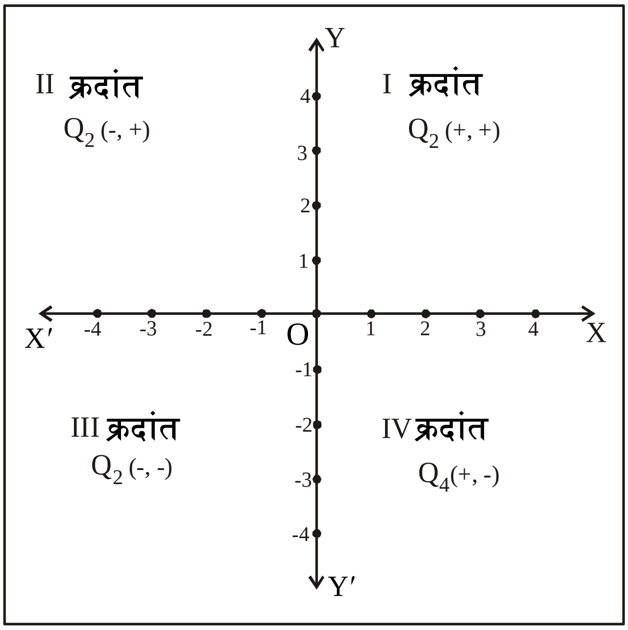
बिंदु जहाँ X′X तथा Y′Y एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है उन्हें मूल बिंदु कहते है और उसे "O" से सूचित करते है "O" के निर्देशांक (0, 0)है।

$\overrightarrow{OX}$ को X-अक्ष का धनात्मक कहते है,

$\overrightarrow{OY}$ को Y-अक्ष का धनात्मक कहते है.

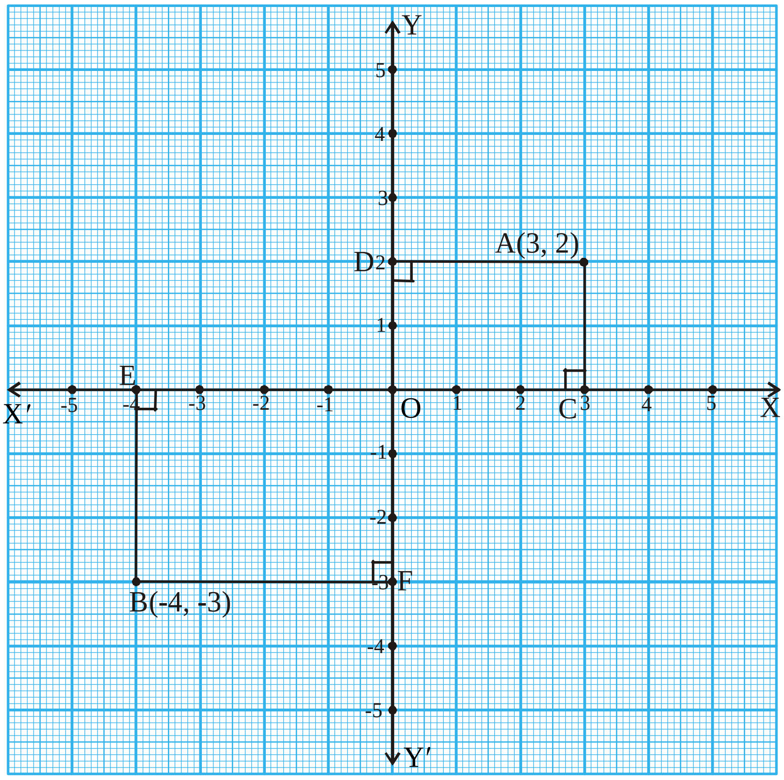
$\overrightarrow{OX'}$ को X-अक्ष का ऋनात्मक कहते है,

$\overrightarrow{OY'}$ को Y-अक्ष का ऋनात्मक कहते है



चारो क्रदांतों को Q_1, Q_2, Q_3 तथा Q_4 के घडी की विपरीत दिशा में दर्शाते है।

इस ग्राफ को देखिए:



बिंदु A प्रथम क्रदांत (Q_1) में तथा बिंदु B तीसरे क्रदांत (Q_3) में है।

अब हम A तथा B का अक्षों से अंतर ज्ञात करेंगे।

इसके लिए हम AC लंब X- अक्ष पर तथा AD को Y- अक्ष पर डालेंगे।

उसी प्रकार हम BE तथा BF लंब खींचेगे।

हम देखेंग

(i) बिंदु A का Y-अक्ष से लंबवत् दूरी धनात्मक दिशा X-अक्ष से होगी अर्थात् AD = OC = 3 इकाई इसे हम “A” का X- अक्ष का निर्देशांक कहेंगे।

(ii) बिंदु “A” का X- अक्ष से लंबवत् दूरी Y-अक्ष से धनात्मक दिशा में होगा AC = OD = 2 इकाई इसे हम A का Y-निर्देशांक कहते है।

(iii) बिंदु B का Y- अक्ष से लंबद्ध दूरी X-अक्ष से ऋणात्मक दिशा में होगा OE = BF = 4 इकाई इसे हम B का X- निर्देशांक -4 कहेंगे।

(सूचना: हम मूल बिंदु को इस संदर्भ में हम मानक मूल्य लेकर उसे दूरी के लिए उपयोग करेंगे यदि वह ऋणात्मक भी हो।)

(iv) बिंदु B को x-अक्ष से लंबवत् दूरी जो Y-अक्ष को ऋणात्मक दिशा में OF = EB = 3 इकाई। इसे हम “B” का Y-निर्देशांक -3 बतायेंगे और “B” के निर्देशांक (–4, –3) होंगे।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए - 1

1. निम्न बिंदु किस क्रदांत में होंगे लिखिए ?
   (i) (5, –3) (ii) (–7, –6) (iii) (–4, 3) (iv) (5, 8)
2. निम्न बिंदुओं के *x*-निर्देशांक तथा *y*-निर्देशांक को लिखिए।
   (i) (–4, 8) (ii) (0, 0) (iii) (5, 6) (iv) (–3, –5)
3. बिंदु (0, 13) किस अक्ष पर होगा? यह अक्ष से कितनी दूरी पर है?
4. बिंदु (–7, 0) किस अक्ष पर होगा? यह अक्ष से कितनी दूरी पर है?

4.10.3 दो बिंदुओं के मध्य दूरी

दूरी कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता इसलिए हम परम मूल्य लेंगे।

X-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं की दूरी X-निर्देशांक का अंतर होगा।

दो बिंदु $(x_1, 0), (x_2, 0)$ की दूरी $|x_2 - x_1|$ इकाई होगा।

उसी प्रकार Y-अक्ष पर स्थित दो बिंदुओं की दूरी Y-निर्देशांको का अंतर होगा।

उसी प्रकार $(0, y_1), (0, y_2)$ की दूरी $|y_2 - y_1|$ इकाई होगा।

उदाहरण 1 : A(–2, 0) तथा B(–6, 0) के बीच की दूरी क्या होगी?

हल: x-अक्ष के निर्देशांको का अंतर

$(-6) - (-2) = -4$ (ऋणात्मक)

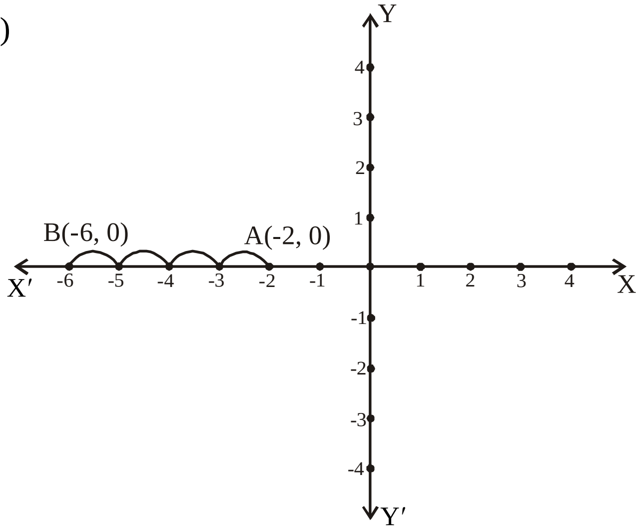
दूरी ऋणात्मक हीं हो सकती

इसलिए हम उसका परम मूल्य होगा

इसलिए दूरी

$= |-6 - (-2)| = |-4|$

AB = 4 इकाई.



उदाहरण .2 : (0, 4) तथा (6, 0)?

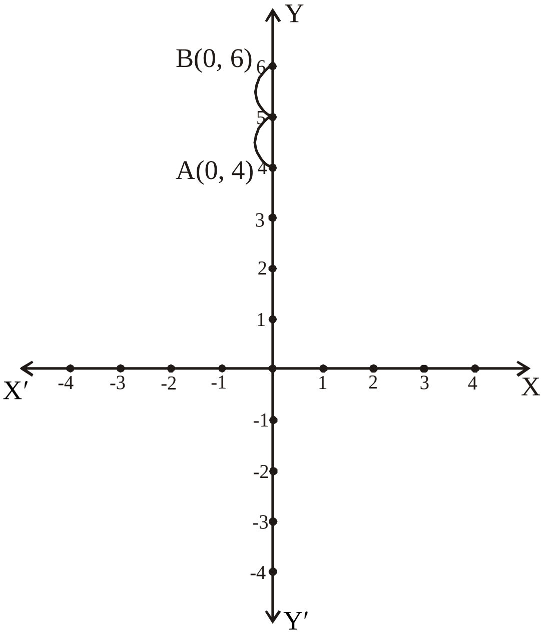
हल : मानलो A(0, 4) तथा B(0, 6) है।.

उनके मध्य दूरी

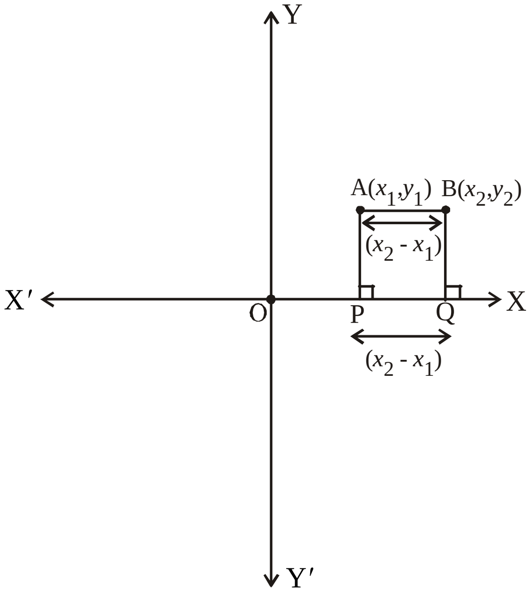
A और B = $|6 - 4|$

AB = $|2|$

AB = 2 इकाई



अक्षों के समानांतर रेखाओं पर स्थित दो बिंदुओं के मध्य दूरी



मान लीजिए बिंदु A(x_1, y_1) तथा B(x_2, y_1) होंगे।

y-निर्देशांक समान होने के कारण दिए गए बिंदु X-अक्ष के समानांतर रेखा पर स्थित होंगे।

AP तथा BQ को X-अक्ष पर लंब डाला गया है।.

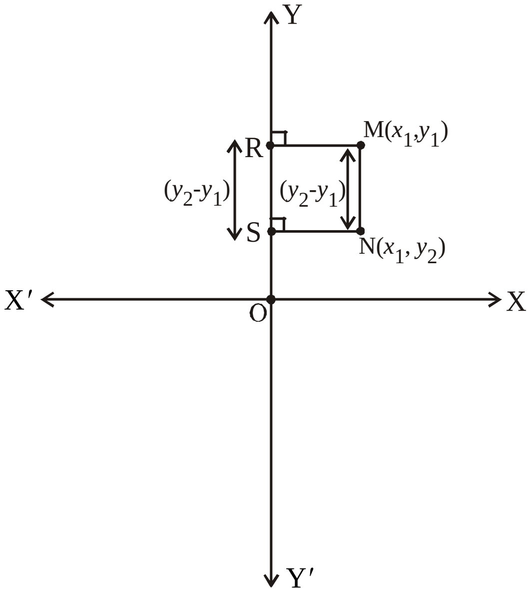
चित्र का अवलोकन कीजिए।

APQB एक आयत है।

$\therefore$ AB = PQ

PQ = $|x_2 - x_1|$

$\therefore$ AB = $|x_2 - x_1|$.



उसी प्रकार दो बिंदुओं को जोडने वाली रेखा M(x_1, y_1), N(x_1, y_2) Y-अक्ष के समानांतर होगी (x-निर्देशांक समान है) .

चित्र का अवलोकन कीजिए।

RSNM एक आयत है।

इसलिए,

MN = RS

RS = $|y_2 - y_1|$

$\therefore$ MN = $|y_2 - y_1|$.

उदाहरण 1 : बिंदु (–4, –3) तथा (–8, –3) के मध्य-दूरी क्या होगी?

हल : चूँकि y-निर्देशांक समान है

दिए गए बिंदु X-अक्ष के समानांतर रेखा पर होंगे

इसलिए (–4, –3) तथा (–8, –3) के मध्य दूरी

$$|x_2 - x_1| = |-8 - (-4)| = |-8 + 4|$$

$$= |-4| = 4 \text{ इकाई}.$$

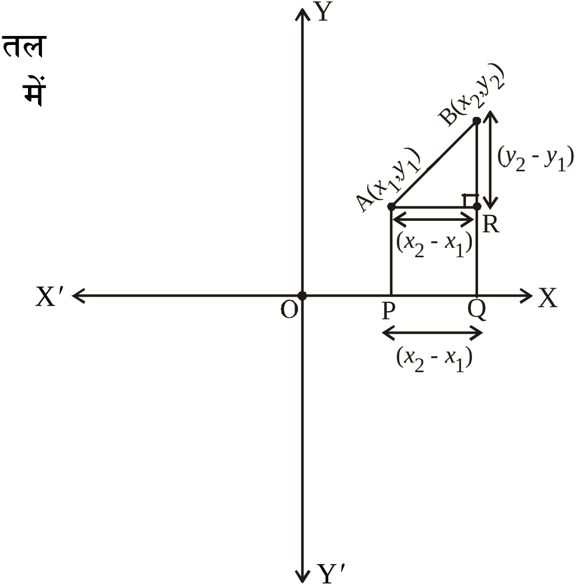
उदाहरण 2 : बिंदु (3, 4) तथा (3, 8) के मध्य दूरी को ज्ञात कीजिए?

हल: चूँकि, x-निर्देशांक समान है इसलिए दिए गए बिंदू y-अक्ष के समानांतर रेखा पर स्थित होंगे।

इसलिए (3, 4) तथा (3, 8) के मध्य दूरी

$$= |y_2 - y_1|$$
$$= |8 - 4|$$
$= 4$ इकाई

तल की रेखा X-Y पर स्थित दो बिंदुओं के मध्य दूरी



मान लीजिए A (x_1, y_1) तथा B(x_2, y_2) तल की किसी रेखा पर स्थित दो बिंदु चित्र में दर्शाए अनुसार होंगे।

AP तथा BQ X-अक्ष पर लंब खींचिए

बिंदु A से BQ पर AR एक लंब खींचिए।

तब OP = x_1, OQ = x_2

इसलिए, PQ = OQ – OP = $x_2 - x_1$

APQR के आकार का अवलोकन कीजिए। एक आयताकार होगा।

इसलिए, PQ = AR = $x_2 - x_1$

तथा QB = y_2, QR = y_1

इसलिए, BR = QB – QR = $y_2 - y_1$.

ΔARB (समकोण त्रिभुज से)

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (पायथागोरस प्रमेय द्वारा)

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

अर्थात् $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

इसलिए A तथा B के मध्य दूरी का सूत्र होगा,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

उदाहरण 1 : दो बिंदु A(4, 3) तथा B(8, 6) के मध्य - दूरी ज्ञात कीजिए।

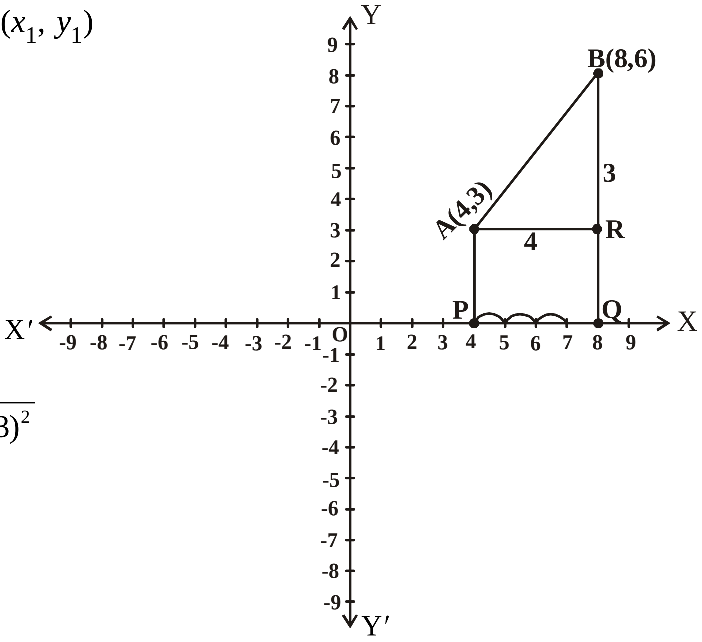
हल: दिए गए बिंदुओं की तुलना (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से करेंगे।

$x_1 = 4, \ x_2 = 8, y_1 = 3$

और $y_2 = 6.$

दूरी के सूत्र द्वारा

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



दूरी $AB = \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2}$

$AB = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

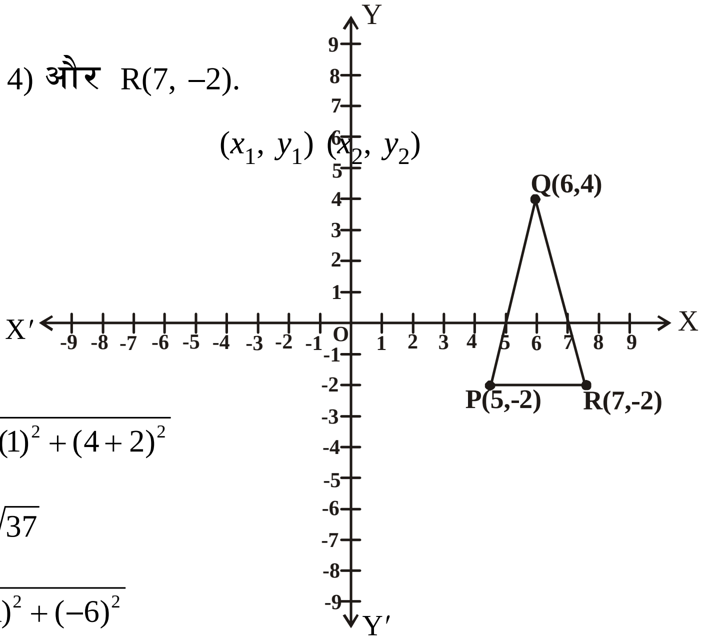
AB = 5 इकाई.

उदाहरण 2 : बिंदु (5, –2), (6, 4) तथा (7, –2) समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष होंगे इसकी जाँच कीजिए।

हल : मानलो बिंदु P(5, –2) Q(6, 4) और R(7, –2).

किसी भी दो बिंदुओं की दूरी (x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



दूरी के सूत्र अनुसार हम,

PQ, QR तथा PR ज्ञात करेंगे।

$PQ = \sqrt{(6-5)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(1)^2 + (4+2)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

$QR = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

$PR = \sqrt{(7-5)^2 + (-2(-21)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$

PQ = QR = $\sqrt{37}$ इकाई तथा PR = 2 इकाई

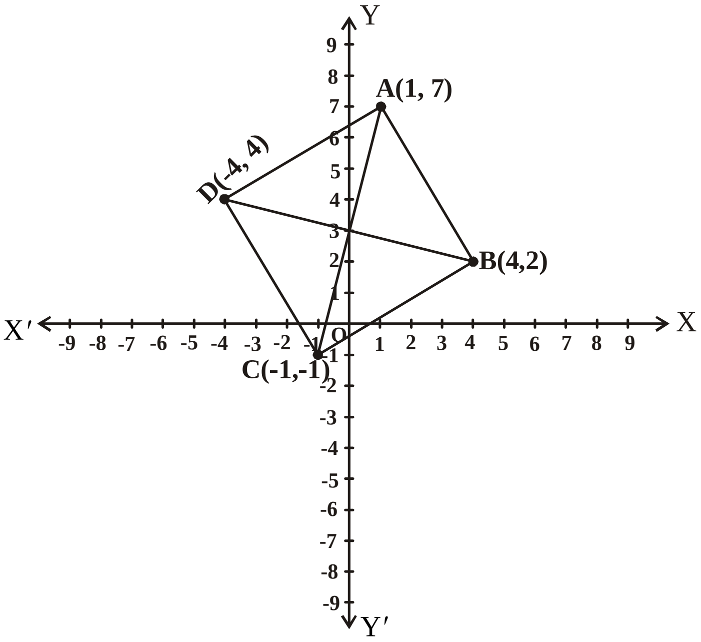
ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

तथा (5, –2), (6, 4), (7, –2) समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष होंगे।

उदाहरण 3 : सिद्ध कीजिए बिंदु (1, 7), (4, 2), (–1, –1) तथा (–4, 4) वर्ग के शीर्ष होंगे।

हल : मानलो A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) और D(–4, 4) होंगे।

ABCD को वर्ग बताने के लिए हमें उसका एक गुण लेना होगा जिसके अनुसार चारों भुजाएँ समान होते है।



अब,

भुजाएँ

$$AB = \sqrt{(4-1)^2+(2-7)^2} = \sqrt{(3)^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(-1-4)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-4-(-1))^2+(4-(-1))^2} = \sqrt{(-4+1)^2+(4+1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(5)^2}$$

$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1-(-4))^2+(7-4)^2} = \sqrt{(1+4)^2+(3)^2} = \sqrt{(5)^2+(3)^2}$$

$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

कर्ण

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-7)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-8)^2}$$

$$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(-4-4)^2+(4-2)^2} = \sqrt{(-8)^2+(2)^2}$$

$$= \sqrt{64+4} = \sqrt{68}.$$

चूँकि AB = BC = CD = DA तथा AC = BD.

ABCD चतुर्भुज की चारों भुजाएँ तथा कर्ण समान है।

इसलिए ABCD एक वर्ग है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए 2

1. निम्नलिखित बिंदुओं की मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।
   (i) (2, 3) और (4, 1)
   (ii) (–2, –3) और (3, 2)
2. बिंदु (3, 2), (–2, –3) और (2, 3) कौनसा त्रिभुज बनाते है ?
3. बिंदु (–4, –7), (–1, 2), (8, 5) और (5, –4) क्रम में समचतुर्भुज के बिंदु है सिद्ध कीजिए।
4. वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (3, 2) और और जो (–5, 6) से गुजरता है। (सूचनाः दिए गए बिंदुओं के लिए दूरी का सूत्र लगाइए।).
5. बिंदु (1, 5), (2, 3) और (–2, –1) संरेखीय बिंदु है या नहीं सिद्ध कीजिए।

संरेखीय बिंदु

बिंदु जो एक रेखा पर स्थित होते है उन्हें संरेखीय बिंदु कहते है।

बिंदु A, B और C संरेखीय बिंदु है।

इसलिए AB + BC = AC. लिखेंगे।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए बिंदु A(4, 2), B(7, 5) और C(9, 7) तीन संरेखीय बिंदु है।

अब हम AB, BC और AC. की दूरी ज्ञात करेंगे।

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

इसलिए, $AB = \sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{(3)^2+(3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ इकाई

$$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$= \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{(5)^2+(5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2}$$

अब $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC.$

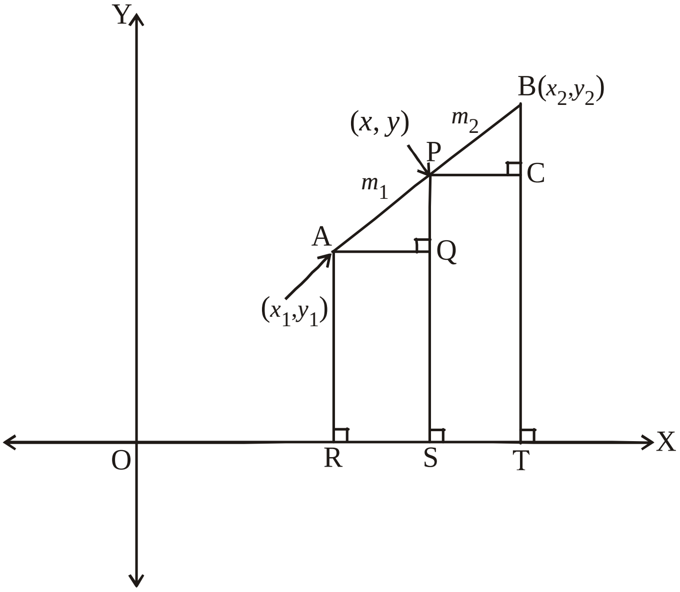
इसलिए दिए गए बिंदु (4, 2) (7, 5) और (9, 7) संरेखीय बिंदु है।

4.10.4 विभाजन सूत्र

कोई दो बिंदु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ लीजिए तथा मान लीजिए बिंदु $P(x, y)$ AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अंतर्गत विभाजन करता है।

अर्थात् $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ...(1)

चित्र को देखिए।



AR, PS, BT को X-अक्ष पर लंब खींचिए।

AQ तथा PC को X-अक्ष पर लंब खींचिए।

$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

इसलिए $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{PC} = \dfrac{PQ}{BC}$ ...(2)

अब $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y.$

इन मूल्यों को समीकरण (1) में लगाने पर

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$$

$\frac{m_1}{m_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$, लेने पर $x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$ प्राप्त होगा।

उसी प्रकार $\frac{m_1}{m_2}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$, हमें प्राप्त होगा

$$y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

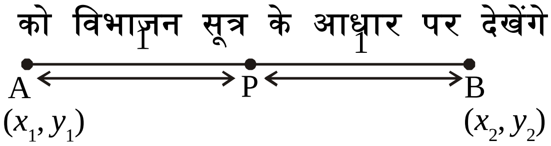
अतः बिंदु $p(x, y)$ से $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$, को जोडने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ अनुपात में अंतर्गत विभाजित करता है।

$$\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right) \text{ Here } m_1 + m_2 \neq 0.$$

मध्य - बिंदु

"एक बिंदु जो रेखा खण्ड को 1 : 1 में विभाजित करता है उसे उस रेखा का मध्य बिंदु'' कहते है।.

मध्य बिंदु को विभाजन सूत्र के आधार पर देखेंगे।



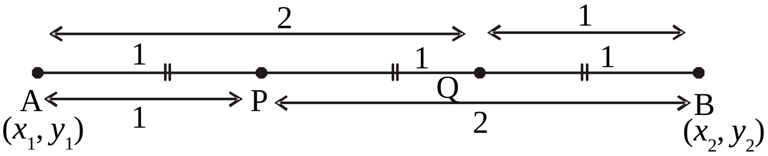
मध्य बिंदु "P" रेखा को 1 : 1 में विभाजित करता है।

इसलिए, मध्य बिंदु "P" के निर्देशांक जो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को जोडती है।

$$\Rightarrow \left(\frac{1.x_1+1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1+1.y_2}{1+1}\right) \quad \Rightarrow \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

त्रिभाजक बिंदु

बिंदु जो रेखा को 3 भागों में विभाजित करते है उन्हें त्रिभाज्यक बिंदु कहते है।



बिंदु P तथा Q रेखा AB को $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को तीन समान भागों में बाँटा इसलिए P विभाजित AB को अंतर्गत 1 : 2 में, उसी प्रकार Q भी AB को अंतर्गत 2 : 1 में विभाजित करती है। .

इसलिए कोई भी दो बिंदु जो रेखा को 1 : 2 तथा 2 : 1 में विभाजित करती है उन्हें त्रिजाकर बिंदु कहते है।

विभाजन सूत्र द्वारा

P के निर्देशांक $= \left(\frac{1.x_2+2.x_1}{1+2}, \frac{1.y_2+2.y_1}{1+2}\right)$

$$\therefore \quad P = \left(\frac{x_2+2x_1}{3}, \frac{y_2+2y_1}{3}\right)$$

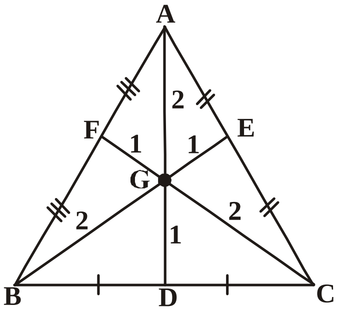
Q के निर्देशांक $= \left(\frac{2x_2+x_1}{2+1}, \frac{2y_2+y_1}{2+1}\right)$

$$\therefore \quad Q = \left(\frac{2x_2+x_1}{3}, \frac{2y_2+y_1}{3}\right)$$

त्रिभुज का गुरूत्व केंद्र

ΔABC में D, E और F भुजाएँ BC, AC तथा AB के मध्य बिंदु है।

रेखा जो A से मध्य बिंदु BC अर्थात् AD को मध्यिका कहते है। उसी प्रकार BE तथा CF भी मध्यिकाएँ है।



इसलिए बिंदु जहाँ त्रिभुज की तीनों मध्यिकाएँ एक दूसरे को काटती है उसे त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र कहते है.

गुरुत्व केंद्र (G) त्रिभुज की मध्यिकाओं को 2 : 1 में विभाजित करता है।

$\therefore$ AG : GD = 2 : 1

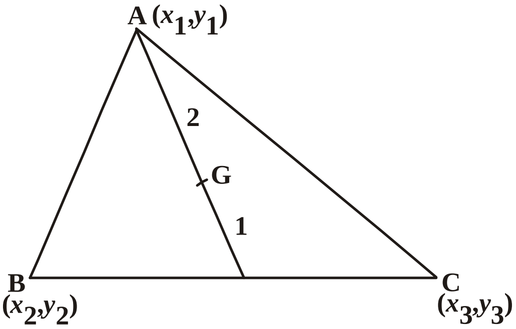
मान लीजिए ΔABC के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ है।

आप इस त्रिभुज के गुरुत्व केंद्र कैसे ज्ञात करेंगे?

मान लीजिए मध्यिका AD त्रिभुज के आधार को समद्विभाजित करती है।

अतः $D = \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

अब AD पर बिंदु G उसे 2 : 1 के अनुपात में अंतर्गत विभाजित करता है वह उसका गुरुत्व केंद्र होगा, यदि (x, y) "G" को तो



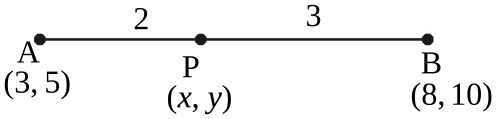
$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.(y_1)}{2+1}\right]$$

$$G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

अतः हम गुरुत्व केंद्र के निर्देशक इस प्रकार लिख सकते है $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

उदाहरण 5 : उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो (3, 5) तथा (8, 10) बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 में अंतर्गत विभाजित करता है।

हल: मानलो बिंदु $P(x, y)$ अभीष्ट बिंदु है A(3, 5), B(8, 10).



विभाजन सूत्र से

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$x = \frac{2(8)+3(3)}{2+3} = \frac{16+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$y = \frac{2(10)+3(5)}{2+3} = \frac{20+15}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$P(x, y) = (5, 7)$ अभीष्ट बिंदु होगा।

उदाहरण 6 : बिंदु (2, 7) और (12, –7) को जोडने वाली रेखा का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल: मानलो मध्यबिंदु $M(x, y)$ होगा जो बिंदु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2)

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$\therefore$ बिंदु (2, 7) तथा (12, –7) का मध्य बिंदु

$$M(x, y) = \left(\frac{2+12}{2}, \frac{7+(-7)}{2}\right) = \left(\frac{14}{2}, \frac{0}{2}\right)$$

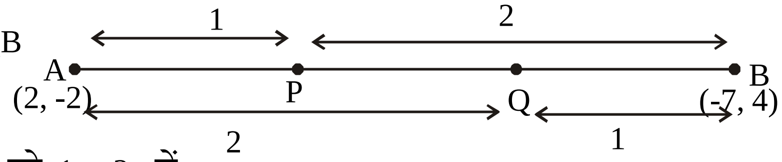
$$M(x, y) = (7, 0).$$

उदाहरण 7 : रेखा के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदु A (2, –2) तथा B (–7, 4) को जोडती है।

हल: मान लीजिए P तथा Q बिंदु AB के त्रिभाजक बिंदु है।

अर्थात् AP = PQ = QB

(चित्र को देखिए)



अर्थात् बिंदु P, AB को 1 : 2 में विभाजित करता है,

P के निर्देशक

(विभाजन सूत्र द्वारा)

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{1(-7) + 2(2)}{1+2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1+2}\right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

अब, Q भी AB को 2 : 1 के अंतर्गत विभाजित करता है

अर्थात् Q के निर्देशांक

$$= \left(\frac{2(-7) + 1(2)}{2+1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2+1}\right)$$

अर्थात्, $$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$$

इसलिए रेखा के त्रिभाजक बिंदु P(–1, 0) तथा Q(–4, 2). होंगे।

उदाहरण. 8 : उस त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–4, 6), (2, –2) तथा (2, 5) होंगे।

हल : गुरुत्व केंद्र के निर्देशांक $= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

∴ बिंदु (–4, 6), (2, –2) तथा (2, 5) वाले त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र

$$\left(\frac{-4+2+2}{3}, \frac{6+(-2)+5}{3}\right) = \left(\frac{0}{3}, \frac{9}{3}\right) = (0, 3)$$

∴ गुरूत्व केंद्र (0, 3) होगा।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए 3

1. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो $(-1, 7)$ तथा $(4, -3)$ को जोडने वाली रेखा को $2 : 3$ में अंतर्गत विभाजन करता है।
2. बिंदु $(4, -1)$ तथा $(-2, -3)$. को जोडने वाली रेखा का त्रिभाजक बिंदु ज्ञात कीजिए।
3. $(3, 0)$ तथा $(-1, 4)$. को जोडने वाली रेखा का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।
4. $(-1, 3)$, $(6, -3)$ तथा $(-3, 6)$ शीर्ष वाले त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए।

अभ्यास

1. बिंदु $(3, 1)$, $(6, 4)$ तथा $(8, 6)$ संरेखीय है या नहीं जाँच कीजिए।

   [**सूचना :** यदि A, B, C संरेखीय हो तो $AB + BC = AC$]
2. सिद्ध कीजिए कि $(-7, -3)$, $(5, 10)$, $(15, 8)$ तथा $(3, -5)$ दिए गए क्रमानुसार समानांतर चतुर्भुज के शीर्ष होंगे?

   [**सूचना:** ABCD समानांतर चतुर्भुज में $AB=CD$, $BC = AD$ तथा कर्ण $AC \neq BD$]
3. बिंदु $(-6, 10)$ तथा $(3, -8)$ को जोडने वाली रेखा को $2 : 7$ में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

   [**सूचना :** विभाजन सूत्र का उपयोग]
4. बिंदु $(2, 6)$ तथा $(-4, 8)$. को जोडने वाली रेखा के त्रिभाजक बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

   [**सूचना :** बिंदु P, Q ज्ञात कीजिए जो रेखा AB को 1:2 तथा 2:1 में अंतर्गत विभाजन करती है।]
5. सिद्ध कीजिए $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ $C(0, a\sqrt{3})$ शीर्ष वाला त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होगा।

   [**सूचना:** दूरी के सूत्र से AB, BC, AC ज्ञात कर $AB = BC = CA$ सिद्ध कीजिए]
6. बिंदु $(3, 2)$ तथा $(-5, 6)$ को जोडने वाली रेखा का मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

   [**सूचना :** मध्यबिंदु का सूत्र लगाइए।].
7. $(-1, 3)$, $(6, -3)$ तथा $(-3, 6)$ शीर्ष वाले त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए।.
8. राधा कहती है कि बिंदु $P(x, y)$ की दूरी मूल बिंदु $O(0, 0)$ से $\sqrt{x^2 + y^2}$ है। क्या आप राधा से सहमत है? यदि नहीं तो क्यों?
9. बिंदु $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 3)$ से कौनसा त्रिभुज बनेगा?

   [**सूचना :** ΔABC में AB, BC तथा CA का लंब ज्ञात कीजिए।]
10. दिए गए दो बिंदु $(\sin\theta, \cos\theta)$, $(-\cos\theta, \sin\theta)$ की मध्य दूरी क्या होगी?

    [**सूचना :** दूरी का सूत्र कर $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ को लगाइए।]

11. वृत्त के व्यास के अंतिम बिंदु (2, 5) तथा (–4, 1) हो तो वृत्त का केंद्र बिंदु ज्ञात कीजिए। [**सूचना:** मध्य बिंदू का सूत्र लगाइए।]

12. यदि बिंदु P(–1, 1) उस रेखा का मध्य बिंदु है जो Q(–3, b) तथा R(1, b + 4) को जोडती है तो “b” का मूल्य ज्ञात कीजिए?

    [**सूचना :** QR का मध्य बिंदु “P” होगा।].

13. यदि बिंदु (4, 0) तथा (0, x) की दूरी 5 इकाई हो तो x का मूल्य [ ]

    (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

14. मूल बिंदू से A(4, –3) की दूरी होगी [ ]

    (A) 1 इकाई (B) 7 इकाई (C) 5 इकाई (D) 3 इकाई

15. (7, 5), (5, 7) तथा (–3, 3) शीर्ष ाले त्रिभुज का गुरुत्व केंद्र [ ]

    (A) (3, –5) (B) (–3, 5) (C) (–3, –5) (D) (3, 5)

16. दो बिंदुओं के निर्देशांक (6, 0) तथा (0, 8) हो तो मध्य बिंदु [ ]

    (A) (3, 4) (B) (6, 8) (C) (0, 0) (D) (4, 3)

अभ्यास

- बिंदु को दो निर्देशांको से दर्शाने पर गणित की एक नई शाखा का जन्म हुआ उसे निर्देशांक ज्यामिती कहते है।
- बिंदु जहाँ X X′ तथा Y Y′ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है उसे मूल कहते है इसे “O” से दर्शाया जाता है मूलबिंदु (0, 0).
- चार क्रदांतों को Q_1, Q_2, Q_3 और Q_4 को दर्शाया जाता है।
- दो बिंदु $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ के मध्य दूरी $|x_2 - x_1|$ इकाई होगी। उसी प्रकार $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ के मध्य दूरी $|y_2 - y_1|$ इकाई होगी।
- दो बिंदु $A(x_1, x_2)$ तथा $B(y_1, y_2)$ के मध्य दूरी $(x_2 – x_1) \wedge 2 + (y_2 – y_1) \wedge 2$.
- जो बिंदु एक रेखा पर स्थित होते है उन्हें संरेखीय बिंदु कहते है।
- यदि बिंदु p(x, y) जो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$, को जोडने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ अनुपात में अंतर्गत विभाजित करता है।

  $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$ यहाँ $m_1 + m_2 \neq 0$.
- किसी रेखा को यदि बिंदु 1 : 1, के अनुपात में विभाजित करता है तो उसे मध्य बिंदु कहते है।
- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ यदि ΔABC. के शीर्ष हो तो उसका गुरूत्व केंद्र $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

इकाई 5 क्षेत्रमिति

अध्याय 5.1

सरल चित्रों के क्षेत्रफल तथा परिमिति

5.1.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- समतल आकारों के क्षेत्रफल वाले प्रश्नों को हल करेंगे
- क्षेत्र का क्षेत्रफल, वलय पथ तथा वलय के क्षेत्रफल को समझकर उस पर आधारित प्रश्नों को हल करेंगे।
- समलत आकृतियों की क्षेत्रफल के सूत्र के पदों की व्याख्या करेंगे
- समलत आकृतियों की क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता को पहचानेंग

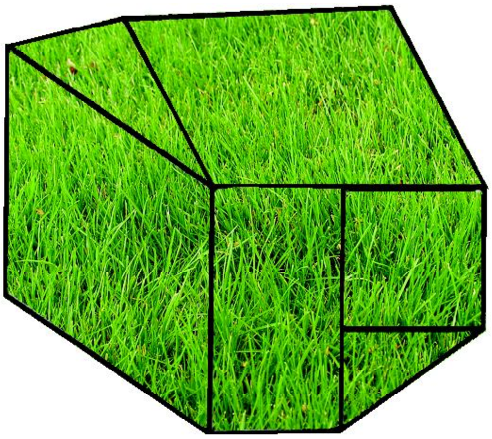
5.1.1 परिचय

देवर्ष अपने खेत का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहता है। जो कि अनियमित आकार (चित्र -1) में है इसलिए उसने उसे उस खेत को कुछ नियमित आकारों में विभाजित करता है। जैसे - त्रिभुज, समानांतर चतुर्भुज, आयत तथा वर्ग (चित्र-2) ‘‘वह सोचता है कि यदि मैं इन सभी आकारों का क्षेत्रफल जानूँगा तो मैं मेरे खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकता हूँ’’

चित्र(i), को देखिए वह अनियमित आकृति है लेकिन चित्र(2) में खेत को 2 त्रिभुजों, 2 चतुर्भुज, 1 आयत तथा 1 वर्ग में विभाजित किया गया है यदि हम इन 6 ज्यामितिय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कर उन्हें जोडने पर हमें खेत का क्षेत्रफल प्राप्त होगा।

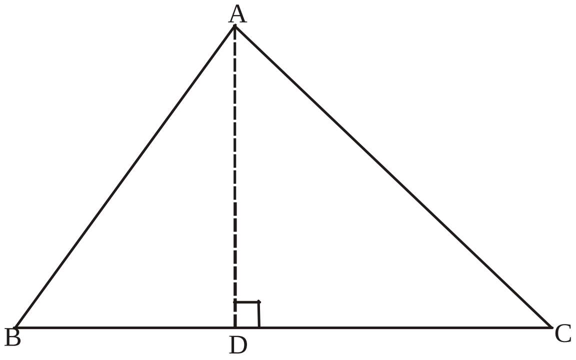
परिमिति अर्थात् आकृति के चारों ओर की दूरी तथा क्षेत्रफल अर्थात् द्वारा घेरा गया क्षेत्र होता है। क्षेत्रफल तथा परिमिति का ज्ञात लोग दैनिक जीवन में उपयोग करता है।


(i)


(ii)

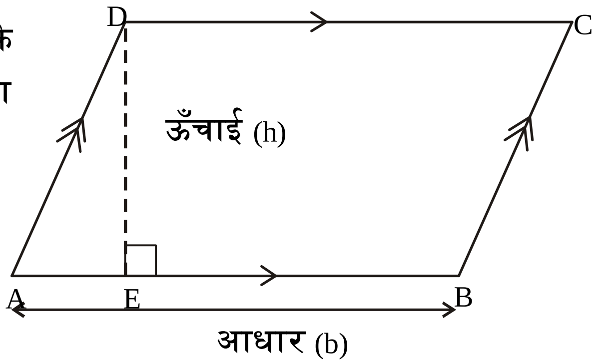
त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार (b) तथा ऊँचाई (h) के गुणनफल का आधा होता है

अर्थात् $A = \frac{1}{2}bh$.

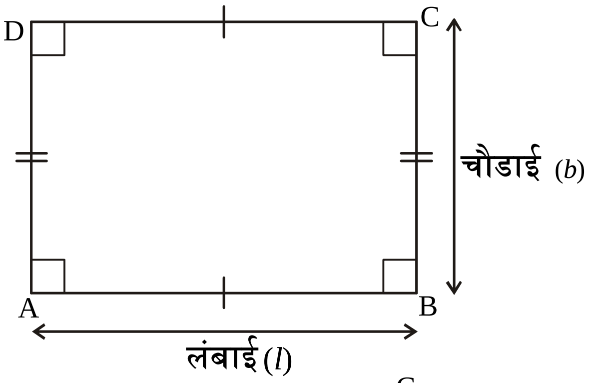


त्रिभुज के शीर्ष से उसके सम्मुख वाली भुजा पर डाले गए लंब को उसकी ऊँचाई कहते है।

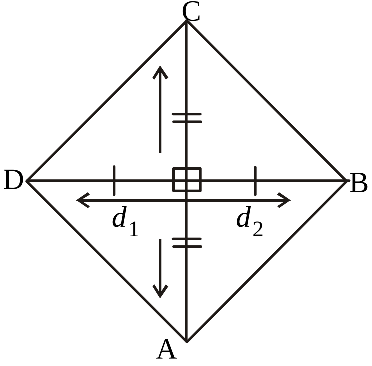
यहाँ ΔABC में $AD \perp BC$, AD पर सिमें ΔABC की ऊँचाई AD है।



समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार तथा उस पर डाले गए ऊँचाई का गुणनफल होगा अर्थात् $A = bh$

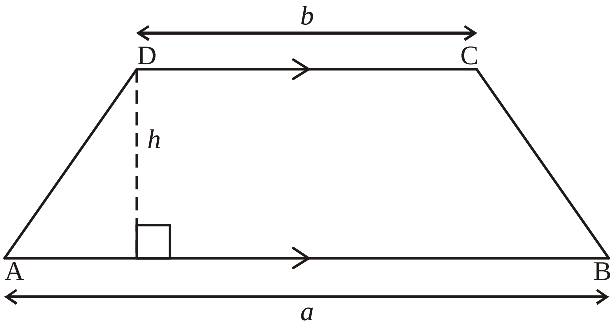


आयत का क्षेत्रफल उसके लंबाई (l) तथा चौडाई (b) का गुणनफल होता है अर्थात् , $A = lb$



समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके कर्णों के गुणनफल का आधा होता है।

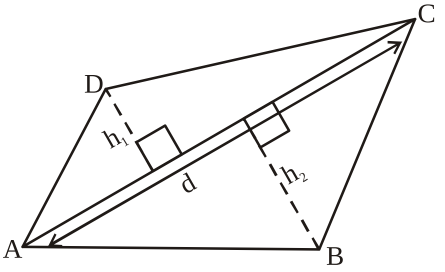
अर्थात् क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}d_1d_2$ जहाँ d_1, d_2 उसके कर्णों की लंबाई होगी।



एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल समानांतर भुजाओं का योगफल तथा उसका भुजाओं के बीच की दूरी के गुणनफल का आधा होता है।

$A = \frac{1}{2} \times$[समानांतर भुजाओं के बीच की दूरी] $\times$ [समानांतर भुजाओं का योग]

अर्थात्, $A = \frac{1}{2} \times h[a + b]$ जहाँ a तथा b समानांतर भुजाएँ तथा h उनके बीच की दूरी होगी।

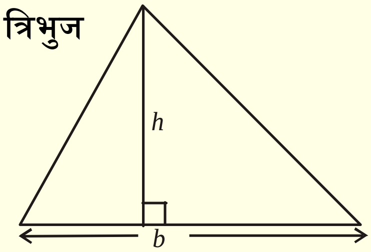
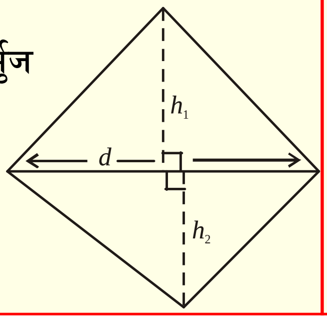


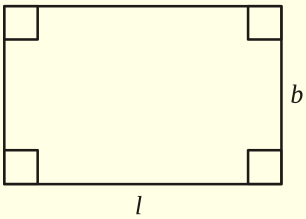
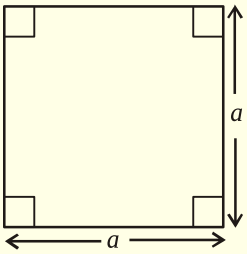
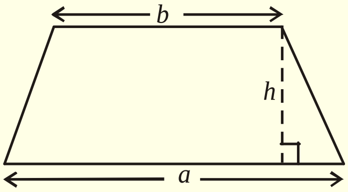
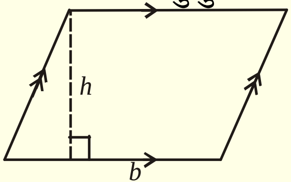
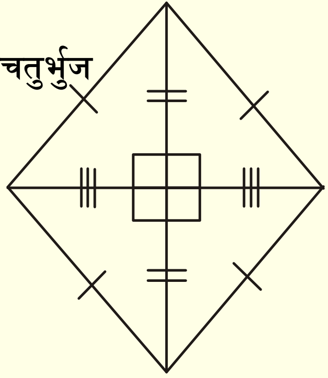
चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके कर्ण का गुणनफल का आधा तथा उन पर डाले गए लंब का योगफल

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$

जहाँ 'd' को कर्ण AC की लंबाई तथा and h_1, h_2 उस पर डाले गए लंब होंगे।

हमने क्या चर्चा की

आकृति	क्षेत्रफल का सूत्र	विवरण
1. त्रिभुज 	$A = \frac{1}{2}bh$	b - आधार h - ऊँचाई
2. चतुर्भुज 	$A = \frac{1}{2}b[h_1 + h_2]$	d-कर्ण की लंबाई h_1- कर्ण पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब h_2 - कर्ण पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया दूसरा लंब

3. आयत 	$A = lb$	l - लंबाई b - चौडाई
4. वर्ग 	$A = a^2$	a - भुजा की लंबाई
5. समलंब चतुर्भुज 	$A = \frac{h}{2}[a+b]$	a, b = समानांतर भुजाएँ h - समानांतर भुजाओं के बीच दूरी
6. समानांतर चतुर्भुज 	$A = bh$	b - आधार h - ऊंचाई (समानांतर भुजाओं के मध्य दूरी)
7. समचतुर्भुज 	$A = \frac{1}{2}d_1d_2$	d_1 पहले कर्ण की लंबाई d_2 दूसरे कर्ण की लंबाई

उदाहरण 1 : एक आयताकार खेत की लंबाई 6 मी तथा 4 मी होतो उसका क्षेत्रफल तथा परिमिति ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार खेत की लंबाई (l) = 6मी

आयताकार खेत की चौडाई (b) = 4मी

$\therefore$ क्षेत्रफल (A) = लंबाई × चौडाई

= 6मी × 4मी = 24व.मी

परिमिति (P) = $2(l + b)$

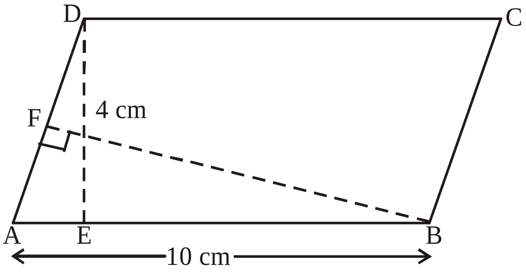
= 2(6 + 4)

= 2 × 10

= 20मी

उदाहरण 2 : समानांतर चतुर्भुज ABCD में, AB = 10 से.मी. तथा DE = 4 से.मी. हो तो (i) ABCD का क्षेत्रफल

(ii) यदि AD = 5 से.मी. हो तो BF की लंबाई ज्ञात कीजिए।



हल: (i) आधार (b) = 10 से.मी.

ऊँचाई (h) = 4 से.मी.

क्षेत्रफल (A) = bh

= 10 × 4 = 40 व.से.मी.

(ii) BF की लंबाई (h) = ?

आधार (b) AD = 4 से.मी.

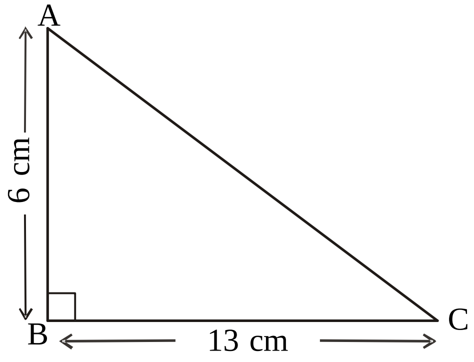
क्षेत्रफल (A)= 40 से.मी.^{2}

A = bh

40 = 5 × BF

$\Rightarrow$ BF = $\frac{40}{4}$ = 10 से.मी..

उदाहरण 3 : ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : त्रिभुज का आधार (b) = 13 से.मी.

त्रिभुज की ऊँचाई (h) = 6 से.मी.

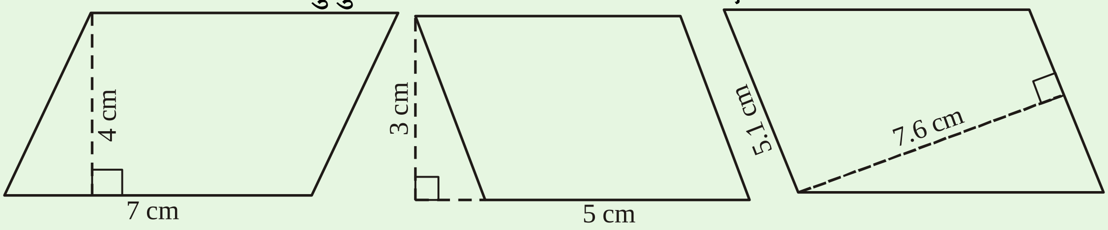
त्रिभुज की क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2} \times 13 \times 6$

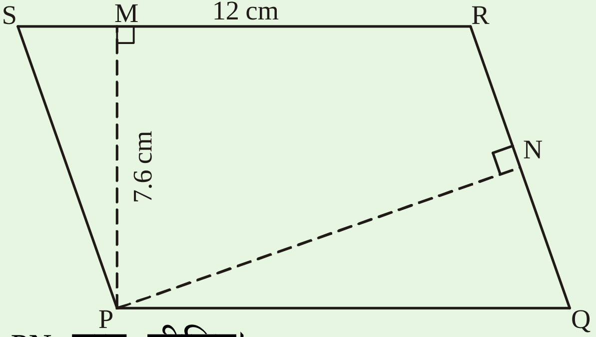
= 13 × 3 = 39 व.से.मी.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्न समानांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



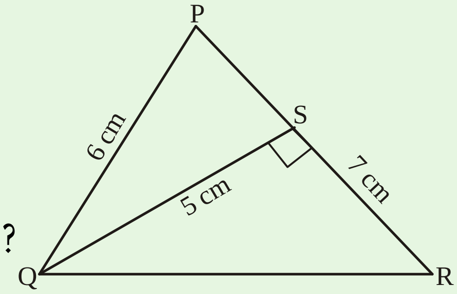
2. एक समानांतर चतुर्भुज की ऊँचाई उसके आधार का एक तिहाई है। यदि समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 192 से.मी.^{2} हो तो उसकी ऊँचाई तथा आधार को ज्ञात कीजिए।
3. एक वर्ग तथा समानांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल समान है। यदि वर्ग की भुजा 40 मी है और समानांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 20मी है तो समानांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए?
4. PQRS समानांतर चतुर्भुज में P से PM उसकी ऊँचाई है $\overline{SR}$ और PM. P से $\overline{QR}$ की ऊँचाई है यदि SR = 12 से.मी. तथा PM = 7.6 से.मी. होतो
   (i) समानांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   (ii) यदि QR = 8 से.मी. हो तो PN ज्ञात कीजिए।



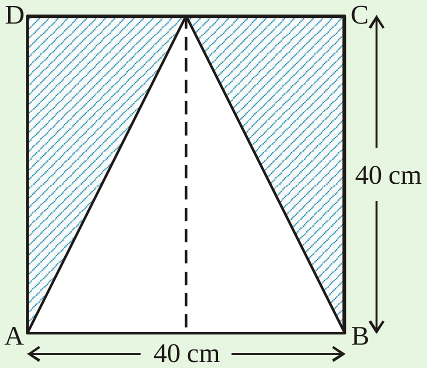
5. यदि समानांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 6से.मी. और यदि उसका क्षेत्रफल उसकी ऊँचाई का दुगुना हो तो समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. रामू कहता है कि ΔPQR का क्षेत्रफल

   $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \text{ cm}^2$ गोपी कहता है कि

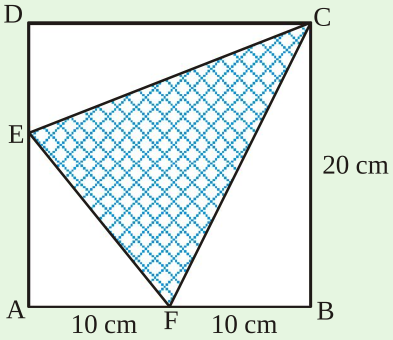
   $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \text{ cm}^2$ है दोनों में कौन सही है?



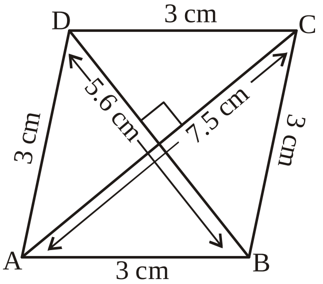
7. चित्र ABCD, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?



8. चित्र में ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उदाहरण 4 : समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : कर्ण (d_1) की लंबाई = 7.5 से.मी.

कर्ण (d_2) की लंबाई = 5.6 से.मी.

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} d_1 d_2.$

इसलिए, $A = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6$

$= 21$ वर्ग.से.मी.

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफळ = 21 व.से.मी.

उदाहरण 5 : एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 480 व.से.मी. समानांतर भुजा की लंबाई 24 से.मी. है तथा समानांतर भुजा के मध्य दूरी 8 से.मी. हो तो उसकी दूसरी समानांतर भुजा को ज्ञात कीजिए।

हल : एक समानांतर भुजा = 24 से.मी.

मानलो दूसरी समानांतर भुजा = x से.मी.

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 480 व.से.मी.

समानांतर भुजाओं के मध्य दूरी = 8 से.मी.

$\therefore$ समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$

$$480 = \frac{1}{2} \times (24+x) \times 8$$

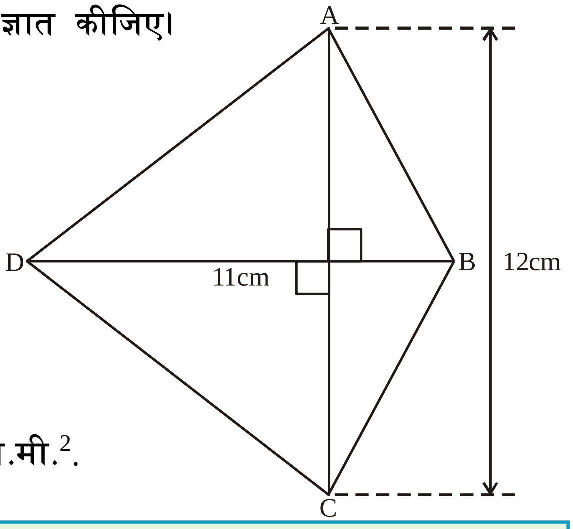
$$480 = 96 + 4x$$

$$\Rightarrow 480 - 96 = 4x$$

$$\Rightarrow 4x = 384$$

$$x = \frac{384}{4} = 96$$

$\therefore$ समलंब चतुर्भुज की दूसरी समानांतर भुजा = 96 से.मी..



उदाहरण 6 : चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : AC = $h_1 + h_2$ = 12 से.मी.

कर्ण (BD) की लंबाई = 11 से.मी.

$$\therefore \text{ चतुर्भुज का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$$

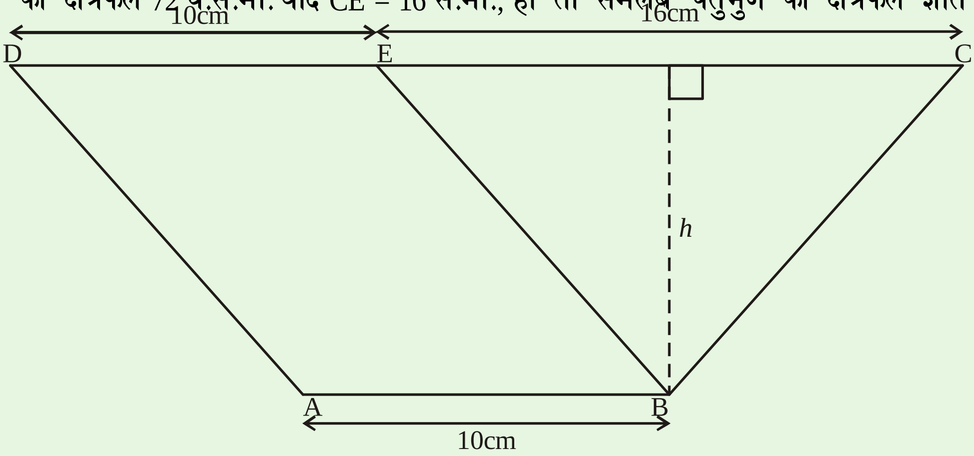
$$= \frac{1}{2} \times 11 \times 12$$

$$= 11 \times 6 = 66 \text{ से.मी.}^2.$$

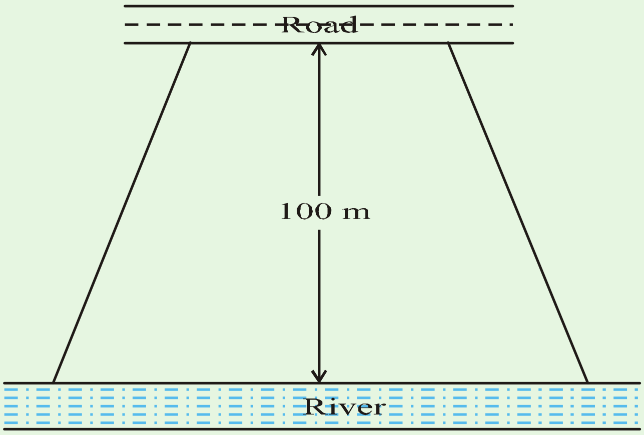
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक समलंब चतुर्भुज की समानांतर भुजाओं का अनुपात 4 : 1 है तथा उनके बीच की दूरी 10 से.मी. है यदि समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 500 व.से.मी. हो तो समानांतर भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

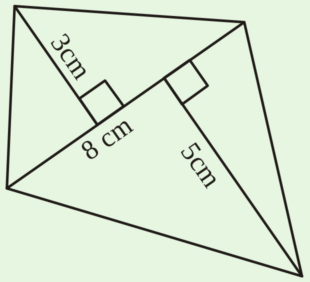
2. दिए गए चित्र में, ABED एक समानांतर चतुर्भुज है जिसमें AB = DE = 10 से.मी. हो तो ΔBEC का क्षेत्रफल 72 व.से.मी. यदि CE = 16 से.मी., हो तो समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



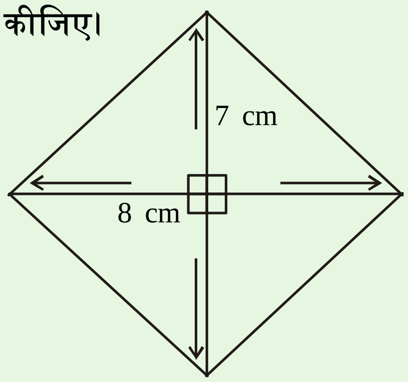
3. मोहन एक खेत नदी किनारे खरीदना चाहता है उसका आकार संलग्न चित्र में दर्शाये अनुसार है नदी के किनारे वाली लंबाई सड़क वाली भुजा से दुगुना है और दोनों समानांतर है उस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



4. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके कर्णों की लंबाई 10 से.मी. तथा 8.2 से.मी. है।
5. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमं कर्ण AC = 10 से.मी. और AC पर B तथा D से लंब 5 से.मी. तथा 6 से.मी. क्रमशः है।
6. एक समलंब चतुर्भुज की समानांतर भुजाओं का अनुपात 5 : 3 है तथा उनके मध्य दूरी 16 से.मी. है यदि उसका क्षेत्रफल 960 व.से.मी. हो तो समानांतर भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।
7. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 16 व.से.मी. है समानांतर भुजा की लंबाई 5 से.मी. है उनके बीच की दूरी 4 से.मी. है दूसरे समानांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए? समलंब चतुर्भुज को ग्राफ पेपर पर उतारकर क्षेत्रफल की जाँच कीजिए।
8. एक इमारत की फर्श पर 300 टाइल्स बिछाये गए है जो समचतुर्भुज आकार का है उसके कर्ण 45 से.मी. और 30 से.मी. के है। तो फर्श पर टाइल्स बिछाने का कुल खर्च ज्ञात कीजिए यदि 20 रू. प्रति व.मी खर्च होता है।
9. दिए गए चित्रों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

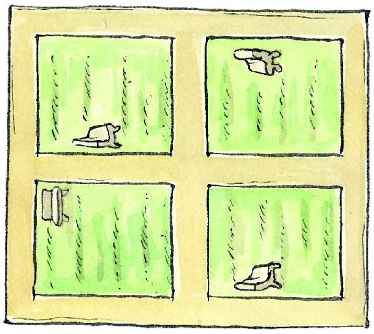


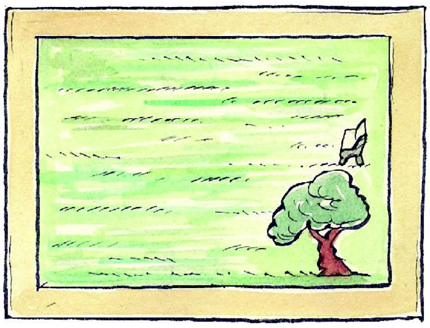
(i)

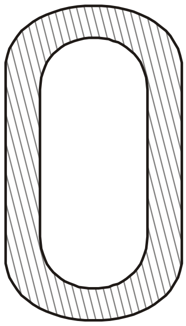


(ii)

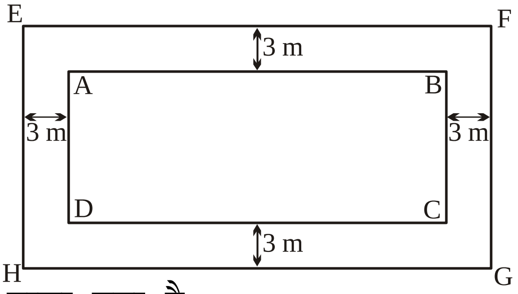
5.1.2 आयाताकार पथ







हम जब बगीचे में चलते है तो क्षेत्रफल तथा दौड पट्टी को देखते ही है अब हम उसके क्षेत्रफल को तथा उसके निर्माण खर्च को ज्ञात करना सीखेंगे।



उदाहरण 1 : एक प्लॉट 60 मी. लंबा तथा 40 मी चौडा है प्लाट के चारों ओर 3मी चौडा रास्ता बनाया गया है उस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो ABCD दिया गया प्लॉट है।

3मी. वाला रास्ता उसके चारों ओर डाला गया है

इस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें छोटे आयत ABCD के क्षेत्रफल को बडे आयत EFGH. में से घटाना होगा।

आंतरिक आयत की लंबाई = 60 मी

आंतरिक आयत की चौडाई = 40 मी

प्लॉट ABCD का क्षेत्रफल = (40 × 60) = 2400 व.मी.

रास्ते की चौडाई = 3मी.

बाह्य आयत की लंबाई = 60मी. + (3 + 3)मी. = 66 मी.

बाह्य आयत की चौडाई = 40 मी. + (3 + 3) मी. = 46 मी.

बाह्य आयत का क्षेत्रफल = 66 × 46 = 3036 मी.^{2}.

इसलिए रास्ते का क्षेत्रफल = बाह्य आयत का क्षेत्रफल– आंतरिक आयत का क्षेत्रफल

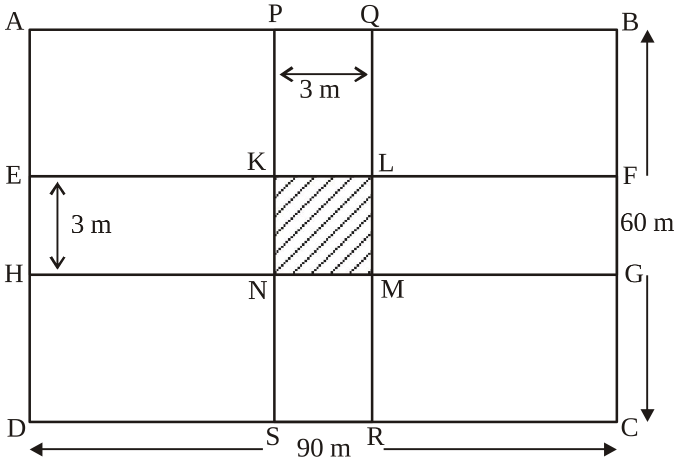
= 3036 – 2400

= 636 व.मी.

उदाहरण 2 : एक आयताकार क्षेत्र के माप क्रमशः 90 मी. और 60मी. है उसमें दो सड़के इस प्रकार बनाए गए जो एक दूसरे को केंद्र पर काटते है और वे भुजाओं के समानांतर है यदि प्रत्येक सड़क 3मी. चौडी हो तो

(i) सडकों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सड़क का निर्माण ` 110 प्रति व.मी. की दर से कितना खर्च होगा?



हल : मानलो ABCD एक आयताकार क्षेत्र है PQRS और EFGH दोनों 3मी. वाली सड़के है।

(i) सडको का क्षेत्रफल अर्थात् आयत PQRS तथा आयत EFGH. का क्षेत्रफल होगा।

चित्र से यह साफ होता है कि वर्ग KLMN दो बार लिया जा रहा है उसकी गणना के लिए एक बार घटाना होगा।

प्रश्न से हम जानेत है कि

PQ = 3 मी; PS = 60 मी

EH = 3 मी; EF = 90 मी

KL = 3 मी; KN = 3 मी

सडक का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल + आयत EFGH का क्षेत्रफल - आयत KLMN का क्षेत्रफल

$= (PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN)$

$= (60 \times 3) + (90 \times 3) - (3 \times 3)$

$= (180 + 270 - 9)$ मी^{2}

$= 441$मी^{2}.

(ii) सडक निर्माण का दर = ` 110 प्रति/व.मी.

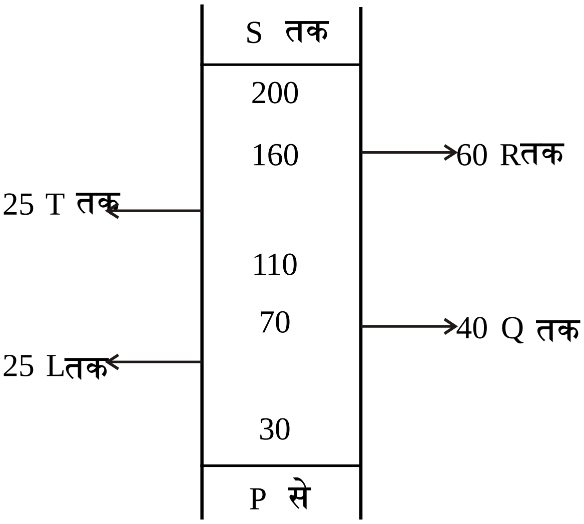
सडक निर्माक का खर्च = 110 × 441 = ` 48,510/-

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक वर्गाकार क्षेत्र जिसकी भुजा 45 मी है उसके चारो ओर 2.5 मी चौडा रास्ता हो तो उस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक पाठशाला का केंद्रिय हॉल 18 मी. लंबा तथा 12.5 मी चौडा है उसकी फर्श पर एक कार्पेट डालनी है जो 50 से.मी. चौडी पट्टी छोडकर बिछाया गया है तो बिना ढके हुए भाग का तथा कारपेट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

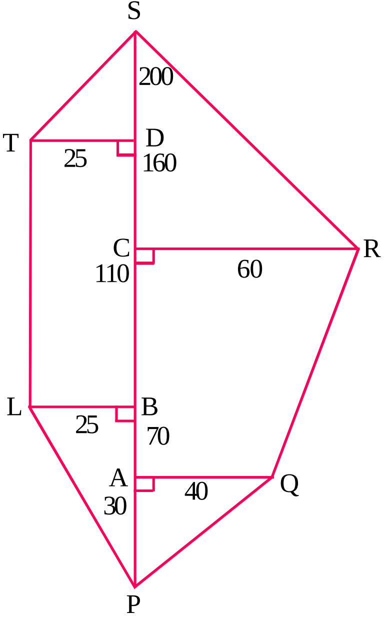
5.1.3 क्षेत्र (खेत) का क्षेत्रफल

एक सर्वेक्षणकर्ता ने एक खेत के मापों को अपनी पुस्तक में इस प्रकार नोट किया। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



इन प्रदत्तों के आधार पर ज्ञात होता है

1. यह मैदान षट्भुजाकार है जिसके शीर्ष P, Q, R, S, T और L है।
2. PS को कर्ण के रूप में लीजिए।
3. PS रेखा के एक ओर शीर्ष Q और Rतथा दूसरी ओर शीर्ष T और L है।
4. बिंदु Q से PS पर डाला गया लंब A 40 मी है उसी प्रकार RTL से शेष लंब खींचिए।
5. सर्वेक्षण पुस्तिका में दिए माप वास्तविक है और इन्हें नीचे से ऊपर के क्रम में पढा जाता है।
6. इस मैदान को दो त्रिभुज तथा दो समलंब चतुर्भुज में विभाजित किया गया है।



हम ऊपर दिए चित्र में से निम्नलिखित माप प्राप्त कर सकते है।

$AC = PC - PA$

$= 110 - 30 = 80$मी

$CS = PS - PC$

$= 200 - 110 = 90$मी

$DS = PS - PD$

$= 200 - 160 = 40$ मी

$BD = PD - PB$

$= 160 - 70 = 90$ मी

ΔAPQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$वर्ग.मी..

समलंब चतुर्भुज AQRS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC(AQ + CR)$

$$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40+60)$$

$= 80 \times 50$

$= 4000$ वर्ग.मी.

ΔCRS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times CR \times CS$

$$= \frac{1}{2} \times 60 \times 90$$

$= 2700$ वर्ग.मी.

समलंब चतुर्भुज PLTS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$$= \frac{1}{2} \times LB\ (TL+SP)$$

$$= \frac{1}{2} \times 25\ (90+200) \qquad (\because TL = BD = 90)$$

$= 3625$वर्ग.मी.

मैदान का क्षेत्रफल $= 600 + 400 + 2700 + 3625$

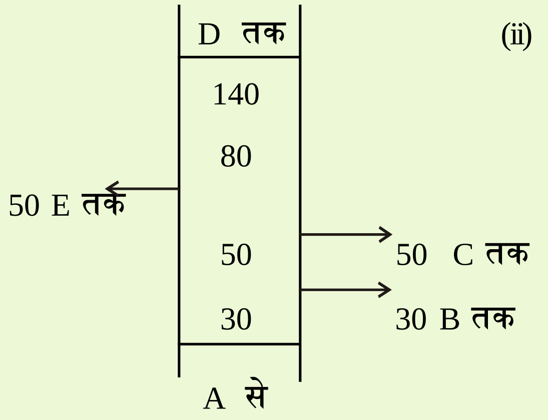
$= 10,925$ वर्ग.मी.

नोट: हम PLTS का क्षेत्रफल इस प्रकार ज्ञात कर सकते है ΔBPL का क्षेत्रफल + आयत BLTD का क्षेत्रफल + ΔTSD का क्षेत्रफल]

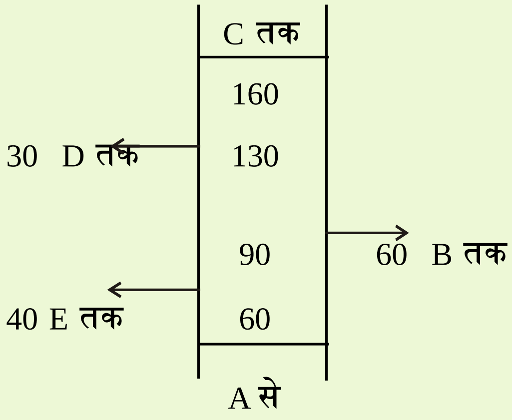
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक सर्वेक्षणकर्ता की सर्वेक्षण पुस्तिका में मैदानों के माप निम्नलिखित रूप से लिखे है, उनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

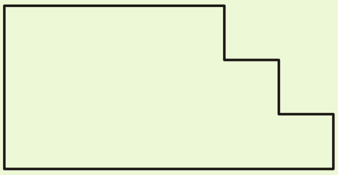
(i)



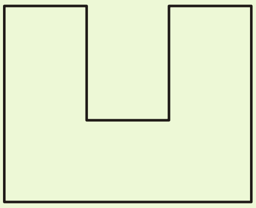
(ii)



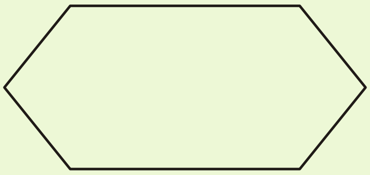
2. दिए गए आकारों को निर्देश अनुसार विभाजित कीजिए।



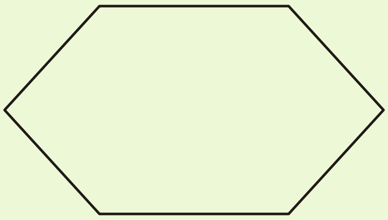
(i) 3 आयतों में



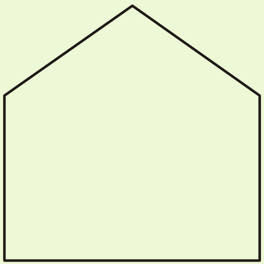
(ii) 3 आयतों में



(iii) 2 समलंब चतुर्भुज

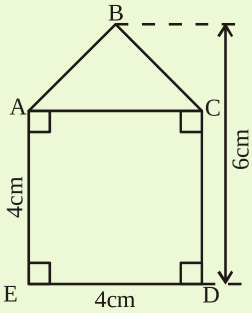


(iv) 2 त्रिभुज और एक आयत

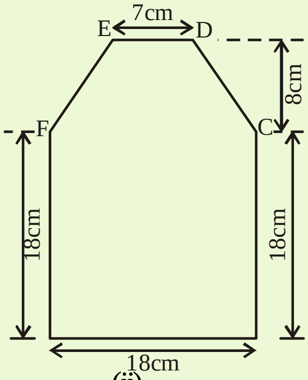


(v) 3 त्रिभुज

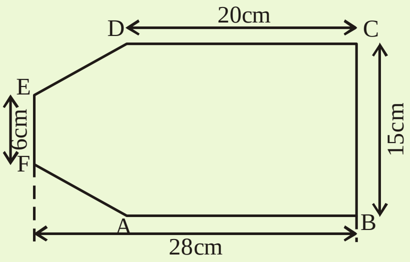
3. प्रत्येक आकार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)

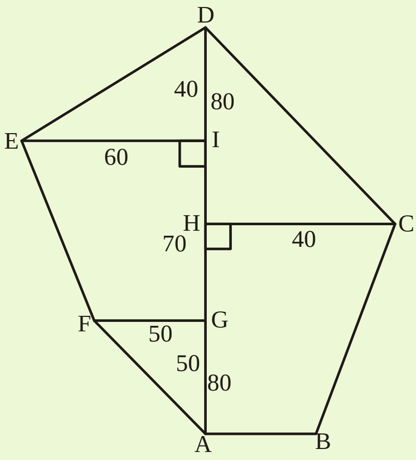


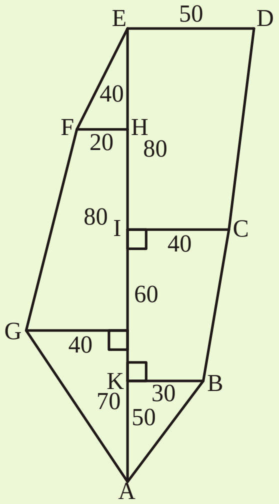
(ii)



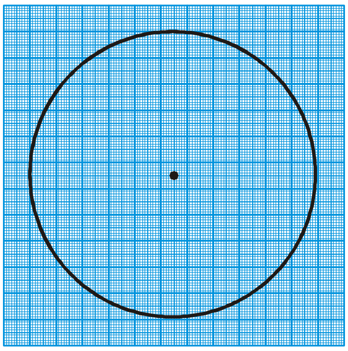
(iii)

4. प्रत्येक मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सभी माप मीटर में है।.





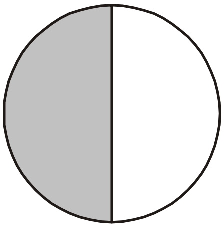
5.1.4 वृत्त का क्षेत्रफल



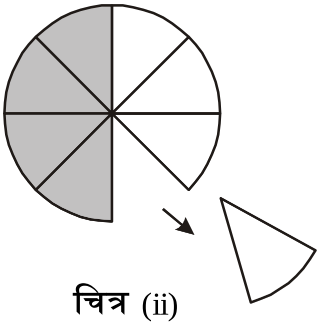
विधि 1 : ग्राफ पेपर द्वारा वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें 3 से.मी. त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए उसमें धिरे वर्गों को गिनते हुए वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

इसके किनारे सीधे नही है इसलिए इस विधि से हम इसका अनुमानित क्षेत्रफल ही निकाल सकते है वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का एक और तरीका भी है।

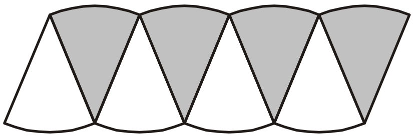
विधि 2 : एक वृत्त बनाइए इसका आधा भाग छायांकित कीजिए जैसा कि चित्र(i), में दिखाया गया है अब वृत्त को आठ बराबर हिस्सों में मोडिए। इन्हें मोड से काट लीजिए जैसा कि चित्र (ii) में दिखाया गया है। इन अलग-अलग टुकडों को चित्र(iii), में दिखाए अनुसार रखिए जो लगभग समांतर चतुर्भुज बनाता है।



चित्र (i)

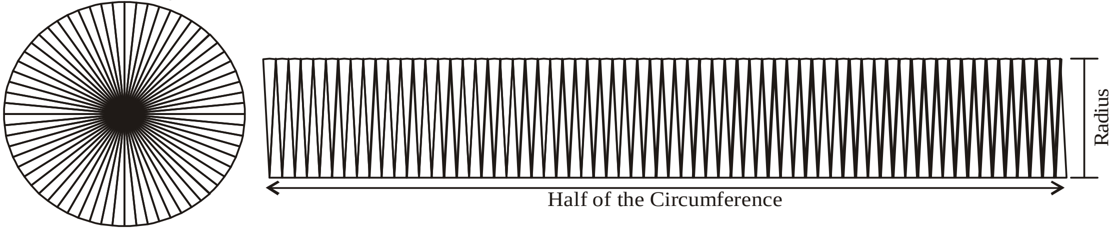


चित्र (ii)



चित्र (iii)

यदि हम वृत्त को समान 64 वृत्त खंडो में विभाजित करते है तो हमें चित्र (iv) में दिखाए अनुसार आयत प्राप्त होगा।

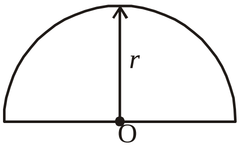


चित्र (iv)

यदि वृत्त को 64 वृत्त खण्डों में विभाजित किया जाता है और यदि इन्हें एक आय की तरह रखा जाता है आयत की लंबाई 32 वृत्त खण्डों के चाप के बराबर है जो वृत्त की परिधि का आधा है चित्र (iv).

वृत्त का क्षेत्रफल = वृत्त खण्डों से बनाए गए आयत का क्षेत्रफल= $l \times b$

= परिधि का आधा × त्रिज्या = $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$.



इसलिए वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2.

- 'r' त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि '$2\pi r$' होगी।
- अर्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \pi r^2$
- अर्धवृत्त की परिमिति = $\pi r + 2r = \frac{22}{7}r + 2r = \frac{36}{7}r$ ($\because$ जहाँ r त्रिज्या होगी).

उदाहरण : एक वृत्त की परिधि 22 से.मी. है इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इसके अर्धवृत्त का क्षेत्रफल भी बताइए।

हल: मान लीजिए कि इस वृत्त की त्रिज्या r से.मी. तो वृत्त की

परिधि $= 2\pi r$

$$2\pi r = 22$$

$$2\times\frac{22}{7}\times r = 22$$

$$r = 22\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{22} = \frac{7}{2} \text{ से.मी.} = 3.5 \text{ से.मी.}$$

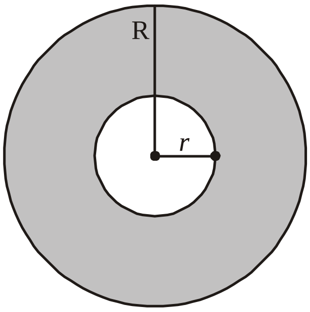
$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या = 3.5 से.मी.

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \left(\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\right)\text{cm}^2 = 38.5$ वर्ग से.मी.

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\times 38.5 = 19.25$ वर्ग से.मी.

5.1.5 वृत्ताकार रास्ते या वलय का क्षेत्रफल

एक पार्क में एक वृत्ताकार रास्ता चित्र में दिखाए अनुसार बना है इसमें बाहरी और भीतरी वृत समकेंद्रीय है आइए, इस वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



इस वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल बाहरी और भीतरी वृत्त के क्षेत्रफल का अंतर होगा।

यदि हम कहते है कि बाहरी वृत्त की त्रिज्या R और भीतरी वृत्त की त्रिज्या 'r' है

वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल = बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल – भीतरी वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

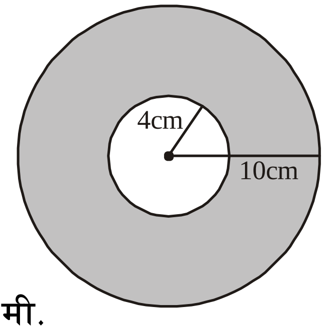
अतः वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल $= \pi(R^2 - r^2)$ या $\pi(R + r)(R - r)$

उदाहरण : संलग्न चित्र देखिए यह दो समकेंद्रीय वृत्तों को दर्शाता है बड़े वृत्त की त्रिज्या 10 से.मी. और छोटे वृत्त की त्रिज्या 4 से.मी. है तो ज्ञात कीजिए.

(i) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल

(ii) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(iii) दोनों वृत्तों के बीच के छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$)



हल : (i) बड़े वृत्त की त्रिज्या = 10 से.मी.

अतः बड़े वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi R^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ वर्ग से.मी.

(ii) छोटे वृत्त की त्रिज्या = 4से.मी.

अतः छोटे वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 4^2$

$= 3.14 \times 16$

$= 50.24$ से.मी.

(iii) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बडे वृत्त का क्षेत्रफल–छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

$= 314 - 50.24$

$= 263.76$ से.मी.

(या)

$= \pi(R + r)\,(R - r)$

$= \frac{22}{7}\,(10+4)\,(10-4)$

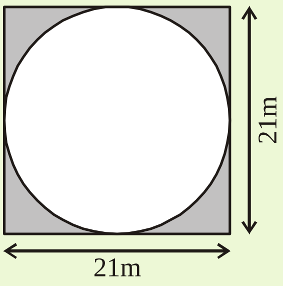
$= 3.14\,(14)\,(6)$

$= 263.76$से.मी.

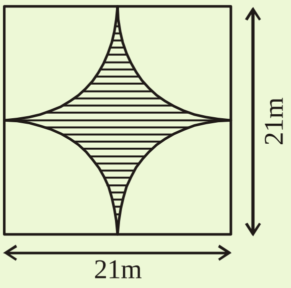
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

नीचे दी गई प्रत्येक आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

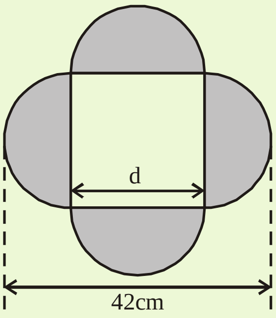
(i)



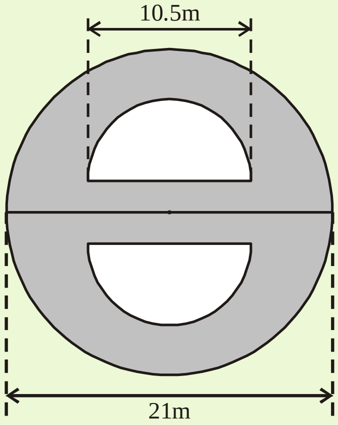
(ii)



(iii)

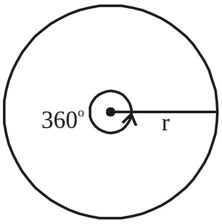


(iv)

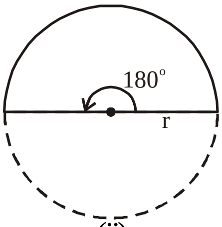


चाप की लंबाई

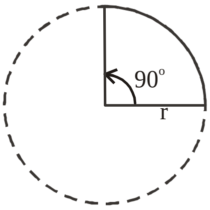
नीचे दिए गए वृत्त देखिए और कोण तथा चाप की लंबाई बीच संबंध को समझेंगे।



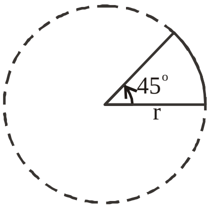
(i)



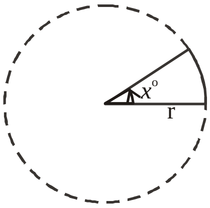
(ii)



(iii)



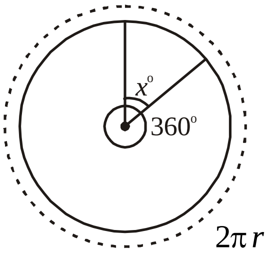
(iv)



(v)

चित्र	कोण	चाप की लंबाई	चाप के कोण और लंबाई में संबंध
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0}\times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0}\times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{90^0}{360}\times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	$\frac{45^0}{360^0}\times 2\pi r = \frac{\pi r}{4}$
(v)	x^0	l	$\frac{x^0}{360^0}\times 2\pi r = l$

ऊपर वृत्तखंड के चाप की लंबाई (l) $\frac{x^0}{360^0}\times 2\pi r$ दी गई है जहाँ 'r' वृत्त की त्रिज्या और 'x' वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर बना कोण है। यदि वृत्तखंड के चाप की लंबाई l हो।



$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

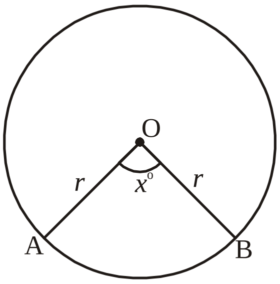
इसलिए $$\boxed{l = \frac{x^0}{360^0}\times 2\pi r}$$

5.1.6 वृत्त खंड का क्षेत्रफल

हम जानते है कि वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे भाग को वृत्त खंड कहते है।

वृत्त का क्षेत्रफल त्रिज्या r हो $= \pi r^2$.

वृत्त खंड का कोण जो वृत्त के केंद्र से चाप की ओर दोनों त्रिज्या रेखाओं के बीच में बना हो यदि x^o हो।



वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल और वह कोण जो इसके सीधा समानुपाती है

वृत्त खंड का क्षेत्रफल : वृत्त का क्षेत्रफल = $x^{o} : 360^{o}$.

$\therefore$ वृत्त खंड OAB का क्षेत्रफल $= \dfrac{x^{0}}{360^{0}} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$$\boxed{A = \frac{x^{0}}{360^{0}} \times \pi r^{2}}$$

उदाहरण : वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका कोण 180^{o} तथा त्रिज्या 7 से.मी. है।

हल : $r = 7$ मी.,

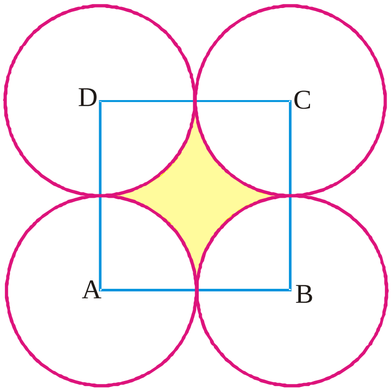
$x^{o} = 18^{o}$

$\therefore$ वृत्त खंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{x^{0}}{360^{0}} \times \pi r^{2} \quad = \dfrac{18^{0}}{360^{0}} \times \dfrac{22}{7} \times 7^{2}$

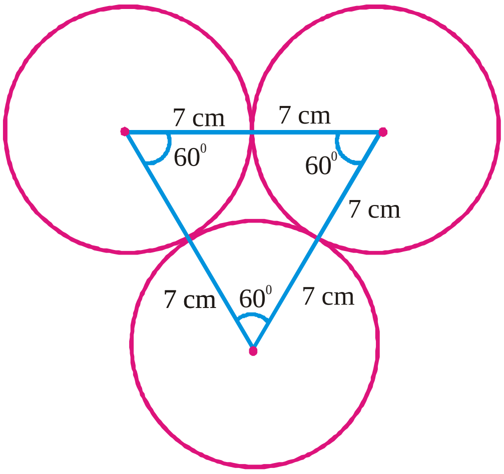
$= \dfrac{18 \times 22 \times 7}{360} \quad = 7.7$ वर्ग से.मी.

अभ्यास

1. वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्याएँ नीचे दी गई है।
   (i) 35 से.मी. (ii) 4.2 से.मी. (iii) 15.4 से.मी.
2. यदि वृत्त परिधि 264 से.मी., है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। $\left(\text{Take } \pi = \dfrac{22}{7}\right)$.
3. दो वृत्तों के व्यास का अनुपात 3 : 4 हो तो उनकी त्रिज्यायें ज्ञात कीजिए।
4. यदि एक रोड रोलर 2200 मी. को पूर्ण करने के लिए 200 मी. आवर्तन करता है तो रोलर की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
5. एक तार को 25 से.मी. त्रिज्या वृत्त में मोडा गया है यदि उसे सीधा कर वर्ग बनाएँगे तो वर्ग के भुजा की कितनी होगी?
6. यदि वृत्त की परिधि 264 से.मी. हो तो त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
7. एक वर्गाकार क्षेत्र जिसकी भुजा 45मी हो उसके बाहर 2.5 मी चौडा रास्ता चारों ओर बनाया गया है उस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. संलग्न चित्र में A, B, C और D चार समान वृत्तों के केंद्र है जो आपस में एक दूसरे को स्पर्श करते है और ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 7 से.मी. है छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



9. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $49\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ है। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा के केंद्र से गुजरते हुए चित्र में दिखाए अनुसार तीन समान त्रिज्या वाले वृत्त बनाये गये तो त्रिभुज के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्तों में नहीं है।



सारांश

। उस वृत्त का क्षेत्रफल जिसकी त्रिज्या r है $= \pi r^2$.

। वृत्त की परिधि जिसकी त्रिज्या r है $= 2\pi r$.

। r त्रिज्या वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2$

। वृत्तकार रास्ते या वलय क्षेत्रफल r

$$= \pi r + 2r$$

$$= \frac{36}{7} r$$

। वृत्ताकार रास्ते या वलय क्षेत्रफल $= \pi\,(R^2 - r^2)$

या

$$= \pi(R + r)\,(R - r)$$

जहाँ R - बाहरी वृत्त की त्रिज्या

r - भीतरी वृत्त की त्रिज्या

। चाप की लंबाई $(l) = \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$

। वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $r = \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$

। उस वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल जिसके चाप की लंबाई l तथा त्रिज्या r है $= \frac{lr}{2}$.

अध्याय
5.2
सरल चित्रों के क्षेत्रफल तथा परिमिति

5.2.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

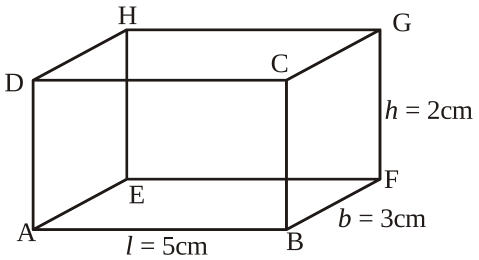
इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के प्रश्नों को हल करेंगे।
- ठोस सरल आकृतियों के क्षेत्रफल तथा आयतन द्वारा निष्कर्ष देंगे।
- क्षेत्रफल तथा आयतन के विभिन्न पदों को समझाकर सूत्र लिखेंगे।
- सरल ठोस आकृतियों को उतारेंगे।

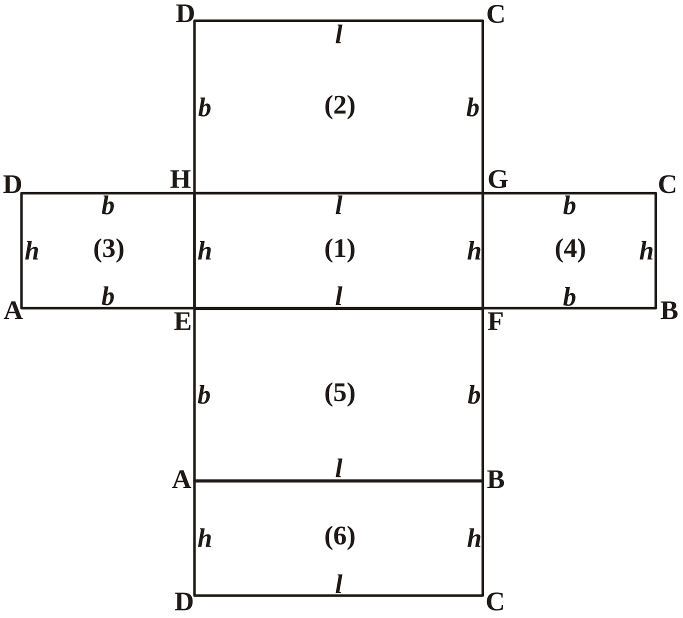
5.2.1 परिचय

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

घनाभ को ध्यानपूर्व देखिए। इसके कितने फलक है ज्ञात कीजिए? इसकी कितनी भुजाएँ और किनारे है? कौनसे फलकों के युग्म माप में बराबर है? क्या आपको इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने का विचार आता है।



अब हम घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे। ऊपर दी गई आकृति में लंबाई (l) = 5 से.मी. चौडाइ (b) = 3से.मी. ऊँचाई (h) = 2 से.मी. है। यदि हमने CD, ADHE और BCGF. के साथ दिए गए घनाभ को काटकर खोलेंगे तो हमें प्राप्त आकृति निम्न प्रकार की होगा।



यह दर्शाता है कि घनाभ का पृष्ठीय तल तीन समान आयतों के युग्नमों में अर्थात् छः आयतो से बनता है घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें छः आयतकार फलकों के क्षेत्रफलों को जोडने होगा। इन क्षेत्रफलों का योग हमें घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल देता है।

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \text{Area of } (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$

$= lh + lb + bh + bh + lb + bh$

$= 2lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + lh + bh)$

(1), (3) (4) (6) में घनाभ के पार्श्व पृष्ट है।.

घनाभ का पार्श्व पृष्ठों का क्षेत्रफल

$= (1) + (3) + (4) + (6)$ का क्षेत्रफल

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2h\ (l + b)$

दिए गए चित्र में $l = 5,\ b = 3,\ h = 3$

संपूर्णतल का क्षेत्रफल $= 2(5\times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 2)$ व.से.मी..

$= 2 \times 31$ व.से.मी.

$= 62$ व.से.मी.

पार्श्व तल का क्षेत्रफल $= 2 \times 3\ (5 + 3)$

$= 6 \times 8 = 48$ व.से.मी..

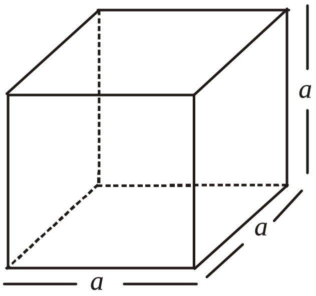
घन के लिए $l = b = h = a$

$\therefore$ घन के संपूर्णतल का क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(a^2 + a^2 + a^2)$

$= 2(3a^2)$

$= 6a^2$ वर्ग इकाई



घन के पार्श्वतल का क्षेत्रफल $= 2h\ (l + b)$

$= 2a(a + a)$

$= 2a \times 2a$

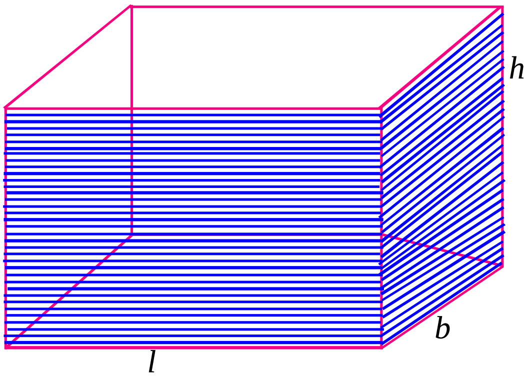
$= 4a^2$ वर्ग इकाई

5.2.2 घनाभ का आयतन

एक कार्ड बोर्ड से कुछ आयतो को समान माप में काटिए उन्हें एक के ऊपर एक व्यवस्थित कीजिए उससे बनने वाले आकार के बारे में आप क्या कहेंगे ?

वह आकार घनाभ होगा

अब हम घनाभ का आयतन ज्ञात करेंगे।



इसकी लंबाई, आयत की लंबाई के समान है, और चौडाई आयत की चौडाई के समान है।

ऊँचाई जहाँ तक आयत की गड्डी बनी है वही घनाभ की ऊँचाई ‘h’ है।

घनाभ द्वारा घिरी हुई जगह

= आयत द्वारा घिरे हुए समतल भाग का क्षेत्रफल × ऊँचाई

घनाभ का आयतन $= lb \times h$

$= lbh$

घनाभ का आयत $= lbh$

जहाँ l, b, h घनाभ के लंबाई, चौडाई और ऊँचाई होंगे

यदि घन की प्रत्येक भुजा ‘a’ हो तो

घन का आयतल $= a^3$ घन इकाई

घनाभ और घन को लंब प्रिज्म भी कहते है।

उदाहरण 1 एक घन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल 1350 वर्ग मीटर हो तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : घन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 6a^2$.

$$\Rightarrow 6a^2 = 1350$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1350}{6}$$

$$\Rightarrow a^2 = 225$$

$$\Rightarrow a^2 = 15^2$$

$$\Rightarrow a = 15$$

घन की भुजा = 15 से.मी.

घन का आयतन जिसकी भुजा 15 से.मी.

$= a^3 = (15)^3 = 3375$ घन से.मी..

उदाहरण 2 : घनाभ के माप $l = 8$से.मी., $b = 6$ से.मी., $h = 5$ से.मी.. हो तो उसका पार्श्व धरातल, संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : घनाभ के पार्श्व धरातल का क्षेत्रफल $= 2h\,(l + b)$

$= 2 \times 5\,(8 + 6)$

$= 10(14)$

$= 140$ वर्ग से.मी.

संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(8 \times 6 + 6 \times 5 + 8 \times 5)$

$= 2(48 + 30 + 40)$

$= 2(118)$

$= 236$ व.से.मी.

घनाभ का आयतन $= lbh$

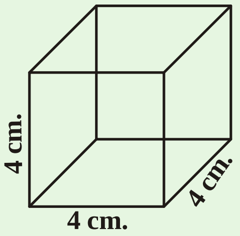
$= 8 \times 6 \times 5$

$= 240$ घन से.मी.

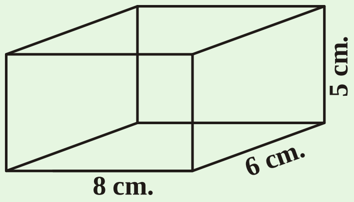
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यदि $l = 12$ से.मी., $b = 10$ से.मी. और $h = 8$ से.मी. हो तो घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।
2. यदि घन की भुजा10 से.मी. होतो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।
3. एक घन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल कैसे बदलेगा यदि प्रत्येक भुजा को 50% बढ़ाया गया हो।
4. यदि घन का आयतन 1000 घन से.मी. हो तो उसकी भुजा ज्ञात कीजिए।
5. नीचे दर्शाये गये ठोस के संपूर्ण धरातल और पार्श्व धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i)



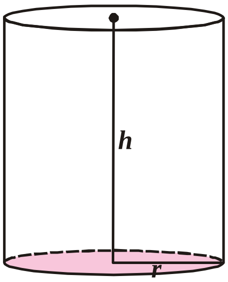
(ii)



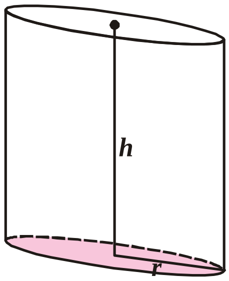
6. एक डिब्बे का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल कैसे बदलेगा यदि
   (i) प्रत्येक भुजा को दुगुना किया हो?
   (ii) प्रत्येक भुजा को तीन गुना किया गया हो?
7. एक कक्ष के चार दीवारों का क्षेत्रफल (माएि कि इसमें दरवाजे और खिडकियाँ नहीं है) ज्ञात कीजिए यदि इसकी लंबाई 12 मी, चौडाई10 मी. और ऊँचाई 7.5 मी.
8. एक घनाभ का आयतन 1200 घन से.मी. है यदि उसकी लंबाई 15 से.मी. तथा चौडाई 10 से.मी. हो तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. एक घनाभ की लंबाई 5 से.मी., चौडाई 4 से.मी. और ऊँचाई 3 से.मी. हो तो उसका पार्श्व धरातल, संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।
10. यदि घन का आयतन 1728 घन से.मी. हो तो घन के संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5.2.3 लंब वृत्तीय बेलन

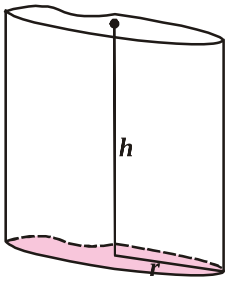
निम्न बेलनों को ध्यानपूर्वक देखिए।



(i)



(ii)



(iii)

(i) आपने आकृति (i), (ii) और (iii) में क्या समानताएँ देखी?

(ii) आपने आकृति (i), (ii) और (iii) में क्या अंतर देखी?

(iii) कौनसी आकृति में रेखाखण्ड इसके आधार का लंब है?

प्रत्येक बेलन, एक पार्श्वतल और दोनों सिरों पर दो सर्वांगसम वृत्ताकार फलकों से बना है। यदि वृत्ताकार पृष्ठों के केंद्र को जोडने वाला रेखाखण्ड, इसके आधार का लंब है ऐसा बेलन, लंबाकार बेलन कहलाता है।

ऊपर दी हुई आकृतियों में कौनसा लंब वृत्तीय बेलन है, ज्ञात कीजिए? कारण बताइए।

बेलन व्युत्पन्न करने के लिए कुछ क्रिया करेंगे।

बेलन का वक्रधरातल का क्षेत्रफल

कार्ड बोर्ड से बनाया हुआ एक लंब वृत्तीय बेलन लीजिए वक्र फलको को ऊर्ध्वाधर दिशा में काटिए और सीधा कीजिए। सीधा करते समय इसकी ऊँचाई और वृत्ताकार आधार के रूपांतरण की ओर ध्यान दीजिए।

बेलन को सीधा करने के पश्चात् तुम कौनसा आकार पाओगे?

आप आयताकार पाओगे। आयत का क्षेत्रफल और बेल का वक्रपृष्ठ बराबर है बेलन की ऊँचाई, आयत की चौडाई के बराबर और इसके आधार का परिमाप आयत की लंबाई के बराबर रहता है।

बेलन की ऊँचाई = आयत की चौडाई $(h = b)$

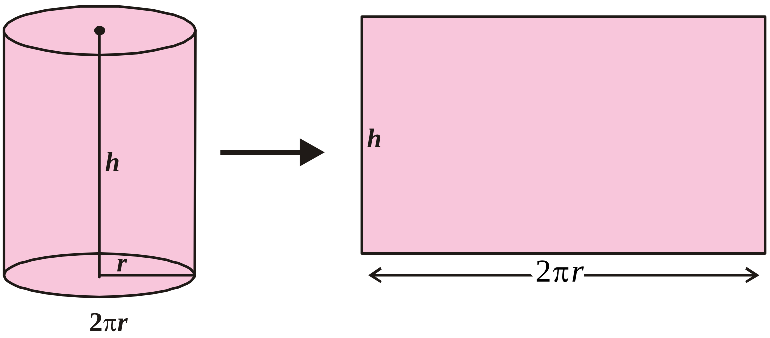
बेलन के आधार की परिधि जिसकी त्रिज्या (r) = आयत की लंबाई $(2\pi r = l)$

बेलन के पार्श्व तल का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई × चौडाई

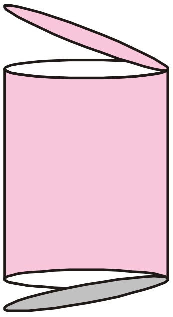
$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$



इसीलिए, बेलन का पार्श्वतल का क्षेत्रफल = $2\pi rh$

बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल :



संलग्न आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए।

क्या यह लंब वृत्तीय बेलन है? इसका संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इसमें कौनसे पृष्टों का क्षेत्रफल मिलाना होगा? ये वक्र धरातल का क्षेत्रफल और दो वृत्तीय फलको का क्षेत्रफल है।

अब बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठ + ऊपरी तल का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

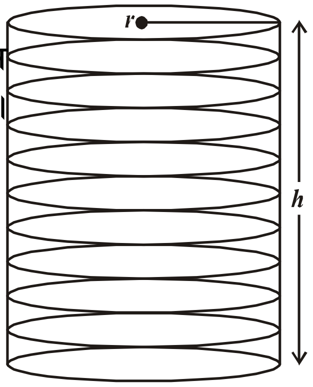
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$

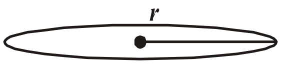
∴ बेलन का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(h + r)$

जहाँ बेलन की त्रिज्या r और उसकी ऊँचाई 'h' है।

बेलन का आयतन



समान त्रिज्या वाले वृत्त लीजिए और इन्हें एक के ऊपर एक इस प्रकार रखिए इस क्रिया के बाद देखिए यह बेलन बना या नहीं।



संलग्न आकृति में वृत्त का अर्धव्यास 'r' है जिस ऊँचाई तक वृत्तों की गड्डी बनी है वही बेलन की ऊँचाई 'h' है।

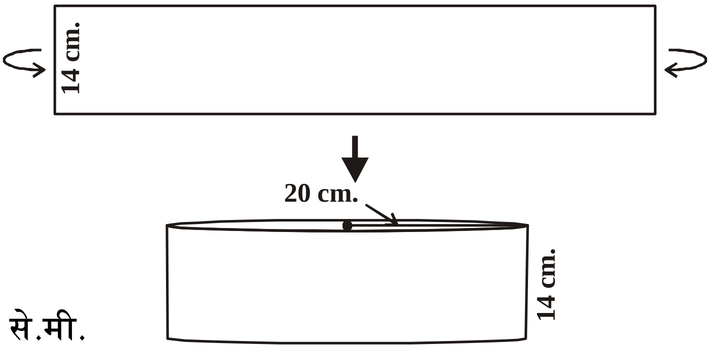
बेलन का आयतन $= \pi r^2 \times$ ऊँचाई $= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

जहाँ बेलन की त्रिज्या 'r' और ऊँचाई 'h' है।

उदाहरण 1 : एक 14 से.मी. चौडे आयताकार कागज के टुकडे को इसकी चौडाई को अक्ष मानकर मोडने से 20 से.मी. अर्धव्यास का बेलन बना। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए। $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$.



हल : आयत को चौडाई में मोडकर बेलन बनाया गया। इसलिए कागज के टुकडे की चौडाई बेलन की ऊँचाई होगी। बेलन की त्रिज्या 20 से.मी. है।

बेलन की ऊँचाई $= h = 14$ से.मी.

त्रिज्या $= r = 20$ से.मी.

बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$= 17600$ घन.से.मी.

अतः बेलन का आयतन $= 17600$ घन.से.मी.

उदाहरण 2 : एक 11 से.मी. ×4 से.मी. आयताकार कागज के टुकडे को एक कोर दूसरी कोर को न ढँकते हुए 4 से.मी. ऊँचाई के बेलन के रूप में मोडा गया। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : कागज के टुकडे की लंबाई, बेलन के आधार की परिधि होगी और इसकी चौडाई, बेलन की ऊँचाई होगी।

माना कि बेलन की त्रिज्या $= r$, ऊँचाई $= h$

बेलन के आधार की परिधि $= 2\pi r = 11$ से.मी.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$r = \frac{7}{4}$ से.मी.

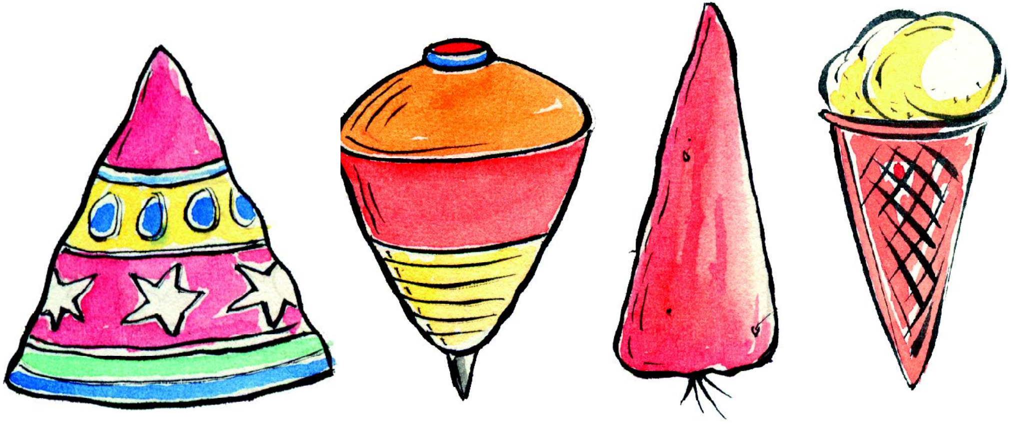
$h = 4$ से.मी.

बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$$

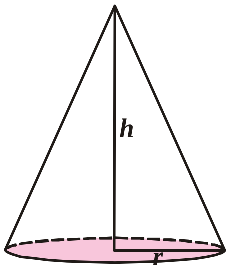
$= 38.5$ घन से.मी.

5.2.4 लंब वृत्तीय शंकु

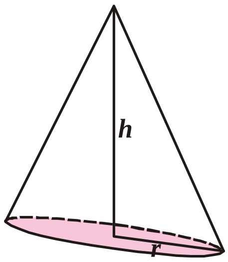


ऊपर की आकृतियों को ध्यान से देखिए और इसका कौनसे ठोस आकार के साथ साम्य पाया जाता है। यह शंकु के आकार में हे।

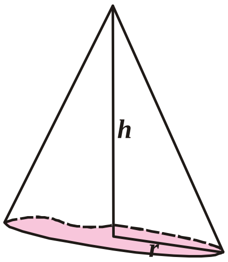
निम्न शंकुओं को ध्यानपूर्वक देखिए।



(i)



(ii)



(iii)

(i) इन शंकुओं में कौनसे समान गुणधर्म है ज्ञात कीजिए?

(ii) इन शंकुओं में कौनसा अंतर है।

आकृति (i) में पार्श्वतल वक्र है और आधार वृत्ताकार है। शंकु का शीर्ष और वृत्ताकार आधार का केंद्र जोडने वाला रेखा खण्ड (ऊर्ध्वाधर ऊँचाई) इसके आधार के त्रिज्या का लंब होता है इस प्रकार का शंकु, लंब वृत्तीय शंकु कहलाता है।

आकृति.(ii) में यद्यपी इसका आधार वृत्ताकार है, परंतु इसकी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई शंकु की त्रिज्या पर लंब नही है।

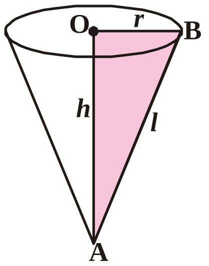
इस प्रकार का शंकु लंब वृत्तीय शंकु नही होता है।

आकृति (iii) में यद्यपी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई आधार पर लंब है।

परंतु आधार वृत्ताकार नही है।

इसलिए यह शंकु, लंब वृत्तीय शंकु नही है।

शंकु की तिर्यक ऊँचाई :



संलग्न आकृति (शंकु), में $\overline{OB}$ पर $\overline{AO}$ लंब है।

ΔAOB समकोण त्रिभुज है।

शंकु की ऊँचाई (h) $\overline{AO}$ है और

शंकु की त्रिज्या (r) $\overline{OB}$ है।

ΔAOB से

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (AB तिर्यक ऊँचाई $= l$ होगी।)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

क्रियाकलाप:

सूचनाओं को समझकर आकृति में बताए अनुसार कीजिए।

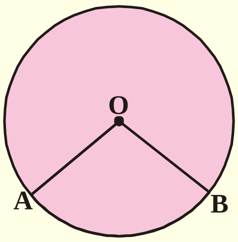
(i) एक मोटे कागज पर वृत्त बनाइए (आकृति a)

(ii) इसमें से वृत्तखण्ड AOB काटिए। आकृति (b)

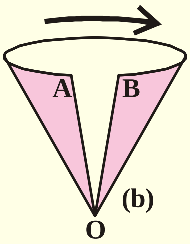
(iii) A, B सिरो को एक दूसरे के नजदिक धीरे से मोडिए और AB को मिलाइए। स्मरण रहे A और B एक दूसरे पर ढँकने नहीं चाहिए। A, B जोडने पर उन्हें सेलो टेप से चिपकाईए। आकृति (c).

(iv) आपको कौनसा आकार प्राप्त हुआ? क्या यह लंब वृत्तीय शंकु है ?

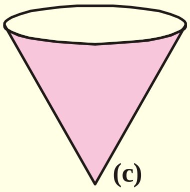
शंकु बनाते समय OA और OB भुजा का क्या हुआ, ध्यान से देखिए। तथा वृत्तखण्ड के चाप AB की लंबाई को भी ध्यान से देखिए।



(a)

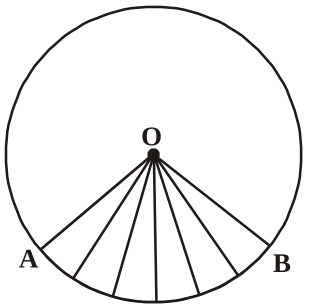


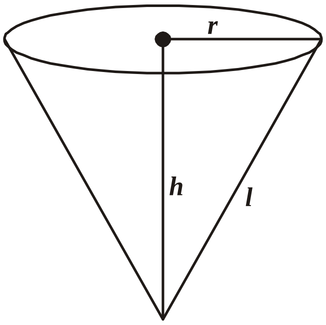
(b)

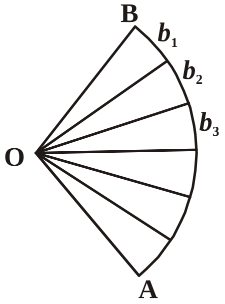


(c)

शंकु के वक्र तल का क्षेत्रफल







क्रियाकलाप से हम कागज़ से बनाया हुआ लंब वृत्तीय शंकु का वक्रतल का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

वृत्त खण्ड को शंकु में मोडते समय आपने रेखा कि वृत्तखण्ड के OA, OB एक दूसरे से जुडते है और यह शंकु की तिर्यक ऊँचाई बनती है जब कि AB लंबाई शंकु के आधार की परिधि होती है।

अब शंकु को खोलिए और वृत्तखण्ड AOB को आकृति में दर्शाये अनुसार आप जितना काट सकते हो उतना काटिए। तत्पश्चात आप देखोगे कि काटा हुआ प्रत्येक भाग एक छोटा त्रिभुज होता है जिसका आधार $b_1, b_2, b_3, \ldots$ आदि होंगे और ऊँचाई 'h' तिर्यक ऊँचाई के बराबर होगी।

यदि हम इन त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करते है और इन्हें जोडेंगे तो वह वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल बनेगा। हम जानते है कि वृत्तखण्ड से ही शंकु बना है।

शंकु का क्षेत्रफल = त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} l \,(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2} l \text{ (A से B तक के वक्रीय भाग की लंबाई)}$$

$$= \frac{1}{2} l (2\pi r)$$

$$= \pi r l.$$

शंकु के पार्श्व तल का क्षेत्रफल = $\pi r l$.

शंकु के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल

यदि शंकु के आधार को उसके आकार के रूपमें सम्मिलित करना होतो हमें एक वृत्त की आवश्यकता है जिसकी त्रिज्या शंकु की त्रिज्या के बराबर हो।

शंकु का संपूर्ण तल कैसे प्राप्त होगा? संपूर्ण तल प्राप्त करने के लिए कितने तलों को जोडना होगा?

वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

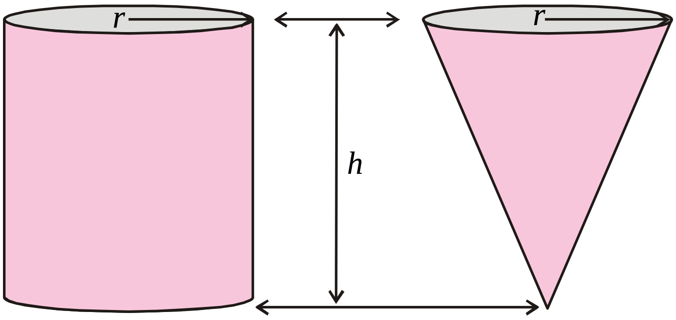
शंकु के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = इसके आधार का क्षेत्रफल+ पार्श्व तल का क्षेत्रफल

$$= \pi r l + \pi r^2$$

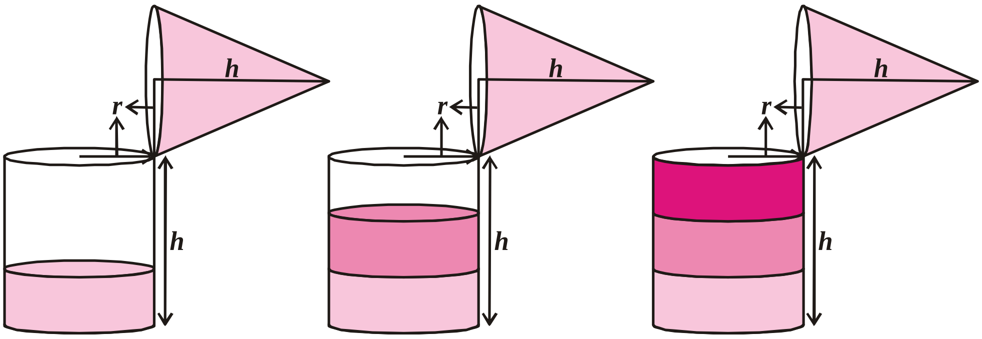
$$= \pi r (l + r)$$

शंकु के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = $\pi r\,(l + r)$

लंब वृत्तीय शंकु का आयतन:



समान त्रिज्या और ऊँचाई वाले खोखला बेलन और खोखला शंकु बनाईए और निम्न लिखित प्रयोग कीजिए जो हमें शंकु का आयतन ज्ञात करने में उपयुक्त होंगे।



(i) शंकु आकार पात्र में पानी किनारे तक लबालब भरिए और खोखले बेलन में उँडेल दीजिए जिस से बेलनाकार पात्र का केवल कुछ भाग भरेगा।

(ii) पुनः शंकु पानी से लबालब भरिए और बेलन में उँडेलिए, हम देखेंगे कि अभी भी बेलनाकार पात्र नहीं भरा।

(iii) जब शंकु तीसरी बार पानी से भरा और बेलनाकार पात्र में उँडेला गया, बेलानाकार पात्र पूर्णतः भरा या नहीं, ध्यानपूर्वक देखिए।

उपरोक्त प्रयोग से क्या आप को शंकु के आयतन और बेलन के आयतन में कुछ संबंध प्राप्त हुआ ?

हम कह सकते है कि शंकु का तीन गुना आयतन बराबर होता है जब दोनों का एक समान आधार और समान ऊँचाई होती है।

अतः शंकु का आयतन, बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है।

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

जहाँ शंकु के आधार की त्रिज्या r और ऊँचाई h है।

उदाहरण 1 : शंकु की त्रिज्या 5.6 से.मी. और पार्श्वतल का क्षेत्रफल 158.4 व.से.मी. हो तो इसकी तिर्यक ऊँचाई और ऊर्ध्वाधर ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: त्रिज्या = 5.6 से.मी., ऊर्ध्वाधर ऊँचाई = h, तिर्यक ऊँचाई = l

शंकु के पार्श्वतल का क्षेत्रफल = πrl = 158.4 व.से.मी..

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow \qquad l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6}$$

$$= \frac{18}{2} = 9 \text{से.मी.}$$

हम जानते है $l^2 = r^2 + h^2$

$$h^2 = r^2 - l^2$$

$$= 9^2 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$h^2 = 49.64.$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

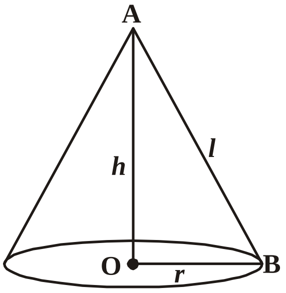
h = 7.05 से.मी. (लगभग)

उदाहरण 2 : शिबिर के लिए सेना द्वारा 3मी ऊँचा शंकु आकार डेरा खडा किया गया जिसके आधार का व्यास 8 मी. है। तो ज्ञात कीजिए।

(i) यदि कैनवस का मूल्य रू. 70 प्रति वर्ग मी. हो तो डेरा बनाने के लिए कैनवस का मूल्य

(ii) यदि प्रत्येक व्यक्ति को 3.5 घन.मी. हवा लगती हो तो डेरे में कितने व्यक्ति बैठ सकते है?

हल : डेरे का व्यास = 8 मी



$$r = \frac{8}{2} = 4\text{मी}$$

ऊँचाई h = 3मी

तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5\text{मी.}$$

डेरे का पार्श्वतल का क्षेत्रफल $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5$$

$$= \frac{440}{7}$$ व.मी.

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$$

$$= \frac{352}{7}$$ घन.मी.

(i) डेरा बनाने के लिए लगने वाले कैनवस का मूल्य

= पार्श्वतल का क्षेत्रफल × प्रति इकाई दर

$$= \frac{440}{7} \times 70$$

= रू.4400/-

(ii) डेरे में बैठ सकने वाले व्यक्तियों की संख्या

$$= \frac{\text{शंकु आकार डेरे का आयतन}}{\text{प्रत्येक व्यक्ति के लिए लगनेवाली हवा}}$$

$$= \frac{352}{7} \div 3.5$$

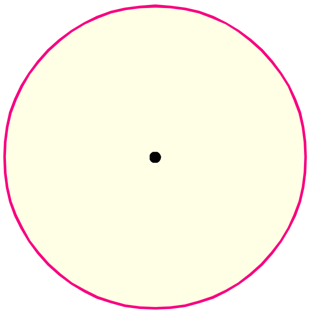
= 14.36 = 14 व्यक्ति (लगभग).

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

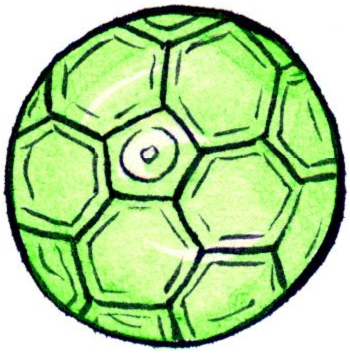
1. एक बेलन का आयतन 308 घ.से.मी और ऊँचाई 8 से.मी. है इसका पार्श्वतल और संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. यदि बेलन की त्रिज्या दुगुना कर इसका पार्श्वतल वही रखते हुए, इसकी ऊँचाई क्या होगी?
3. एक 22 से.मी.× 15 से.मी. × 7.5 से.मी. भुजाओं वाले धातु के घनाभ को गलाकर 14 से.मी. ऊँचा बेलन बनाया गया है इसकी त्रिज्या क्या होगी?

4. एक वृत्ताकार कुँए का भीतरी व्यास 3.5 मीटर और गहराई 10 मी. है तो
   (i) इसका भीतरी पार्श्व तल का क्षेत्रफल
   (ii) रू.40 प्रति वर्ग मी. की दर से इस पार्श्वतल को प्लास्टर करने का व्यय ज्ञात कीजिए।
5. एक शंकु के आधार का क्षेत्रफल 38.5 व.से.मी. और आयतन 77 घ.से.मी है, तो इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. एक शंकु का आयतन 462 घ.मी. और आधार की त्रिज्या 7मी. है। तो इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
7. एक शंकु के पार्श्व तल का क्षेत्रफल 308 व.से.मी. और तिर्यक ऊँचाई 14 से.मी. है। तो
   (i) आधार की त्रिज्या
   (ii) शंकु का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. एक 15 शंकु के पार्श्व तल का क्षेत्रफल 216^0 कोण वाला वृत्तखण्ड काटा गया और इसकी परिबंध त्रिज्याओं को शंकु आकार में मोडा गया। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।
9. एक शंकु का पार्श्व तल का क्षेत्रफल $1159\frac{5}{7}$ व.से.मी. और इसके आधार का क्षेत्रफल $254\frac{4}{7}$ व.से.मी. है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

5.2.5 गोला


(i)


(ii)


(iii)

ऊपर की सभी आकृतियों में आप भली-भाँति परिचित हो। क्या तुम इनमें अंतर जानते हो?

आकृति (i) वृत्त है इसे आप आसानी से कागज पर उतार सकते है। क्योंकि यह समतलीय आकृति है।

वृत्त समतलीय बंद आकृति है जिसका प्रत्येक बिंदु किसी निश्चित बिंदु से समदूरी पर (त्रिज्या) होता है।

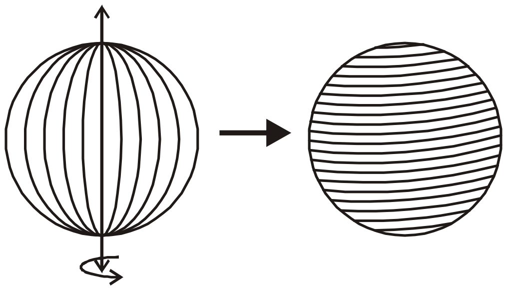
ऊपर की शेष आकृतियाँ ठोस है ये ठोस आकार में वृत्ताकार है और यह गोला कहलाता है। गोला एक त्रिविमीय आकृति है जिसके सभी बिंदु खुले में रहते है और जो किसी निश्चित बिंदु से निश्चित दूरी पर रहते है। यह बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है। गोले के पृष्ठ पर स्थित किसी भी बिंदु से दूरी त्रिज्या होती है।

गोले के तल का क्षेत्रफल

निम्न लिखित क्रियाकलाप द्वारा आकृति के तल का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

आकृति में बताए जैसा टेनिस का गेंद लीजिए।

और गेंद के चारों ओर लपेटिए, तार को स्थान पर रखने के लिए ऑल-पीन का उपयोग कीजिए। तार को प्रारंभिक और अंतिम सिरे को चिन्हित कीजिए। धीरे से गोले के पृष्ठ से तार को निकाल लीजिए।



गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। चित्रों में बताए अनुसार समान त्रिज्या के चार वृत्त बनाईए। गेंद के चारों ओर लपेटे हुए तार से एक के बाद एक वृत्त भरना शुरू कीजिए।

आपने क्या देखा?

तार, जो गोले के तल पर पूर्णरूप से आच्छादित थी, चारों वृत्तों को पूरा भरने के लिए उपयोग में लाई गई। सभी वृत्तों की त्रिज्या, गोले की त्रिज्या के समान ली गयी।

इस से हम समझते है कि त्रिज्या (r) के गोले के तल का क्षेत्रफल, त्रिज्या (r) के वृत्त के क्षेत्रफल के चौगुना होता है।

गोले के तल का क्षेत्रफल $= 4 \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= 4\pi r^2.$

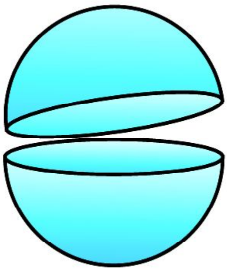
$= 4\pi r^2$ जहाँ गोले की त्रिज्या 'r' है।

गोले का आयतन

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ जहाँ गोले की त्रिज्या 'r' है।

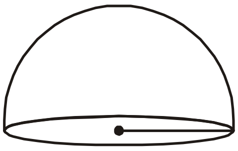
अर्धगोला

एक ठोस गोला लीजिए और इसके केंद्र से गुजरने वाले किसी समतल से काटिए। चित्र में दर्शाये अनुसार गोला दो बराबर भागों में विभाजित होगा। प्रत्येक भाग अर्ध गोला कहलाता है।



गोले का केवल एक वक्रीय तल होता है। यदि दो बराबर भागों में विभाजित किया गया तो इसका वक्रीय तल भी दो भागों में विभाजित होता है।

अर्ध गोले के पार्श्व तल के क्षेत्रफल के बारे में आप क्या कहेंगे? स्पष्टतः



अर्ध गोले के वक्रीय तल का क्षेत्रफल, गोले के तल के क्षेत्रफल का आधा होता है।

इसलिए अर्ध गोले के वक्र तल का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{गोले के तल का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\pi r^2.$$

$\therefore$ अर्धगोले के वक्र तल का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$.

अर्ध गोले का आधार एक वृत्ताकार क्षेत्र होता है।

इसका क्षेत्रफल $= \pi r^2$.

दोनों वक्र तल और आधार का क्षेत्रफल का योग करने पर हमें अर्ध गोले के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

अर्ध गोले के संपूर्ण का क्षेत्रफल = वक्र तल का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2.$$

$\therefore$ अर्ध गोले के संपूर्ण का क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$.

अर्ध गोले का आयतन $= \frac{1}{2} \times$ गोले का आयतन

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3.$$

उदाहरण 1 : यदि गोले के वक्र तल का क्षेत्रफल 154 व.से.मी. हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का वक्र तल का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$.

$$4\pi r^2 = 154$$

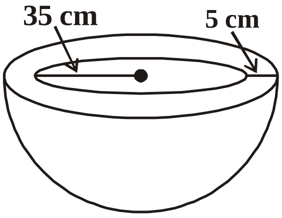
$$4\times\frac{22}{7}\times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154\times7}{4\times22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$r = \frac{7}{2}$$

$r = 3.5$ से.मी.

उदाहरण 2 : एक अर्धगोलाकार कटोरी पत्थर से बनी हुई है। जिसकी मोटाई 5से.मी. है यदि भीतरी त्रिज्या 35 से.मी. है तो कटोरी के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : माना की बाहरी त्रिज्या R तथा भीतरी त्रिज्या r है।

वलय की मोटाई = 5 से.मी.

$\therefore$ R = (r + 5) से.मी.

= (35 + 5) से.मी.

= 40 से.मी.

कटोरी के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = बाहरी अर्धगोले के वक्र तल का क्षेत्रफल

+ भीतरी अर्धगोले के वक्र तल का क्षेत्रफल

+ वलय का क्षेत्रफल

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi\,(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$$

$$= \pi(3R^2 + r^2)$$

$$= \frac{22}{7}(3\times40^2+35^2)$$

$$= \frac{6025\times22}{7}$$

= 18935.71 व.से.मी. (लगभग)

उदाहरण 3 : एक अर्ध गोलाकार कटोरी का अर्धव्यास 3.5 से.मी. है कटोरी में भरे हुए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए?

हल : कटोरी में भरे हुए पानी का आयतन

= अर्ध गोले का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times .35 \text{ घन. से.मी.}$$

= 89.8 घ.से.मी. (लगभग).

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक गोले की त्रिज्या 3.5 से.मी. है उसके पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए?
2. एक गोले के पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल $108\frac{2}{7}$ व.से.मी. है उसका आयतन ज्ञात कीजिए।
3. मानचित्र में भूमध्य रेखा की लंबाई 44 से.मी. है इसके पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक गोलाकार गेंद का व्यास 21 से.मी. है ऐसे 5 गेंदे बनने के लिए कितने चमडा लगेगा?

अभ्यास

5. दो गोलों की त्रिज्याएँ 2:3. अनुपात में है उनके पार्श्व तलों के क्षेत्रफल तथा आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
6. 10 से.मी. त्रिज्या वाले अर्धगोले के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)
7. एक गोलाकार गुब्बारे का व्यास उसमें हवा भरने के कारम 14 से.मी. से 28 से.मी. बढता है। दोनों स्थितियों में गुब्बारे के पार्श्व तलों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
8. एक अर्ध गोलाकार पीतल की कटोरी 0.25 से.मी. मोटी बनी है। कटोरी की भीतरी त्रिज्या 5से.मी. है कटोरी के बाहरी तथा भीतरी तलों के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।
9. एक सीसे के गेंद का व्यास 2.1 से.मी. है। उसे बनाने में 11.34 ग्रा/से.मी.^{3} सीसे का उपयोग किया गया है। गेंद का वजन क्या होगा?
10. एक 5 से.मी. व्यास और $3\frac{1}{3}$ से.मी. ऊँचे धातु को बेलन को गोले के रूप में ढाला गया। गोले का व्यास क्या होगा?

सारांश

- घनाभ और घन यह नियमित सम पार्श्व प्रिज्म है। जिसके 6 फलकों में से 4 पार्श्व फलक और आधारशिर्ष रहते है।

- यदि घनाभ की लंबाई l, और 'b' और 'h' है। तब

  घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

  घनाभ का पार्श्व का क्षेत्रफल $= 2h\ (l + b)$

  घनाभ का आयतन $= lbh$

- यदि घन को कोर की लंबाई 'l' इकाईयाँ है, तब

  घन का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल$= 6l^2$

  घन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4l^2$

  घन का आयतन $= l^3$

- बेलन एक ठोस है जिसमें वक्रीय पृष्ठ के साथ दो वृत्ताकार सिरे रहते है।

- यदि लंब वृत्तीय बेलन का अर्थव्यास 'r' और 'h' है तब,

  बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\ \pi rh$

  बेलन का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\ \pi r(r + h)$

  बेलन का आयत $= \pi r^2 h$

- शंकु एक ज्यामितीय आकार की वस्तु है जिसमें आधार एक वृत्त है और ऊपरी रिसे पर शीर्ष है यदि आधार के केंद्र और शीर्ष को जोडने वाला रेखाखण्ड आधार पर लंब होते यह लंब वृत्तीय शंकु कहलाता है।

- शंकु के वृत्ताकार आधार पर स्थित किसी भी बिंदु से जोडने वाली रेखा की लंबाई तिर्यक ऊँचाई (l) कहलाता है।

  $l^2 = h^2 + r^2$

  जहाँ ऊँचाई h अर्धव्यास r आधार है।

- यदि शंकु का अर्धव्यास r ऊँचाई h तिर्यक ऊँचाई, l है तब,

  शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = πrl

  शंकु का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल= $\pi r\,(l + r)$

  शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

- यदि बेलन और शंकु का समान आधार और ऊँचाई हो तब शंकु का आयतन, बेलन के आयतन के एक तिहाई रहता है।

- गोला एक बनाई हुई ज्यामितीय वस्तु है जहाँ अवकाश में एक निश्चित बिंदु से सभी बिंदुओं का समुच्चय सम दूरी पर रहते है। निश्चित बिंदु गोले का केंद्र कहलाता है दूरी, गोले का अर्थव्यास कहलाती है।

- यदि गोले का अर्थव्यास 'r' है तब,

  गोले का पृष्ठ धरातल का क्षेत्रफल= $4\pi r^2$

  गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^2$

- गोले के केंद्र से गुजरने वाला कोई समतल गोले को दो समान (बराबर) भागों में विभाजित करता है प्रत्येक भाग अर्ध गोला कहलाता है।

- अर्ध गोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

  अर्ध गोले का संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $3\pi r^2$

  अर्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^2$

अध्याय

5.3

ठोसों का समन्वय

5.3.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

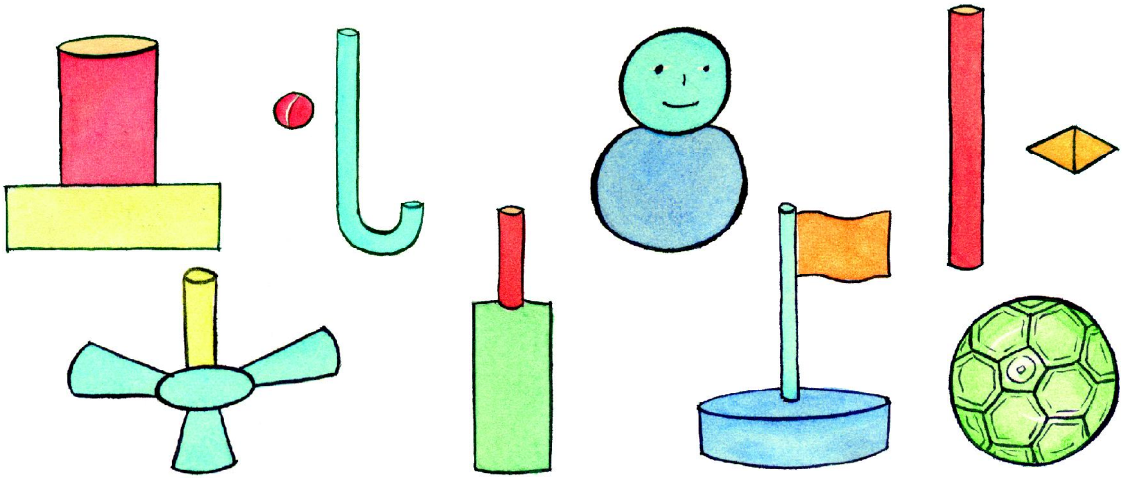
इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- कोई भी दो ठोस आकारों के संयोजन से बनी आकृति का तलीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करेंगे।
- दो ठोस आकारों के संयोजन से बनने वाली आकृति के क्षेत्रफल तथा आयतनो का सामान्यीकरण कर निष्कर्ष निकालेंगे तथा उनका कारण बताएँगे।
- क्षेत्रमिती, क्षेत्रफल, आयतनों के पद तथा सूत्रों को समझायेंगे।
- ठोसो के संयोजन के प्रश्नों को हल करने के लिए विभिन्न ज्यामितीय, बीजगणितीय, अंकगणितीय धारणाओं का उपयोग करेंगे।
- दिए गए आकृतियों से साधारण ठोस आकार तथा ठोसों के संयोजन के चित्र उतारेंगे।

5.3.1 परिचय

ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

हम अपने आस पास विभिन्न आकृतियों की वस्तुएँ देखते है खंभो पर खडे मकान, पानी की टंकी बेलनाकार है और वह घनाभाकार के आधार पर है। एक क्रिकेट के बैट का हैंडल बेलनाकार है जो एक चपटे लकडी पर है आदि आप अपने आस-पास के विभिन्न वस्तुओं के बारे में सोचिए। इनमें से कुछ नीचे बताए गए है।



क्रियाकलाप :

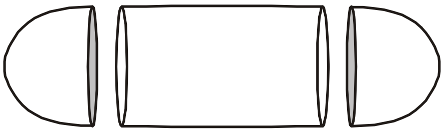
ऊपर दिए गए आकृतियों को ज्ञात ठोसों में विभाजित कीजिए। अन्य 5 वस्तुओं के विषय में सोचिए जो आकृतियों का संयोजन है इसलिए, अब हम उनका समतल क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करेंगे।

हम कुछ ठोस वस्तुएँ देखी है जो कुछ ठोस वस्तुओं के संयोजन से तैयार किए गए है। जैसे गोला, बेलन और शंकु दैनिक जीवन में हम कुछ लकड़ी की वस्तुएँ, घरेलु उपकरण, दवाई के केपसूल बोतल, तेल के टैंकर आदि देखते है। हम अपने दैनिक जीवन में आइस-क्रीम खाते है क्या आप बतायेंगे कि उसमें कितनी ठोस आकृतियाँ है? यह साधारणतः एक शंकु और अर्ध गोलाकार से बनी है।

हम एक अन्य उदाहरण जैसे तेल का टैंकर, पानी का टैंकर लेंगे। यह एक ही आकृति वाली वस्तुएँ है आप अनुमान लगा सकते है कि यह एक बेलन और दो अर्ध गोले से बनी है।

यदि आप ऐसी वस्तुओं का समतलीय क्षेत्रफल या आयतन ज्ञात करना चाहते है तो आप क्या करेंगे? अब तक अध्ययन किए गए कोई भी ठोस आकृति से ये मेल नहीं खाते है।

जैसा कि हमने देखा है, तेल का टेंकर एक बेलन के दोनों सिरों पर अर्धगोले लगाकर बनाया गया है यह निम्न आकृति जैसा दिखाई देगा।

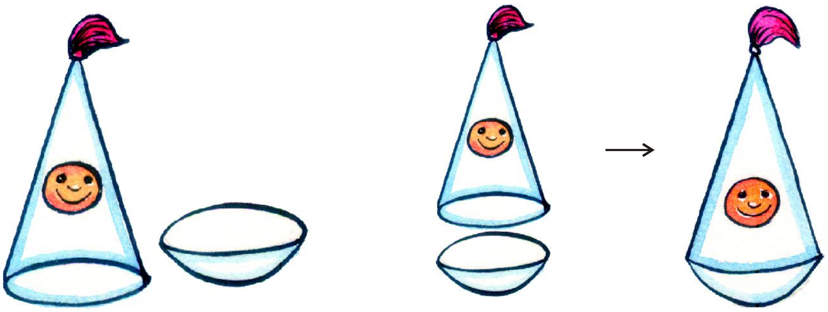


नये ठोस का संपूर्ण धरातल का क्षेत्रफल = एक अर्धगोले का पार्श्व तल का क्षेत्रफल + बेलन के पार्श्व तल का क्षेत्रफल + दूसरे अर्ध गोले का पार्श्व क्षेत्रफल

अब एक अन्य उदाहरण को देखिए।

यदि आप एक खिलौना बनाना चाहते है जिसने एक अर्धगोला और शंकु का उपयोग हो आइए प्रक्रिया के चरणों का निरीक्षण करें।

पहले हम शंकु और अर्धगोले के चपटे समतलों को निकट लाना होगा। यहाँ वह प्रायः उसके लिए शंकु और अर्धगोला समान त्रिज्या वाले हो, जिससे उस खिलौने का धरातल चिकना हो अतः इसके चरण निम्न प्रकार से होंगे।

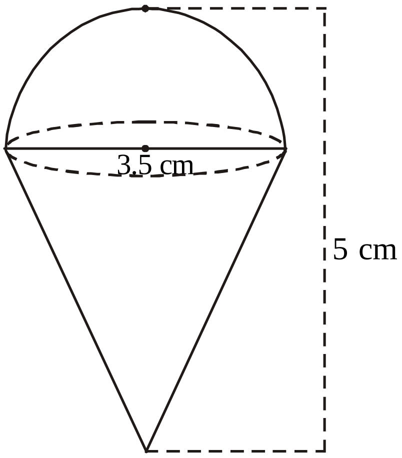


अंत में हमें एक गोल पेंदी वाला खिलौना प्राप्त हुआ। अब यदि हम जानना चाहते है कि उस खिलौने को पेंट करने के लिए कितने पेंट की आवश्यकता है, तो इस खिलौने का समतलीय क्षेत्रफल ज्ञात होना चाहिए?

खिलौने का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = अर्ध गोले का पार्श्व तल का क्षेत्रफल + शंकु के वक्र (पार्श्व) तल का क्षेत्रफल

क्या ऊपरी सूत्र उन सभी ठोस संयोजनों के लिए सही होगा जो विभिन्न ठोसों से बने है? आपके मित्रों के साथ चर्चा कीजिए।

उदाहरण 1 : सुरेश को उसके जन्म दिन पर एक लट्टू उपहार में मिला वह उसे अपने क्रेयॉन से रंगना चाहता है लट्टू का आकार शंकु पर अर्धगोलाकार होता है। पूर्ण लट्टू की ऊँचाई 5 से.मी. तथा उसके ऊपरी भाग का व्यास 3.5 से.मी. हो तो रंगे जाने वाले तल का क्षेत्रफल $\left(\text{Take } \pi = \frac{22}{7}\right)$



हल : यह लट्टू उस वस्तु जैसा है जिसमें शंकु तथा अर्धगोले का संयोजन होता है।

अर्थात् लट्टू के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल = अर्ध गोले का पार्श्वतल का क्षेत्रफल + शंकु के पार्श्व तल का क्षेत्रफल

अब अर्ध गोले के पार्श्व तल का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

शंकु की ऊँचाई = लट्टू की ऊँचाई – अर्धगोले की ऊँचाई

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) = 3.25 \text{cm}$$

शंकु की तिर्यक ऊँचाई

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7$$ से.मी. (लगभग)

इसलिए शंकु के पार्श्व तल का क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7 \text{ cm}^2$$

लट्टू के संपूर्ण तल का क्षेत्रफल

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)\ \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)\ \text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\ (3.5+3.7)\ \text{cm}^2$$

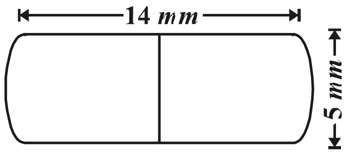
$= 11\times 0.5 = 7.2\ \text{cm}^2 = 39.6$ व.से.मी. (लगभग)

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक खिलौना ऐसा है कि अर्धगोले पर शंकु चिपका हुआ है शंकु के आधार और ऊँचाई क्रमशः 6 से.मी. और 4 से.मी. है खिलौने के धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए [π = 3.14]
2. एक ठोस वस्तु इस प्रकार है कि वृत्ताकार लंब बेलन के एक और अर्ध गोला है और दूसरी ओर शंकु है। सामान्य आधार की त्रिज्या 8 से.मी. है और बेलनाकार और शंकु आकार के भाग की ऊँचाइयाँ क्रमशः 10 से.मी. और 6 से.मी. हैइ इस ठोस का संपूर्ण तल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।[π = 3.14].
3. दो घन जिसके आयतन प्रत्येक 64 घन से.मी. उनके सिरे से जुडे है। इस तरह बनने वाले घनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अभ्यास

1. दो घन जिसके आयतन प्रत्येक 64 घन से.मी. उनके सिरे से जुडे है। इस तरह बनने वाले घनाभ का संपूर्णतल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक संग्रहित टंकी वृत्ताकार बेलन के आकार में है जिसके दोनों ओर अर्धगोले लगे हुए है यदि उसका बाहर का व्यास 1.4 मी. और लंबाई 8मी. तो बाहर की ओर पेंट करने का खर्च रू.20 प्रति मी. की दर से ज्ञात कीजिए।
3. एक गोला बेलन और शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई समान है। उनके आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. एक दवाई के केपसूल का आकार ऐसा है कि बेलन के दोनों ओर अर्ध गोले चिपके हुए है। केपसूल की लंबाई 14 मि.मि. है। और चौडाई 5मि.मी. है। इसके धरातल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



सारांश

- ठोस के संयोजनों का आयतन प्रत्येक ठोस आकृति के प्रत्येक का आयतन का योग है।
- ठोस के संयोजनो का धरातल का क्षेत्रफल उसके प्रत्येक ठोस आकृति के पार्श्व तलों के क्षेत्रफल का योग होता है।

इकाई 6 त्रिकोणमिति

अध्याय 6.0 त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

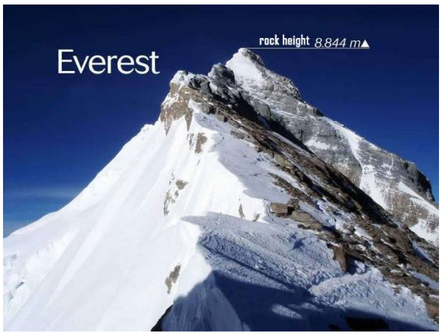
6.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- समकोण त्रिभुज के न्यून कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपातों को लिखेंगे।
- समकोण त्रिभुज के भुजाओं और कोण ज्ञात करेंगे जब त्रिखोणमितिय अनुपात ज्ञात हो।
- कोण 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o के लिए त्रिकोणमितिय अनुपातों के मूल्य ज्ञात करेंगे।
- त्रिकोणमितिय अनुपातों पर आधारित ऊँचाई तथा दूरी वाले प्रश्नों को हल करेंगे।

6.1 परिचय

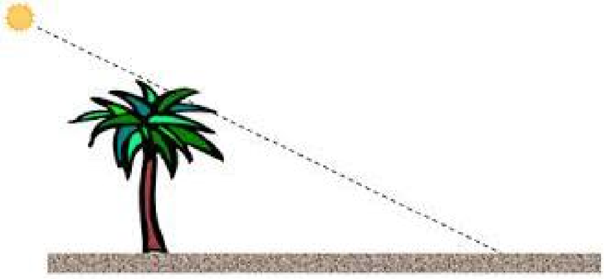
आपने पढा है कि विश्व में सबसे ऊँचे पहाड की चोटी माऊण्ट एवरेस्ट है और इसकी ऊँचाई 8,848 मी या 29,029 फीट है।



तेलंगाणा राज्य के आदिलाबाद जिले में 'कुण्टाला जलप्रपात'' सबसे ऊँच जल प्रपात है। इसकी ऊँचाई 45 मीटर या 150 फीट है।

ऐसी ऊंचाईयों को साधारण टेप से मापना संभव नहीं है इनकी ऊँचाईयों को कैसे माप सकते है?

उसी प्रकार जब हम नारियल का पेड देखते है तो उसकी ऊँचाई के बारे में सोचिए।



ऊपरी सभी स्थितियों में ऊँचाई या दूरी को ज्ञात करने के लिए गणित की त्रिभुज वाली धारणा का उपयोग करेंगे यह गणित की शाखा त्रिकोणमिती कहलाती है।

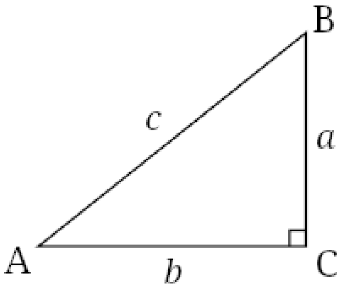
त्रिकोणमिती यह ग्रीक भाषा के तीन शब्दों से बना है। Tri अर्थात् तीन Gonan अर्थात् भुजाएँ तथा 'Metron' अर्थात् मापना। इसलिए त्रिकोणमिती का शाब्दिक अर्थ होता है त्रिभुज की भुजा तथा कोणों का मापन। यहाँ त्रिखोणमिती में हम समकोण त्रिभुज से संबंधित सूत्रों तथा प्रश्नों को हल करने की प्रक्रिया होती है। त्रिकोणमिती में समकोण त्रिभुज पर अधिक महत्व दिया जाता है।

6.2 त्रिकोणमिती के अनुपात - अर्थ

पायथागोरस प्रमेय (बुधायन नियम):

समकोण त्रिभुज : त्रिभुज जिसमें एक कोण समकोण हो तो उसे समकोण त्रिभुज कहते है।

संलग्न चित्र में, ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसने C पर समकोण बनता है। अर्थात्. $\angle C = 90^0$.



जब हम समकोण त्रिभुज देखते है उसमें कोण 90^0 की सम्मुख भुजा सबसे बडी भुजा सबसे बडी भुजा होती है और इसे कर्ण कहते है ऊपरी त्रिभुज में 'AB' कर्ण है।

पायथागोरस प्रमेय बताता है कि "एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग उसके लंबवत भुजाओं के वर्गों के योग के समान होता है।"

पायथागोरस प्रमेय के अनुसार, $AB^2 = BC^2 + AC^2$. यदि $AB = c$, $BC = a$ तथा $AC = b$, हो तो हम इसे $c^2 = a^2 + b^2$ के रूप में लिख सकते है।

प्रमेय की सहायता से यदि दो भुजाएँ दी गई होतो तीसरी भुजा ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण - 1 : ΔPQR, एक समकोण त्रिभुज है जो R पर समकोण है यदि PR = 7 से.मी. और QR = 24 से.मी. हो तो PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।. एक सीढी दीवार पर 7 फीट ऊँचाई पर लगी है सीढी की 24 फीट की दूरी पर रखी हो तो सीढी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

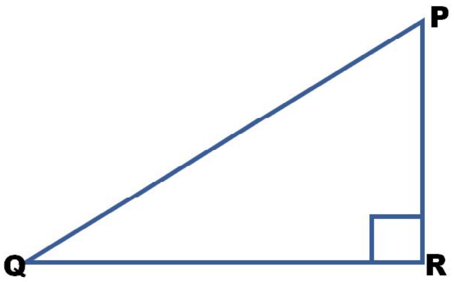
हल: ΔPQR में $\angle R = 90^0$ दिया गया है

यदि PQ एक कर्ण हो तो PR = 7से.मी., Q

पायथागोरस प्रमेय अनुसार

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$
$$= 7^2 + 24^2$$
$$= 49 + 576 = 625 = 25^2$$

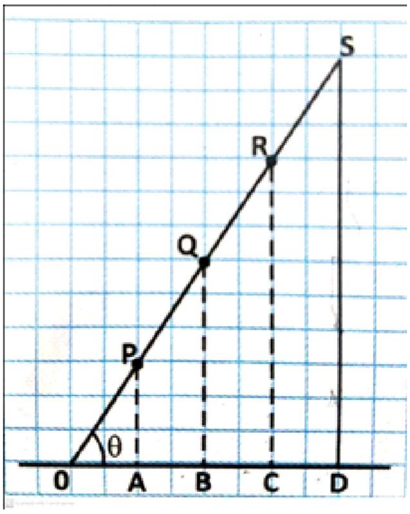
यदि $PQ^2 = 25^2$, हो तो PQ = 25



त्रिभुज की भुजाओं का उसके कोणो के साथ संबंध

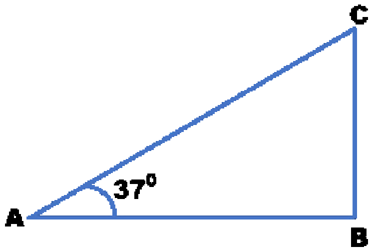
क्रियाकलाप:

हम जानते है कि समकोण त्रिभुज में
OA आधार है
PA लंब तथा OP एक कर्ण है।



क्र.सं.	आधार	ऊँचाई	अनुपात
1.	2	3	$\frac{2}{3}$
2.	4	6	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
3.	6	9	$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
4.	8	12	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

उसी प्रकार आप न्यून कोणों का संबंध भी स्थापित कर सकते है।



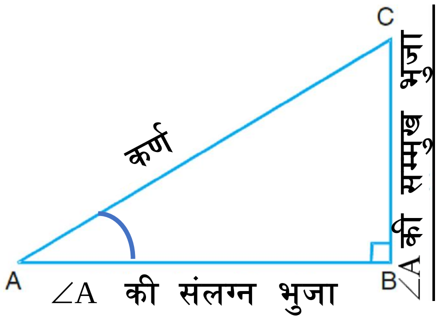
इसी क्रिया को कोण 37^0 लेकर दोहराइए।

कर्ण की लंबाई 5 से.मी., 10 से.मी., और 15 से.मी. हो तो ऊँचाई को ज्ञात कीजिए।

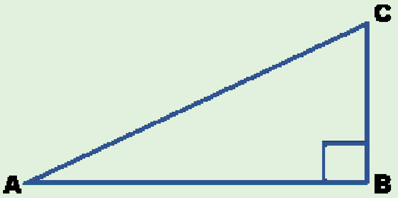
आपने देखा होगा कि कोण 37^0 की संगत भुजाएँ स्थिर अनुपात में होती है।

कर्ण की लंबाई AC	ऊँचाई का माप AC
5cm	3cm
10cm	6cm
15cm	9cm
20cm	12cm
25cm	15cm

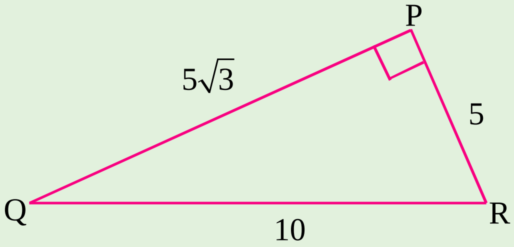
फिर से जब हम न्यून कोण ∠C, को देखेंगे तो भुजा AB कोण ∠C, की सम्मुख भुजा है BC भुजा ∠C तथा AC उसका कर्ण है।



अपनी प्रगति जाँच कीजिए



1. संलग्न चित्र में कर्ण, ∠A की सम्मुख भुजा ∠A की आसन्न भुजा के नाम लिखिए।
2. संलग्न चित्र में निम्न के माप लिखिए।
    - (i) ∠Q की सम्मुख भुजा, ∠Q की आसन्न भुजा तथा कर्ण के नाम लिखिए।
    - (ii) ∠R की सम्मुख भुजा, ∠R की आसन्न भुजा और कर्ण

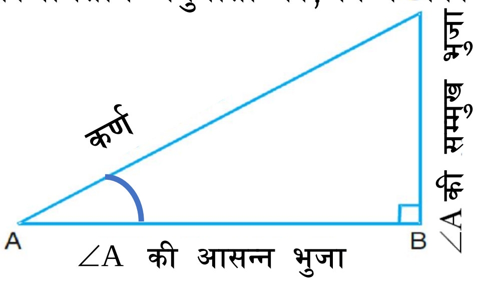


3. ΔPQR में, $\angle P = 90^0$, $\angle Q = \theta$, PQ = 17से.मी., QR = 15 से.मी., PR = 8, θ के सम्मुख वाली भुजा θ की आसन्न भुजा तथा कर्ण के नाम लिखिए।

हमने देखा कि ''समकोण त्रिभुज में न्यून कोण से संबंधित भुजाएँ एक स्थिर अनुपात में रहते है।''

त्रिकोणमितीय अनुपात

मान लीजिए निम्न आकृति में दिखाए अनुसार समकोण त्रिभुज ΔABC में समकोण B पर है तब समकोण त्रिभुज ABC में∠A के त्रिकोणमितीय अनुपातो को, निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है।



$$\sin A = \frac{\text{कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

उसी प्रकार∠A की आसन्न भुजा तथा कर्ण का स्थिर अनुपात इसे हम ''कोसाइन A'' कहेंगे।

$$\text{cosine } A = \frac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

उसी प्रकार ∠A की सम्मुख भुजा तथा उसकी आसन्न भुजा का अनुपात इसे हम ''टानजेंट A'' कहेंगे।

$$\text{tangent } A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB}$$

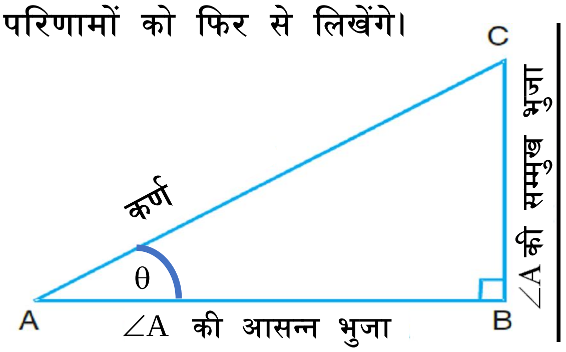
ऊपरी अनुपातों को संक्षिप्त में क्रमशः 'sin A', 'cos A' तथा 'tan A'

अब हम $\angle A = \theta$. लेंगे तथा ऊपरी परिणामों को फिर से लिखेंगे।

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC}$$

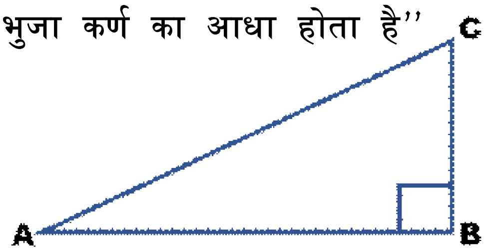
$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$



हमेशा याद रखिए त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोणों के आधार पर ज्ञात करेंगे। त्रिकोणमितीय अनुपातों का मूल्य विभिन्न कोणों के लिए भिन्न होता है। उदाहरणार्थ $\sin 30^0$ का मूल्य $\sin 60^0$ से कम होता है। यहाँ त्रिकोणमितीय अनुपातों के मूल्य भिन्न होंगे क्योंकि कोम अलग है।

30^0 कोण के लिए अनुपातों को देखेंगे। ऊपरी क्रियाकलाप में हमने देखा।

हम जानते है कि "कोण *30^0* का सम्मुख भुजा कर्ण का आधा होता है"

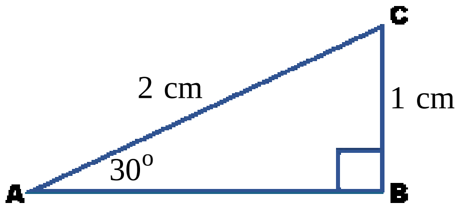


उदाहरण - 2 : मानलो ΔABC, $\angle B = 90^0$, $\angle A = 30^0$ तथा कर्ण $AC = 2$ से.मी. लीजिए इसलिए सम्मुख भुजा $BC = 1$ से.मी. होगी।

हल: यदि, $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$$= 2^2 - 1^2$$

$$= 4 - 1 = 3$$



यदि $AB^2 = 3$ हो तो $AB = \sqrt{3}$ से.मी.

अंततः $AB = \sqrt{3}$ से.मी., $BC = 1$ से.मी. और $AC = 2$ से.मी. होंगे।

अब कोण 30^o के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

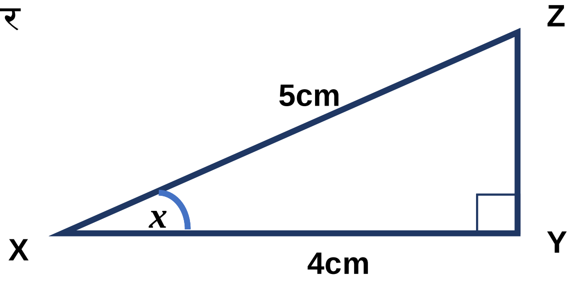
$$\sin 30^o = \frac{30^0 \text{ के सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{30^0 \text{ के सम्मुख भुजा}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{30^0 \text{ के सम्मुख भुजा}}{30^0 \text{ के आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 3 : यदि XZ = 5 से.मी. XY = 4 से.मी. हो तो ΔXYZ में *sinx, cosx तथा tanx.* ज्ञात कीजिए यदि, $\angle Y = 90^0$, $\angle X = x^0$.

हल: प्रश्न में दिए गए मूल्यों को संलग्न में दर्शाया गया है।



हमारे पास $\angle X = x^o$, XZ = 5 से.मी. और XY = 4 से.मी. है।

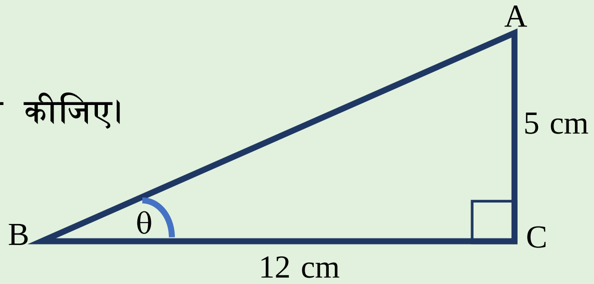
हमें शेष भुजा YZ को पायथागोरस प्रमेय से ज्ञात करेंगे।

$$YZ^2 = XZ^2 - XY^2 = 5^2 - 4^2$$
$$= 25 - 16 = 9 = 3^2.$$

इसलिए YZ = 3 से.मी. तथा, XZ = 5 से.मी. XY = 4 से.मी. है।

$$\sin x = \frac{YZ}{XZ} = \frac{3}{5};\ \cos x = \frac{XY}{XZ} = \frac{4}{5} \text{ तथा } \tan x = \frac{YZ}{XY} = \frac{3}{4}$$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

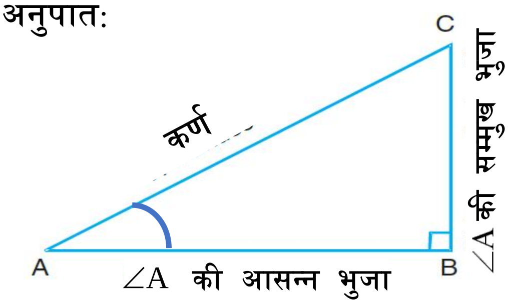


1. दिए गए चित्र से मूल्यों को ज्ञात कीजिए।
   (i) sin A, cos A तथा tan A
   (ii) sin C, cos C तथा tan C
2. ΔPQR समकोण R पर है $\angle P = \theta$, यदि PR = 5 से.मी. तथा QR = 12 से.मी. हो तो *sin* θ, *cos* θ तथा *tan* θ को ज्ञात कीजिए।
3. ΔABC, जो B, पर समकोण है, AC = 10 से.मी. तथा AB = 6 से.मी. हो तो sin C, cos C, तथा tan C का मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. ΔPQR, जो Q, पर समकोण है, PQ = 5 से.मी. तथा PR = 7 से.मी. हो तो sin P, cos P, sin R तथा cos R. को ज्ञात कर sin P - cos R. को ज्ञात कीजिए।

त्रिकोणमितीय अनुपातो के गुणात्मक विलोम

चलिए अब हम ऊपरी तीन त्रिकोणमिती के अनुपातों का गुणात्मक विलोम देखेंगे।

याद कीजिए $\angle A$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात:



$$\sin A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ की असन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की असन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB}$$

हमारे पास sin A, cos A और tan A के गुणात्मक विलोम क्रमशः cosecant A, secant A तथा cotangent A होंगे।

मौलिक त्रिकोणमितीय अनुपात	**उनके गुणात्मक विलोम**
sin A = $\dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$	cosecant A = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AC}{BC}$
cos A = $\dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$	secant A = $\dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB}$
tan A = $\dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB}$	cotangent A = $\dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{BC}$

ऊपरी त्रिकोणमितीय अनुपात ‘cosecant A’, ‘secant A’, तथा ‘cotangent A’ के संक्षिप्त रूप ‘cosec A’, ‘sec A’ तथा ‘cot A’ है।

यदि $\sin x = \dfrac{3}{5}$ हो तो $\operatorname{cosec} x = \dfrac{5}{3}$

$\cos x = \dfrac{4}{5}$ हो तो $\sec x = \dfrac{5}{4}$

तथा $\tan x = \dfrac{3}{4}$ हो तो $\cot x = \dfrac{4}{3}$

1. Sin A या sin एक चिन्ह है जिसे हम A या θ से अलग नहीं कर सकते।
2. sin समान नही है sin × θ के, अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी यही लागू होता है।
3. प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात एक वास्तविक संख्या होती है

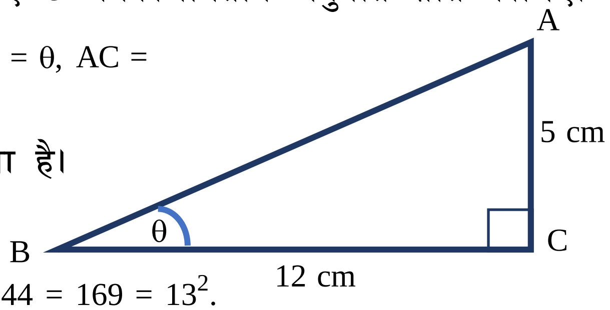
हम जानते है कि (संख्या a) × (a का विलोम) = 1

उसी प्रकार हम कह सकते है कि

$$\sin x \times \operatorname{cosec} x = 1$$
$$\cos x \times \sec x = 1$$
$$\tan x \times \cot x = 1$$

अब हम त्रिकोणमितीय के मौलिक अनुपातों पर आधारित कुछ प्रश्नों को हल करेंगे।

उदाहरण 4 : ΔABC,समकोण C पर है तथा ∠B = θ, है यदि AC = 5 से.मी. और BC = 12 से.मी. हो तो कोण θ के लिए छः त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल: ΔABC समकोण C पर है तथा ∠B = θ, AC = 5से.मी. और BC = 12 से.मी.

हमें शेष भुजाAB की लंबाई ज्ञात करता है।

पायथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

इसलिए AB = 13 से.मी. तथा AC = 5 से.मी. और BC = 12 से.मी.

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}; \qquad \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13} \text{ तथा } \tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$$

अब, यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ हो तो $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

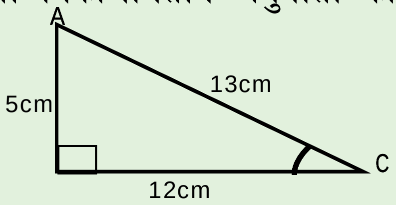
$\cos\theta = \frac{12}{13}$ हो तो $\sec\theta = \frac{13}{12}$

तथा $\tan\theta = \frac{5}{12}$ हो तो $\cot\theta = \frac{12}{5}$

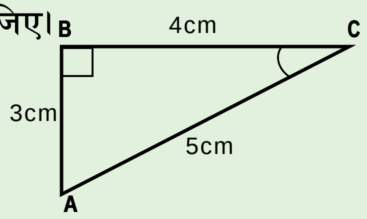
अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. नीचे दिए गए प्रत्येक समकोण त्रिभुज ΔABC में B समकोण है, तो θ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात कीजिए।

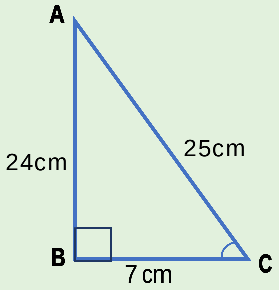
(i)



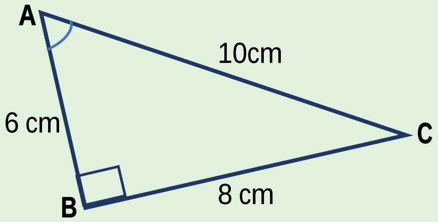
(ii)



(iii)



(iv)



2. यदि $\sin\theta = \frac{x}{y}$, $\cos\theta = \frac{z}{y}$ तथा $\tan\theta = \frac{x}{z}$ हो तो cosec θ, sec θ तथा cot θ के मूल्य क्या होंगे?

3. ΔPQR में R पर समकोण है तथा ∠Q = z, और PR = 15 से.मी. और QR = 8 से.मी. हो तो कोण z के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात कीजिए।

4. ΔABC, $\angle B = 90^0$, BC = 5 से.मी., AB = 4 से.मी., तथा $AC=\sqrt{41}$, हो तो sin A, cos A तथा tanA. के मूल्यों को ज्ञात कीजिए।

5. ΔABC में समकोण B समकोण AB = 40 से.मी., BC = 9 से.मी. तथा AC = 41से.मी., हो तो sin C, cot C, cos A तथा cot A के मूल्यों को ज्ञात कीजिए।

6. ΔABC, $\angle B = 90^0$. AB = BC = 2 से.मी. $AC = 2\sqrt{2}$ से.मी. हो तो sec C, cosec C, तथा cot C के मूल्यों को ज्ञात कीजिए।

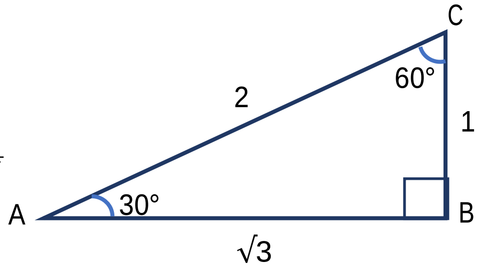
6.3 विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (0°,30°,45°, 60°, 90°)

कोण 30^0 के लिए हम पहले ही त्रिकोणमितीय अनुपातों को देख चुके है।

30^o के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

याद कीजिए कोण 30^o, 60^o, 90^o के सम्मुख की भुजाओं का अनुपात $1:\sqrt{3}:2$.

एक समकोण त्रिभुज ΔABC जिसमें $\angle B = 90^o$, $\angle A = 30^o$, $\angle C = 60^o$. यदि 30^o की सम्मुख भुजा $BC = 1$ इकाई, $AB = \sqrt{3}$ इकाई तथा $AC = 2$ इकाई है।



$\sin 30^o = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ हो तो $\operatorname{cosec} 30^o = 2$

$\cos 30^o = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो तो $\sec 30^o = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30^o = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो तो $\cot 30^o = \sqrt{3}$

60^o के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

अब हम कोण 60^0 के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात को देखेंगे।

ΔABC, जो ऊपरी उदाहरण में दिया गया है।

कोण 60^o के लिए सम्मुख भुजा $= \sqrt{3}$

आसन्न भुजा $= 1$

कर्ण $= 2$

हो तो, $\sin 60^o = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\operatorname{cosec} 60^o = \frac{2}{\sqrt{3}}$

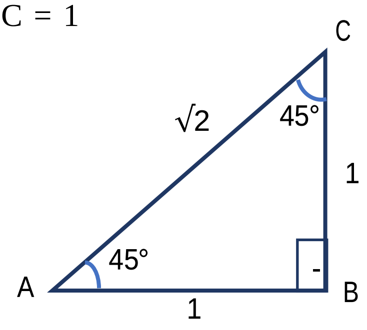
$\cos 60^o = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ तो $\sec 60^o = 2$

$\tan 60^o = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ तो $\cot 60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

कोण 45^o के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

उसी प्रकार हम कोण 45^o के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करेंगे।

अब हम समद्विबाहु समकोण त्रिभुज लेंगे जिसके कोण 45^o, 45^o, 90^o होंगे।



मानलो $AB = 1$ इकाई तथा $AB = BC$ हो तो $BC = 1$

कर्ण $= AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 1^2 + 1^2 = 1 + 1$

$AC^2 = 2$

$AC = \sqrt{2}$

मानलो $\angle A = 45$, सम्मुख भुजा $BC = 1$

आसन्न भुजा $AB = 1$

कर्ण $AC = \sqrt{2}$

$\text{Sin } 45^o = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\text{cosec}45^0 = \sqrt{2}$

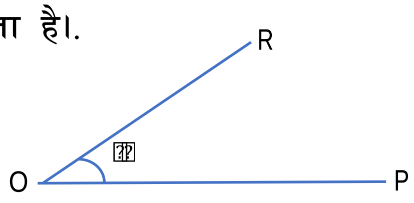
$\cos 45^o = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sec 45^o = \sqrt{2}$

$\tan 45^o = \frac{BC}{AB} = 1$ $\qquad$ $\cot 45^0 = 1$

कोण 0^0 तथा 90^0 के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात

अब हम कोण 0^o के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों के मूल्यों को ज्ञात करेंगे। क्षैतिज रेखा OP को याद कीजिए जो कि 1 इकाई से अधिक है।

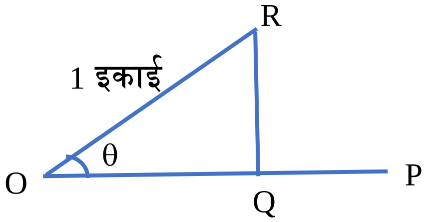
मानलो $OR = 1$इकाई जो OP से कोण θ बनाता है।.

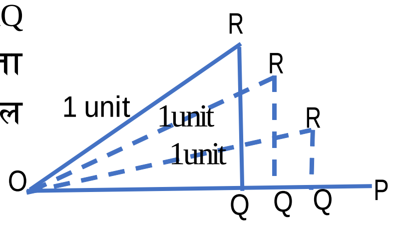


RQ कोण की सम्मुख ऊँचाई है।

यदि OR से OP पर कोण (‘θ’) घटता है तो उसकी सम्मुख भुजा RQ का क्या होगा।

आपका उत्तर सही है।





जैसे 2 कोण θ घटता है तो उसकी सम्मुख भुजा RQ भुजा भी कम होती है। जब सम्मुख भुजा “0” पर पहुँचता है तो कोण ‘θ’ भी “0” होता है। अंततः OR, OQ में मिल जाती है तथा OR = OQ

जब कोण $\theta = 0^0$,

सम्मुख भुजा RQ = 0, आसन्न भुजा OQ = OR = 1इकाई

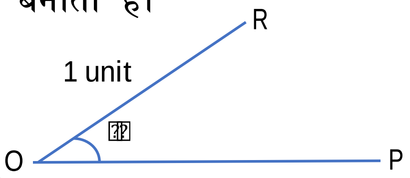
$\sin 0^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\operatorname{cosec} 0^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{0} =$ (परिभाषित नही है)

$\cos 0^0 = \frac{OQ}{OR} = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\sec 0^0 = \frac{OR}{OQ} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 0^0 = \frac{RQ}{OQ} = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\cot 0^0 = \frac{OQ}{RQ} = \frac{1}{0} =$ (परिभाषित नही है)

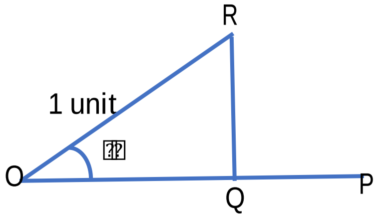
उसी प्रकार हम कोण 90^0 के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात करेंगे। क्षितिज रेका OP जो कि 1इकाई से अधिक है।.

मानलो OR = 1 इकाई कोण θ , OP के साथ बनाता है।



RQ की ऊँचाई कोण θ की सम्मुख भुजा होगी.

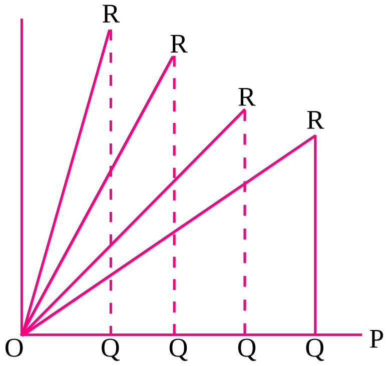
पहले जैसे ही अब, θ कोण जैसे-जैसे बढता है।



यदि OR से OP पर बनने वाला कोण (‘θ’) बढता है तब उसकी सम्मुख भुजा RQ की लंबाई क्या होती है।

आपका उत्तर सही है।

जैसे ही कोण θ बढता है सम्मुख भुजा RQ भी बढती है। जब,OR, OQ में मिलती है तथा OR = OQ तब कोण “90^0” का बनता है। अंततः भुजा OQ कम होती है और शून्य हो जाता है। जब कोण $\theta = 90^0$.



आसन्न भुजा RQ = 0, सम्मुख भुजा OQ = OR = 1इकाई

$\sin 90^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad$ $\text{cosec } 90^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90^0 = \frac{OQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad$ $\sec 90^0 = \frac{OR}{OQ} = \frac{1}{0} =$ (परिभाषित नहीं है)

$\tan 90^0 = \frac{RQ}{OQ} = \frac{1}{0} =$(परिभाषित नहीं है) $\quad$ $\cot 90^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{0}{1} = 0$

अब ऊपर चर्चित सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को सारणी के रूप में लिखते है। 0^o, 30^o,45^o, 60^o और 90^o.

कोण θ अनुपात	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नही है
cosec θ	परिभाषित नही है	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नही ह
cot θ	परिभाषित नही है	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

एक बार फिर से देखेंगे कि 'sin' का अनुपात कोण 30^0 के लिए हमेशा $\frac{1}{2}$ होगा $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ उसी प्रकार ऊपरी सारणी में दिए गए सभी मूल्य स्थिर होंगे।

नोट : हम ($\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\tan^2\theta$ तथा $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta))^2$, तथा $(\tan\theta)^2$ को सुगमता के लिए $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\tan^2\theta$ लिखते है घातांक के अधिक मूल्यों के लिए इसी प्रकार का अंकन उपयोग में लायेंगे।

उदाहरण 5 : $\cos 60^0 + \sin 30^0 - \tan 45^0$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते है कि $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ तथा $\tan 45^0 = 1$

$$\cos 60^0 + \sin 30^0 - \tan 45^0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

उदाहरण 6 : $\cot^2 30^0 + \sec^2 45^0 + \mathrm{cosec}^2 45^0 \cos 60^0$ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते है कि $\cot 30^0 = \sqrt{3}$, $\sec 45^0 = \sqrt{2}$ तथा $\mathrm{cosec}\, 45^0 = \sqrt{2}$ and $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$$\cot^2 30^0 + \sec^2 45^0 + \mathrm{cosec}^2 45^0 \cos 60^0$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 3 + 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 5 + 1 = 6$$

उदाहरण 7 : $\frac{\tan 45^0}{\mathrm{cosec}\, 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5 \sin 90^0}{2 \cos 0^0}$ ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते है कि, $\tan 45^0 = 1$, $\mathrm{cosec}\, 30^0 = 2$, $\sec 60^0 = 2$, $\cot 45^0 = 1$, $\sin 90^0 = 1$ and $\cos 0^0 = 1$

$$\frac{\tan 45^0}{\mathrm{cosec}\, 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5 \sin 90^0}{2 \cos 0^0}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0.$$

उदाहरण 8 : $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ की जाँच $A = 30^0$ के लिए कीजिए।

हल: दिया गया है $A = 30^0$ हम जानते हैं कि $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तथा $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$$\text{LHS} = \tan 2A = \tan (2 \times 30^0) = \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\text{RHS} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0} = \frac{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ LHS = RHS.

उदाहरण 9 : यदि $\sin(A + B) = 1$ तथा $\cos(A - B) = 1$, $0^0 < A + B \leq 90^0$, $A \geq B$, हो तो A तथा B का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि, $\sin(A + B) = 1$ तथा $\sin 90^0 = 1$

$\sin(A + B) = \sin 90^0$

$\therefore \quad A + B = 90^0 \qquad$ ...(i)

$\cos(A - B) = 1$ तथा $\cos 0^0 = 1$

$\therefore \quad A - B = 0^0 \qquad$ ...(ii)

(i) और (ii), को जोडने पर हमें प्राप्त होगा

$A + B + A - B = 90^0$

$2A = 90^0$ or $A = 45^0$

समीकरण (ii) से हमें प्राप्त होगा $B = A = 45^0$

इसलिए, $A = 45^0$ तथा $B = 45^0$

उदाहरण 10 : यदि $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$, हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए.

हल: $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$ तथा हम जानते है कि $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ & $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\cos(20^0 + x) = \cos 60^0$

$\therefore \quad (20^0 + x) = 60^0$

या $x = 60^0 - 20^0 = 40^0$

इसलिए, $x = 40^0$.

उदाहरण 11 : $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है

$\tan 2x - \sqrt{3} = 0$

या $\quad \tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^0$

$2x = 60^0$ हो तो $x = 30^0$ होगा।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्न का मूल्य ज्ञात कीजिए

(i) $\sin^2 60^0 + \cos^2 45^0$

(ii) $2\sin^2 30^0 - 2\cos^2 45^0 + \tan 2\ 60^0$

(iii) $4\sin^2 60^0 + 3\tan^2 30^0 - 8\sin^2 45^0 \cos 45^0$

(iv) $4(\sin^4 30^0 + \cos^4 60^0) - 3(\cos^2 45^0 - 2\sin^2 45^0)$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^0 + 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0}$

2. निम्नलिखित को $\angle A = 30^0$ के लिए जाँ कीजिए।

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

4. यदि $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \dfrac{1}{2}$, $0^0 < A+B < 90^0$, $A > B$, हो तो A तथा B को मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sin(A+2B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ और $\cos(A+4B) = 0$, हो तो, A और B का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\cos(40^0 + 2x) = \sin 30^0$, हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

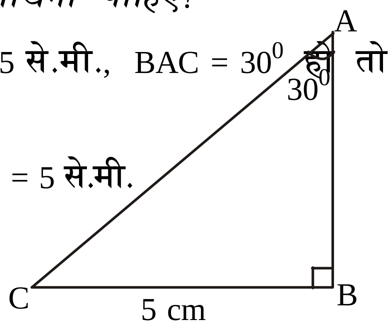
त्रिकोणमितीय अनुपातों के मूल्यों का अनुप्रयोग

अब तक हमने त्रिकोणमिती के अनुपातों को कुछ विशेष कोणों के लिए 0°, 30°,45°, 60° और 90° के लिए जाना है।

इन मूल्यों का दैनिक जीवन में क्या उपयोग है?

इन त्रिकोणमिती के अनुपतों के मूल्यों को क्यों सीखना चाहिए?

उदाहरण 12 : ΔABC में समकोण B पर है यदि, BC = 5 से.मी., BAC = 30^0 हों तो AB तथा AC की लंबाई ज्ञात कीजिए।



हल: दिया गया है $\angle BAC = 30^0$ अर्थात् $\angle A = 30^0$ तथा BC = 5 से.मी.

अब $\sin A = \dfrac{BC}{AC}$

$$\sin 30^0 = \frac{5}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

AC = 2 × 5 = 10 से.मी.

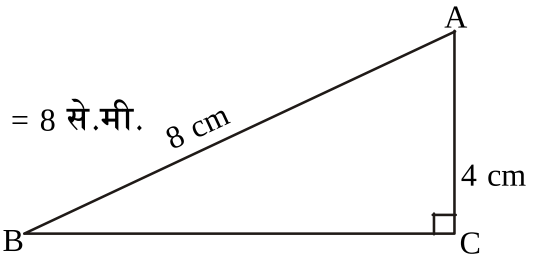
पायथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 - BC^2$ (OR) $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$AB = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ से.मी.

इसलिए, AC = 10 से.मी. तथा AB = $5\sqrt{3}$ से.मी..

उदाहरण 13: ΔABC में समकोण C, पर है AC = 4 से.मी. तथा AB = 8 से.मी. हो तो $\angle A$ तथा $\angle B$. का मूल्य ज्ञात कीजिए।



हल: दिया गया है AC = 4 से.मी. तथा AB = 8 से.मी.

अब, $\sin B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$

$B = 30^0$ or $\angle B = 30^0$

अब, In ΔABC, में हमारे पास $\angle A + \angle B = 90^0$ है, क्योंकि $\angle C = 90^0$

$\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 30^0 = 60^0$

$\therefore \angle A = 60^0$ and $\angle B = 30^0$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. ΔXYZ में समकोण Z, पर, XY= 50 से.मी. और $\angle X = 45^0$, हो तो YZ तथा XZ को ज्ञात कीजिए।
2. ΔPQR में समकोण Q पर, PQ = 5 से.मी. तथा $\angle R = 30^0$, हो तो QR तथा PR को ज्ञात कीजिए।
3. ΔABC में $\angle B = 90^0$, AB = 600 से.मी. तथा AC = 1200 से.मी. हो तो $\angle A$ और $\angle C$ को ज्ञात कीजिए।
4. ΔMPC में $\angle M = 90^0$, MP = $50\sqrt{2}$ से.मी. और PC = 50 से.मी. हो तो $\angle P$ और $\angle C$ को ज्ञात कीजिए।
5. ΔGOD में समकोण O पर है, OD = 30 से.मी. तथा $\angle G = 36.87^0$, हो तो GO और GD को ज्ञात कीजिए। [दिया गया $\tan(36.87^0) = \frac{3}{4}$]

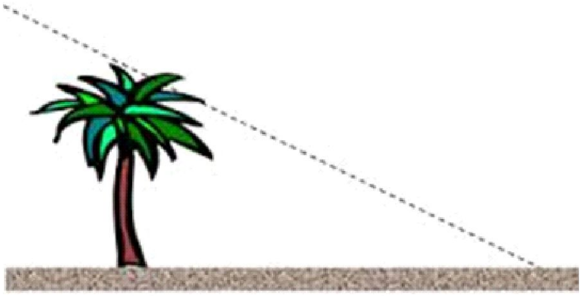
6.4 दूरी तथा ऊँचाई के साथ त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

आपने सुना होगा कि विश्व में सबसे ऊँचे पहाड की चोटी माऊण्ट एवरेस्ट है और इसकी ऊँचाई 8,848 मी.या 29,029 फीट है। तथा तेलंगाणा के आदिलाबाद जिले में "कुण्टाला जलप्रपात" यह सबसे ऊँचा जल प्रपात है इसकी ऊँचाई 45 मी या 150 फीट है।

ऐसी ऊँचाईयों को साधारण टेप से मापना संभव नहीं है इनकी ऊँचाईयों को कैसे माप सकते है?

उसी प्रकार जब हम नारियल का पेड देकते है। तो उसकी ऊँचाई के बारे में सोचिए।

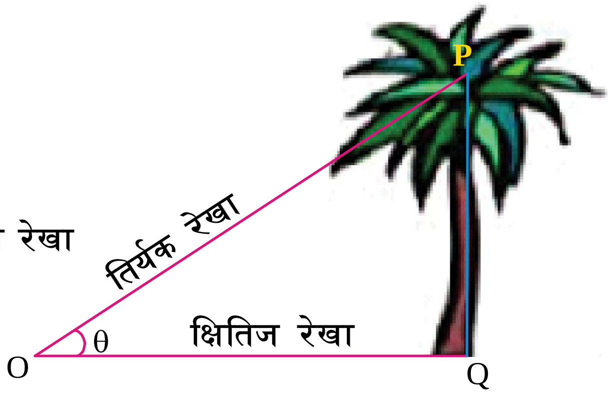
क्या आप नारियल पेड की ऊँचाई को बिना मापे ज्ञात कर सकते है?



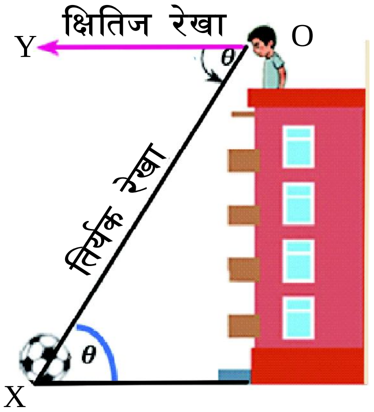
उन्नयन कोण (Angle of Elevation)

मानलो यदि एक दर्शक किसी वस्तु (P) को अपनी ऊँचाई (O) से अधिक ऊँचाई पर देखता है तो उसे अपनी आँखे ऊपर उठानी पडती है। तब दर्शक की आँख तथा वस्तु और क्षितिज रेखा के मध्य एक कोण बनता है।

दिए गए चित्र में O दर्शक है P वस्तु है। OP दृष्टि रेखा तथा OQ क्षितिज रेखा है तो उन्नयन कोण होगा।



अवनमन कोण (Angle of Depression)



जब दर्शक (O) अधिक ऊँचाई पर खडा होता है और कम ऊँचाई वाली वस्तु को देखता है तो उसकी दर्शन रेखा तथा क्षितिज रेखा के मध्य अवनमन कोण बनता है। संलग्न चित्र में OX दृष्टि रेखा तथा OY क्षितिज रेखा है यहाँ अवनमन कोण बनता है आप ध्यानपूर्वक देखिए कि,

$\angle O = \angle X = \theta.$

अब हम दैनिक जीवन की घटनाओं को देखेंगे

ऊँचाई तथा दूरी को ज्ञान करने के लिए हमें ज्यामितीय आकृतियों को उतारना होगा।

इन आकृतियों की सहायता प्रश्नों को हल करेंगे।

आकृतियों को उतारते समय निम्नलिखित सूचनाओं को ध्यान में रखना चाहिए।

(i) सभी वस्तुएँ जैसे मीनार, पेड, भवन, जहाज पर्वत आदि को गणितीय उपयुक्तता के लिए रेखा के रूप में लेना चाहिए।

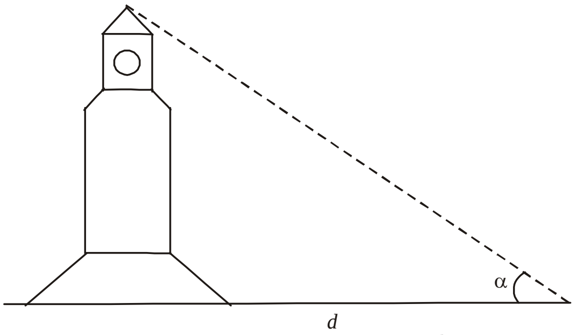
(ii) उन्नयन कोण अथवा अवनमन कोण क्षैतिज रेखा के संदर्भ के साथ लेजा चाहिए।

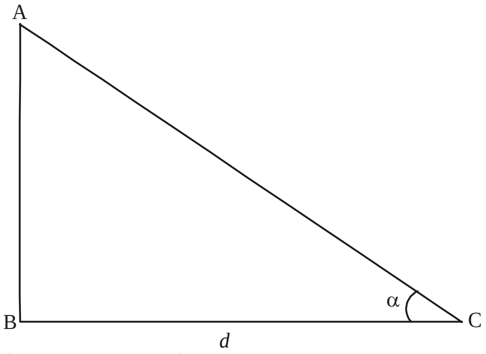
(iii) निरीक्षक की ऊँचाई नगव्य मानी जाती है यदि वह प्रश्न में न दी गई हो।

जब हम उन्नयन कोण अवनमन कोण पर ऊँचाई और दूरी ज्ञात करने का प्रयत्न करते है तो हमें इसकी ज्यामितीय आकृति मन में स्पष्ट रूप दिखनी चाहिए और इन आकृतियों की सहायता से हम प्रश्नों को हल कर सकते है।

उदाहरण-14 : निरीक्षक से d मीटर की दूरी पर एक घंटाघर का आधार है और घंटाघर के सरे का उन्नयन कोण α^o पाया गया। इस डाटा के लिए आकृति बनाइए।

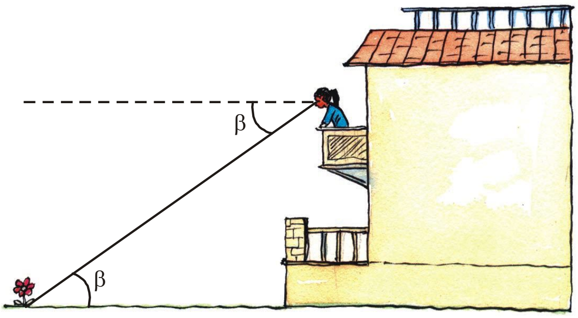
हल : आकृतियाँ नीचे दिखाए अनुसार रहती है। :

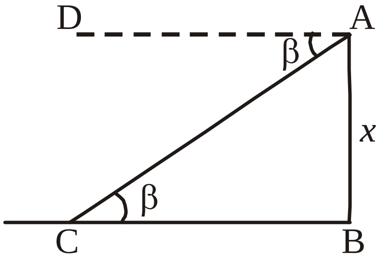




उदाहरण - 15 : रिन्की एक भवन के प्रथम मंजिल के बालकनी से जमीन पर स्थित फूल को अवनमन कोण β^o पर देखती है। भवन के पहली मंजील की ऊँचाई x मी. है। इस डाटा के लिए आकृति बनाइए।

हल :



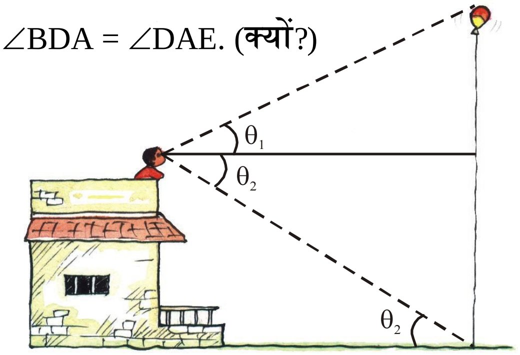


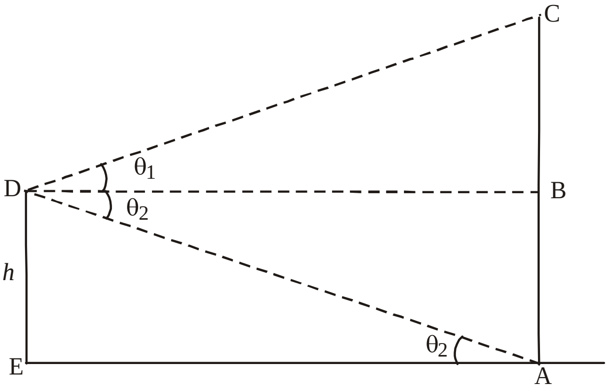
यहाँ $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (क्यों?)

उदाहरण - 16 : एक बडा गुब्बारा, रस्सी के बंधा हुआ है और वह हवा में उड रहा है। एक मनुष्य जो भवन के शीर्ष स्थान पर है। इसे उन्नयन कोण θ_1 पर रस्सी का आधार अवनमन कोण θ_2 पर देखता है भवन की ऊँचाई h फीट है। इस डाटा के लिए आकृति बनाइए।

हल : हम देख सकते है कि

$\angle BDA = \angle DAE$. (क्यों?)





अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. बंटी बिजली के स्तंभ के शीर्ष को 60^0 उन्नयन कोण पर देखता है निरीक्षण बिंदु स्तंभ के आधार से 10 मीटर की दूरी पर है। दी गई जानकारी के आधार पर आकृति बनाइए।
2. तनीश पाठशाला की इमारत पर खडे होकर जमीन पर पडे गेंद को देख रहा है। उसका अवनमन कोण 45^0 है। इमारत की ऊँचाई 20 मीटर हो तो इस जानकारी के लिए आकृति बनाइए।
3. एक सीढी जमीन से 60^0 का कोण बनाती हुई दीवार के सहारे टिकी हुई है सीढी दीवार से 1 मीटर की दूरी पर रखी गई है। इन सूचनाओं को दर्शाते हुए आकृति बनाइए।

अब तक दी गई स्थितियों के अनुसार आकृति कैसे बनाते है, इसकी चर्चा हमने की। अब हम ऊँचाई और दूरी कैसे ज्ञात करते है। इसकी चर्चा करेंगे।

उदाहरण 17 : एक सीढी घर की खिडकी से 60^0 का कोण बनती हुई रखी गई है। यदि सीढी की ऊँचाई 10 फीट हो तो दीवार से सीढी की दूरी ज्ञात कीजिए।

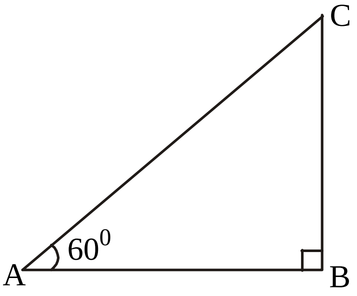
हल : मानलो AC सीढी है जो दीवर से लगी हुई है, AC जमीन से 60^0 का कोण AB पर बनाती है।

यहाँ सीढी की लंबाई AC = 10 फीट...(दिया गया है)

हमें सीढी (A) तथा दीवार (B) के मध्य दूरी ज्ञात करना होगा।

अर्थात् AB

$\angle A$, AC तथा AB के मध्य संबंध



$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 60^0 = \frac{AB}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{10}$$

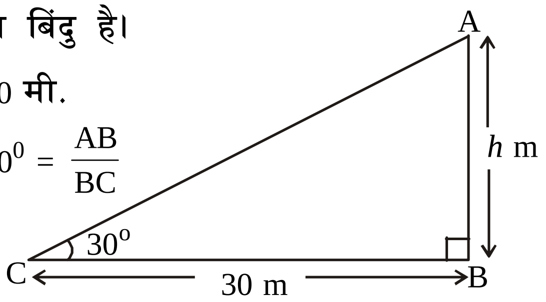
$$AB = \frac{10}{2} = 5 \text{ फीट}$$

इसलिए दीवार की सीढी से दूरी 5 फीट होगी।

उदाहरण 18 : एक मीनार जमीन पर अर्ध्वाधर है मीनार के आधार से 30 मी. की दूरी पर स्थित बिंदु से शीर्ष का उन्नयन कोण 30^0 है मीनार की ऊँचाई क्या होगी? ($\sqrt{3}$ = 1.73 लेना होगा)

हल: मानलो मीनार की ऊँचाई h मीटर है।

मानलो C, B से 30 मी. की दूरी पर स्थित बिंदु है।



दिया गया है, $\angle BCA = 30^{0}$, BC = 30 मी.

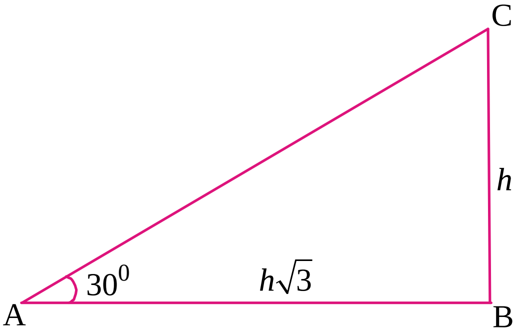
अब ΔABC, समकोण त्रिभुज में $\tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} = 10\times1.73 = 17.3 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 19 : सुबह 7 बजे ऊँचे स्तंभ की छाया $\sqrt{3}$ गुना है। उसकी इस समय सूर्य किरणों का जमीन के साथ उन्नायन कोण 30^0 हो गा सिद्ध कीजिए।

हल: मानलो BC स्तंभ की ऊँचाई h मी है। सूर्य की किरणों का कोण θ है।



दिया गया है AB परछाई होगी जो $\sqrt{3}$ गुना अधिक है। h.

$$AB = h \times \sqrt{3} = h\sqrt{3}$$

ΔABC, में $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$

$$\tan\theta = \frac{h}{h\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

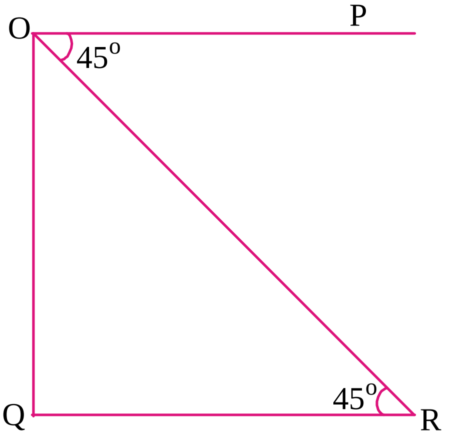
हम जानते है $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \theta = 30^0$$

इसलिए 7 बजे सुबह सूर्य की किरणों का कोण 30^0 होगा।

उदाहरण 20 : तनीश पाठशाला की इमारत पर खडे होकर जमीन पर पडे गेंद को देख रहा है। उसका अवनमन कोण 45^0 है। इमारत की ऊँचाई 20 मी. हो तो आँख तथा गेंद के मध्य की दूरी क्या होगी?

हल : मानलो OR निरीक्षण रेखा है। तथा अवनमन कोण 45^o क्षैतिज तथा OP से है।



चूँकि OP || QR तथा OR तिर्यक रेखा है

$\angle POR = \angle ORG = 45^o$

इमारत की ऊँचाई OQ = 20 मी.

हमें गेंद तथा तनीश के आँख के मध्य दूरी को ज्ञात करना है $= OR = d$

समकोण ΔOQR में, $\sin 45^0 = \frac{OQ}{OR}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{20}{d}$$

$d = 20\sqrt{2} = 20 \times 1.414 = 28.28$ मीटर

∴ गेंद तथा तनीश के आँख के मध्य दूरी 28.28 मीटर होगी।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक गुब्बारा 100 मी. के केबल से मौसम विभाग की जमीन पर लगा 60^0 का कोण बनाते हुए लगाया गया है। जमीन से गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक सीढी दीवार से 60^0 का कोण बनाती हुई रखी गई है। सीढी से दीवार की दूरी 3 मी. है। सीढी की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. स्तंभ की आधार से 50 मी. दूरी पर एक निरीक्षक 60^0 का उन्नयन कोण बनाता हुआ स्तंभ के शीखर को देख रहा है। स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात करो।
4. एक खरगोश पेड की ऊँची शाखा से 60^0 का अवनमन कोण बनाता हुआ एक व्यक्ति को देख रहा है। पेड की ऊंचाई 12 फीट हो तो खरगोश तथा निरीक्षक द्वके मध्य दूरी को ज्ञात कीजिए।
5. एक पतंग की डोर 100 मी. लंबी हैं। जमीन से क्षैतिज में 60^0 का कोण बना रही है। डोर में कोई गाँठ नहीं है ऐसा मानते हुए पतंग की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
6. 100 मी. लंबे स्तंभ का कोण ज्ञात कीजिए जो इससे 100 मी. की दूरी पर क्षितिज पर एक बिंदु है।

अब हम कुछ और प्रश्नों को हल करेंगे।

उदाहरण 21 : एक व्यक्ति नदी किनारे खडे होकर पेड के शिखर को देखते हुए 60^o का कोण बनाती है। जब किनारे से 40 मीटर दूर जाता है तो 30^o का कोण बनता है। पेड की ऊँचाई तथा नदी की चौडाई ज्ञात कीजिए।

हल: मानलो AB पेड की ऊँचाई h मीटर है।

BC = x मीटर नदी की चौडाई

C तथा D दो बिंदु है जहाँ से पेड का कोण

60^0 तथा 30^0 होगा।

समकोण ΔABC में $\tan 60^0 = \dfrac{AB}{BC}$

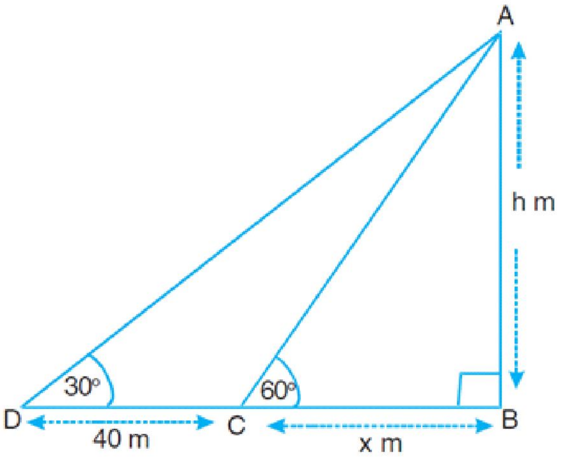
या $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$

या $h = \sqrt{3}x$ ... (i)

समकोण ΔABD में

$\tan 30^0 = \dfrac{AB}{BD}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x+40}$ ... (ii)



समीकरण (i) और (ii), से हमें प्राप्त

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{x+40}$$

आडा गुणनफल करने से

$3x = x + 40x$

या $2x = 40$

या $x = 20$

समीकरण (i), से $h = \sqrt{3}\times 20 = 20\times 1.732 = 34.64$

इसलिए नदी की चौडाई 20मी तथा पेड की ऊँचाई 34.64 मी. होगी।

उदाहरण 22 : एक स्तंभ के तल से इमारत का उन्नयन कोण 30^o तथा इमारत की तल से स्तंभ का उन्नयन कोण 60^o यदि स्तंभ की ऊँचाई 50 मी. हो तो इमारत की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मानलो PQ स्तंभ की ऊँचाई 50 मी. तथा AB इमारत की ऊंचाई x हो तो

$\angle AQB = 30^o$ तथा $\angle PBQ = 60^o$

समकोण ΔABQ, में

$$\tan 30^0 = \frac{AB}{QB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{QB}$$

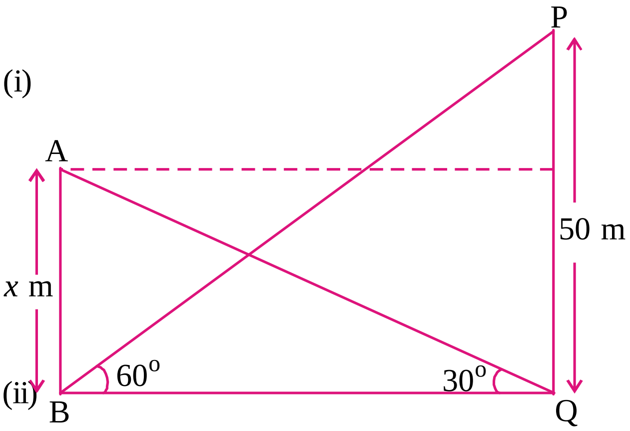
$$QB = x\sqrt{3} \qquad \ldots (i)$$

तथा, समकोण, ΔPQB में

$$\tan 60^0 = \frac{PQ}{QB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{50}{QB}$$

$$QB = \sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}} \qquad \ldots (ii)$$



समीकरण (i) तथा (ii), से हमें प्राप्त होता है

$$x\sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{50}{3} = 16.67$$

इसलिए इमारत की ऊँचाई 16.67 मी. होगी।

उदाहरण 23: एक 100 मी. ऊँचे टावर पर खडे होकर स्वाती ने टावर की दोनों दिशाओं में दो कारों को देखते हुए अवनमन कोण क्रमशः 45^0 तथा 60^0 का बनाती है दोनों कारों के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: मानलो PQ टावर की ऊँचाई 100 मी है A तथा B कारों की स्थिति है।

मानलो कार A का अवनमन कोण 60^o तथा कार B का 45^o होगा।

अब, $\angle XQA = \angle QAP = 60^0$

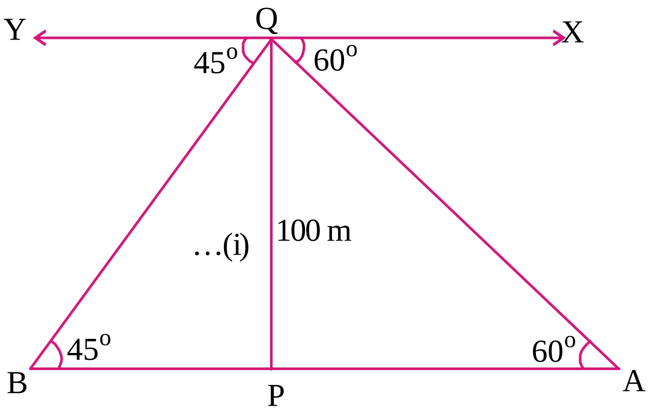
तथा $\angle YQB = \angle QBP = 45^0$

समकोण ΔQPB,

$$\tan 45^0 = \frac{QP}{BP}$$

$$1 = \frac{100}{BP}$$

$$BP = 100 \qquad \ldots (i)$$



उसी प्रकार ΔQPA,में

$$\tan 60^0 = \frac{QP}{AP}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{AP}$$

$$AP = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{100 \times 1.732}{3} = 57.74$$

$$AP = 57.74\text{मी} \qquad \ldots(ii)$$

इसलिए दोनों कारों के मध्य दूरी = AP + PA

= 100 + 57.74 मी.

= 157.74 मी.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. दो समान ऊँचाई वाले दोनों स्तंभ सडक के दोनों ओर है सडक की चौडाई 100 मी. है स्तंभो की शिखरों का उन्नयन कोण क्रमशः 60^o तथा 30^o है। दोनों स्तंभों के मध्य दूरी स्तंभों की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

2. 3000 मी. की ऊँचाई पर उडने वाला हवाई जहाज दूसरे हवाई जहाज के ऊपर से उडता है। जब एक बिंदु से दोनों हवाई जहाजों को देखा जाय तो क्रमशः 60^o तथा 45^o का कोण बनता है। दोनों हवाई जहाजों के मध्य लंब दूरी को ज्ञात कीजिए।

3. एक सीढी कमरे की खीडकी से लगी है जो जमीन से 30^0 का कोण बनाती है। सीढी के तल को जमीन पर स्थिर रखकर विपरीत दिशा के कमरे की खीडकी से 60^0 का कोण बनाती है। दोनों कमरों के मध्य दूरी को ज्ञात कीजिए।

अभ्यास

1. समकोण ΔPQR, की भुजाएँ क्रमशः PR = 7 से.मी. QR = 25से.मी.,R तथा $\angle P$ - θ और R पर समकोण हो तो सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात कीजिए।
2. समकोण ΔABC में, B पर समकोण है, AC = 7.5 से.मी., तथा AB = 6 से.मी.. हो तो कोण C के सभी अनुपातों को ज्ञात कर सिद्ध कीजिए। sin A = cos C.
3. समकोण ΔPQR में Q पर समकोम है, PQ=1से.मी. तथा QR = 2से.मी.. हो तो sin P, cos P, sin R तथा cos R. ज्ञात कर सिद्ध कीजिए sin P = cos R.
4. निम्न का मूल्यांकन कीजिए।
   (i) $\text{Sin}60^o \cos30^o + \sin30^o \cos60^o$
   (ii) $\frac{4}{3}\tan^2 60° + 3\cos^2 30° - 2\sec^2 30° - \frac{4}{3}\cot^2 60°$
   (iii) $\tan^2 60^o - \sin^2 30^o - \cos^2 60^0$
   (iv) $(\text{cosec}^2 45^0 \sec^2 30^0)(\sin^2 30^0 + 4\cot^2 45^0 - \sec^2 60^0)$

(v) $\dfrac{\sin 30^0 - \sin 90^0 + 2\cos 0^0}{\tan 30^0 \tan 60^0}$

(vi) $\dfrac{4}{\cot^2 30^0} + \dfrac{4}{\sin^2 60^0} - \cos^2 45^0$

5. यदि x, if $\sin x = \cos x$ हो तो x का मूल्य ज्ञात करो
6. कोण $a = 30^0$ तथा 60^0 के लिए. $\sin A = \tan A \cos A$ की जाँच कीजिए।
7. कोण $a = 30^0$ तथा 45^0. के लिए. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ की जाँच कीजिए।
8. यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ तथा $\tan(A - B) = 1$, $0^0 < A + B < 90^0$, हो तो A तथा B के मूल्यों को ज्ञात कीजिए।
9. यदि $\sin(2x + 10)^0 = 0.5$ है तथा x न्यून कोण हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।.
10. यदि $\tan(5x - 2020)^0 = 1$ तथा $2000 < x < 2050$, हो तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।.
11. यदि एक सीढी की लंबाई $5\sqrt{3}$ फीट तथा उसकी सीधी ऊँचाई 5 फीट हो तो सीढी को कौनसे कोण पर लगाना चाहिए?
12. एक पेड के तल में 100 फीट की दूरी पर एक व्यक्ति खडा है। जमीन तथा पेड के शिखर का कोण 30 पेड की ऊँचाई h को निकटतम दहाई तक ज्ञात कीजिए।
13. एक पर्वत के ऊँची शीखर से दो क्रमागत किलोमीटर के पत्थरों का अवनमन कोण 60^o तथा 30^o हो तो पहाड की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
14. 7मी ऊँचे भवन के सिरे से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60^o है और इसके आधार से अवनमन कोण 45^o है हो तो टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
15. समुद्र किनारे एक टावर के शिखर से एक व्यक्ति अपनी ओर आती नाव को देख रहा है। अवनमन को30^o से 60^o में परिवर्तित होने के लिए 10मीनटक का समय लगता है। तो वह नाव कितनी जल्दी समुद्र किनारे पहुँचेगी?
16. दो नाव विपरीत दिशा से लाइट हाउस की ओर आगे बढ रहे है। लाइट हाऊस के शिखर का उन्नयन कोण क्रमशः 30^o और 45^o है दोनों नावों के बीच 100 मी. की दूरी है। तो लाइट हाउस की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
17. एक टावर के परछाई की लंबाई $45\sqrt{3}$ मी. सूर्य किरणों का कोण 30^o है तो जब वह 60^o का होगा। तो टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
18. दो टावरों के मध्य क्षैतिज दूरी 80 मी. है। पहले टावर से दूसरे टावर के शिखर को देखने पर अवनमन कोण 30^o है यदि दूसरे टावर की ऊँचाई 160मी. हो तो पहले टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
19. जमीन से 10 मी. की ऊँचाई पर एक खिडकी है दूसरे घर के शिखर तथा तल का उन्नयन और अवनमन कोण क्रमशः 60^o और 45^o है। उस घर की ऊँचाई को ज्ञात कीजिए।($\sqrt{3} = 1.73$ लीजिए)

20. एक 1.6 मी. ऊँचा पुतला एक चबूतरे पर रखा है। जमीन पर स्थित किसी चबुतरे के सिरे का उन्नयन कोण 60^o है इसी बिंदु से चबुतरे के शिखर का उन्नयन कोण 45^o है। चबुतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

सारांश

- त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाएँ

मौलिक त्रिकोणमितीय अनुपात	उनके गुणात्मक विलोम
$\sin A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$	$\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AC}{BC}$
$\cos A = \dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$	$\sec A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB}$
$\tan A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB}$	$\cot A = \dfrac{\angle A \text{ की आसन्न भुजा}}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{BC}$

- मौलिक त्रिकोणमितीय अनुपातों का उनके गुणात्मक विलोम का संबंध

$\sin x \operatorname{cosec} x = 1$

$\cos x \sec x = 1$

$\tan x \cot x = 1$

- त्रिकोणमितीय अनुपात कोण $0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ के लिए मूल्यों को ज्ञात करेंगे।

कोण θ / अनुपात	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नही है
$\operatorname{cosec}\theta$	परिभाषित नही है	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नही है
$\cot\theta$	not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- उन्नयन कोण अर्थात् क्षितिज रेखा तथा निरीक्षण रेखा के मध्य का कोण जो क्षितिज रेखा के ऊपर बनता है।
- अवनमन कोण अर्थात् क्षितिज रेखा तथा निरीक्षण रेखा के मध्य का कोण जो क्षितिज के नीचे बनता है।

इकाई 7 सांख्यिकी

अध्याय 7.1

सांक्यिकी का परिचय

7.1.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- सांख्यिकी की धारणा को समझेंगे.
- प्राथमिक तथा द्वितीय दत्तांशों में अंतर ज्ञात करेंगे.
- वर्गांतर, वर्गांक, वर्ग मापन या ऊँचाई को उदाहरणों से समझकर उसका अर्थ बताएँगे।
- बडे असूहबद्ध दत्तों को बारंबरिता बंटन में दर्शायेंगे। (गणना चिन्हों की सहायता से)

7.1.1 परिचय

एक दिन स्नेहित अपने गणित के अध्यापक को मिलने उसके घर गया उस समय उसके अध्यापक जन गणना के कार्यक्रम में व्यस्त थे। जो उन्होंने हाल ही में भारतीय जनसंख्या के जन गणना के कार्यक्रम के कार्यक्रम के तहत उनके बोर्ड से सूचनाएँ संग्रहित की थी।

स्नेहित : नमस्ते रस, ऐसा लगता है कि आप कुछ काम में व्यस्त है। क्या मैं आपकी मदद कर सकता हूँ.

अध्यापक : स्नेहित मैंने गृहवासी जन गणना के बारे में जानकारी एकत्रित की है जैसे परिवार में व्यक्तियों की संख्या, उनकी आयु, परिवार की आय किस प्रकार के घर में वे रहते है, कुछ और जानकारी।

स्नेहित : इन सभी जानकारियों का क्या उपयोग है?

अध्यापक : इन सभी जानकारियों से सरकार को अभिवृद्धि कार्यक्रम और संसाधनों के आबंटन में मदत मिलती है।

स्नेहित : सरकार इस जानकारी का उपयोग कैसे करती है?

अध्यापक : जन गणना विभाग इस व्यापक जानकारी को संकलित कर इसका उपयोग आवश्यक प्रबंधनों का विश्लेषण कर परिणाम निकालते है। स्नेहित तुमने पिछली कक्षाओं में संख्यिकी के आधार भूत मूल्यों को सीखा ही होगा?

स्नेहित जैसे हम भी ऐसी स्थितियों से गुजर चुके है जहाँ हम इन जानकारियों को तथ्यों, संख्याओं, तालिकाओं, ग्राफ आदि के रूप में देख चुके है। यह सब्जियों के

दर, शहरों का तापमान, क्रिकेट का स्कोर मतदान का परिणाम आदि के रूप में देख सकते है। ये तथ्या या संख्याएँ जो निश्चित उद्देश्यों से एकत्रित की जाती है। उसे दत्त कहते हैं। दत्तों के अर्थो का निष्कर्ष गणित की एक विशेष शाखा में अध्ययन करते है। जिसे सांख्यिकी कहते है।

7.1.2 दत्तों का संकलन

सांख्यिकी की प्रारंभिक क्रिया दत्तों को संग्रहीत करना है। इसे समझने के लिए सबसे पहले हम निम्न लिखित क्रियाकलाप करके दत्तों को एकत्रित करने का कार्य आरंभ करेंगे।

क्रियाकलाप

आपकी कक्षा के विद्यार्थीयों को चार समूह में बाँटो। प्रत्येक समूह को नीचे दी गई जानकारी एकत्रित करने के लिए कहो।

(i) आपकी कक्षा के सभी छात्रों का भार।

(ii) प्रत्येक विद्यार्थी के भाई-बहनों की संख्या।

(iii) पिछले माह में प्रतिदिन के अनुपस्थित विद्यार्थीयों की संख्या।

(iv) सभी विद्यार्थीयों के घर से स्कूल की दूरी।

अपेक्षित जानकारी विद्यार्थीयों ने किस प्रकार प्राप्त की इस विषय पर चर्चा करेंगे।

1. क्या उन्होंने प्रत्येक विद्यार्थी के घर जाकर या प्रत्येक विद्यार्थी से व्यक्तिगत पूछताछ से जानकारी एकत्रित की है?
2. क्या उन्होंने इन जानकारीयों को स्कूल रिकार्ड से प्राप्त किया है?

पहली स्थिति में सूचना संग्रह किसी निश्चीत उद्देश्य से की गई है। उन्हें प्राथमिक दत्त कहते है। (जैसे कि स्थिति(i), (ii), (iv)में).

ऊपर दिए गए सूचनाओं (iii) में पिछले महिने के अनुपस्थित विद्यार्थीयों की संख्या केवल हाजिरी (अटेंडेंस) रजिस्टर से ही जान सकते है। यहाँ हम कक्षा अध्यापिका द्वारा प्राप्त जानकारी को ही उपयोग में ला रहे है। इसे हम द्वितीयक दत्तांश कहते है। स्त्रोत से एकत्रित जानकारी जो पहले से ही कही लिखी गई है। जैसे रजिस्टर आदि को द्वितीय दत्तांश कहते है।

7.1.3 दत्तों का प्रदर्शन

अब हम एकत्रित किए हुए दत्तों को प्रदर्शित करने के बारे में जानेंगे। जिससे एक ही नज़र में उसका अर्थ समझ सकें। अब हम कुछ ऐसी स्थितियों का अवलोकन करेंगे जहाँ दत्तों का प्रदर्शन आवश्यक है।

15 विद्यार्थीयों द्वारा गणित में 50 में से प्राप्त अंक कुछ इस प्रकार है।

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

इस प्रकार के दत्तों को मूल दत्त कहते है।

दिए गए दत्तों से आप आसानी से न्यूनतम और अधिकतम अंक प्राप्त कर सकते है। आप पहले से ही जानते है कि न्यूनतम और अधिकतम अंको के अंतर को व्यप्ति कहते है।

यहाँ न्यूनतम तथा अधिकतम अंक 7 और 50 है

अतः व्याप्ति = 50 – 7 = 43,

ऊपर दिए गए दत्तों के अनुसार दत्त 7 से 50 के मध्य है।

ऊपर दिए गए दत्तों के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) दिए गए दत्तों का मध्य ज्ञात करों।

(ii) कितने विद्यार्थीयों को 60% या उससे अधिक अंक प्राप्त हुए है।

चर्चा

(i) ईवान के अनुसार दत्तों का मध्य मूल्य 25 है। क्योंकि 50 अंको की परीक्षा ली गई है। आप क्या सोचते हो?

प्रिंसी ने कहा कि यह मध्य मूल्य नहीं है यदि 15 विद्यार्थीयों के अंको को आरोही क्रम में लिखने पर, इस प्रकार प्राप्त होंगे।

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

हम कह सकते हे कि 8 वाँ पद मध्य पद होगा जो 34 है।

(ii) आप जानते है कि 50 अंको का 60% कैसे ज्ञात किया जाता है।($\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

9 विद्यार्थीयों को 60% या उससे अधिक अंक प्राप्त हुए है। (30 या अधिक).

जब दत्तों की संख्या बहुत अधिक होती है। तो उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में लिखना मुश्किल हो जाता है। अतः हमें किसी और विधी के बारे में सोंचेगे।

दिए गए उदाहरण को देखिए

उदाहरण - 1 : 50 विद्यार्थीयों को गणित की एक परीक्षा में 10 में से प्राप्तांक इस प्रकार है।.

5, 8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2, 1, 1, 3, 4,4, 5, 8, 6, 7, 10,
2,8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6,4, 5, 8

हल:

प्राप्तांक	गणन चिन्ह	विद्यार्थीयों की संख्या
1	𝍸 |	6
2	𝍸 |	6
3	|||	3
4	𝍸 ||||	9
5	𝍸 ||	7
6	𝍸	5
7	||	2
8	𝍸 |	6
9	||	2
10	||||	4
	कुल	**50**

तालिका में दर्शाये अनुसार दत्तों की गणना चिन्हों के उपयोग से अंकित किया जा सकता है।

याद कीजिए विद्यार्थी जिन्होंने कुछ अंक प्राप्त किए है उनकी संख्या को प्राप्तांको की बारंबरिता कहते है। उदाहरण के लिए 4 अंक 9 विद्यार्थीयों को प्राप्त हुए है। अतः 4 अंको की बारंबरिता 9 है।

यहाँ सारणी में, मूलदत्तों को सारणी बद्ध लिखने में गणना चिन्हों का उपयोग होता है।

तालिका में सभी बारंबारिताओं का योग कुल दत्तों की संख्या को दर्शाताय है। सभी दत्तों को तालिका में उनकी बारंबरिता के रूप में दर्शाया जाय तो इस तालिका को ''असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका'' या निरीक्षणों की भार तालिका कहते है।

क्रियाकलाप

आपके कक्षा के विद्यार्थीयों के नाम के पहले अक्षर की बारंबरिता बंटन तालिका बनाओ और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो।

(i) आपके सहपाठियों के नामों में कौनसे पहले अक्षर का उपयोग सबसे ज्यादा हुआ?

(ii) आपके कितने सहपाठियों के नाम 'I' से शुरू होता है?

(iii) आपके सहपाठियों के नामों में सबसे कम किस अक्षर का उपयोग हुआ है?

कुछ आवश्यक कारणों की वजह से हमें दत्तों के तीन वर्गों में दर्शायेंगे (i) कितने विद्यार्थीयों को अतिरिक्त समय की आवश्यकता है। (ii) कितने विद्यार्थीयों का औसत प्रदर्शन रहा। (iii) किरतने विद्यार्थीयों ने परीक्षा में अच्छा प्रदर्शन किया अतः हम आवश्यकता अनुसार दत्तों को समूहों में बाँटकर समूहबद्ध बारंबारिता तालिका नीचे बताए अनुसार बनायेंगे।

वर्गांतर	स्तर	गणन चिन्ह	विद्यार्थीयों की संख्या
1-3	(अतिरिक्त समय की आवश्यकता)	𝍸 𝍸 𝍸	15
4-5	(औसत)	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
6-10	(अच्छे)	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	19

आवश्यकता के अनुसार दत्तों को वर्गीकृत करते है या सबसे अधिक निरीक्षण हो तो हम उन्हें समूहों में बाँटते है।

एक और उदाहरण द्वारा समूह बद्ध बारंबारिता को देखेंगे जिसमें दत्तों को समझने में आसानी होती है।

उदाहरण - 2 : 50 संतरों का भार (ग्राम में) टोकरी में से चुनने पर इस प्रकार होगा:
35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

इस प्रकार दत्तों के प्रदर्शन में हम 30-39, 40-49, 50-59, ... 100-109, 110-119. (क्योंकि हमारे दत्त 30 से 115तक है). इन समूहों को कक्षांतर या वर्गांतर कहते है। उनकी लंबाई को कक्षा की लंबाई या कक्षा का अंतर काल कहते है। इस स्थिति में 10 वर्गांतर है। इस प्रकार श्रेणी में छोटी संख्याओं को निम्न सीमा और बडी संख्याओं को उच्च सीमा कहते है। उदा 30-39, में 30 श्रेणी में निम्न सीमा और बडी संख्या 39 को उच्चसीमा कहतेहै।’.

(संतरों का भार) वर्गांतर	गणना चिन्ह	(बारंबारिता)
30-39	𝍸 |	6
40-49	𝍸 |||	8
50-59	𝍸 ||||	9
60-69	𝍸 |	6
70-79	|||	3
80-89	𝍸	5
90-99	𝍸 ||	7
100-109	|||	3
110-119	|||	3
कुल		50

इस प्रकार दत्तों के प्रदर्शन से हमें कुछ आवश्यक जानकारियाँ प्राप्त हो सकती है। इसे समूह बद्ध बारंबारिता तालिका कहते है।

हम यह देखते हैं कि ऊपर दिए गए तालिका में श्रेणियाँ आच्छादित नहीं हो रही है। उदाः 30-39, 40-49 ... में कोई भी संख्या दुबारा दूसरी श्रेणी में नहीं दोहराई गई है। इस प्रकार के श्रेणी को समावेशी श्रेणियाँ कहते है। नोटः हम कम लंबाई वाले अधिक श्रेणियाँ या अधिक लंबाई वाली कम श्रेणियों का निर्माण कर सकते है। यदि मूलदत्त दिए गए हो तो व्याप्ति (Range) मालूम कर सकते है। (व्यापित = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य). सुविधा अनुसार व्याप्ति के आधार पर श्रेणी की लंबाई और श्रेणियों की संख्या निर्धारित कर सकते है। उदाहरण के लिए श्रेणियों की संख्या निर्धारित कर सकते है। उदाहरण के लिए वर्गांतर 30-35, 36-40 होंगे।

श्रेणी सीमा	कक्षा सीमांत
20-29	19.5-29.5
30-39	29.5-39.5
40-49	39.5-49.5
50-59	49.5-59.5
60-69	59.5-69.5
70-79	69.5-79.5
80-89	79.5-89.5
90-99	89.5-99.5
100-109	99.5-109.5
110-119	109.5-119.5
120-129	119.5-129.5

मानलो यदि संतरे का भार 39.5 ग्राम है तो इसे हम कौनसे वर्गांतर में लेंगे? हम 39.5को न 30-39 श्रेणी में या नही 40-49. श्रेणी में रख सकते है।

ऐसी स्थिति में हम वास्तविक सीमाओं की रचना या निर्माण कर सकते है।

पहले वर्ग की उच्चसीमा तथा अगले वर्ग की निम्न सीमा भी बनती है।

उसी प्रकार सभी श्रेणियों के सीमाओं की गणनाकरेंगे। सबसे प्रथम श्रेणी द्वारा लिया जा सकता है। जिससे हम किसी भी प्रथम श्रेणी की निम्न सीमा तथा अंतिम श्रेणी की उच्च सीमा को प्राप्त कर सके है।

फिर से यह प्रश्न उठता है कि 39.5 को 29.5-39.5 या 39.5 - 49.5 श्रेणी में लेंगे? यहाँ पर अपवर्जी नियमानुसार किसी श्रेणी की निम्न सीमा समान हो तो उसे अगली श्रेणी में लिया जाता है। न कि पहली श्रेणी में।

अतः 39.5 श्रेणी 39.5 - 49.5 में होगा।

श्रेणियाँ जो 30-40, 40-50, 50-60, ... रूप में है वे आच्छादित श्रेणियाँ होती है। उन्हें अपवर्जी श्रेणी कहते है।

जब समावेशी श्रेणियों की सीमाओं को देखते है तो वे असमावेशी कक्षा के रूप में दिखाई देते है। किसी श्रेणी के उच्च सीमा और निम्न सीमा के अंतर को वर्गांतर या कक्षा की लंबाई कहते है। 90 – 99 का वर्गांतर 10 होगा। (99.5 – 89.5 = 10) 10.

उदाहरण - 3 : सितंबर माह के 30 दिनों का किसी शहर का तापमान (%) में इस प्रकार दिया गया।

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89.0

(i) 84-86, 86, -88 वर्गांतर से समूहबद्ध बारंबारिता तालिका बनाइए।

(ii) दत्तों की व्याप्ति क्या होगी?

हल: (i) समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की तालिका इस प्रकार है।

वातावरण में नमी	गणन चिन्ह	दिनों की संख्या
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	卌 ||	7
94-96	卌 |	6
96-98	卌 ||	7
98-100	||||	4

(ii) व्याप्ति 99.2 - 84.9 = 14.3.

[**नोट:** 90, 90-92 वर्गांतर में आता है। उसी प्रकार 96, 96-98 वर्गांतर में आता है।]

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्न अंको से बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

प्राप्तांक	5 तक	6 तक	7 तक	8 तक	9 तक	10 तक
विद्यार्थीयों की संख्या	5	11	19	31	40	45

2. नीचे दिए गए 32 व्यक्तियों के दैनिक मज़दूरी की जानकारी से बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

110	184	129	141	105	134	136	176	155
145	150	160	160	152	201	159	203	146
177	139	105	140	190	158	203	108	129
118	112	169	140	185				

3. दसवीं कक्षा के 30 विद्यार्थीयों द्वारा गणित ओलंपियाड में प्राप्त अंक दिए गए है।

46 31 74 68 42 54 14 93 72 53 59
38 16 88 27 44 63 43 81 64 77 62
53 40 71 60 08 68 50 58

वर्गांतर 0-9, 10-19 आदि की सहायता से समूबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए। तथा 49 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थीयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक पाठशाला के 40 अध्यापकों की आयु की बारंबारिता तालिका इस प्रकार है-

आयु वर्षों में	अध्यापकों की संख्या
25-31	12
31-37	15
37-43	7
43-49	5
49-55	1
कुल	**40**

(i) वर्गांतर की लंबाई क्या होगी?

(ii) 37-43 में उच्च सीमा क्या होगी?

(iii) 49-55 में निम्न सीमा क्या होगी?

अभ्यास

1. 53, 61, 48, 60, 78, 68, 55, 100, 67, 90. की व्याप्ति ज्ञात करो।

2. अंको से बारंबारिता बंटन तालिका बनाइए।

प्राप्तांक	5 तक	6 तक	7 तक	8 तक	9 तक	10 तक
विद्यार्थीयों की संख्या	8	22	15	25	32	40

3. दसवीं कक्षा के 36 विद्यार्थीयों के रक्त समूह इस प्रकार है-

A O A O A B O A B A B O
B O B O O A B O B AB O A
O O O A AB O A B O A O B

इन आंकडों को एक बारंबारिता सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। इन विद्यार्थीयों में कौनसा रक्त समूह अधिक सामान्य है और रक्त समूह कम पाया गया है।

4. तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित्र आने की संख्या निम्न है-

1 2 3 2 3 1 1 1 0 3 2 1
2 2 1 1 2 3 2 0 3 0 1 2
3 2 2 3 1 1

ऊपर दिए गए दत्तों से बारंबारिता तालिका बनाइए।

5. एक TV चैनल द्वारा धूम्रपान निषेध के बारे में SMS प्राप्त किए जिनमें A – पूर्ण निषेध, B – सार्वजनिक स्थानों में धूम्रपान, C – कोई आवश्यकता नहीं, एक घंटे में प्राप्त SMS इस प्रकार है।

A B A B C B
A B B A C C B B A B
B A B C B A B C B A
B B A B B C B A B A
B C B B A B C B B A
B B A B B A B C B A
B B A B C A B B A

ऊपर के दत्तों को समूहबद्ध बारंबारिता तालिका में दर्शाइए। कितने उचित उत्तर प्राप्त हुए? सबसे ज्यादा लोगों की राय क्या है?

अभ्यास

- निरीक्षण करने वाले (विद्यार्थी) व्यक्तियों द्वारा निश्चित उद्देश्य से एकत्रित की गई जानकारी को प्राथमिक दत्त कहते है।
- किसी स्त्रोत में जानकारी पहले से ही लिखि गई है। जैसे रजिस्टर आदि से प्राप्त जानकारी को द्वितीयक दत्त कहते है।
- निरीक्षणों को बारंबारिता के साथ तालिका रूप में प्रदर्शन करने को ''भारात्मक निरीक्षण तालिका'' या असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका कहते है।
- दत्तों को दूसरे स्त्रोत जैसे प्रिंटेड रिपोर्ट तथा उन्हें स्वयं प्रयोगो द्वारा नहीं प्राप्त किया गया हो तो उसे द्वितीयक दत्त कहते है।

- दत्तों को दूसरे स्त्रोत जैसे प्रिंटेड रिपोर्ट तथा उन्हें स्वयं प्रयोगो द्वारा नहीं प्राप्त किया गया हो तो उसे द्वितीयक दत्त कहतेहै।
- दत्तों को जब आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर मध्य का मूल्य लिया जाता है उसे मध्यिका कहते है।
- जब दत्तों की संख्या विषम हो तो मध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ वीं राशी रहती है।
- जब दत्तों की संख्या सम हो तो मध्यिका का मान बीच के दो दत्तों का औसत रहता है। जो कि $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ वाँ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ की राशी रहती है।
- मध्यिका दत्तों को दो समूहों में विभाजित करती है। एक भाग में मध्यिका बडे मूल्यों का समावेश होता है। जबकि दूसरे भाग में मध्यिका से मध्यिका छोटे मूल्यों का समावेश होता है।

अध्याय 7.2

केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन

7.2.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन को समझेंगे.
- असमूहबद्ध तथा समूहबद्ध दत्तों के मध्यमान ज्ञात करने वाले प्रश्नों को हल करेंगे।
- असमूहबद्ध तथा समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने वाले प्रश्नों को हल करेंगे।
- असमूहबद्ध तथा समूहबद्ध दत्तों की बहुलक ज्ञात करने वाले प्रश्नों को हल करेंगे।
- दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए मध्यमान, मध्यिका तथा बहुलक के ज्ञात का उपयोग करेंगे।

7.2.1 परिचय

केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन

निम्न परिस्थिति अवलोकन कीजिए।

स्थिति - 1 : एक छात्रावास में साधारणतः 200 इडली, 50 विद्यार्थी नाश्ते में खाते है यदि और 20 विद्यार्थी छात्रावास में भर्ती हुए तो उनको और कितनी इडली बनानी होगी।

स्थिति- 2 : एक फैक्टरी में काम कर रहे कर्मचारियों का वेतन इस प्रकार है:

कर्मचारी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वेतन (हजार में)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

स्थिति- 3 : किसी शहर के विभिन्न वाहन इस प्रकार है इनमें सबसे पसंदीदा वाहन कौनसा है?

1.	कार	15%
2.	ट्रेन	12%
3.	बस	60%
4.	दुपहिया	13%

पहले स्थिति में हम साधारणतः प्रश्न को हल करने के लिए औसत (माध्य) लेते है, लेकिन यदि दूसरी स्थिति में भी हम औसत वेतन ले तो वह है जो 30.7 हजार होगा। जैसे कि मूल दत्तों को जाँच करने से यह मध्यमान मूल्य शायद सही नहीं है। यह मजदूरों का वेतन 12 से 18 हजार के मध्य है। अतः इस स्थिति में मध्यिका सही

होगी। तीसरी स्थिति में बहुलक सबसे उचित विकल्प है केंद्रिय प्रवृत्ति के मापन में दत्तों की प्रकृति और उद्देश्य के अनुसार औसत मध्यिका या बहुलक का उपयोग मान करते है।

निम्न स्थितियों को विस्तार से समझिए और अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए

तीन ऐसी स्थितियों को लिखिए जहाँ मध्यमान, मध्यिका और बहुलक का अपना अलग अस्तित्व है। दो क्रिकेटरों द्वारा खेले गए 5 मैचों की तुलना से दोनों के प्रशंसकों ने यह बताना चाहते है कि उनका खिलाडी दूसरे खिलाडी से अच्छा प्रदर्शन कर रहा है।

खेल		1st	2nd	3rd	4th	5th
रन	नेहल	50	50	76	31	100
बनाए गए	निशिकांत	65	23	100	100	10

दोनों के प्रशंसक रनों को जोड कर औसत रनों को ज्ञात करेंगे।

नेहल का औसत स्कोर $= \frac{307}{5} = 61.4$

निशिकांत का औसत स्कोर $= \frac{298}{5} = 59.6$

नेहल का औसत स्कोर निशिकांत से अधिक है नेहल के प्रशंसकों ने दावा किया कि नेहल का प्रदर्शन निशिकांत से अच्छा या लेकिन निशिकांत के प्रशंसक इस बात को नही मान रहे थे। निशिकांत की प्रशंसकों ने दोनों के स्कोर को अवरोही क्रम में लिखकर मध्य का स्कोर देखते है।

नेहल	100	76	50	50	31
निशिकांत	100	100	65	23	10

निशिकांत के प्रशंसकों ने कहा कि मध्य का स्कोर 65 है, जबकि नेहल का मध्य स्कोर 50 है। अतः निशिकांत का प्रदर्शन अच्छा है।

लेकिन हम देकते है कि निशिकांत ने पाँच खेलों में दो बार शतक बनाये इसलिए उनका प्रदर्शन अच्छा है।

अब निशिकांत और नेहल के प्रशंसकों के बीच के विवाद को खत्म करने के लिए तीनों मापों को देखेंगे।

उन्होंने पहले औसत को ज्ञात किया जो मध्यमान है। मध्य वाला स्कोर जो बहस का मुद्दा बना वह है मध्यिका, उनके प्रदर्शन की तुलना करने में बहुलक को भी लिया जाता है, जहाँ स्कोर बार-बार दोहराया गया है। नेहल का बहुलक स्कोर 50 है। निशिकांत का बहुलक स्कोर 100 है इन तीनों मापों में कौनसा उचित मापन होगा?

सर्व प्रथम मध्यमान को विस्तार से समझेंगे।

7.2.2 मध्यमान

सांख्यिकीय दत्तों का मध्यमान अर्थात् सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भागफल होता है। हमने मूल दत्तों के मध्यमान की गणना के बारे में पहले से ही चर्चा कर चुके है।

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$ (या) = $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

मूल दत्तांशो का मध्यमान

उदाहरण - 1 : किसी क्षेत्र के एक सप्ताह का वर्षापात कुछ इस प्रकार है- 4 से.मी., 5से.मी., 12 से.मी., 3से.मी., 6से.मी., 8से.मी., 0.5से.मी., प्रतिदिन के औसत वर्षापात को ज्ञात करो।

हल : प्रतिदिन का औसत वर्षापात अर्थात् ऊपर दिए गए दत्तांशों का मध्यमान होगा।

राशियों की संख्या (n) = 7

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n}{n}$ जहाँ $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ राशियाँ होगी

और $\bar{x} = \dfrac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \dfrac{38.5}{7} = 5.5$ से.मी.

उदाहरण- 2 : यदि 10, 12, 18, 13, P और17 का मध्यमान 15 हो तो P का मूल्य ज्ञात करो।

हल : हमें मालूम है कि मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 20.$$

असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान

इस उदाहरण में, किसी कक्षा के 40 विद्यार्थीयों का भार निम्न बारंबारिता बंटन सारणी दि गई है।

भार (कि.ग्रा.) (x)	30	32	33	35	37	41
विद्यार्थीयों की संख्या (f)	5	9	15	6	3	2

तो भार 40 विद्यार्थीयों का औसत भार ज्ञात कीजिए।

सारणी से हम यह देखते है कि 5 विद्यार्थीयों का औसत भार ज्ञात कीजिए। सारणी से हम यह देखते है कि 5 विद्यार्थीयों का भार 30 कि.ग्रा है तो कुल भार 5 × 30 = 150 कि.ग्रा.। उसी प्रकार हम भार का योग ज्ञात कर सकते है।

अतः मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$

$$= \frac{5\times30+9\times32+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2} = \frac{1336}{40} = 33.40\text{kg.}$$

यदि x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 निरीक्षणों के संबंधित बारंबारिता f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 हो तो इसे इस प्रकार लिख सकते है।

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f + f_6} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

उदाहरण - 3 : निम्न दत्तों का मध्यमान ज्ञात करो।

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

हल : चरण - 1 : प्रत्येक पंक्ति के $f_i \times x_i$ को हल करो।

चरण- 2 : बारंबारिता का योग (Σf_i) तथा $f_i \times x_i$ ज्ञात करो $(\Sigma f_i x_i)$ का योग।

चरण - 3: गणना $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$

x_i	f_i	$f_i x_i$
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_i x_i = 755$

उदाहरण - 4 : यदि इन दत्तों का मध्यमान 7.5 हो तो 'A' का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थीयों की संख्या	3	10	17	A	8	4

हल: बारंबारिताओं का योग $(\Sigma f_i) = 42 + A$

$f_i \times x_i$ का योग $(\Sigma f_i x_i) = 306 + 8A$

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i xi}{\Sigma\, f_i}$

दिया गया मध्यमान $= 7.5$

अत:, $7.5 = \dfrac{306 + 8A}{42 + A}$

$\Rightarrow$ $7.5(42 + A) = 306 + 8\,A$

$\Rightarrow$ $7.5 \times 42 + 7.5A = 306 + 8A$

$\Rightarrow$ $315 + 7.5A = 306 + 8A$

$\Rightarrow$ $315 - 306 = 8A - 7.5A$

$\Rightarrow$ $9 = 0.5\,A$

$\Rightarrow$ $A = 18$

विचलन पद्धति द्वारा असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान

उदाहरण - 5 : दिए गए दत्तों से समानांतर माध्य ज्ञात करो।

X	10	12	14	16	18	20	22
F	4	5	8	10	7	4	2

हल:

(i) सरल विधि

असमूहबद्ध बारंबारिता बंटन में आप इस नियम का उपयोग कर सकते है।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16A	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

(ii) विचलन पद्धति

इस विधि में हम एक निरीक्षण की कल्पना करेंगे। जो कल्पित मध्यमान माना जाएगा। मानलो '16' जो कल्पित मध्यमान मानेंगे जो, $A = 16$ कल्पित मध्यमान से दूसरे मूल्यों का विचलन ज्ञात करेंगे।

बारंबारित का योग = 40

x_i	f_i	$d_i = x_i – A$	f_id_i
10	4	–6	–24
12	5	–4	–20
14	8	–2	–16
16	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		–60+42 = –18

मध्यमान $f_i \times d_i$ गुणनफल का योग $= -60 + 40$

$$\Sigma f_id_i = -18$$

मध्यमान $\overline{x} = A + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \left(\dfrac{-18}{40}\right)$

$= 16 - 0.45$

$= 15.55.$

असमूहबद्ध दत्तों का मध्यमान

उदाहरण 6 : ZPHS संगम पाठशाला के 30 विद्यार्थीयों के गणित में प्राप्त अंक नीचे तालिका में दिएग ए है उनके औसत अंक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
विद्याथीयोंकी संख्या (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

हल : मानलो हम इन दत्तों को पुनः व्यवस्थित कर निरीक्षणों का योग ज्ञात करेंगे।

प्राप्तांक (x_i)	विद्यार्थीयों की संख्या (fi)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160

50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
कुल	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

इसलिए, $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

इसलिए मध्यमान अंक 59.3. होंगे।

हमारे वास्तविक जीवन में, दत्त इतने बडे है कि उनका अर्थ पूर्ण अभ्यास करना होगा।

अतः हमें असमूहबद्ध दत्तों को समूहबद्ध दत्तों में बदलने की आवश्यकता है और मध्यमान ज्ञात करने की विधि को ढूँढ़ निकालना है। मान लीजिए उदाहरण। असमूहबद्ध दत्तों के समूहबद्ध दत्तों में 15 का वर्गांतर लेते हुए बाँटेंगे या यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिए। कि यदि कोई बारंबारिता वर्गांतर के उच्च श्रेणी से मेल खाती हो तो उसे उसके अगले वर्गांतर की निम्न श्रेणी में रखना चाहिए। उदा 4 विद्यार्थी जिन्होंने 40 अंक प्राप्त किए उन्हें 40-55 के श्रेणी में रखेंगे लेकिन 25-40 में नहीं इस बात को ध्यान में रखते हुए समूहबद्ध बारंबारिता तालिका बनाएँगे।

वर्गांतर	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थीयों की संख्या	2	3	7	6	6	6

अब प्रत्येक वर्गांतर के लिए हमें एक बिंदु की आवश्यकता होती है, जो पूर्ण श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है। यह मान लेते है कि प्रत्येक वर्गांतर की बारंबारिता मध्य बिंदु के आसपास रहती है। अतः प्रत्येक श्रेणी का मध्यबिंदु उस श्रेणी में आने वाली संख्या होती है। जिसे वर्गांक या श्रेणी अंक कहते है। स्मरण कीजिए कि हम श्रेणी अंक के लिए उच्च सीमा और निम्न सीमा का औसत लिखते है।

$$\text{वर्गांक} = \frac{\text{उच्चसीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$$

10-25, श्रेणी में श्रेणी अंक $\frac{10+25}{2}=17.5$ उसी प्रकार, शेष वर्गांतर का श्रेणी अंक ज्ञात करेंगे। उन्हें हम तालिका में लिखेंगे। इसे हम x_i लिखते है। अब हम पिछले उदाहरण की तरह मध्यमान की गणना करेंगे।

वर्गांतर	विद्यार्थीयों की संख्या(f_i)	श्रेणी अंक (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
कुल	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

अंतिम स्तंभ में मूल्यों के योग में $\Sigma f_i x_i$ देते है अतः मध्यमान $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

इस मध्यमान को ज्ञात करने की नई पद्धति को प्रत्यक्ष विधि कहते है।

हम ऊपर दर्शाए अनुसार उन्हीं दत्तों का उपयोग कर रहें है और उसी सूत्र को नियुक्त कर रहें है, मध्यमान की गणना या हल करने के लिए यह कुछ अलग है। उत्तर 62 मध्यमान होगा क्या आज बता सकते है कि ऐसा क्यों होता है।

जब संख्याएं या अंकित मूल्य x_1 और x_2 की बडी संख्याएँ हो तो x_1 और f_1 के गुणनफल में समय की अधिक खपत होती है। अतः स्थिति में एक और विधि के बारे में विचार करेंगे जिसमें कम गुणनफल आसानी से ज्ञात किया जा सके।

हम f_i को कुछ भी नहीं कर सकते लेकिन हम प्रत्येक x_i को छोटी संख्या में बदल सकते है। जिसमें उनका गुणनफल सरल हो इसे हम किस प्रकार कर सकते है? एक निश्चित संख्या में से प्रत्येक मूल्य को घटाने पर अब इस विधि से उदाहरण - 1 को हल करेंगे।

हमें x_i में से किसी एक मूल्य को कल्पित मध्यमान के रूप में चुनकर उसे 'a' से सूचित करेंगे। गणना को सरलता के लिए 'a'का मूल्य $x_1, x_2, ..., x_n$. के मध्य होना चाहिए अतः $a = 47.5$ या $a = 62.5$. मान लीजिए। $a = 47.5$.

दूसरे चरण में x_i प्रत्येक मूल्य के साथ ‘a’ का अंतर ज्ञात करेंगे। जिसे हम d_i से सूचित करेंगे।

Eo:, $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

तीसरे चरण में d_i का गुणनफल संलग्न f_i से करेंगे और $f_i d_i$ के सभी मूल्यों का योग ज्ञात करेंगे। इसकी गणना नीचे तालिका में दी गई है।

वर्गांतर	विद्यार्थीयों की संख्या (f_i)	कक्षा अंक मध्य मूल्य (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	–30	–60
25-40	3	32.5	–15	–45
40-55	7	47.59(a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
कुल	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

अतः ऊपर की तालिका से विचलन का मध्यमान $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

अब $\bar{d}$ और $\bar{x}$ के बीच संबंध ज्ञात करेंगे।

जैसे हम d_i को प्राप्त करने के लिए x_i के प्रत्येक मूल्य में से ‘a’को घटाते है। उसी प्रकार मध्यमान $\bar{x}$ को प्राप्त करने केलिए ‘a’ को $\bar{d}$ में जोडना होगा। इसे गणितीय पद्धति द्वारा इस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

विचलन का मध्यमान, $\bar{d} = \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

अतः,
$$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$\bar{d} = \bar{x} - a$$

इसलिए $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

तालिका से a, $\Sigma f_i d_i$ और Σf_i के मूल्यों को उपरोक्त में स्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा।

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

अर्थात् छात्रों द्वारा प्राप्तांक का मध्यमान 62.

ऊपर दी गई विधि को ''कल्पित मध्यमान विधि'' कहते है।

नीचे दी गई तालिका में ध्यान पूर्वक चौथे स्तंभ को देखिए। सभी मूल्य 15 के गुणक है अतः यदि हम चौथे स्तंभ के सभी मूल्यों को 15 से विभाजित करेंगे तो हमें छोटी संख्या प्राप्त होती है। जिस हम f_i से गुणा करते है। (यहाँ प्रत्येक कक्षा का वर्गांतर 15 है।)

अतः मान लीजिए, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ जहाँ a कल्पित मध्यमान है और h कक्षा की लंबाई है।

अब, u_i की गणना इस विधि द्वारा की जा सकती है (अर्थात् $f_i u_i$ ज्ञात कर $\Sigma f_i u_i$ का मूल्य ज्ञात करेंगे।). h = 15 [प्रायः कक्षा की लंबाई को h लेते है लेकिन यह अंतराल कक्षा का अंतराल होना आवश्यक नहीं है।]

Let $\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

वर्गांतर	विद्यार्थीयों संख्या(f_i)	कक्षा अंक (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	–30	–2	–4
25-40	3	32.5	–15	–1	–3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
कुल	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

यहाँ फिर से $\bar{u}$ और $\bar{x}$ के बीच के संबंध को ज्ञात करेंगे।

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

अब, $\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

अतः $$\bar{u} = \frac{\frac{\Sigma f_i(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

$$h\bar{u} = (\bar{x} - a)$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

इसलिए $$\bar{x} = a + h\left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right]$$

या $$\bar{x} = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h$$

दिए गए तालिका से a, $\Sigma f_i u_i h$ और Σf_i के मूल्यों को सूत्र में स्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62.$$

अतः विद्यार्थी द्वारा प्राप्त मध्यमान 62.

ऊपर दी गई विधि को क्रम विचलन विधि कहते है।

हमने नोट किया:

- यदि सभी d_i में समान गुणनखण्ड हो तो क्रम-विचलन पद्धति सुविधाजनक होती है।
- तीनों विधियों द्वारा प्राप्त मध्यमान समान होते है।
- कल्पित-मध्यमान विधि और क्रम विचलन विधि यह प्रत्यक्ष विधि का सरलीकृत नमूना है।
- सूत्र $\bar{x} = a + h\bar{u}$ में a और h ऊपर दिए गए अनुसार न हो तो भी इसका अस्तित्व रहता है।

यदि वे कोई अशून्य संख्याएँ $u_i = \frac{x_i - a}{h_i}$

इन विधि से दूसरे उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-7 : नीचे दी गई तालिका में भारत के विभिन्न प्रदेशों के ग्रामीण क्षेत्र के प्राथमिक विद्यालयों में महिला अध्यापिकाओं का प्रतिशत वितरण दिया गया है। तो महिला अध्यापिका के मध्यमान प्रतिशत को तीनों विधियों में ज्ञात कीजिए।

महिला अध्यापिका प्रतिशत	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
प्रदेशों की संख्या	6	11	7	4	4	2	1

स्त्रोत: Seventh All India School Education Survey conducted by NCERT

हल: सभी वर्गांतरों के कक्षा अंको को ज्ञात कर तालिका में लिखिए।

यहाँ हम $a = 50$, $h = 10$.

तो $d_i = x_i - 50$ और $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$

अब d_i और u_i ज्ञात कर तालिका में लिखने पर

महिला अध्यापिकाओं का प्रतिशत	राज्यों/के.शा. प्रदेशों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$	f_ix_i	f_id_i	f_iu_i
15-25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25-35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35-45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
कुल	35				1390	–360	–36

ऊपर की तालिका से हमें $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_ix_i = 1390$, $\Sigma f_id_i = -360$, $\Sigma f_iu_i = -36$.

प्रत्यक्ष विधि के उपयोग से, $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{1390}{35} = 39.71$

कल्पित मध्यमान विधि से उपयोग $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \dfrac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

क्रम विचलन विधि के उपयोग से $\bar{x} = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

अर्थात् प्राथमिक विद्यालय के ग्रामीण क्षेत्र की महिला अध्यापिकाओं का औसत मध्यमान 39.71 है।

यदि वर्गांतर असमान हो तथा x_i का मूल्य बडा हो तब भी हम विचलन पद्धति का उपयोग d_i के किसी उचित भाजक के साथ कर सकते है।

उदाहरण-8 : नीचे दिए बारंबारिता से गेंदबाजों द्वारा लिए गए विकेटों की संख्या दी गई है तो उचित विधि द्वारा विकेटों का मध्यमान ज्ञात कीजिए। मध्यमान का अर्थ क्या है?

विकेटों की संख्या	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
गेंदबाजों की संख्या	7	5	16	12	2	3

हल: यहाँ कक्षा का वर्गांतर बढते जा रहा और x_i का मूल्य बहुत बडा है तो विचलन विधि को लागू करने पर $a = 200$ तथा $h = 20$ से हमें निम्न मूल्य प्राप्त होता है।

विकेटों की संख्या	बल्लेबाजों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
20-60	7	40	–160	–8	–56
60-100	5	80	–120	–6	–30
100-150	16	125	–75	–3.75	–60
150-250	12	200(a)	0	0	0
250-350	2	300	100	5	10
350-450	3	400	200	10	30
कुल	45				–106

अतः $\bar{x}_i = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$

अतः 45 बल्लेबाजों द्वारा लिए गए औसत विकेटों की संख्या 152.89 है।.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. यातायात कार्यालय में पार्सल का भार इस प्रकार दिया गया

भार Kg	50	65	75	90	110	120
पार्सल संख्या	25	34	38	40	47	16

तो पार्सलों का मध्यमान भार ज्ञात करो।

2. एक गाँव के परिवारों की संख्या और उनमें बच्चों की संख्या इस प्रकार है।

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5
परिवारों की संख्या	11	25	32	10	5	1

प्रत्येक परिवार के बच्चे का मध्यमान ज्ञात करो।

3. निम्न बारंबारिता बंटन का मध्यमान 7.2 हो तो ‘K’ का मान ज्ञात करो।

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

7.2.3 मध्यिका

दिए गए राशियों का मध्य मूल्य मध्यिका होता है जब उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाय तो यह दत्तों को दो समूह में विभाजित करता है, एक भाग मध्यिका से बडे मूल्यों को समाविष्ट करता है और दूसरा भाग मध्यिका से छोटे मूल्यों को समाविष्ट करता है।

पिछली कक्षाओं में हमने चर्चा की थी कि निरीक्षणों को क्रम में व्यवस्थित कर मध्यिका की गणना की जाती है।

‘n’ निरीक्षणों के दत्तों में ‘n’ विषम हो, तो मध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ वाँ पद रहता है।

जब सम संख्या हो तो मध्यिका का मान $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ वाँ तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ वे मूल्य का औसत होता है।

बारंबारिता बंटन की मध्यिका

भारात्मक निरीक्षणों के दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने के विधि की चर्चा करेंगे, 100 कर्मचारियों की मासिक आय इस प्रकार है।

वेतन (रू.में)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
कर्मचारियों की संख्या	4	18	30	20	15	8	5

दिए गए दत्तों की मध्यिका किस प्रकार से ज्ञात करेंगे? सबसे पहले दिए गए दत्तों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करो। उसके बाद अनुरूप बारंबारिताओं को तालिका में लिखेंगे और आरोही संचित बारंबारिता को ज्ञात करेंगे। हम देखेंगे कि सचित बारंबारिता में अंको का बढता क्रम होता है।

$\frac{N}{2}$ का मूल्य ज्ञात करो और मध्यिका की श्रेणी को पहचानो जिसकी संचित बारंबारिता $\frac{N}{2}$ से अधिक हो जहाँ N बारंबारिताओं का योग होता है।

यहाँ N= 100 सम संख्या है अतः $\left[\frac{N}{2}\right]^{th}$ वाँ और $\left[\frac{N}{2}+1\right]^{th}$ वाँ निरीक्षण 50 और 51 क्रमशः है।

तालिका से संबंधित मूल्य 50वाँ और 51वाँ निरीक्षणों के समान होगा जिसका भारात्मक मूल्य 8500 होगा। अतः इस बंटन की मध्यिका 8500 है।

अब समूहबद्ध दत्तों की मध्यिका ज्ञात करने के लिए, हम इन में से कोई संचित बारंबारिता तालिका का उपयोग कर सकते है। अब समूह बद्ध दत्तों में, हम मध्य के निरीक्षण को नहीं ज्ञात कर सकते। संचित बारंबारिता तालिका में, मध्य का निरीक्षण, वर्गांतर में ही इसका मूल्य रहता है, श्रेणी के भीतर जो पूरे वर्गांतर को विभाजित करता है। दो भागों में विभाजित किया जाता है। तो यह कौनसी श्रेणी होगी?

इस श्रेणी को ज्ञात करने के लिए, हमें सभी श्रेणियों के और $\frac{n}{2}$ की संचिता बारंबारिता ज्ञात करना होगा। हमें उस श्रेणी की संचित बारंबारिता जो ज्यादा है यह माध्यिका की श्रेणी होगी।

अंक	विद्यार्थीयों की संख्या (f)	संचित बारंबारिता(cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
80-90	7	45
90-100	8	53

इस बंटन में, n = 53. अतः $\frac{n}{2}$ = 26.5. अब, 60-70 वह श्रेणी है। जिसकी संचित बारंबारिता 29 है जो $\frac{n}{2}$ से अधिक है, अर्थात्, 26.5.

इसलिए, 60-70 यह मध्यिका श्रेणी है।

मध्यिका की श्रेणी ज्ञात करने के बाद निम्न सूत्र का उपयोग कर मध्यिका ज्ञात करेंगे।

मध्यिका= $l+\left(\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right)\times h$

जहाँ

l = मध्यिका श्रेणी की निम्न सीमा

n = निरीक्षणों की संख्या

cf = मध्यिका कक्षा से ऊपर वाली संचित बारंबारिता,

f = मध्यिका कक्ष की बारंबारिता

h = वर्गांतर (मध्यिका कक्ष).

$\frac{n}{2}=26.5,\quad l=60,\quad cf=22,\quad f=7, h=10$ इन मूल्यों को सूत्र में स्थापित करने पर मध्यािका= $60+\left[\frac{26.5-22}{7}\right]\times 10$

$$=60+\frac{45}{7}\quad =66.4$$

अतः आधे विद्यार्थीयों ने 66.4, से कम अंक प्राप्त किए और शेष आधे विद्यार्थीयों ने 66.4 से अधिक अंक प्राप्त किए।

उदाहरण-9 : एक सर्वेक्षण के अनुसार दसवीं कक्षा के 51 लड़कियों की ऊँचाई (से.मी. में) ज्ञात की गई और प्राप्त दत्तों को तालिका में दर्शाया गया तो मध्यिका ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (से.मी.में)	140	145	150	155	160	165
लडकियों की संख्या	4	11	29	40	46	51

हल: मध्यिका की ऊँचाई को ज्ञात करने के लिए, हमें वर्गांतर ज्ञात करना होगा और उनकी संलग्न बारंबारिता यह बंटन 140, 145, 150, . . ., 165 यह संलग्न श्रेणी की उच्च सीमा होगी। अतः श्रेणी 140, 140 - 145, 145 - 150, . . ., 160 - 165. से कम होगी।

वर्गांतर	बारंबारिता	संचित बारंबारिता
140 से कम	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

दिए गए बंटन से हम यह ज्ञात कर सकते है कि 4 लड़कियों की ऊँचाई 140 से कम है। अर्थात् 140 से कम की बारंबारिता अब 11 लड़कियों की ऊँचाई 145 से कम है और 4 लड़कियों की ऊँचाई 145 से कम है अर्थात् लड़कियों की ऊँचाई 140 – 145 श्रेणी में $11 - 4 = 7$. है उसी प्रकार इस तालिका की बारंबारिता ज्ञात कर सकते है।

निरीक्षणों की संख्या $n = 51$

$\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ वाँ निरीक्षण, जो 145–150. की श्रेणी में होगा।

$\therefore$ 145 – 150 यह मध्यिका की श्रेणी है।

तो, l (निम्न सीमा) = 145,

cf (संचित बारंबारिता की पहली श्रेणी 145 – 150) से ऊपर वाली संचित बारंबारिता = 11,

f (मध्यिका कक्ष की बारंबारिता 145 – 150) = 18,

h (वर्गांतर) = 5.

सूत्र का उपयोग करते हुए मध्यिका $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

अतः लड़कियों की मध्यिका ऊँचाई 149.03 से.मी. है। इसका अर्थ है कि 50% से ऊपर लड़कियों की ऊँचाई उससे कम है और शेष 50% की ऊँचाई उससे अधिक है?

उदाहरण - 10 : दिए गए दत्तों की मध्यिका 525 है तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिए। जिसमें कुल बारंबारिता 100 है। CI का अर्थ है वर्गांतर और Fr का अर्थ बारंबारिता है।

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

हल: दिया गया है कि $n = 100$

अतः, $76 + x + y = 100$, अर्थात् $x + y = 24$ ... (1)

मध्यिका 525 है, जो 500 – 600 श्रेणी में है।

अतः, $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36 + x$, $h = 100$

वर्गांतर	बारंबारिता	संचित बारंबारिता
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7 + x$
300-400	12	$19 + x$
400-500	17	$36 + x$
500-600	20	$56 + x$
600-700	y	$56 + x + y$
700-800	9	$65 + x + y$
800-900	7	$72 + x + y$
900-1000	4	$76 + x + y$

सूत्र के उपयोग से मध्यिका $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

अर्थात् $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

$25 = 70 - 5x$

$5x = 70 - 25 = 45$

$x = 9$ इसे समीकरण (1), में लगाने पर हमें $9 + y = 24$ प्राप्त होगा

अर्थात् $y = 15$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. निम्नलिखित बंटन तालिका में 400 नियान बल्बों का जीवन काल दिया गया है।

जीवन काल	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
बल्बों की संख्या	14	56	60	86	74	62	48

बल्बों के जीवन काल की मध्यिका को ज्ञात कीजिए।

2. किसी कक्षा के 30 छात्रों के भार की बारंबारिता तालिका नीचे दी गई है, तो छात्रों की मध्यिका भार को ज्ञात कीजिए।

भार किलों में	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
छात्रों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

7.2.4 बहुलक

यदि एक संख्या दिए गए दत्तों में कई बार दोहराई जाती है। या एक निरीक्षण जिसकी बारंबारिता सबसे अधिक है। उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहा जाता है।

उदाहरण 11 : एक जूते की दुकान में किसी दिन निम्न माप के जूते बिके तो बहुलक ज्ञात करो।.

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

हल: सबसे पहले निम्न दिए गए निरीक्षणों को क्रम में व्यवस्थित करेंगे 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 की बारंबारिता बंटन तालिका बनाई गई।

माप	6	7	8	9	10
बिके जूतों की संख्या	4	5	1	2	1

यहाँ 7 नंबर के जूते ज्यादा बिके अर्थात् 5 बार

दिए गए दत्तों का बहुलक 7 है। इससे यह ज्ञात होता है कि ‘7’ नंबर का जूता सबसे ज्यादा बेचा गया है।

उदाहरण 12: किसी कक्षा के 20 विद्यार्थीयों द्वारा प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार है।

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

a) 91-100, 81-90, ...वर्गांतर लेते हुए बारंबारिता तालिका बनाओ।

b) बहुलक के वर्ग को चुनिए (सबसे बड़ी बारंबारिता वाला वर्ग बहुलक वर्ग माना जायेगा).

c) (उस) वर्गांतर को ज्ञात करो जिसमें मध्यिका हो

हल: a)

प्राप्तांक	बारंबारिता	अवरोही संचित बारंबारिता
91 - 100	9	20
81 - 90	6	11
71 - 80	3	5
61 - 70	0	2
51 - 60	2	2
कुल	20	

b) 91-100 की श्रेणी बहुलक की श्रेणी है। जिसमे सबसे बड़ी बारंबारिता पाई गई है।

c) 20 का मध्यमूल्य 10 है यदि हम ऊपर से गिनती करते है तो 81-90 के श्रेणी में 10 बारंबारिता पायी गई है। इसलिए मध्यिका का वर्गांतर 81-90 होगा।

समूहबद्ध दत्तों का बहुलक

समूहबद्ध दत्तों की बारंबारिता को देखते हुए बंटन तालिका में बहुलक को निर्धारित करना संभव नहीं है यहाँ हम केवल और केवल उच्चतम बारंबारिता के कक्ष का पता लगा सकते है इसे बहुलक का वर्गांतर कहते है। बहुलक वर्गांतर में ही बहुलक का मूल्य रहता है, और उसे सूत्र द्वारा बताया जा सकता है।

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

यहाँ,
l = बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा
h = बहुलक श्रेणी की लंबाई
f_1 = बहुलक श्रेणी की बारंबारिता
f_0 = बहुलक श्रेणी के एकदम ऊपर वाली बारंबारिता
f_2 = बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता

बहुलक के सूत्र को समझने के लिए कुछ उदाहरणों को हल करेंगे।

उदाहरण-13 : विद्यार्थीयों के एक समूह द्वारा एक मोहल्ले के 20 परिवारों का सर्वेक्षण किया गया इस तालिका परिवार के सदस्यों की संख्या दी गई है।

परिवारों का वर्गीकरण	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

दिए गए दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ अधिकतम बारंबारिता 8 है जिसकी वर्ग श्रेणी 3-5 है। इसलिए बहुलक श्रेणी 3-5 होगी।

बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा = 3-5, है। बुहलक श्रेणी की निम्न सीमा = 3, वर्गांतर $(h) = 2$

श्रेणी की बारंबारिता $(f_1) = 8$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत ऊपर वाली बारंबारिता $(f_0) = 7$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता $(f_2) = 2$.

अब इन मूल्यों को सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर -

बहुलक $= l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$

$$= 3+\left(\frac{8-7}{2\times 8-7-2}\right)\times 2 = 3+\frac{2}{7} = 3.286$$

इसलिए दिए गए दत्तों का बहुलक 3.286 है।

उदाहरण 14 : गणित की परीक्षा में 30 छात्रों के अंक नीचे की तालिका में दिए गए है दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए और बहुलक और मध्यमान की तुलना कीजिए। तथा उनकी व्याख्या कीजिए।

वर्गांतर (CI)	छात्रों की संख्या (f_i)	श्रेणी अंक (x_i)	$F_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
कुल	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_{ixi} = 1860.0$

हल: विद्यार्थीयों की अधिकतम संख्या (अर्थात् 7) जिन्हें सबसे अधिक अंक मिले उनका वर्गांतर 40-65 अर्थात् बहुलक श्रेणी 40 - 55 होगी।

बहुलक श्रेणी की निम्न सीमा $(l) = 40$,

वर्गांतर $(h) = 15$,

बहुलक श्रेणी की बारंबारिता $(f_1) = 7$,

बहुलक श्रेणी के तुरंत ऊपर वाली बारंबारिता $(f_0) = 3$

बहुलक श्रेणी के तुरंत नीचे वाली बारंबारिता $(f_2) = 6$.

अब सूत्र के उपयोग से:

$$\text{बहुलक} = l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$$

$$= 40+\left(\frac{7-3}{2\times 7-6-3}\right)\times 15 = 40+12 = 52$$

व्याख्या: बहुलक 52 है। अब उदाहरण 1 से हमें ज्ञात है कि, मध्यमान अंक 62है अध्यधिक विद्यार्थीयों ने 52 अंक प्राप्त किए जब कि औसत विद्यार्थीयों ने 62 अंक प्राप्त किये है।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक वर्ष में अस्पताल में भर्ती किए गए रोगियों की संख्या इस तालिका में दीगई है।

आयु (वर्ष में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
मरिजों के संख्या	6	11	21	23	14	5

ऊपर दिए गए दत्तों से बहुलक एवं मध्यमान ज्ञात कीजिए। दो केंन्द्रिय प्रवृत्ति के मापों की तुलना एवं व्यख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित तालिका से 225 बिजली के यंत्र के भागों के जीवन काल (घंटो) की सूचना इस प्रकार दी गई है।

जीवन काल (घंटों) में	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारंबारिता	10	35	52	61	38	29

बिजली के भागों को बहुलक ज्ञात कीजिए।

3. भारत के राज्य स्तर पर उच्च माध्यमिक पाठशालाओं में शिक्षक एवं विद्यार्थी अनुपात इस प्रकार है।

छात्रों की संख्या	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
प्रांतों की संख्या	3	8	9	10	3	0	0	2

4. एक दिवसीय अंतराष्ट्रीय क्रिकेट मैच में संसार के कुछ प्रसिद्ध बल्लेबाज के रनों की संख्या का विवरण इस तालिका में दिया गया। उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

रन	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
बल्लेबाज	4	18	9	7	6	3	1	1

अभ्यास

1. चार गेहूँ की बोरियों का वजन (कि.ग्रा.) 103, 105, 102, 104. हो तो औसत वजन ज्ञात कीजिए?
2. पिछले पाँच वर्षो में पाठशाला में भर्ती की गए विद्यार्थीयों की संख्या 605, 710, 745, 835 तथा 910. हो तो प्रति वर्ष की औसत भर्ती ज्ञात कीजिए।
3. कक्षा दसवीं के 30 विद्यार्थीयों के गणित में प्राप्त अंक इस प्रकार है।

40	73	49	83	40	49
27	91	37	31	91	40
31	73	17	49	73	62
40	62	49	50	80	35
40	62	73	49	31	28

का मध्यमान ज्ञात कीजिए।.

4. प्रथम दस प्राकृतिक संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिए।
5. सप्ताह के 6 दिनों की शक्कर की बिक्री नीचे दिया गया है तो उनका मध्यमान ज्ञात कीजिए।

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
74कि.ग्रा.	121कि.ग्रा	40कि.ग्रा	82कि.ग्रा	70.5 कि.ग्रा	130.5कि.ग्रा

6. दिए गए दत्तों से विचलन पद्धति द्वारा दैनिक मज़दूरी का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

दैनिक मजदूरी रूपयों में	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
मजदूरों की संख्या 5	8	15	10	2	

7. बास्केटबॉल टीम द्वारा मैच की श्रेणी में प्राप्त प्वांइट्स इस प्रकार है।

16, 1, 6, 26, 14, 4, 13, 8, 9, 23, 47, 9, 7, 8, 17, 28 की मध्यिका ज्ञात कीजिए।

8. दिए गए दत्तों की मध्यिका ज्ञात कीजिए। जिसमें 15 में से प्राप्त 35 विद्यार्थीयों के गणित के अंक दिए गए है।

प्राप्तांक	3	5	6	11	15	14	13	7	12	10
छात्रों की संख्या	4	6	5	3	1	7	3	2	3	1

9. 11 मैचों में टीम द्वारा स्कोर किए गए गोल की संख्या निम्न प्रकार है

1, 0, 3, 2, 4, 5, 2, 4, 4, 2, 5

इनकी मध्यिका ज्ञात कीजिए।

10. दिए गए दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

9, 6, 8, 9, 10, 7, 12, 15, 22, 15

11. एक सर्वेक्षण के अनुसार, कुछ छात्रों के समूह द्वारा प्राप्त जानकारी में 20 घरों के वृक्षों की संख्या है। तो प्रत्येक घर के वृक्षों का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

वृक्षों की संख्या	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

12. एक फैक्टरी में 50 मजदूरों की दैनिक मजदूरी की बारंबारिता तालिका नीचे दी गई है। आपकी सुविधा अनुसार किसी भी विधि से उनका मध्यमान ज्ञात कीजिए।

दैनिक मजदूरी रू. में	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
मजदूरीी की संख्या	12	14	8	6	10

13. किसी परिसर के कुछ बच्चों का जेब खर्च निम्न बारंबारिता तालिका में दिया गया है। यदि मध्यमान ` 18 है तो f का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रतिदिन जेब खर्च	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

14. एक वर्ष अस्पताल में भर्ती किए गए रोगियों की संख्या इस तालिका में दी गई है:

आयु (वर्ष में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
मरिजों की संख्या	6	11	21	23	14	5

ऊपर दिए गए दत्तों से बहुलक एवं मध्यमान ज्ञात कीजिए। दो के केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों की तुलना एवं व्याख्या कीजिए।

15. निम्नलिखित बारंबारिता बंटन तालिका में किसी गाँव के 200 परिवार का मासिक खर्च का विवरण दिया गया है तो मध्यमान ज्ञात कीजिए।

खर्च रूपयों में	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
परिवारों की संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

16. निम्नलिखित बारंबारिता बंटन में एक क्षेत्र के मासिक 68 उपभोक्ताओं द्वारा उपयोग में लाई गई विद्युत युनिट दी गई है। तो दत्तों की मध्यिका, मध्यमान और बहुलक ज्ञात कर उनकी तुलना कीजिए।

मासिक विद्युत उपयोग	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
ग्राहकों की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

17. यदि नीचे दिए गए 60 निरीक्षणों की मध्यिका 28.5 हो तो x और y का मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्गांतर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारिता	5	x	20	15	y	5

18. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पझलिसी धारकों की आयु के वितरण के बारे में निम्न जानकारी प्राप्त करता है। उनकी आयु की मध्यिका ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्ष में)	20 से कम	25	30	35	40	45	50	55	60
पॉलसी धारकों की संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

सारांश

- केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन एक विशेष मूल्य होता है। जो दत्तों के आसपास होता है।
- केद्रीय प्रवृत्ति मापन के प्रकार : मध्यमान, मध्यिका, बहुलक
- मध्यमान अर्थात् दत्तों के योगों को दत्तों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है

$$\text{मध्यमान} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}} \quad \text{या} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

- दत्तों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर इस व्यवस्था के मध्य का मूल्य मध्यिका कहलाता है।
- दत्तों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर इस व्यवस्था के मध्य का मूल्य मध्यिका कहलाता है।
- यदि एक संख्या दिए गए दत्तों में कई बार दोहराई जाती है। या एक निरीक्षण जिसकी बारंबारिता सबसे अधिक है। उसे दिए गए दत्तों का बहुलक कहा जाता है।

समूहबद्ध दत्तों का मध्यमान

(i) प्रत्यक्ष विधि

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

जहाँ x_i कक्षा अंक तथा f_i उसकी बारंबारिता होता है।

(ii) कल्पित मध्यमान विधि

$$\overline{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

जहाँ a कल्पित मध्यमान तथा $d_i = x_i - a$.

(iii) क्रम विचलन पद्धति

$$\overline{x} = a + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right) \times h$$

जहाँ a कल्पित मध्यमान तथा, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ तथा h वर्गों की लंबाई हो।

अध्याय
7.3 दत्तों का आलेखीय प्रदर्शन

7.3.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगे:

- दिए गए बार ग्राफ को समझकर उसकी व्याख्या करेंगे।
- दिए गए दत्तों को बार ग्राफ द्वारा दर्शायेंगे।
- दिए गए द्त्तों को सोपान आलेख द्वारा प्रदर्शन करेंगे।
- दिए गए दत्तों का बारंबारिता बहुभुज का निर्माण करेंगे।
- दिए गए दत्तों का ओजीव वक्र का निर्माण कर व्याख्या करेंगे।

7.3.1 परिचय

जब हम दत्तों को देखते है उनका मापक गुण को चर राशि कहते है और दत्तों के विभिन्न पदों को उन चरराशियं के मूल्य कहते है। उदहारणार्थ पाठशाला में किसी वर्ष के दसवीं कक्षा के विद्यार्थीयों के कुल अंकों को चरराशि 'x' तथा प्राप्त अंक को x_i (i = 1, 2, 3 ...) को चरराशियों का मूल्य कहते है। पाठशाला के दृष्टिकोण से x_i, के कुल मूल्य को व्यापक दत्त माना जाता है।

दत्तों के सरलीकृत प्रदर्शन "बारंबारिता बंटन" से सांख्यिकीय विश्लेषण सरल तथा वह सांख्यिकीय व्याख्याओं के आधार बनाते है। लेकिन संख्याओं के रूप में दिए गए दत्तों से हम दत्तों के कुछ विशेष लक्षणों को नहीं पहचान सकते है। यदि उसी दत्तों के कुछ विशेष लक्षणों को नहीं है तो हम संख्याओं के सार को जान सकते है। और उनके लक्षणों को सरलता से समझ सकते है। ले-मेल हमेशा संख्याओं तथा तालिकाओं से भ्रमिक हो जाते थे। उन लोगों के लिए भी जिन्हें सांख्यिकी का कुछ ज्ञात होता है, ग्राफ से विश्लेषण करना सरल होगा।

निरीक्षणों के बारंबारिता परिवर्तन में ग्राफ उपयोगी होता है। क्योंकि चरराशियाँ बढ़ती या घटती है तब उनका विभिन्न वर्ग से संबंध जोडने ग्राफ उपयोगी होता है।

साधारणतया बारंबारिता बंटन के लिए निम्नलिखित ग्राफों को उतारा जाता है। (1) बार ग्राफ, (2) सोपान आलेख (3) बारंबारिता बहुभुज (4) ओजीव वक्र (a) ओरोही संचित बारंबारिता वक्र तथा (b) अवरोही संचित बारंबारिता वक्र

7.3.2 बार ग्राफ

दिए गए दत्तों को तत्संबंधी मूल्यों के उपयोग से समान चौडाई तथा विभिन्न लंबाई वाले स्तंभों को आडा या खडा प्रदर्शित करना बार ग्राफ या स्तंभालेखन कहलाता है।

चलिए इसे हम उदाहरण से देखेंगे: एक कक्षा के 40 विद्यार्थीयों के ग्रेड नीचे दिए गए है।

ग्रेड	विद्यार्थीयों की संख्या
A	13
B	9
C	6
D	7
E	5

वह ग्राफ बार ग्राफ या बार चार्ट कहलाता है। जिनमें समान चौडाई वाले स्तंभ समान अंतर से क्षैतिज अक्ष -X-अक्ष पर डाले जाते है, स्तंभों की लंबाई Y-अक्ष के समानांतर में बारंबारिता के अनुपात में डाला जाता है।

यहाँ स्तंभों की चौडाई का कोई विशेष अर्थ नहीं होता है

यदि आपको चित्र 7.3.1.1 जैसा बार ग्राफ दिया जाय तो

आप उसका क्या निष्कर्ष निकालेंगे?

कितने विद्यार्थीयों ने A ग्रेड प्राप्त किया है?

कौनसे ग्रेड वाले विद्यार्थीयों के कौनसा ग्रेड प्राप्त हुआ?

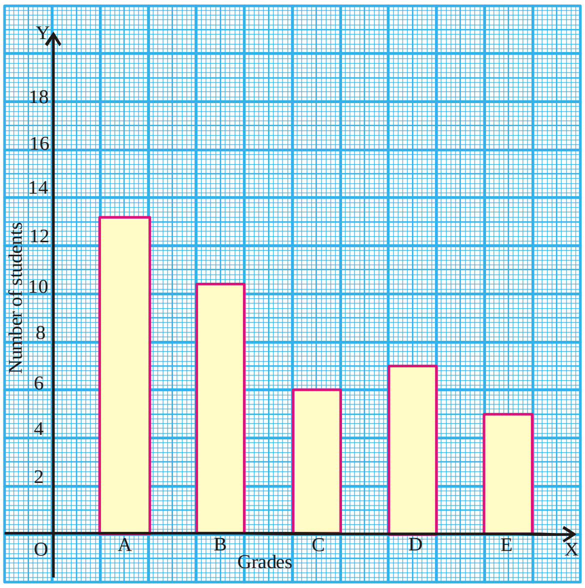
सबसे कम विद्यार्थीयों को कौनसा ग्रेड प्राप्त हुआ?

प्रश्नों द्वारा या तुलना द्वारा आप दिए गए दत्तों का यह निष्कर्ष निकाल सकते है।

(i) कक्षा में A ग्रेड प्राप्त करने वाले विद्यार्थी सबसे अधिक है?

(ii) कक्षा में 'E' ग्रेड प्राप्त करने वाले विद्यार्थी सबसे अधिक है?.

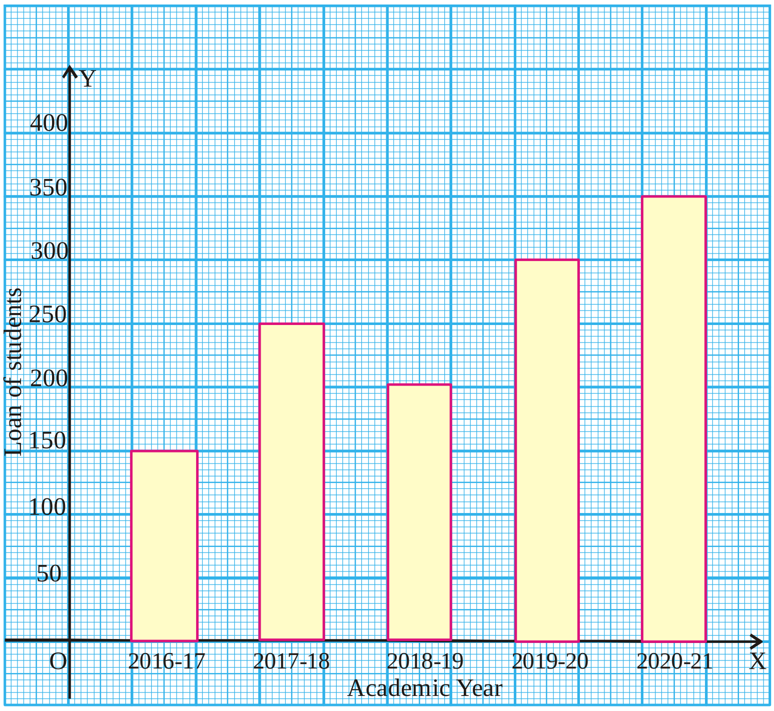
- हमारे दैनिक जीवन में बार ग्राफ का उपयोग अर्थशास्त्री, व्यापारी, कृषि क्षेत्र, सरकारी विभाग तथा औषधीय क्षेत्र में किया जाता है।



। बार ग्राफ का दूसरा रूप चित्र 7.3.1.2 में दिखाए अनुसार होता है, जहाँ विद्यार्थीयों के ग्रेड को Y-अक्ष पर तथा उनकी बारंबारिता को X-अक्ष पर दर्शाया जाता है।

उदाहरण

नीचे दिए गए (चित्र. 7.3.1) ग्राफ में ZPHS ताटीकोंडा के 2016-17 से 2020-21. तक विद्यार्थीयों की संख्या है। ग्राफ से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) बार ग्राफ में कौनसी जानकारी दी गई है।

(ii) पाठशाला कौनसे वर्ष में 250 विद्यार्थी पाये गए है?

(iii) कौनसे वर्ष में सबसे अधिक विद्यार्थी पाए गए है?

(iv) सत्य या असत्य बताइए?

2017-18 की भर्ती 2016-17 से दुगुनी है?

हल :

(i) यह बार ग्राफ ZPHS - ताटीकोण्डा की भती 2016-17 से 2020-21 तक दर्शाया गया है।.

(ii) 2017-18 में पाठशाला के विद्यार्थीयों की संख्या 250 है।

(iii) 2020-21 में पाठशाला के विद्यार्थीयों की संख्या सबसे ज्यादा है।

(iv) 2017-18 की भर्ती = 250

2016-17 की भर्ती = 150

इसलिए दिया गया कथन असत्य है।

बार ग्राफ का निर्माण

निम्नलिखित दत्त बैंकों द्वारा किसानों को दिए गए ऋण की जानकारी 2016 से 2020 तक मुलुगु मंडल से है। 2016 से 2020 तक इन दत्तों का बार ग्राफ बनाइए।

वर्ष	2016	2017	2018	2019	2020
ऋण (करोडों में)	25	30	40	60	55

हल : बार ग्राफ का निर्माण

चरण 1 : एक ग्राफ पेपर लेकर उसपर दो लंब रेखाओं को खींचिए और उन्हें क्षितिज रेखा (X-अक्ष) तथा सीधी रेखा (Y-अक्ष) होगी।.

चरण2 : क्षितिज अक्ष पर वर्षों को तथा खडी रेखा पर ऋणों को दर्शायेंगे।

चरण 3 : क्षितिज रेखा पर समान चौडाई वाले आयत समान दूरी से डालेंगे।

चरण 4 : बार की लंबाई को ज्ञात कीजिए।

2016 : $\frac{1}{10} \times 25 =$ 2.5 इकाई

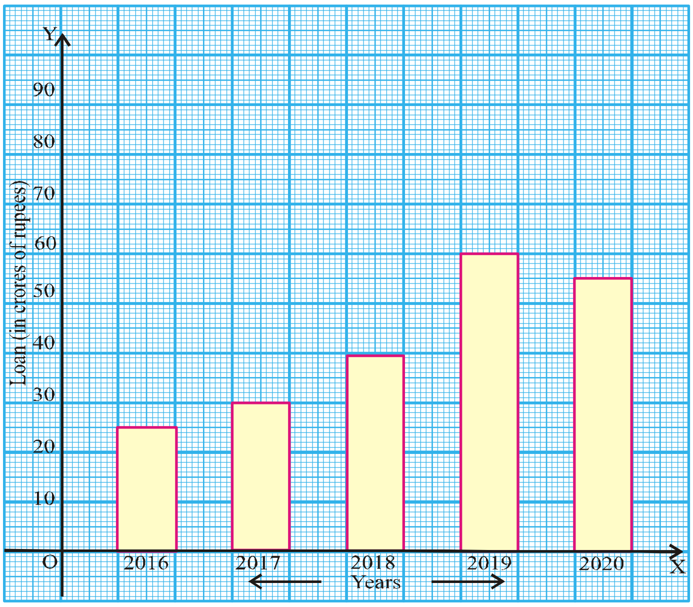
2017 : $\frac{1}{10} \times 30 =$ 3 इकाई.

2018 : $\frac{1}{10} \times 40 = 4$ इकाई.

2019 : $\frac{1}{10} \times 60 = 6$ इकाई

2020 : $\frac{1}{10} \times 55 = 5.5$ इकाई.

पाँच बारों को समान चौडाई तथा चौथे चरण अनुसार वर्षों के अनुसार समान दूरी के साथ नीचे दर्शाये अनुसार खींचिए।



2016 से 2020 तक बैंको द्वारा दिए गए ऋणों का बार ग्राफ

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

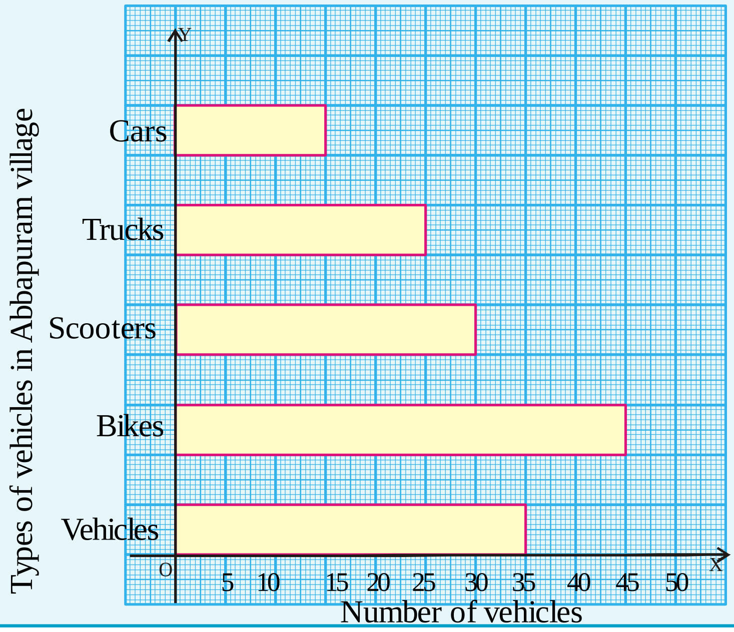
1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

   (i) एक बार ग्राफ संख्याओं का आलेखीय प्रदर्शन .... के उपयोग से समान चौडाई वाले।

   (ii) बार ग्राफ में बार को .... अंतर के साथ

   (iii) बार ग्राफ में आयतों की ऊँचाई क्रमशः उनकी .... बारंबारिता साथ होता है।

2. निम्नलिखित बार ग्राफ में मुलुगु जिले के आभापुरम गाँव में वाहनों की संख्या दर्शाता है।



ऊपरी बार ग्राफ से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

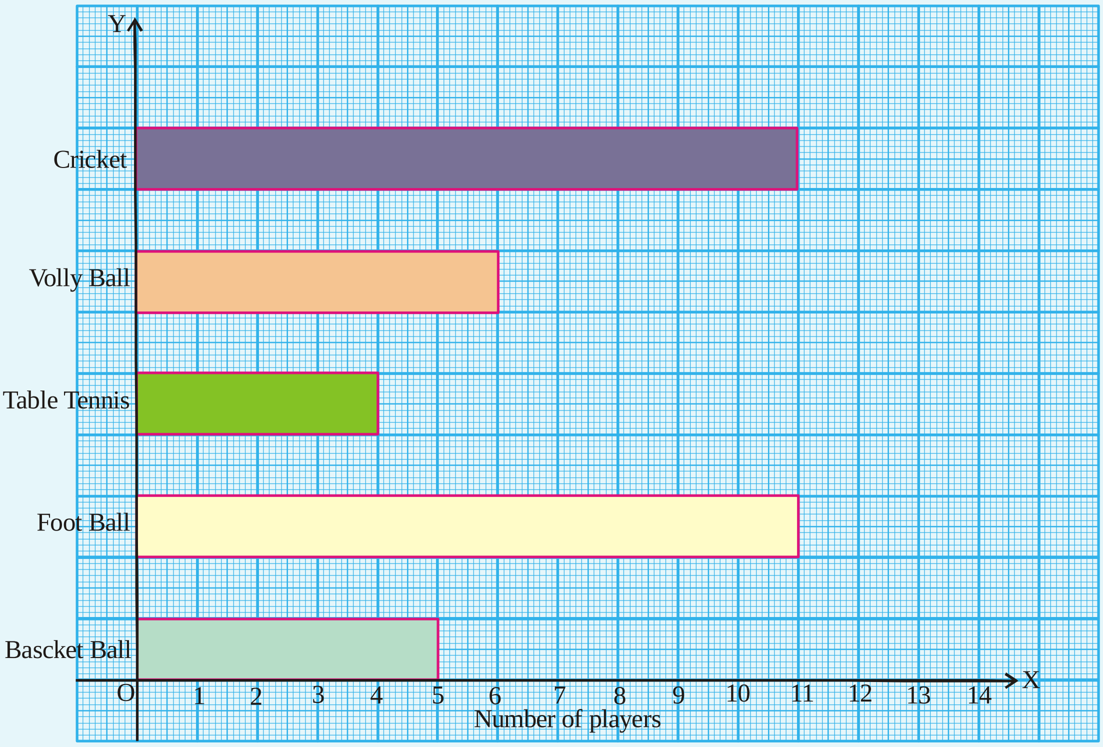
(i) गाँव में कितनी मोटर साइकले है?

(ii) सबसे कम कौनसा वाहन है?

(iii) गाँव में कितनी मोटर सायकलें और स्कूटर है?

(iv) कारों से आटो कितने अधिक है?

3. नीचे दिए गए बार ग्राफ में 5 खेलों में खिलाडियों की संख्या दी गई है।



- बार ग्राफ से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) वॉली बॉल टीम में कितने खिलाडी है?

(ii) अधिकतम खिलाडी कौनसा खेल खेलते है?

(iii) केवल 4 खिलाडी कौनसा खेल खेल रहे है?

(iv) प्रत्येक टीम में समान संख्या के खिलाडी कौनसे खेल में है?

7.3.3 सोपान आलेख तथा बारंबारिता बहुभुजा

। समूहबद्ध बारंबारिता बंटन का आलेखीय प्रदर्शन.

। पहले हम दिए गए जानकारी को बार ग्राफ का प्रदर्शन सीखा।

अब हम सामूहिक बारंबारिता बंटन का आलेखीय प्रस्तुतीकरण सीखेंगे, जिसमें अनन्य वर्गांतर की लगातार श्रेणियाए है इस तरह के आलेख को सोपान आलेख कहते है।

नीचे दिए गए बारंबारिता बंटन का सोपान आलेख देखिए।

वर्गांतर	0-10	11-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारिता	3	5	9	10	15	19	13	11	9	6

(i) ग्राफ में कितने बार (सोपान) होंगे?

(ii) स्तंभ की लंबाई को किस अनुपात में उतारा गया है?

(iii) सभी स्तंभों की समान चौडाई का क्या कारण हो सकता है?

(iv) क्या हम दो स्तंभों को बदल सकते है?

। आलेख से हमें यह ज्ञात होता है कि

(i) 10 वर्गांतर के 10 बारंबारिताएँ है।

(ii) स्तंभों की ऊँचाई, बारंबारिता के समानुपाती है।

(iii) वर्गांतर समान होने के कारण स्तंभों की चौडाई समान है। मुख्यतः इस उदाहरण में सभी वर्गांतरों की लंबाई समान है।

(iv) यहाँ निरंतर श्रेणी को प्रदर्शित किया गया है इसी कारण से दो स्तंभों को आपस में नहीं बदला जा सकता है।

निरंतर बारंबारिता बंटन को सोपान आलेख द्वारा दर्शाया जा सकता है।

“सोपान आलेख एक खडा बार ग्राफ जिसमें आयतें के बीच अंतर नहीं होता है”.

। क्षैतिज अक्ष (X-अक्ष) पर समूहबद्ध दत्तों के वर्गों को लिया जाता है।

। वर्गों की क्रमशः बारेबारिता को खडे अक्ष (Y-अक्ष) पर उचित स्केल की सहायता से लिया जाता है।

। प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत वर्गों की चौडाई के अनुसार ऊँचाई को बारंबारिता के अनुसार होता है आयतों की लंबाई वर्गों की बारंबारिता के समानुपात में होता है।

सोपान आलेख की रचना

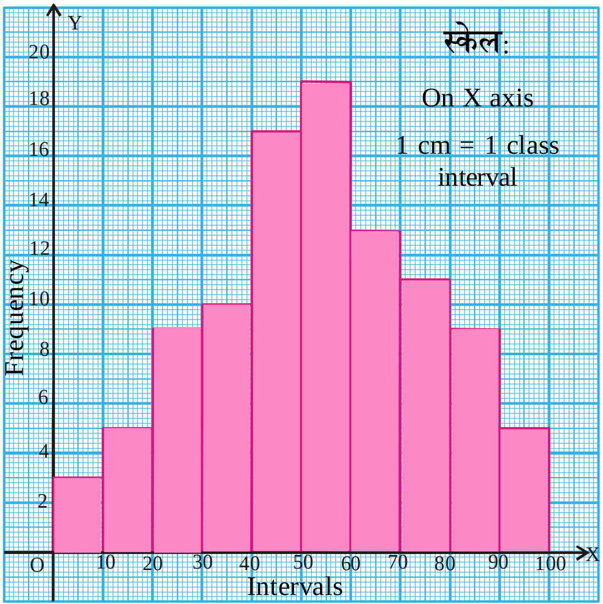
। इसे हम उदाहरण की सहायता से समझायेंगे।

। एक TV चैनल वाले जानना चाहते है कि उनका चैनल किस आयु वर्ग के लोग अधिक देखते है।

उन्होंने एक अपार्टमेंट में सर्वेक्षण किया। प्राप्त दत्तों को सोपान आलेख के रूप में प्रस्तुत किया।

वर्गांतर (आयु समूह)	बारंबारिता दर्शाकों की संख्या	वर्गांतर
11-20	10	10.5-20.5
21-30	15	20.5-30.5
31-40	25	30.5-40.5
41-50	30	40.5-50.5
51-60	20	50.5-60.5
61-70	5	60.5-70.5
लिमिट्स		बौंड्रिस:

चरण 1 : यदि दिए गए वर्गांतर समावेशी हो तो उन्हें अपवर्जी में बदलना होगा क्योंकि हम एक सोपान आलेख का निर्माण करना चाहते है।



चरण 2 : X-अक्ष पर उचित स्केल से वर्गांतर डालिए

चरण 3 : Y-अक्ष पर उचित स्केल से बारंबारिता अंकित कीजिए।

स्केल : X-अक्ष पर 1 से.मी. - एक वर्गांतर
Y-अक्ष पर 1 से.मी. - एक वर्गांतर

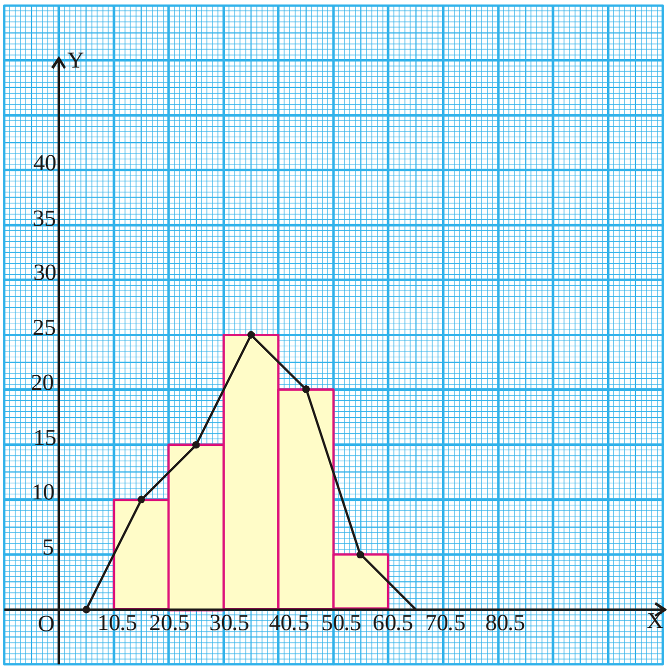
चरण4 : आधार में वर्गांतर लेकर संगत बारंबारिताओं की ऊँचाई से आयत खींचिए।

7.3.4 बारंबारिता बहुभुझ

दत्तों का प्रति रूपण और उनकी बारंबारिता को प्रस्तुत करने की एक दूसरी पद्धति बारंबारिता बहुभुज है। अब हम पहले वाले उदाहरण को फिर से देखेंगे।

वर्गांतर (आयु)	वर्गांतर अपवर्जी	बारंबारिता (दर्शकों की संख्या)
11 - 20	10.5-20.5	10
21 - 30	20.5-30.5	15
31 - 40	30.5 - 40.5	25
41 - 50	40.5 - 50.5	30
51 - 60	50.5 - 60.5	20
61 - 70	60.5 - 70.5	5

। ऊपरी तालिका का सोपान आलेख का प्रदर्शन संलग्न चित्र में किया गया है



अब हम सोपान आलेखों के आयतों के मध्य बिंदुओं को मिलाएँगे।.

इन मध्य बिंदुओं को हम B, C, D, E, F और G. नाम देंगे रेखा से इसे जोडने पर हमें चित्र BCDEFG प्राप्त होगा।

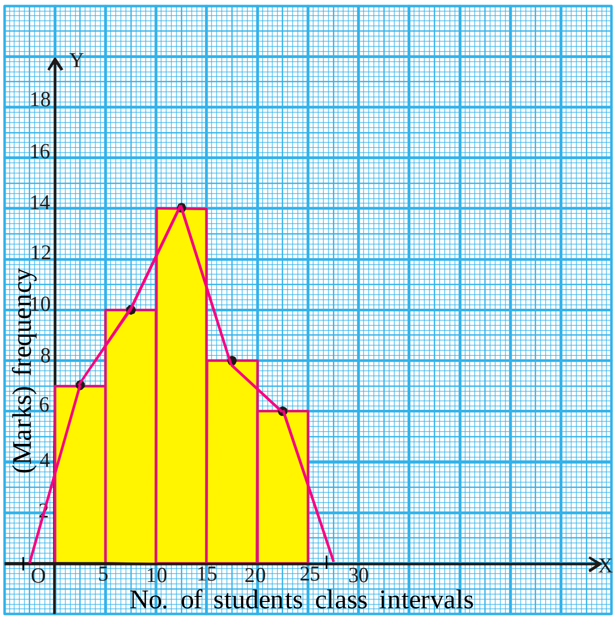
बहुभुज को पूर्ण करने के लिए हम बारंबारिता शून्य का वर्गांतर को मानेंगे जो 10.5 - 20.5 के पूर्व और 60.5 - 70.5 के बाद और उनका मध्य - बिंदु A तथा H क्रमशः होंगे। ABCDEFGH बारंबारिता बहुभुज होगा।

जैसा कि हम जानते है न्यूनतम तथा उच्चतम वर्ग के आगे तथा पिछे कोई भी वर्ग नहीं होता है। दो वर्गांतरों के जोड को शून्य बारंबारिता से जोडने पर हमें वर्गांतर बहुभुज बनेगा। जो सोपान आलेख के क्षेत्रफल के समान होगा।

बारंबारिता बहुभुज की रचना

एक कक्षा में 45 छात्रों के प्राप्तांको (25 में से) पर ध्यान दीजिए। बारंबारिता बंटन तालिका से बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

वर्गांतर प्राप्तांक	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	मध्य मूल्य
0 - 5	7	2.5
5 - 10	10	7.5
10 - 15	14	12.5
15 - 20	8	17.5
20 - 25	6	22.5
कुल	45	



रचना के सोपान:

चरण 1 : दिए गए दत्तों के मध्यमूल्य ज्ञात कीजिए।

चरण2 : दिए गए दत्तों के सोपान आलेख बनाइए। उनके मध्य बिंदुओं को आयत के ऊपरी सिरों पर अंकित कीजिए। (उदाहरण:B, C, D, E, F है।)

चरण 3 : क्रमगत मध्य बिंदुओं को जोडिए।

चरण 4 : प्रथम वर्ग के पहले तथा अंतिम वर्ग के बाद के वर्गांतर का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए (A और H) इसे अक्ष पर अंकित कीजिए। (यहाँ पर पहली श्रेणी 0-5, है इसलिए 0-5श्रेणी की पिछली श्रेणी को ज्ञात करने के लिए क्षितिज रेखा को ऋणात्मक दिशा में बढाकर इसे अनुमानित वर्गांतर का मध्यमूल्य -5-0 ज्ञात कीजिए।).

चरण 5 : पहले बिंदु B से A को मिलाया गया और अंतिम बिंदु F से G को मिलाकर बारंबारिता बहुभुज को पूर्ण किया गया है।

नोट : बारंबारिता बहुभुज को बिना सोपान आलेख खींचे, स्वतंत्र रूप से भी उतारा जा सकता है। इसके लिए हमें कक्षा वर्गांतर के मध्य बिंदुओं की आवश्यकता होती है।

समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका के लिए सोपान आलेख के बिना बारंबारिता बहुभुज बनाना।

बिना बारंबारिता बहुभुज बनाना:

अब हम एक उदाहरण देखेंगे।

एक मेडिकल अध्ययन में 50 मधुमेह रोगियों की जानकारी इस तालिका में दी गई है।

आयु (वर्षों में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
रोगियों की संख्या	5	10	13	18	4

। आइए अब हम बारंबारिता बहुभुज की रचना बिना सोपान आलेख के करें।

चरण 1 : विभिन्न श्रेणियों के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

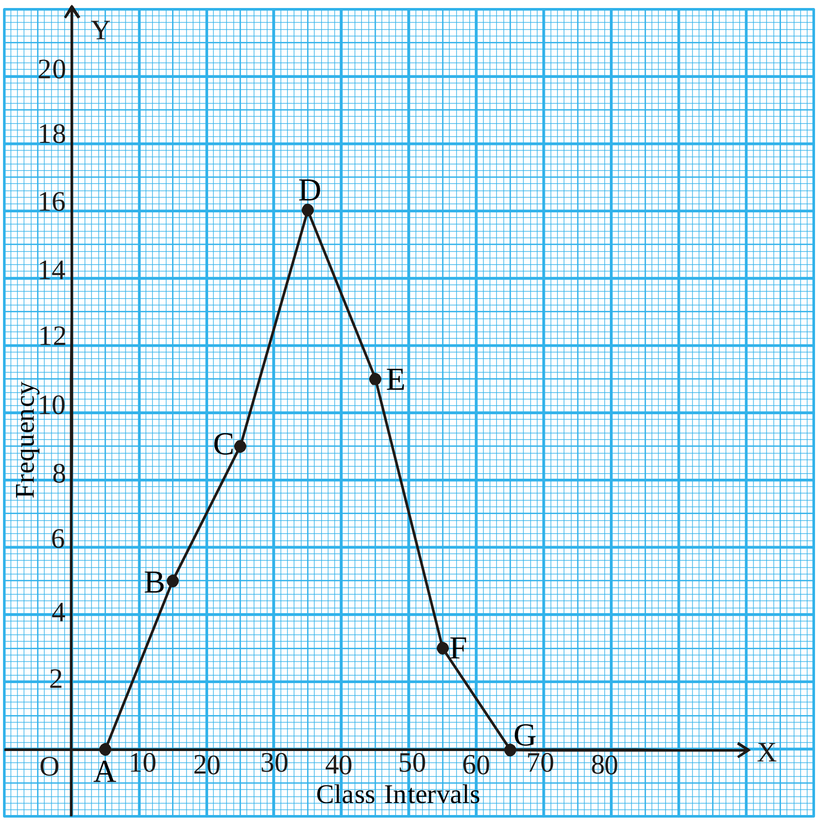
चरण 2 : स्केल का चयन कीजिए।

X-अक्ष पर 1 से.मी. - एक वर्गांतर
Y-अक्ष पर 1 से.मी. - दो इकाई

चरण 3 : यदि प्राप्तांक के 'x' से तथा संलग्न बारंबारिता को 'f' से सूचित करते है तो ('x', 'f') के लिए आलेख का निर्माण कीजिए।

चरण 4 : रेखाखण्डों द्वारा बिंदुओं को मिलाइए।

वर्गांतर (आयु)	रोगियों की संख्या (f)	मध्य मूल्य (x)	क्रमित युग्म (x, f)
0-10	0	5	(5, 0)
10-20	5	15	(15, 5)
20-30	9	25	(25, 9)
30-40	16	35	(35, 16)
40-50	11	45	(45, 11)
50-60	3	55	(55, 3)
60-70	0	65	(65, 0)



अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) सोपान आलेख में साधारणतया वर्गांतर को ....पर लिया जाता है।

   (ii) सोपान आलेख में साधारणतया बारंबारिता ....पर लिया जाता है।

   (iii) सोपान आलेख में आयतो के क्षेत्रफल क्रमशः .... के समानुपाती होते है।

   (iv) सोपान आलेख ....का ग्राफीय प्रदर्शन है।

2. बुद्धि लब्धि (IQ) के विभिन्न स्तरों के लिए 45 विद्यार्थीयों का वितरण निम्न तालिका में दिया गया है इनका सोपान आलेख खींचिए।

IQ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
छात्रों की संख्या	2	5	6	15	12	9	5

3. एक फैक्टरी के 250 मजदूरों का दैनिक वेतन नीचे दिया गया है।

दैनिक मजदूरी	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
मजदूरों की संख्या	30	42	50	55	45	28

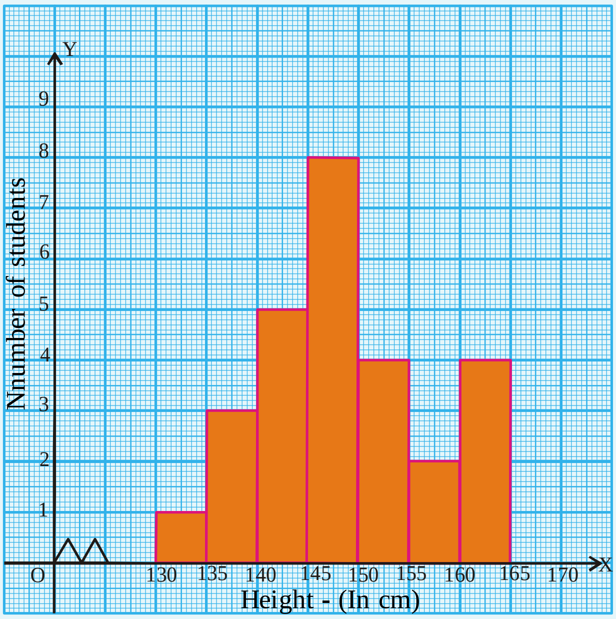
4. दिए गए सोपान आलेख से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।:

(i) दिए गए सोपान आलेख से कौनसी जानकारी प्राप्त होती है?

(ii) कौनसे वर्ग में अधिकतम विद्यार्थी पाये गये है?

(iii) 145 से.मी. से अधिक ऊँचाई कितने विद्यार्थीयों की है?

(iv) 140 से.मी. से कम ऊँचाई कितने विद्यार्थीयों की है?



7.3.5 ओजीव वक्र

[संचायी बारंबारिता बंटन का आलेख]

किसी समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की संचयी बारंबारिता और क्रमशः वर्गांतर के संगत निम्न/ उच्च सीमा के आलेख को संचयी बारंबारिता वक्र या ओजीव वक्र कहते है।

यह पद ogive को “Ojeev” द्वारा पढते है। और यह शब्द ogee से प्राप्त हुआ है जिसमें अवतल वक्र (concave) का प्रवाह उत्तर वक्र (convex) में होता है। जिसमें S-आकार का वक्र प्राप्त होता है। आर्किटेक्चर में ogee आकार 14 वीं, 15 वीं शताब्दी में गोथिक प्रकार का था।

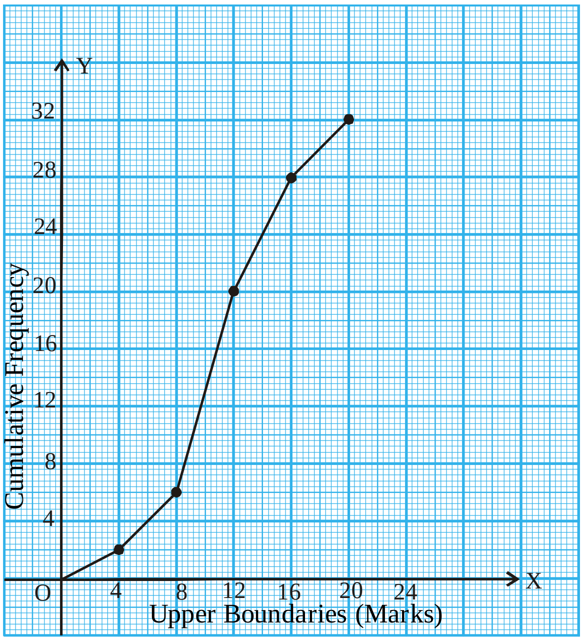
ओजीव वक्र एक निरंतर श्रेणी के प्रत्येक स्तर में एकत्रित शेष निरीक्षण को समझने में सहायक होते है।

आरोही संचयी बारंबारिता वक्र

चलिए अब हम उदाहरण से समझेंगे 32 विद्यार्थीयों द्वारा (20 में से) प्राप्त अंक दिए गए है।

प्राप्तांक	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
छात्रों की संख्या	2	5	12	10	3

वर्गांतर (प्राप्तांक)	छात्रों की संख्या (*f*)	उच्च सीमा (UB)	आरोही संचयी बारंबारिता	बिंदु **(L, B, f)**
0-4	2	4	2	(4, 2)
4-8	5	8	7	(8, 7)
8-12	12	12	19	(0, 19)
12-16	10	16	29	(16, 29)
16-20	3	20	32	(20, 32)



चरण 1 : यदि दी गई बारंबारिता बंटन समावेशी रूप में हो तो उसे अपवर्जी रूप में परिवर्तित कीजिए।

चरण 2 : आरोही संचयी बारंबारिता तालिका बनाइए।

चरण 3 : X- अक्ष पर वर्गांतर उच्च सीमा और Y-अक्ष पर उनके संगत संचित बारंबारिता अंकित कीजिए।

स्केल निर्धारित कीजिए। :

X-अक्ष	1 से.मी.	= 1 वर्गांतर
Y-अक्ष	1 से.मी.	= 4 इकाई (छात्र)

चरण 4 : पहले वर्गांतर के निम्न सीमा (पहले श्रेणी से पूर्ण की श्रेणी की उच्च सीमा) की संचयी बारंबारिता 0 अंकित कीजिए।

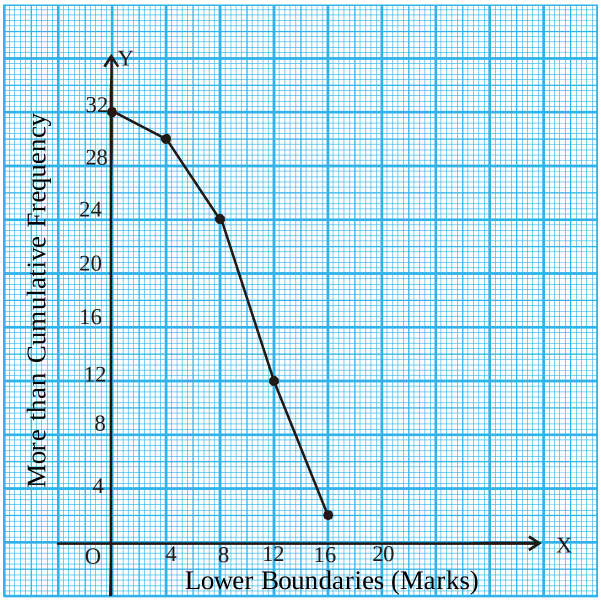
चरण 5: इन बिंदुओं को मिलाकर वक्र प्राप्त कीजिए। जो आवश्यक ओजीव प्राप्त होगा।

अवरोही संचित बारंबारिता वक्र

ऊपरी उदाहरण को देखिए :

वर्गांतर प्राप्तांक	छात्रों की संख्या (*f*)	निम्न सीमा (LB)	अवरोही संचित	बिंदु (LB, M.Cu.fr)
0-4	2	0	32	(0, 32)
4-8	5	4	30	(4, 30)
8-12	12	8	25	(8, 25)
12-16	10	12	13	(12, 13)
16-20	3	16	3	(16, 3)

। उसी प्रकार हम ''अवरोही संचित बारंबारिता वक्र'' खींचेगें जिसमें निम्न सीमा को X-अक्ष पर तथा अवरोही संचित बारंबारिता को Y-अक्ष पर डालेंगे।.



अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक फैक्टरी के 50 मजदूरों की दैनिक आय नीचे तालिका में दिया गया है।

दैनिक आय(रू.)	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
मजदूरों की संख्या	5	7	14	8	6	10

इन बंटन को आरोही संचित बारंबारिता में बदलकर उसका ओजीव वक्र खींचिए।

2. 70 विद्यार्थीयों की बारंबारिता बंटन नीचे दिया गया है। ''आरोही'' तथा ''अवरोही'' संचित बारंबारिता लिखकर उसकी ओजीव वक्र खींचिए।

ऊँचाई (से.मी.)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	171-180
छात्रों की संख्या	5	7	14	8	6	10	3

अभ्यास

1. निम्नलिखित दत्तों से बार ग्राफ उतारिए:

भार (कि.ग्रा में)	32	34	36	38	40	40
छात्रों की संख्या	4	8	3	12	6	5

2. एक मोहल्ले के 50 ग्राहकों द्वारा विद्युत की खपत नीचे बारंबारिता बंटन तालिका में दिया गया है। उनका बार ग्राफ या सोपान आलेख अलग से उतारिए।

मासिक खपत	60-80	80-100	100-120	120-140	140-16
ग्राहकों की संख्या	8	10	18	7	7

3. बुद्धि लब्धि (IQ) के विभिन्न स्तरों के लिए 50 विद्यार्थीयों का वितरण निम्न तालिका में दिया गया है। इन दत्तों का सोपान आलेख खींचिए।

IQ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
छात्रों की संख्या	3	6	7	11	9	9	5

4. कक्षा दसवीं की वार्षिक परीक्षा में 540 छात्रों द्वारा प्राप्तांको के लिए सोपान आलेख बनाइए।

प्राप्तांक	360	400	440	480	520	560
छात्रों की संख्या	90	115	130	85	70	50

5. एक फैक्टरी के 250 मजदूरों का साप्ताहिक वेतन निम्न तालिका में दिया गया है। दिये गये दत्त के लिए एक ही आलेख पर सोपान आलेख और बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

साप्ताहिक वेतन	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
मजदूरों की संख्या	30	40	52	55	45	28

6. निम्नलिखित दत्तों के ओजीव वक्र खींचिए।

वर्गांतर	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारिता	12	10	11	10	7	6	4	5

7. 175 विद्यार्थीयों द्वारा प्राप्त अंक नीचे बारंबारिता तालिका में दिए गए है।

प्राप्तांक(C.I)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	60-70	70-80	80-90	90-100
छात्रों की संख्या	4	6	8	12	24	48	31	24	12

दिए गए दत्तों से आरोही तथा अवरोही संचित बारंबारिता वक्र खींचिए।

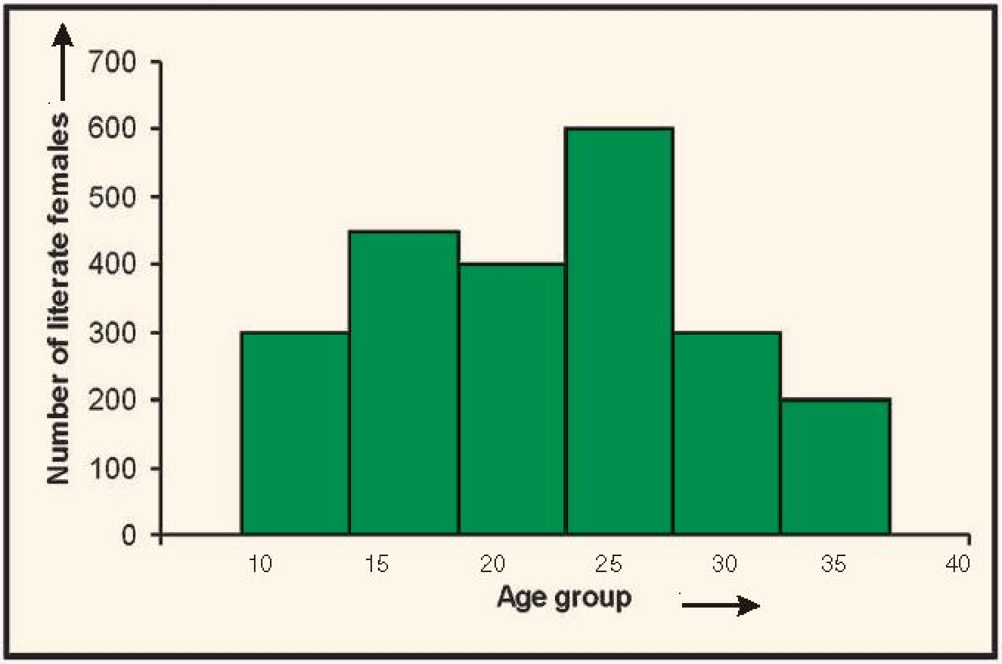
8. एक प्रतियोगिता में 50 प्रतियोगियो द्वारा वर्ग पहेली को पूर्ण करने का समय (मिनटों में) दिया गया है।

समय (मिनटों में)	प्रतियोगियों की संख्या
20-25	8
25-30	10
30-35	9
35-40	12
40-45	6
45-50	5

(i) दत्तों का सोपान आलेख बनाइए।

(ii) दत्तों की बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

9. निम्नलिखित सोपान आलेख में शिक्षित महिलाओं की 10 से 40 (वर्षों) के मध्य की संख्याएँ दी गई है।



ऊपरी सोपान आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।:

(i) 10 से 40 वर्ष तक नगर में कुल कितनी शिक्षित महिलाएँ है?

(ii) सबसे अधिक शिक्षित महिलाएँ किस आयु की है?

(iii) कौनसे दो आयु वाली समूह में समान संख्या में शिक्षित महिलाएँ है।

सारांश

- दिए गए संक्याओं को तत्संबंधी मूल्यों के उपयोग से समान चौडाई तथा विभिन्न लंबाई के स्तंभों द्वारा प्रदर्शित करना स्तंभालेखन या बार ग्राफ कहते है।
- निरंतर श्रेणी से समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका का आलोखीय प्रदर्शन सोपान आलेख कहलाता है। सोपान आलेख में आयतो का क्षेत्रफल उसकी बारंबारिता के समानुपाती होता है।
- बारंबारिता बहुभुज सोपान आलेखों के आयतों के मध्य बिंदुओं को जोडने से प्राप्त होता है। प्रथम वर्ग के पहले तथा अंतिम वर्ग के बाद के वर्गांतर का अनुमानित मूल्य लेकर उनका मध्य बिंदु ज्ञात करते है।
- बारंबारिता बहुभुज को बिना सोपान आलेख खींचे, स्वतंत्र रूप से भी उतारा जा सकता है इसके लिए हमें कक्षा वर्गांतर के मध्यबिंदुओं की आवश्यकता होती है।
- किसी समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की संचयी बारंबारिता और क्रमशः वर्गांतरों के संगत निम्न (या) उच्च सीमा के आलेख को संचयी बारंबारिता वक्र या ओजीव वक्र कहते है।

अध्याय

7.4

प्रायिकता का परिचय

7.4.0 सीखने की संप्राप्तियाँ

इस अध्याय की पूर्णता पर आप कर सकेंगेः

- घटनाओं की प्राथिकता अंत तक आप कर सकते है।
- विशिष्ट घटनाओं को उदाहरण सहीत समझायेंगे।
- दैनिक जीवन की एकल घटनाओं के साधारण प्रश्नों को हल करेंगे।
- पूरक घटनाओं को उदाहरण के साथ समझायेंगे।
- असंभव घटनाओं तथा निश्चित घटनाओं के उदाहरण देंगे।

प्रायिकता के ज्ञान को दैनिक जीवन के समस्याओं को हल करने के साथ संबंधित कीजिए।

7.4.1 परिचय

हमारे दैनिक जीवन में कुछ ऐसे कथन करते है:

(i) शायद आज वर्षा होगी।

(ii) रेलगाडी को देरी हो सकती है।

(iii) बैंक द्वारा गलती करने की संभावना नहीं है।

(iv) अगले सितंबर में दालों के भाव कम होने की अधिक संभावना है।

(v) मुझे संदेह है कि वह किसी तरह प्रतियोगिता जीतेगा।

शब्द जैसे हो सकता है, संभावना है, संभावना नहीं है, अनुमान आदि घटनाओं की ही निश्चित संभावना पर संदेह निर्मित करता है।

इस अध्याय में हम ऐसे प्रश्नों के बारे में पढेंगे। हम संभावना, संभवतः संभावित आदि शब्दों के बारे में भी चर्चा करेंगे और इन्हें कैसे परिमाणित करेंगे? कक्षा 9 में हम घटनाओं के बारे में पढ चुके है जो अत्यधिक असंभवनीय, अतः असंभव है? हमने अक्सर, भाग्य के बारे में भी पढा है। सच्चाई यह है कि कोई किसी विशेष समय पर अध्याय

में हम सीखने का प्रयत्न करेंगे कि कैसे घटना की संभावना को परिभाषित कर सकते है।

यह संख्यात्मक रूप से परिमाणिकरण को ही ''प्रायिकता ज्ञात करना कहते है'

प्रायिकता गणित की वह शाखा है जिसमें असंभावित घटनाओं का समावेश होता है। इसका आरंभ 16वीं शताब्दी हुआ था। इसका उद्‌गम ऐसे खेलों से हुआ जिसमें पाँसा उछालना और प्रयिकता का उपयोग जीव विज्ञान, अर्धशास्त्र, अनुवंशिकी, भौतिकी और सामाजिकीय आदि में।

विश्व के विभिन्न भागों से कई लोग इस प्रकार के प्रयोग रिकार्ड किए और उसके शीर्षो को बदला गया।

उदाहरण के लिए अठारवी शताब्दी में प्राकृतिक केंद्रों में कोमटे डी बफोन ने सिक्का 4040 बार उछाला और 2048 बार चित पाया। इस स्थिति में चित पाने की प्रयोगात्मक प्रायिकता $\frac{2048}{4040}$ अर्थात्, 0.507.

J.E. केरीच ने सिक्के को 10000 बार उछाल कर उस में से 5067 बार चित पाया। इस स्थिति में प्रायकिता $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ होगी। अंग्रेजी सांख्यविद कार्ल पियरसन ने कुछ और समय देकर उसे 24000 बार सिक्का उछाला उसके 12012 बार चित पाया इसलिए उनके द्‌वारा प्राप्त प्रायिकता 0.5005 होगी।.

अब, मानलो हमें किसीने पूछा कि इस प्रयोग को एक मिलियन बार दोहराएँगे तो कितनी बार चित्त प्राप्त होगी? या 10 मिलियन बार आपको मन में लगेगा कि जैसे-जैसे उछालें की संख्या बढेगी वैसे वैसे चित्त प्राप्त करने की संभावना भी बढेगी। हम कम से कम 0.5 संख्या अर्थात् $\frac{1}{2}$. होगी।

7.4.2 यादृच्छिक प्रयोग तथा उसके परिणाम

निम्न स्थितियों का अवलोकन कीजिए:

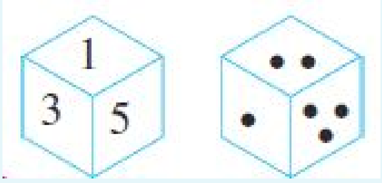
(1) मानलो हम सिक्का उछालेंगे। हम पहले सी ही जानते है कि दो संभावनाओं में से एक हमें प्राप्त होगा चित्त (H) या पट (T) .

(2) मानलो हम एक पांसे को उछालेंगे तो हम जानते है कि इन छः 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में से कोई एक संख्या प्राप्त होगी।.

(3) मानलो हमने 4 बीज बोये और देखा कि तीनों दिनों बाद उनमें अंकुर फूटे। उनके अंकुरण की संख्या 0, 1, 2, 3, या 4 हो सकती है।

जब हम सिक्के के बारे में बात करेंगे तो हम मानते है कि दोनों की समरूपता होने की संभावना आधी-आधी है।

एक पांसे का आकार घन होता है जिसकी छः तल होते है। जिनपर संख्याएँ 1 से 6,बिंदु डाले होते है।



ऊपरी स्थितियों में सिक्के को उछालना, पांसे को फेंकना, बीजारोपण आदि सभी यादृच्छिक प्रयोगों के उदाहरण है। सिक्के उछाल वाले यादृच्छिक प्रयोग में संभावित परिणाम चित और पट ही होगा। (2), दूसरे उदाहरण के संभावित परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6 होगा

(3) तीसरे उदाहरण के संभावित परिणाम: 0, 1, 2, 3, 4.होगे।

यादृच्छिक प्रयोगों में हमेशा एक से अधिक संभावित परिणाम होगा। हम किसी विशिष्ट परिणाम का अंदाजा लगाया नहीं जा सकता है।

यादृच्छिक प्रयोगों के कुछ और उदाहरण इस प्रकार है:

(i) एक बैग में एक जैसे समान बॉल निकाल रहे है।

बैग को देखिए।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ते को यादृच्छिक पत्ते को निकालेंगे जिस पर 1 से 100 तक की संख्या होगी। इस पूरे अध्याय में हम प्रयोगों को शब्द यादृच्छिक प्रयोग का उपयोग करेंगे।

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. इनमें से कौनसे यादृच्छिक प्रयोग है।
   - (i) आप बहुविकल्पी प्रश्नों के उत्तरों को अनुमान लगाते है। जैसे कि विकल्पी A, B, C, तथा D, जिनमें से एक सही है।
   - (ii) प्राकृतिक संख्या 1 से 20 के मध्य अलग चिट्ठियों पर लिख कर एक बैग में डाले गए आप ने बिना देखे एक चिट्ठी उठायेंगे।
   - (iii) आपने ऊँचाई से एक पत्थर फेंका।
   - (iv) हरी तथा जॉन ने 1, 2, 3, में से एक-एक संख्या चुनेंगे।
2. प्रश्न में दिए गए यादृच्छिक प्रयोगो के कितने संभावित परिणाम होंगे?

7.4.3 सम संभावित परिणाम

मानलीजिए कि हम एक सिक्का उछालते या पासा फेंकते हैं तो सिक्का या पासा अच्छा और निष्पक्ष है और सिक्के या पांसे का प्रयोग करने पर सभी का परिणाम समान होगा। हम एक प्रयोग करते है, एक सिक्के को बार-बार उछाल कर चित या पट का परिणाम लिखिए। इन आंकडों के प्रदत्त हम परिणाम में होने वाले परिवर्तन को जान सकते है।

एक सिक्के को बार-बार उछालने पर हमें चित्त और पट के परिणाम अंकित करें। अब परिणाम सूचि देखें जहाँ सिक्का उछालने की संख्या बढती जाती है।

सिक्का	उछालने की संख्या	पटों की संख्या
50	22	28
60	26	34
70	30	40
80	36	44
90	42	48
100	**48**	**52**

ऊपर की तालिका से यह मालूम होता है कि उछालों की संख्या जितनी बढेगी। चितों और पटों की संख्या भी उतनी बढेगी।.

उसी प्रकार जब हम अधिक बार पासा उछालेंगे तो उसके परिणाम इस प्रकार होंगे

पासा फेंकने की संख्या	प्रत्येक परिणाम प्राप्त होने की संख्या (अर्थात् ऊपरी सतह पर दिखाई देने वाले अंको की संख्या)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
50	9	5	12	9	8	7
100	17	19	19	16	13	16
150	28	24	28	23	21	26
200	34	34	36	30	32	34
250	40	40	43	40	43	44
300	48	47	49	52	52	52

ऊपर दी गई तालिका से आप देखेंगे कि जैसे-जैसे पांसा फेंका जाने की संख्या बढती जायेगी, वैसे-वेसे परिणामों में प्रत्येक परिणाम की संख्या लगभग समान होती जायेगी।

ऊपर के दोनों प्रयोगो से हम कह सकते है कि प्रयोग में प्रत्येक परिणाम सम संभव है। इसका मतलब है कि प्रत्येक परिणाम आने का संयोग समान है।

7.4.4 अभिप्रयोग और घनाएँ

ऊपर के प्रयोग में एक बार सिक्का उछालना या एक बार पासा फेंकने को यादृच्छिक प्रयोग कहते है।

पासा फेंकने के एक प्रयत्न पर ध्यान दीजिए।

ऊपरी सतह पर 5 अंक से अधिक आने के संभव परिणाम कितना होगा?

यह केवल एक है (अर्थात् 6)

ऊपरी सतह पर सम संख्या आने का संभव परिणाम कितना होगा?

वह 3 है (2,4, और 6).

इस प्रकार एक प्रयोग के प्रत्येक सुनिश्चित परिणाम या सुनिश्चित परिणामों के संग्रह से एक घटना बनती है?

ऊपर के प्रयत्न में 5 से अधिक अंक प्राप्त करना और ऊपरी संख्या का प्राप्त करना दो घटनाएँ है ध्यान दीजिए कि घटना का एक ही परिणाम होना आवश्यक नहीं है। लेकिन प्रयोग का परिणाम एक घटना ही होगी।

संयोग को प्रायिकता से जोडना

सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग पर ध्यान दीजिए। परिणाम क्या होगा? यहाँ दोही परिणाम है। चित या पट और दोनों ही परिणाम सम प्रायिकता है।

एक चित्त पाने का संयोग क्या है?

यह दो संभव परिणामों में से एक है। अर्थात् $\frac{1}{2}$ है इसे हम अन्य शब्दों में भी प्रकट कर सकते है।

जैसे जब एक सिक्के को तीन बार उछालते है तो एक चित आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$, है जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं कि.

$$\mathbf{P\ (H) = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ or } 50\%}$$

एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

अब आप एक पांसे को फेंकने का उदाहरण पर विचार कीजिए। एक बार फेंकने पर संभव परिणाम कितना होगा? यहाँ छः सम प्रायिक परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, या 6 है।

ऊपरी सतह पर विषम संख्या पाने की प्रायिकता क्या है? छः संभव परिणामों में तीन अनुकूल परिणाम 1, 3 या 5 होंगे।

अर्थात् छः में से तीन अनुकूल परिणाम होंगे जो कि $\frac{1}{3}$ या $\frac{1}{2}$ होगा।

एक घटना ‘A’ की प्रायिकता का सूत्र इस प्रकार लिखते है-

$$P(A) = \frac{\text{घटना A आने के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभावित कुल परिणामों की संख्या}}$$

7.4.5 प्रायिकता - एक सिद्धांत का अभिगम

हम निम्न स्थिति के बारे में सोचेंगे। मान लीजिए एक स्वच्छ और स्पष्ट सिक्का अर्थात् यह सममित है ताकि यहाँ कोई कारण नहीं बनता है वह उछालने के पश्चात किसी एक ओर पर दूसरी ओर से अधिक बार गिरता है। सिक्के के इस गुणधर्म को हम अनभिमत कहते है शब्दावली ‘‘यादृच्छिक रूप’’ का अर्थ है। सिक्के को किसी हस्तेक्षेप या त्रुटि के बिना, नीचे गिरना यहाँ हम सिक्के का एक कोर पर ठहरने की संभावना को रद्ध करते है जो संभव है जैसे प्रति सिक्के रेन पर गिरता है।

घटना A आने के अनुकूल परिणामों की संख्या
संभावित कुलसंभपरिणामों की

इस अध्याय में प्रायिकता का मूल तत्व जानते है के लिए हम मानते है कि सभी प्रयोग के समप्रायिक परिणाम रहते है अब हम जानते है कि घटना की प्रायोगिक अथवा अनुभाविक प्रायिकता।

$$P(E) = \frac{\text{परीक्षणों की संख्या जिसमें घटना विद्यमान है}}{\text{प्रयोग के संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

एक सैद्धान्तिक प्रायिकता (जिसे शास्त्रीय प्रायिकता भी कहते है) को हम P(T) से परिभाषित कर इस प्रकार लिख सकते है।

$$P(T) = \frac{T \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के संभावित परिणामों की कुल संख्या}}$$

जहाँ हम मानते है कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक है। सामान्यतः सैद्धांतिक प्रायिकता को हम शास्त्रीय प्रायिकता के रूप में उल्लेख करते है।

परस्पर अपवर्जी घटनाएँ

यदि एक सिक्का उछाला गया हम चित्त या पट प्राप्त करते है किंतु दोनों नहीं इसी तरह यदि उच्च विद्यालय के किसी एक विद्यार्थी का चयन किया गया तो वह 6, 7, 8, 9 और 10 वीं कक्षाओं में से किसी एक कक्षा का होगा, किंतु दो या अधिक कक्षाओं का नहीं हो सकता इन दोनों उदाहरणों में एक घटना का घटित होना, अन्य घटनाओं को घटित होने से रोकते है। ऐसी घटनाएँ परस्पर उपवर्जी घटनाएँ कहलाती है।

किसी प्रयोग के दो या अधिक घटनाएँ, जहाँ एक घटना का घटित होना, शेष सभी घटनाओं को घटित होने से रोकता है इन्हें परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती है। इस अध्याय में इसका विस्तृत रूप से चर्चा करेंगे।

प्रायिकता ज्ञात करना

घटनाओं की प्रायिकता हम कैसे ज्ञात करते है जो समप्रायिक है? मानलो कि सिक्के को उछालना यह घटना उस प्रयोग के साथ जुडी है। जहाँ समप्रायिक की अवधारणा सही है। आगे बढने के लिए हमें पता है कि प्रत्येक घटना में दो परिमआम संभव है यह परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहते है। हम कह सकते है कि एक सिक्का उछालने की घटना में प्रतिदर्श समष्टि {H, T} रहती है। थैली में से गेंद निकालने की घटना में प्रतिदर्श समष्टि{R, B, Y, W} है यदि थैली में लाल नीले पीले और सफेद गेंद रखे है। पांसे को फेंकने की घटना के लिए प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

अब हम समप्रायिक घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करने का प्रयत्न करते है। घटानाएँ परस्पर अपवर्जी है।

उदाहरण - 1 : यदि सिक्का 1 बार उछाला गया तो चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। पट आने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए।

हल: एक बार सिक्का उछालने के प्रयोग में

संभाव्य परिणामों की संख्या दो चित्त (H), और पट (T) है

माना कि चित्त आना घटना E है।

अर्थात् चित्त आना को अनुकूल परिणामों की संख्या है।

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों के संख्या}}{\text{संभाव्य परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

इसी तरह, यदि F पट आने की घटना है, तब

$$P(F) \;=\; \frac{1}{2}$$ (क्यों अनुमान लगाइए?)

उदाहरण 2: मान लीजिए एक पांसे को एक बार फेंकते है. i) संख्या 3 आने की प्रायिकता क्या होगी? ii) 3 के अलावा दूसरी संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

हल:(i) मानलो E ''संख्या 3आने की घटना है''

प्रयोग के संभावित परिणाम : 1, 2, 3, 4, 5, 6

संभावित परिणामों की संख्या = 6

अनुकूल परिणामों की संख्या E = 1 (i.e., 3)

इसलिए, $P(E) = P(3) = \frac{1}{6}$

(ii) मानलो F ''3 के अलावा दूसरी संख्या प्राप्त करने की घटना'' प्रयोग के संभावित परिणाम 1, 2, 4, 5, 6".

संभावित परिणाम: 1, 2, 3, 4, 5, 6

संभावित परिणामों की संख्या = 6

अनुकूल परिणाम F की संख्या = 5 (i.e., 1, 2, 4, 5, 6)

इसलिए $P(F) = \frac{5}{6}$

उदाहरण - 3 : एक थैली में लाल, नीले और पीले गेंद रखे है, सभी गेंद समान आकार के है। थैली में न देखते हुए इसमें सेएक गेंद मानसा ने उठा लिया। उसके द्वारा निकाला गया गेंद (i) पीला (ii) लाल (iii) नीला रहनी के प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: मानसा थैली में न देखते हुए गेंद बाहर निकालती है। इसलिए उसके द्वारा इसमें से कोई भी एक गेंद निकालना समप्रायिक है।

माना कि, घटना Y यह निकाला गया गेंद पीला है, घटना, B यह ''निकाला गया गेंद नीला होने की है। और घटना R यह निकाला गया गेंद लाल होने की है।

अब, सभी संभाषित परिणामों की संख्या = 3.

(i) घनटा Y की अनुकूल घटनाओं की संख्या = 1 इसलिए

$P(Y) = \frac{1}{3}$

उसी प्रकार, $P(R) = \frac{1}{3}$

और $P(B) = \frac{1}{3}$.

उदाहरण - 4 : एक अच्छी फेटी गई 100 पत्तों की गड्डी में से (1 से 100) तक हो तो (i) सम संख्या (ii) विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: (i) मानलो E सम संख्या प्राप्त करने की घटना है।

सम संख्या वाले कार्डों की संख्या = 50 {2, 4, 6, ... 100}

कुल अनुकूल परिणाम E = 50

कुल कार्डों की संख्या = 100

इसलिए, $P(E) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

(ii) मानलो F विषम संख्या प्राप्त करने की घटना है।

विषम संख्या वाले कार्डों की संख्या = 50 {1, 3, 5, ... 99}

इसलिए $P(F) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

टिप्पणी:

1. किसी प्रयोग में घटना जिसका केवल एक ही साधारण घटना कहलाती है। उदाहरण 1 तथा 2, घटनाओं में E तथा F साधारण घटना कहलाती है। उसी प्रकार उदाहरण 3 में सभी तीन घटनाएँ Y, B तथा R साधारण घटनाएँ है।

2. उदाहरण में हम ने देखा कि : $P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

   उदाहरण 2 में हम ने देखा कि : $P(Y) + P(R) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

   यदि हम सभी साधारण घटनाओं का योगफल ज्ञात करेंगे तो कुल 1 प्राप्त होगा।

पूरक घटनाएँ और प्रायिकता

$P(E) + P(\bar{E}) = 1$

यहाँ, F, E नहीं के समान है क्योंकि यहाँ केवल दो घटनाएँ है।

घटना 'E' नहीं को हम $\bar{E}$ द्वारा सूचित करते है। यह घटना E की पूरक घटना कहलाती है। इसलिए $P(E) + P(\text{not } \bar{E}) = 1$

अर्थात् $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, जो हमें देता है $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

सामान्यतः यह सही है कि घटना E के लिए $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक पांसे को एक बार फेंकने पर संख्या 5 प्राप्त करने की प्यायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक पांसे को एक बार उछाला जाता है। क्या संभावना है कि यह दिखाता है:
   (i) 7? (ii) 5 से कम ?
3. 0 और 20 के बीच एक पूर्णांक चुना जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह चुना गया पूर्णांक एक अभाज्य संख्या है?
4. एक बैग में 3 लाल और 3 सफेद गेंदें हैं। बैग को देखे बिना उसमें से एक गेंद निकाली जाती है। इस गेंद के (i) लाल रंग (ii) सफेद रंग के होने की प्रायिकता क्या है?

असंभव और निश्चित घटनाएँ

पांसे जिसके पृष्टों पर 1, 2, 3, 4, 5, 6. इस प्रकार अंकित किया है उसे उछालने के लिए इन अंशों को समझिए।

(i) पांसे को एक बार फेंकने पर 7 संख्या आने की प्रायकिता क्या होगी?

हम जानते है कि इस पांसे को एक बार फेंकने पर केवल 6 परिणाम रहते है। ये 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 है। क्योंकि पांसे पर 7, के अनुकूल कोई परिणाम नहीं है। अर्थात् इस तरह के परिणामों की संख्या शून्य है। अन्य शब्दों में पांसे को एक बार फेंकने पर, 7 के अनुकूल कोई परिणाम नहीं है, अर्थात् इस तरह के परिणामों की संख्या शून्य है। अन्य शब्दों में पांसे को एक बार फेंकने पर 7 आना असंभव है। इसलिए, $P(E) = \frac{0}{6} = 0$

अर्थात् घटना जो घटने में असंभव है की प्रायिकता शून्य होती है ऐसी घटना असंभव घटना कहलाती है।

(ii) पांसे को एक बार फेंकने पर 6 या 6 से कम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी? क्योंकि पांसे के प्रत्येक पृष्ट पर 6 या 6से कम संख्या अंकित है, इसलिए पांसे को एक बार फेंकने पर हमेशा हमें इससे से एक संख्या प्राप्त होगी, यह निश्चित है। अतः अनुकूल परिणामों की संख्या, सभी संभव परिणामों की संख्या के समान

होगी जो 6 है। मानलो E = (6 या 6 से कम संख्या प्राप्त होने की संभावना)

इसलिए, $P(E) = \frac{6}{6} = 1$

इसलिए घटना जो निश्चित है, कि प्रायिकता 1 होगी ऐसी घटना निश्चित घटना कहलाती है।

नोट : प्रायिकता P(E), के परिभाषा के अनुसार हम देखते है कि अंश (सभी संभव परिणामों की संख्या) हमेशा हर (सभी संभव परिणामों की संख्या) से कम रहती है। इसलिए, $\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$.

अपनी प्रगति जाँच कीजिए

1. एक पांसे को एक बार उछालने पर निम्न को प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी
   (a) सम संख्या (b) विषम संख्या (c) रूढी संख्या
2. ऊपरी प्रश्न में जाँच कीजिए : P(एक सम संख्या) + P(विषम संख्या) = 1
3. एक पांसे को ऊपर उछालने पर निम्न की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   (i) 4 से कम संख्या (ii) 4 के समान या उससे बडी संख्या
   (iii) संयुक्त संख्या (iv) संख्या जो संयुक्त नहीं है
4. यदि P(E) = 0.88, E नहीं की प्रायिकता क्या होगी?
5. यदि P(E) = 0, हो तो P(E नहीं). ज्ञात कीजिए।
6. एक थैले में 15 सफेद बॉल और 10 नीले बॉल में से एक बॉल निकालने पर निम्न की प्रायिकता क्या होगी?
   (i) पीले रंग का बॉल न हो (ii) सफेद रंग का बॉल न हो
7. एक थैले में 3 लाल, 4 हरे तथा 2 नीले रंग की गोलियाँ है। यदि थैले में से मुक्त रूप में एक गोली निकाली गई तो निम्न की प्रायिकता क्या होगी।
   (i) हरा न हो? (ii) लाल न हो? (iii) नीला न हो?
8. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर सभी संभावित परिणामों को लिखिए। एक पर चित्त तथा दूसरे पर पट की प्रायिकता क्या होगी?
9. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर दोनों पर पट आने की प्रायिकता क्या होगी?
10. दो पांसो को एक साथ उछालने पर उन पर आने वाली संख्या का योगफल निम्न प्रकार से प्राप्त करने की प्रायिकता क्या होगी?
    (i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 (v) 12

अभ्यास

1. निम्न कथन सत्य है या नहीं असत्य बताइए।

   (a) एक घटना की प्रायिकता 1.01 होगी।

   (b) यदि $P(E) = 0.08$, हो तो $P(E)= 0.02$

   (c) असंभव घटनाओं की प्रायिकता 1 होती है

   (d) घटना E के लिए, $0 \leq P(E) \leq 1$

   (e) $P(E) = 1 + P(E)$

2. 100 से 200 तक की संख्या वाले कोई एक बक्से में है सम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

3. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर कम से कम एक चित आने की प्रायिकता क्या होगी?

4. यदि $P(E) = 0.05$, हो तो ''E नहीं'' की प्रायिकता क्या होगी?

5. एक थैले में निंबु स्वाद वाले कैंडियाँ है? उनमें से रामू एक कैंडी निकालता है तो निम्न की प्रायिकता क्या होगी?

   (i) संतरे के स्वा वाली कैंडी (ii) निंबू स्वा वादी कैंडी?

6. एक समूह में 3 विद्यार्थी है उनमें से 2 दियार्थीयों का जन्मदिवस भिन्न रहने की प्रायिकता 0.992. है तो 2 विद्यार्थीयों का जन्मदिवस एक रहने की प्रायिकता क्या होगी?

7. एक पांसे को एक बार फेंका गया तो

   (i) रूढी संख्या

   (ii) 2 और 6 के बीच की संख्या

   (iii) विषम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?

8. एक बक्से में 1 से 100 तक के कार्डों में से रूढी संख्याओं की प्रायिकता क्या होगी?

9. एक पांसे को दो बार उछाला गया उन पर आने वाली संख्याओं को नोठ किया गया तो दोनों संख्याओं के योग की प्रायिकता क्या होगी?

   (i) 12 से बडा? (ii) 12 से कम?

   (iii) 11 से बड? (iv) 2 से बड?

10. एक थैले में 15 लाल बॉल तथा कुछ हरे बॉल है यदि हरे बॉलो की प्रायिकता $\frac{1}{6}$, हो तो हरे बालों की संख्या ज्ञात कीजिए।

11. एक थैली में 3 लाल गेंद और 5 काले गेंद है। थैली में से एक गेंद इच्छानुसार निकाला गया वह निकाला गया गेंदे (i) लाल ? (ii) लाल न होने की प्रायिकता क्या होगी?

12. एक बक्से में 5 लाल, 8 सफेद और 4 हरी गोलियाँ रखी है। बक्से में से इच्छानुसार एक गोली निकाली गई। निकाली हुई गोली (i) लाल? (ii) सफेद? (iii) हरी न होने की प्रायिकता क्या होगी?

13. एक किडी बैंक में 50 पैसे के 100 सिक्के रू.1 के 50सिक्के रू. 20 सिक्के और रू. 5 के सिक्के 10 है। यदि यह समप्रायिक है कि जब किडी बैंक का ऊपरी भाग नीचे की ओर हो जाए तब इसमें से एक सिक्का नीचे गिरता है। यह सिक्का (i) 50 पैसे का (ii) रू. 5 का न होने की प्रायिकता क्या होगी?

14. 20 बल्व के समूह में 4 त्रुटियुक्त है। इस समूह में ऐच्छिक रूप से एक बल्ब निकाला गया। यह बल्ब त्रुटियुक्त होने की प्रायिकता क्या होगी? मान लीजिए इसके पूर्व निकाला गया त्रुटिपूर्ण न हो और वह वापस नहीं रखा। पुनः शेष समूह से एक बल्ब ऐच्छिक रूप से निकाला गया तो वह बल्ब त्रुटियुक्त न रहने की प्रायिकता क्या होगी?

15. एक बक्से में 1 से 90 तक अंकित 90 कार्ड रखे गए है इसमें से एक कार्ड निकाला गया तो उस पर अंकित संख्या (i) दो अंको की संख्या (ii) पूर्ण वर्ग संख्या (iii) 5 से निः शेष भाग जाने वाली संख्या रहने की प्रायिकता क्या होगी?

16. अखिला उसके अक्वेरियम के लिए एक मछली खरीदती है। दुकानदार टंकी में से 5 नर मछलियाँ और 8 मादा मछलियाँ है उनमें से एक मछली निकाली गयी तो नर मछली रहने की प्रायिकता क्या होगी?

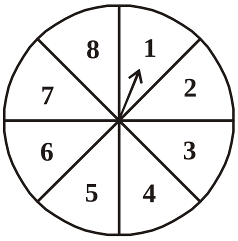
17. एक जुए के खेल में घूमता हुआ तीर हैं जो (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (चित्र देखिए), संख्याओं में से एक की ओर दिशानिर्दिष्ट करते हुए विरामावस्था में आता है। इसके परिणाम समप्रायिक है तो वह तीर

(i) 8 ?

(ii) विषम संख्या ?

(iii) 2 से बडी संख्या?

(iv) 9 से कम की संख्या के ओर अभिमुख होने की प्रायिकता क्या होगी?



अभ्यास

- एक यादृच्छिक प्रयोग वह होता है जिसमें एक से अधिक परिणामों की संभावना होती है और उसका सही अनुमान प्रयोग से पहले नही लगा सकते।
- एक या अधिक परिणाम घटना बनाते है।
- घटना जिसका केवल एक परिणाम रहता है। प्रारंभिक घटना कहलाता है।
- किसी घटना E के सिद्धांत की प्रायिकता जो P(E), के रूप में लिखते है, तथा उसे इस प्रकार परिभाषित करते है।

  $$P(E) = \frac{\text{परीक्षणों की संख्या जिसके घटना घटती है}}{\text{कुल परीक्षणों की संख्या}}$$

  जहाँ हम मानते है कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक होते है।
- $0 \leq P(E) \leq 1.$
- यदि $P(E) = 0$, E हो तो, उसे असंभव घटना कहते है यदि $P(E) = 1$, E हो तो उसे निश्चित घटना कहते है।
- सभी प्राथमिक प्रायिकताओं का योग होता है।
- किसी भी घटना E के लिए $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, जहाँ $\overline{E}$ का अर्थ E नहीं। E और $\overline{E}$ पूरक घटनाएँ कहलाती है।